

الباب الثامن

خواص المصفوفات

Properties of Matrices

المصفوفات: هي مجموعة من الأرقام بترتيب له دلالة معينة مكتوبة على شكل مستطيل داخل قوسين

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ 11 & 12 & 13 \\ a & a & a \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

في شكل (١) يسمى هذا الشكل المصفوفة وتسمى الأرقام a, b, c, d عناصر المصفوفة (elements) والخطوط الأفقية تسمى المصفوفة الموجبة (rows or row vectors) والخطوط الرأسية تسمى الأعمدة الموجبة (columns or column vectors)

المصفوفات ذات m صفوف ، n أعمدة يطلق عليها matrix ($m \times n$)

$(m \text{ by } n)$ matrices or A or (a_{ij}) . يعبر عن المصفوفة السابقة بـ a_{ij} حيث هو العنصر العام الموجود في الصف رقم i والعمود j في شكل (٢) يحتوي على عمود واحد فقط يسمى (column vector or

column matrix) . في شكل (٣) يحتوي على صف واحد فقط ويسمى

(row vector or row matrix) .

المصفوفة المربعة Square matrix

هي المصفوفة التي عدد أعمدها يساوي عدد صفوفها ورتبة المصفوفة هو عدد الصفوف أو الأعمدة .

ويسمى $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm})$ القطر الرئيسي (principle diagonal) .

تعريف : تساوي مصفوفتين Equation of matrices

يكون $A = B$ أي $(a_{ij}) = (b_{ij})$ إذا كان A, B لهما نفس عدد الصفوف وعدد الأعمدة .

وكان $a_{jk} = b_{jk}$ for $j = 1, 2, 3, \dots, m, k = 1, 2, 3, \dots, n$

جمع المصفوفات Addition of matrices

جميع المصفوفات يعرف فقط للمصفوفات التي لها نفس عدد الصفوف ونفس عدد الأعمدة فإذا كان

$$A = (a_{jk}), B = (b_{jk}), C = (C_{jk})$$

وكان كل من المصفوفات A, B, C matrix $(m \times n)$

$$C_{jk} = a_{jk} + b_{jk} \text{ for } j = 1, 2, 3, \dots, m, k = 1, 2, 3, \dots, n$$

فإنه يمكن كتابة $C = A + B$

لاحظ أننا نحصل $A + B$ بجمع العناصر المناظرة للمصفوفين A, B

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

المصفوفة الصفرية Zero matrix

هي مصفوفة كل عناصرها تساوي صفر

$$a_{ij} = 0(0, 0, 0), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تعريف :

يرمز بها بالرمز $-A$ وهي مصفوفة نحصل عليها من ضرب كل عنصر من عناصر A في (-1) أي

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow -(A) = (-a_{ij})$$

وتسمى المصفوفة $-A$ المعكوس الجمعي للمصفوفة A .

من التعريفات السابقة نجد أن خواص جمع المصفوفات لها نفس خواص جمع الأعداد

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$

$$A + 0 = A$$

$$A + (-A) = 0$$

طرح المصفوفات difference of two matrices

إذا كان $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $D = (d_{ij})$

وكان كل من المصفوفات الثلاث ذات نظم $(m \times n)$ matrix

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, m$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

فإنه يمكن كتابة $D = A - B$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

ضرب المصفوفة في عنصر

ليكن A مصفوفة وليكن العدد λ فيكون

$$\lambda A = A \lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$ijA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A + A2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Transpose of a matrix A^T المصفوفة المبدولة

إذا كان $A = (a_{ij})$ matrix $(m \times n)$ فإن A^T ($n \times m$ matrix)

$$A^T = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{m2} \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المتماثلة والمتماثلة عكسيا

Symmetric and skew symmetric matrices

يقال للمصفوفة المربعة $A = (a_{ij})$ إنها متماثلة symmetric إذا كان $A^T = A$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad , \quad \text{for} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

ويقال للمصفوفة المربعة $A = (a_{ij})$ إنها skew symmetric إذا كان $A^T = -A$

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad , \quad \text{for} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 \\ -3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \\ -8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

مصفوفة متماثلة عكسيا Skew symmetric matrix

المصفوفة المثلثية Triangular matrix

المصفوفة المربعة $A = (a_{ij})$ التي عناصرها أعلى القطر الرئيسي أو أسفله كلها أصفارا .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

مصفوفة مثلثية عليا

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

مصفوفة مثلثية سفلى

The diagonal matrix

المصفوفة القطرية

المصفوفة المربعة $A = (a_{ij})$ التي عناصرها أعلى القطر، أسفل القطر كلها تساوي أصفارا تسمى diagonal matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$I \equiv$ the unit matrix

مصفوفة الوحدة

$$I, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة قطرية كل عناصر قطرها تساوي الوحدة .

Multiplication of Matrices ضرب المصفوفات

لدينا مصفوفات $B = [b_{jk}]$, $A = [a_{ij}]$

تعرف عملية الضرب AB بشرط معين لابد من توافره وهو "عدد أعمدة المصفوفة الأولى A يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية B ".

لذلك نفرض أن المصفوفة A من نوع $m \times n$ وعليه، لكي يتحقق الشرط المذكور يجب أن تكون عدد الصفوف في B مساوية العدد n (عند الأعمدة في A) أي أن المصفوفة B من نوع $n \times p$.

بالنسبة للمصفوفة $A = [a_{ij}]$ وهي من نوع $m \times n$ نجد أن
 $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$

أما بالنسبة للمصفوفة $B = [b_{jk}]$ وهي من نوع $n \times p$ نجد أن
 $j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, p$

تعرف المصفوفة AB بالمصفوفة $C = [c_{ik}]$

$$C_{ik} = a_{i1} \times b_{1k} + a_{i2} \times b_{2k} + \dots + a_{in} \times b_{nk}$$

هذا العنصر يقع في الصف i والعمود k في المصفوفة C .

$$\begin{array}{ccc} A & B & = & B \\ m \times n & \leftrightarrow & n \times p & \quad m \times p \\ \downarrow & & \downarrow & \\ & & & \text{عدد الصفوف في } B \text{ عدد الأعمدة في } A \end{array}$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 19 & 22 \end{pmatrix}$$

خواص ضرب المصفوفات

Properties of Matrices Multiplication

أولاً :

ضرب المصفوفات خاضع لقوانين التنسيق (Associated laws) وقوانين التوزيع

(distributive laws) بالنسبة لجمع المصفوفات

$$(i) (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$

$$(ii) (A+B)C = AC + BC$$

$$C(A+B) = CA + CB$$

مع مراعاة أن عملية الضرب ممكنة .

ثانياً :

هل حاصل ضرب المصفوفات إبدالي أو بعبارة أخرى

$AB = BA$ بالطبع لا لأسباب كثيرة .

١- ليس من الممكن أن تكون AB ، BA في الوقت نفسه فمثلاً

إذا كانت A من نوع 2×3 ، B من نوع 3×5 فإنه يمكن تكوين

AB ، لا يمكن تكوين BA .

٢- حتى في الحالات التي يمكن تكوين فيها AB ، BA فليس من

الضروري أن يكون AB ، BA من نفس النوع .

٣- أيضاً إذا أمكن تكوين المصفوفين AB ، BA وكأنا من

نفس النوع عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \& \\
&\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ثالثا: The cancellation low

غير صحيح على العموم

أي أنه إذا كان $AB = 0$ فإنه ليس من الضروري أن تكون A أو B مساوية للمصفوفة الصفرية .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

رابعا :

لأي مصفوفة مربعة A من نوع $n \times n$

$$AI = A , IA = A$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة من نفس النوع .

خامسا :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

القوى الصحيحة الموجبة للمصفوفة المربعة

نفرض أنه لدينا مصفوفة مربعة A . تعرف المصفوفة A^2 هكذا

$$A^2 = A.A , A^3 = A^2 A = (A.A).A \quad \text{وهكذا}$$

قاعدة لأي مصفوفة مربعة A

$$A^m . A^n = A^{m+n} = A^n . A^m$$

$$(A^m)^n = A^{mn}$$

$$A^2.A^3 = A^5 \quad , \quad (A^2)^3 = A^6$$

فمثلاً : القوى الصحيحة السالبة للمصفوفة (غير المنعزلة)

يقال للمصفوفة المربعة A إنها مصفوفة غير منعزلة

(non – singular matrix) إذا كان محددًا

$$\det A = |A| \neq 0$$

أما إذا كان $|A| = 0$ تسمى منعزلة (singular matrix)

لتعريف المصفوفة A^{-1} يلزمنا التعريف الآتي :

المصفوفة المرتبطة adjoint matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ولنفرض أن A_{ij} يرمز للعامل المرافق (co-factor) للعنصر a_{ij} في المحدد $|A|$. تكون مصفوفة أخرى تعتمد عناصرها على هذه العوامل المرافقة هكذا .

١- يستبدل كل عنصر بالعامل المرافق له .

٢- نوجد محور المصفوفة (transpose) وذلك بجعل المصفوفة أعمدة

تسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة المرتبطة للمصفوفة A ويرمز لها

بالرمز a_{dj} (وهذا الرمز هو اختصار adjoint of A)

تعريف :

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت هناك مصفوفة B بحيث يكون

$AB = I = BA$ حيث I هي وحدة المصفوفات يقال للمصفوفة B إنها

معكوس للمصفوفة A .

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A^{-1}$$

٢- معكوس أي مصفوفة مربعة A_i (في حالة وجوده) وحيد .

٣- الشرط اللازم والكافي لكي يوجد للمصفوفة المربعة معكوس أن تكون غير منعزلة $|A| \neq 0$

٤- معكوس حاصل ضرب مصفوفتين هو حاصل ضرب معكوس المصفوفتين بالترتيب المخالف $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

مثال:

$$\text{إذا كان } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ أوجد قيمة } A^{-1}$$

$$|A| = 14, \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال:

$$\text{إذا كان } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ أوجد } A^{-1} \text{ ثم حقق أن}$$

$$A A^{-1} = I = A^{-1} A$$

لحساب A^{-1} نتأكد أولاً أن A مصفوفة غير منعزلة ($|A| \neq 0$)

$$|A| = -12 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-12} \text{adj}A = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -2 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -2 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

قاعدة :

إيجاد معكوس المصفوفة التي من نوع $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

١- نستبدل عنصرى القطر الرئيسى (وهما a, d) أى كل منهما يحب مكان الآخر

٢- نغير إشارتي العنصرين الآخرين وهما b, c

٣- نقسم عناصر المصفوفة الناتجة على قيمة محددة A

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 7, A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

حل المعادلات الآتية باستخدام معكوس المصفوفة A^{-1}

لتكن المعادلات الآتية

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

أو بالاختصار $A X = b$ (1)

حيث

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

فإنه يمكن إثبات أن حل كل من المعادلات (١) هو

$$\underline{X} = A^{-1} \underline{b}$$

البرهان :

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \Rightarrow$$

$$I\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \quad (A^{-1}A = I)$$

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \quad (I\underline{x} = \underline{x})$$

مثال:

حل المعادلتين الآتيتين باستخدام معكوس المصفوفة

$$3x_1 - 2x_2 = 4$$

$$X_1 + 4x_2 = 6$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \underline{x} = A^{-1}\underline{b} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 28 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

فيكون حل المعادلتين هو $x_1 = 2, x_2 = 1$

مثال:

باستخدام معكوس المصفوفة أوجد حل المعادلات :

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -3$$

يمكن كتابة المعادلات الثلاث على الصورة :

$$\text{أو } Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 13 & 3 & -17 \\ 2 & 4 & 8 \\ 11 & -1 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = x = A^{-1}b = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 13 & 3 & -17 \\ 2 & 4 & 8 \\ 11 & -1 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = -1$$

المعادلة المميزة للمصفوفة (المربعة)

Characteristic Equation for the matrices

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ فاثبت أن $A^2 - 5A - 6I = 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 60 \\ 5 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 - 5A - 6I &= \begin{pmatrix} 16 & 60 \\ 5 & 21 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16-10-6 & 60-60 \\ 5-5-6 & 21-15-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

والآن تكون المصفوفة $A - \lambda I$ (حيث I مصفوفة الوحدة 2×2) ثم

يكون محدد هذه المصفوفة كما يلي :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 12 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 12$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 6 \dots \dots \dots (1)$$

تسمى كثيرة الحدود هذه بكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة .

Characteristic polynomial $|A - \lambda I| = D(\lambda) = \det(\lambda)$

كما تسمى المعادلة الناتج

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

بالمعادلة المميزة للمصفوفة characteristic equation of matrix

وتسمى جذور هذه المعادلة بالجذور المميزة للمصفوفة

Characteristic roots – eigen values $|\lambda - AI| = 0$

وبمقارنة (1) & (3) نلاحظ أنه يمكن الحصول على المعادلة (1) من

المعادلة (3) بوضع A بدلا من λ بوضع $6I$ بدلا من 6 . ويقال

إن المصفوفة A تحقق المعادلة المميزة لها .

نظرية كايلى هاملتون:

كل مصفوفة مربعة A تحقق المعادلة المميزة لها .

نتيجة :

إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ هي الجذور المميزة للمصفوفة A يمكن كتابتها

على الصورة

$$(-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

نظرية كايلى هاملتون Kayli Hamelton

تأخذ الصورة

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0$$

أو

$$\prod_{r=1}^n (A - \lambda_r I) = 0$$

ملحوظة :

يجب أن يلاحظ في (4) أن

$$A - \lambda_r I \neq 0 ; r = 1, 2, \dots, n$$

وذلك لأن في جبر المصفوفات $AB = 0$ لا تعني أن
 $B = 0$ أو $A = 0$

مثال:

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ فأوجد:

- (i) كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة A والمعادلة المميزة لها .
(ii) الجذور المميزة للمصفوفة A وحقق نظرية كايلى - هاملتون .

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

المعادلة المميزة للمصفوفة هي (٢) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

لإيجاد الجذور المميزة نلاحظ $\lambda - 1$ احد العوامل للعدد يحقق المعادلة

معنى ذلك $(\lambda - 1)$ عامل للطرف الأيسر من المعادلة

$$\lambda^3 - \lambda - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + a\lambda - 6)$$

بمقارنة معامل λ^2 في الطرفين نجد أن

$$-1 + a = -2 \quad \& \quad a = -1$$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (2) على الصورة

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0, (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -2$$

وبالنسبة لتحقيق نظرية كايلى هاملتون أي أن

$$A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = 0$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = Aa^2 \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 17 \\ 13 & 4 & 11 \\ 13 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^3 = 1A^2 - 5A \begin{pmatrix} 14 & -4 & 17 \\ 13 & 4 & 11 \\ 13 & 11 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 06 I$$

تمرين:

اثبت أن

$$A^4 = 9A^2 + 4A - 12I$$

مثال:

إذا كانت A هي المصفوفة المذكورة في مثال: (1)، (n) عدد صحيح موجب فاثبت أن

$$30A^n = (5\alpha - 2\beta)A^2(8\beta - 5\alpha)A = 6(5 - \beta)I$$

حيث

$$\alpha = 3^n - 1, \quad \beta = 3^n - (-2)^n$$

الحل:

الجزور المميزة هي 1, 3, -2 فتكون كثيرة الحدود المميزة لها هي

$$-(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

إيجاد $30A^n$ كتعبير خطي بدلالة A^2, A, I نتبع الخطوات الآتية:

١- نقسم $30\lambda^n$ على كثيرة الحدود ولنفرض أن خارج القسمة هو

$p(\lambda)$ الباقي سيكون من الدرجة الثانية في λ (لاحظ أن المقسوم عليه

من الدرجة الثالثة) وليكن الباقي $a\lambda^2 + b\lambda + 2$

٢- يمكن كتابة العلاقة

$$30\lambda^n = P(\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

٣- نضع A بدلا من λ

$$\begin{aligned} 30A^n &= P(A)(A - I)(A - 3I)(A - 2I) + A^2 + bA + cI \\ &= P(A)x0 + aA^2 + bA + cI \end{aligned}$$

وذلك من نظرية كايلى هاملتون أي أن

$$30A^n = aA^2 + bA + cI$$

٤- لإيجاد الثوابت a, b, c بالتعويض عن λ بالقيم $1, 3, -2$ وهي الجذور المميزة .

$$\left. \begin{aligned} 30 &= a + b + c \\ 8a + 2b &= 30(3^n - 1) \end{aligned} \right\}$$

$$30(3)^n = 9a + 3b + c$$

$$\left. \begin{aligned} 30(-2)^n - 4a - 2b + c &= 5a + 5b = 30(3^n(-2)^n) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 4a + b &= 15\alpha \\ a + b &= 6\beta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a + 5\alpha - 2\beta, b &= 8\beta - 5\alpha \end{aligned}$$

$$c = 30 - a - b = 30 - 6\beta \Rightarrow$$

بالتعويض عن a, b, c نحصل على

$$30A^n = (5\alpha - 2\beta)A^2 + (8\beta - 5\alpha)A + 6(5 - \beta)I$$

مثال:

مصفوفة مربعة من نوع 3×3 جذورها المميزة $0, 1, 2$ اثبت أن

$$A^n = (2^{n-1} - 1)A^2 + (2 - 2^{n-1})A$$

حيث إن الجذور المميزة للمصفوفة هي $0, 1, 2$ فتكون كثيرة الحدود

هي

$$-(\lambda - 0)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

باتباع الخطوات السابقة في المثال السابق:

$$\lambda^n = P(\lambda).\lambda(\lambda - 1)(-2) + a\lambda^2 = b\lambda + c \quad (1)$$

$$A^n = 0 \quad +a\lambda^2 + b\lambda + cI$$

لإيجاد a, b, c تعوض في (١) عن λ بالقيم $2, 1, 0$ نحصل على

$$0 = c$$

$$1 a + b + c$$

$$2^n = 4 a + 2 b + c$$

$$a = 2^{n-1} - 1, \quad b = 2 - 2^{n-1}$$

$$A^n = (2^{n-1} - 1) A^2 + (2 - 2^{n-1}) A$$

Eigen vectors المتجهات المميزة للمصفوفة

ليكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة معلومة من نوع $n \times n$ وليكن $Ax = \lambda x$ معادلة موجهة تمثل n معادلة x هي مصفوفة عمود غير صفري من نوع $n \times 1$

$$Ax - \lambda x = Ax - \lambda Ix = 0 \quad A - \lambda Ix = 0 \quad (1)$$

إذا كانت x هي (x_1, x_2, \dots, x_n) فإن المعادلة (١) تكتب على الصورة .

$$Ax = \lambda x$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nm} - \lambda)x_n = 0$$

$$(A - \lambda I)X = 0$$

لنعتبر الحالتين الآتيتين

$$a - |A - \lambda I| \neq 0$$

في هذه الحالة نجد مباشرة باستخدام قاعدة كرام لحل المعادلات الخطية أن

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0$$

وهذا يعطينا $x = 0$ وهو الحل التافه

في هذه الحالة يوجد حل آخر غير $x = 0$ لكن $|A - \lambda I| = 0$ هي المعادلة المميزة للمصفوفة A ، λ يمكن أن تأخذ قيمة أي واحد من الجذور المميزة للمصفوفة.

لنفرض أن λ هي إحدى هذه الجذور. لهذه القيمة تتحقق المعادلة (1)، (2) وعلينا أن نبحث عن حل غير الحل التافه للمعادلة المصفوفة.

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ويطلق على الموجهات \underline{x} المناظرة لقيم λ eigen vectors
مثال:

أوجد القيم الذاتية والموجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$$

فتكون الجذور هي

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6$$

$$\lambda_1 = 6$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-X_1 + 4X_2 = 0$$

$$X_1 + 4X_2 = 0$$

$$X_1 = 4X_2 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4X_1 + 4X_2 = 0$$

$$X_1 + X_2 = 0$$

$$X_1 - X_2 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مثال:

أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال:

أوجد القيم الذاتية والموجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال:

أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

المعادلة المميزة للمصفوفة

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 0$$

$$X_1 + 0 \cdot X_2 + X_3 = 0$$

$$\frac{X_1}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_2}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_3}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{X_1}{-2} = \frac{X_2}{-2} = \frac{X_3}{-2} \Rightarrow$$

$$\frac{X_1}{-1} = \frac{X_2}{1} = \frac{X_3}{1} = a \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 0$$

$$X_1 - 3X_2 + X_3 = 0$$

$$\frac{X_1}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_2}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_3}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{X_1}{-11} = \frac{X_2}{-1} = \frac{X_3}{14} = -b \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 6 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$$

حيث a, b, c ثوابت اختيارية