الباب الحادى عشر

امتحانات متنوعة وإجاباتها النموذجية

جامعة قناة السويس
الفرقة :إعدادي
كلية هندسة البترول والتعدين
الزمن : ساعة ونصف   قسم العلوم والرياضيات الهندسية
المادة : جبر

امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني ٢٠٠٥-٢٠٠٦

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ) أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة

$$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$$

ب) باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}$$

ج) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن:

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}==\frac{n}{2(n+2)}$$

د) أوجد $f(x)=3x^3-4x^2+2x+6$ على **(x – 1) (x + 1)** خارج قسمة المقدار

السؤال الثاني: أ) استخدم طريقة الوضع الزائف لتعيين حلول تقريبية للمعادلة:

$$F(x) = x^2 + x - 1 = 0$$

القريب من النقطة x=1.

ب) حل المعادلة $x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$

ج) حل المعادلة $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0$

د) أوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك المقدار $(1 + 3x)^{-5}$

السؤال الثالث: أ) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربـــة أو متباعـــدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

ج) أوجد المعكوس A^{-1} **للمصفوفة** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

د) باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجـــد الجـــذر الحقيقـــي للمقدار $3x^3 + x^2 - 11x + 6 = 0$

مع تمنياتي بالنجاح د/ عادل نسيم

جامعة قناة السويس
كلية هندسة البترول والتعدين
قسم العلوم والرياضيات الهندسية

الفرقة :إعدادي
الزمن : ساعة ونصف
المادة : جبر

تخلفات
امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني ٢٠٠٥-٢٠٠٦
تاريخ الامتحان ٢٤/ ٥/٢٠٠٦

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ) باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}$$

ب) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن: $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1)$

ج) أوجد $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ **على (x-2) .**
خارج قسمة المقدار

د) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 1$$

السؤال الثاني: أ) استخدم طريقة نيوتن لتعيين حلول تقريبية للمعادلة التالية

$$F(x) = x^3 + x - 1$$

ب) حل المعادلة $x^3 - 9x + 28 = 0$

ج) حل المعادلة $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0$

د) أوجد مفكوك المقدار $(1-2x)^6$

السؤال الثالث: أ) اختبر المتتابعة التالية من حيث التقـــارب والتباعــد:

$$\{Z_n\} = 1 + \frac{2}{n}$$

ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونـها متقاربة أو متباعدة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

ج) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

مع تمنياتي بالنجاح **د/ عادل نسيم**

* * *

جامعة قناة السويس
الفرقة : إعدادي
كلية هندسة البترول والتعدين
الزمن : ساعة ونصف
قسم العلوم والرياضيات الهندسية
المادة : جبر

تخلفات

امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني ٢٠٠٦-٢٠٠٧

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار "٢"عن جذور المعادلة

$$F(X) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

ب) باستخدام الكسور الجزئية حلل الجذر الآتي:

$$\frac{2x+3}{x^2 - 2x - 3}$$

ج) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن :

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots\dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x + 5$ على (2x-1)

د) أوجد خارج قسمة المقدار

لسؤال الثاني : أ) استخدم طريقة الوضع الزائف لتعيين حلول تقريبية للمعادلة

$$F(X) = x^2 + x + 1 = 0$$

القريب من النقطة : x=1

ب) حل المعادلة

$$x^3 - 9x + 28 = 0$$

ج) حل المعادلة

$$x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0$$

د) أوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك المقدار

$$(x+7)^{-2/3}$$

السؤال الثالث: أ) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$$

ج) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

د) باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجد الجذر الحقيقي للمقدار

3x3+x2-11x+6=0

مع تمنياتي بالنجاح د/ عادل نسيم

❊ ❊ ❊

جامعة قناة السويس
الفرقة:إعدادي
كلية هندسة البترول والتعدين
الزمن: ساعة ونصف
قسم العلوم والرياضيات الهندسية
المادة: جبر

امتحان نهاية التيرم الثاني ٢٠٠٨/٢٠٠٧

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ): أوجد خارج قسمة المقدار $f(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 + 6x + 13$ على $(x-2)(x-1)$

ب) أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة:

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

ج) باستخدام الثلاث طرق أوجد مجموعة الحلول التقريبية لإيجاد الجذور الحقيقية للمسائل التالية:

$$f(x) = x^3 - 5x + 3$$

د) حل المعادلة $x^3 + 6x^2 + 9x + 3 = 0,$

السؤال الثاني: أ) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

ب) باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي: $\dfrac{x^2 + 15}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)}$

ج) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة : $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^2}$

د) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة: $A=\begin{pmatrix}6 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$

السؤال الثالث: أ) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\4 & 2\end{pmatrix}$

ب) أوجد قيمة

$\sqrt[3]{211}$

مقربا الجواب إلى ثلاثة أرقام عشرية باستخدام نظرية ذات الحدين واستنتج أكبر قيمة للخطأ.

ج) أوجد مفكوك $\dfrac{1}{3-5x}$ ومتى يكون هذا المفكوك صحيحا.

مع تمنياتي بالنجاح **أستاذ المادة : د/ عادل نسيم**

E-Mail: adel.nasim@yahoo.com

كلية هندسة البترول والتعدين
الزمن : ساعة ونصف
جامعة قناة السويس
الفرقة :إعدادي
قسم العلوم والرياضيات الهندسية **تخلفات**
المادة : جبر

امتحان نهاية التيرم الثاني ٢٠٠٨/٢٠٠٧

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أ) أوجد خارج قسمة المقدار $f(x)=3x^3-4x^2+2x+6$ على $(x+1)(x-1)$

ب) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة:

$$f(x)=x^4+6x^3+12x^2+11x+1$$

ج) استخدم طريقة نيوتن لتعيين حلول تقريبية للمعادلة التالية $F(x)=x^3+x-1$

د) أوجد الحل الحقيقي للمعادلة الآتية باستخدام طريقة الوضع الزائف $x^4=3,$

السؤال الثاني: أ) حل المعادلة $x^3-15x^2-33x+847$

ب) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت

$$1\times2+2\times3+........+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

ج) باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي: $\dfrac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}$

د) اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$ من حيث كونها متقاربة أو متباعدة.

السؤال الثالث: أ) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

ب) أوجد مفكوك المقدار $(2-3x)^5$

ج) أوجد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[3]{\dfrac{20}{9}}$ مقربا إلى أقرب أربعة أرقام عشرية صحيحة ثم أوجد قيمة الخطأ.

$A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

ب) أوجد قيمة $\sqrt[3]{211}^{\,1/3}$ مقربا الجواب إلى ثلاثة أرقام عشرية باستخدام نظرية ذات الحدين واستنتج أكبر قيمة للخطأ.

ج) أوجد مفكوك $\dfrac{1}{3-5x}$ ومتى يكون هذا المفكوك صحيحا.

مع تمنياتي بالنجاح **أستاذ المادة : د/ عادل نسيم**

E-Mail: adel.nasim@yahoo.com

إجابة امتحان الجبر ٢٠٠٦/٢٠٠٥

السؤال الأول :

(أ) أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار 2 عند جذور المعادلة

$F(X) = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$

الحل:

باستخدام القسمة على $(X-2)$ نوجد المطلوب

2	2	-3	4	-5	6	
		4	2	12	14	
2	2	1	6	7	20	$= R_1$
		4	10	32		
2	2	5	16	39 $= R_2$		
		4	18			
2	2	9	34 $= R_3$			
		4				
2	2	13 $= R_2$				
	2 $= Qn$					

$\therefore \ 9(y) = 2y^4 + 13y^3 + 34y^2 + 39y + 20$

وبوضـــع $\leftarrow \quad y = (X-2)$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة

$F(X) = 2(X-2)^4 + 13(X-2)^3 + 34(X-2)^2 + 39(X-2) + 20$

(ب) باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي $\dfrac{5X+2}{(X+2)(3X+2)}$

الحل:

$$\frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)} = \frac{a}{(X+2)} + \frac{b}{(3X+2)}$$

وبضرب طرفي المعادلة في $(X+2)(3X+2)$

$$5X+2=(3X+2)\,a+(X+2)\,b$$
$$5X+2=3aX+2\,a+bX+2\,b$$
$$5X+2=(3a+b)\,X+2(a+b)$$

وبمقارنة الطرفين

$$5 = 3\,a + b$$
$$1 = a + b$$
$$4 = 2\,a \quad\Rightarrow\quad a=2 \quad , \quad b=-1$$
$$\therefore \frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)}=\frac{2}{(X+2)}+\frac{1}{(3X+2)}$$

(ج) باستخدام الاستنتاج الرياضي اثبت أن

$$\frac{1}{2X3}+\frac{1}{3X4}+....+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$$

الحل:

at $n=1$, $L.H.S=\frac{1}{2X3}=\frac{1}{6},\quad R.H.S=\frac{1}{2(3)}=\frac{1}{6}$

نفرض صحة العلاقة عند $n=k$

$$\therefore \frac{1}{2X3}+\frac{1}{3X4}+....+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{2(k+2)}$$

ونحاول إثبات صحة العلاقة عند $n=k+1$

$\therefore$ العلاقة المطلوب إثباتها

$$\frac{1}{2X3}+\frac{1}{3X4}+....+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{k+1}{2(k+3)}$$

$$L.H.S=[\frac{1}{2X3}+\frac{1}{3X4}+...+\frac{1}{(k+1)(k+2)}]+\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$L.H.S=\frac{k}{2(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$L.H.S=\frac{k^2+3k+2}{2(k+2)(k+3)}=\frac{(k+2)(k+1)}{2(k+2)(k+3)}=R.H.S$$

(د) أوجد خارج قسمة المقدار $f(X) = 4X^3 - 4X^2 + 2$

$X + 6$ على $(X+1)(X-1)$

-1	3	-4	2	6
		-3	7	-9
1	3	-7	9	$-3 = R_1$
		3	-4	
	3	-4	$5 = R_2$	

خارج القسمة $\Rightarrow$ $Q(X) = 3X - 4$

الباقي $\Rightarrow$ $R = 5(X+1) - 3$

$$\forall f(X) = Q(X)[(X+1)(X-1)] + R$$

السؤال الثاني :

(أ) استخدام طريقة الوضع الزائف لتعيين حلول تقريبية للمعادلة

$F(X) = X^2 + X - 1 = 0$

القريب من النقطة $X = 1$

الحل:

نبحث الحل على الفترة $[0, 1]$ حيث $f(0)\ f(1) < 0$

$$C = X_1 = \frac{of(1) - f(0)}{f(1) - f(0)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = .5$$

$$\because f(\frac{1}{2}) f(1) < 0$$

$\therefore$ الحل: $\in$ $[\frac{1}{2}, 1]$

$$X_2 = \frac{\frac{1}{2} f(1) - f(\frac{1}{2})}{f(1) - f(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = .6$$

$$\because f(.6) f(1) < 0$$

∴ الحل: $\in$ $[.6,1]$

$$X_3 = \frac{.6f(1) - f(.6)}{f(1) - f(.6)} = \frac{.6 + .04}{1 + .04} = .615$$

$\because f(.615)f(1) < 0$

∴ الحل ينتمي للفترة $[.615, 1]$

$$X_4 = \frac{.615f(1) - f(.615)}{f(1) - f(.615)} = .617$$

∴ الحل التقريبي المطلوب هو $.617$

(ب) حل المعادلة $X^3 - 15X^3 - 33X + 847 = 0$

الحل:

لإيجاد الحلول المطلوبة نستخدم طريقة كاردان

نتخلص من معامل X^2 وذلك بوضع $X = y + \frac{15}{3} = y + 5$

$$X = y + 5 \quad \rightarrow \quad y = X - 5$$

أي نحصل على معادلة تنقص جذورها بمقدار 5

5	1	-15	-33	847
		5	-50	-415
5	1	-10	-83	$932 = R_1$
		5	-25	
5	1	-5	$-108 = R_2$	
		5		
5	1	$0 = R_3$		
	$1 = Qn$			

∴ المعادلة تصبح

$$Y^3 = 108y + 432 = 0$$

نوجد قيمة المميز على الصورة

$$\Delta = (\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3 = (216)^2 - (36)^3 = 0$$

$\therefore$ يوجد للمعادلة ثلاث جذور حقيقية

نحل المعادلة

$$m^2 + 432\,m + 216 = 0$$
$$\therefore\; m_1 = m_2 = -216$$
$$L = \sqrt[3]{m_1} = -6$$

$\therefore$ حلول المعادلة السابقة هي

$$(-L,\; -L,\; 2L) \rightarrow (6, 6, -12)$$

وبإضافة 5 على جذور هذه المعادلة

$\therefore$ الجذور المطلوبة هي $(11, 11, -7)$

(ج) حل المعادلة $X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 20X + 8 = 0$

الحل:

باستخدام طريقة فراري $X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 20X - 8$

نضع الطرف الأيسر في صورة إكمال المربعات

$$(X^2 + 2Xi + L)^2 = X^4 + 4X^3 + (10 + 2)X^2 + L^2 - 8)$$
$$= (mX + n)^2$$

ومن العلاقة

(معامل X^2) (الحد المطلق) = مربع نصف معامل X

$$(10 + 2L)(L^2 - 8) = (2L - 10)^2$$
$$L^2 + 3L^2 = 12L - 90 = 0$$

وبطريقة التخمين نوجد أحد حلول $L = 3$

وهي تحقق المعادلة .

$$\therefore (10 + 2L)X^2 + (4L - 20)X + (L^2 - 8) = m^2X^2 + 2mnX + n^2$$

والمقارنة و at $L = 3$

$$10 + 2L = 16 = m^2$$
$$L^2 - 8 = 1 = n^2$$

$$2mn = 4L + 20 = -18$$

ومنهـــــا

$$m = 4 , \quad n = -1$$
$$(X^2 + 2X + L)^2 = (mX + n)^2$$
$$(X^2 + 2X + 3)^2 = (4X - 1)^2$$
$$X^2 + 2X + 3 = |\,4X - 1\,|$$

$$\mathbf{X^2 + 2X + 3 = 4X - 1} \qquad \mathbf{X^2 + 2X + 3 = 4X - 1}$$
$$\mathbf{X^2 - 2X + 4 = 0} \qquad \mathbf{X^2 - 6X + 2 = 0}$$

$$X = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} \qquad X = \frac{-62 \pm \sqrt{36 - 8}}{2}$$
$$X = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \qquad X = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{2}$$
$$X = 1 \pm \sqrt{3}i \qquad X = -3 \pm \sqrt{7}$$

$\therefore$ حلول المعادلة هي

$$(1 \pm \sqrt{3}i, -3 \pm \sqrt{7})$$

(د) أوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك $(1 + 3X)^{-5}$

$$(1+3X)^2 = 1 + (-5)(3X) + \frac{(-5)(-6)}{2!}(-3X)^2$$
$$+ \frac{(-5)(-6)(-7)}{3!}(3X)^3 + \frac{(-5)(-6)(-7)(-8)}{4!}3X^4$$

السؤال الثالث :

(أ) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$$

فتكون الجذور هي $\lambda_2 = 6$, $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{-X_1 + 4X_2 = 0}$$

$$\mathbf{X_1 + 4X_2 = 0}$$

$$\mathbf{X_1 = 4X_2} \Rightarrow$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{4X_1 + 4X_2 = 0}$$

$$\mathbf{X_1 + X_2 = 0}$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ب) اختبر المتسلسلة حيث كونها متقاربة أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + ...$$

هذه المتسلسلة عبارة عن متوالية عددية مجموع n من الحدود

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

وبالتالي فإن مجموعهما

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{2} = \infty$$

$\therefore$ المتسلسلة متباعدة .

(ج) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

الحل:

$$\because A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj A$$

$$\det A = (3)(4) - (1)(2) = 10$$

$$adjA = adj\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4 & -1 \\ -2 & +3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{\det A}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .4 & -.1 \\ -.2 & .3 \end{pmatrix}$$

(د) باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجد الجذر الحقيقي للمقدار

$$3X^3 + X^2 - 11X + 6 = 0$$

الحل:

نبحث الحل على الفترة $[0, 1]$

$$\forall f(0) f(1) < 0$$

$$\Rightarrow X_0 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f^1(X) = 9X^2 + 2X - 11$$

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f^1(X_0)} = .5 - \frac{1.125}{-7.75} = .645$$

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f^1(X_1)} = .645 - \frac{.125}{-5.963} = .6659$$

$$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f^1(X_2)} = .6659 - \frac{.00399}{-5.676}$$

$$X_3 = .6666$$

ومنها الحل الحقيقي للمعادلة هو

$$.6666$$

* * *

إجابة امتحان تخلفات ٢٠٠٥/٢٠٠٦

(أ) باستخدام الكسور الجزئية حلل الآتي :

$$\frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)}$$

الحل:

$$\frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)}=\frac{a}{(X+2)}+\frac{b}{(3X+2)}$$

بضرب طرفي المعادلة في المقدار $(X+2)(3X+2)$

$$5X+2=3aX+2a+bX+2b$$
$$5X+2=(3a+b)X+2(a+b)$$

وبمقارنة الطرفين ينتج أن $3a+B=5$

بالطرح $a+b=1$

$$2a=4 \quad \Rightarrow \quad a=2 \text{ ، } b=-1$$

$$\therefore \frac{5X+2}{(X+2)(3X+2)}=\frac{4}{X+2}-\frac{1}{(3X+2)}$$

(ب) باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي اثبت أن

$$\frac{1}{2}n(n+1)=\sum_{r=1}^{n} r$$

الحل:

$$\frac{1}{2}n(n+1)=1+2+3+...+n$$

at $n=1$, $L.H.S=\frac{1}{2}(2)=1$

$$R.H.S=1$$

* نفرض صحة العلاقة عن $n = K$

$$\therefore \frac{1}{2}K(K+1) = 1+2+\ldots+K$$

* نحاول إثبات العلاقة عن $n = K+1$

$$1+2+3+\ldots+K+\ K+1 = \frac{1}{2}\,(K+1)(K+2)$$

$$L.H.S = [1+2+3+\ldots+K] + K+1$$

$$L.H.S = \frac{1}{2}\ K(K+1) + (K+1)$$

$$= \frac{1}{2}\ (K+1) + (K+2) = R.H.S$$

$$\therefore\ \ \frac{1}{2}n(n+1) = \sum_{r=1}^{n}\ r$$

(جــ) أوجد خارج قسمة المقدار $f(X) = 2X^3 - 7X^2 + 7\,X - 2$ على $X - 2$

2	2	-7	7	-2
		4	-6	2
	2	-3	1	$0 = R$

خارج القسمة $\Rightarrow$ $Q(X) = 2\,X^2 - 3\,X + 1$

$$\forall f(X) = (X-2)Q(X)$$

(د) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 2 عن جذور المعادلة

$$f(X) = X^4 + 6\,X^3 + 12\,X^2 + 11\,X + 1$$

-2	1	6	12	11	1
		-2	-8	-8	-6
-2	1	4	4	3	$-5 = R_1$
		-2	-4	0	
-2	1	2	0	$3 = R_2$	
		-2	0		

$$-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 = R_3$$
$$-2$$
$$1 \quad -2 = R_4 \quad , \quad Qn = 1$$
$$\therefore \; g(y) = y^4 - 2y^3 + 3y - 5$$

وبوضع $y = X + 5$

$$F(X) = (X+5)^4 - 2(X+5)^3 + 3(X+5) - 5$$

(أ) استخدم طريقة نيوتن لتعيين حلول تقريبية للمعادلة الآتية

$$F(X) = X^3 + X - 1$$

* نبحث وجود حل للدالة عند $[0, 1]$ حيث $f(0)\,f(1) < 0$

الحل:

$$X_0 = \frac{1-0}{2} = .5, f^1(X) = 3X^2 + 1$$

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f^1(X_0)} = .5 - \frac{.375}{1.75} = .714$$

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f^1(X_1)} = .714 - \frac{.077}{-2.529} = .683$$

$$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f^1(X_2)} = .683 - \frac{.0016}{2.399} = .682$$

$\therefore$ الحل التقريبي للمعادلة هو $.682$

(ب) حل المعادلة $X^3 - 9X + 28 = 0$

الحل:

نستخدم طريقة كاردان مباشرة نعين المميز

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0$$

$\therefore$ يوجد للمعادلة جذر حقيقي وجذران تخيليان .

نحل المعادلة

$$m^2+bm-(\frac{a}{3})^3=0$$
$$m^2+28+27=0$$
$$m_1=-1 \quad , \quad m_2=(-3)^3$$
$$L=3\sqrt{m_1}=1 \quad , \quad n=3\sqrt{-27=-3}$$
$$L+n=-4$$

∴ الجذور للمعادلة هي

$$(-4, \quad -\omega-3\omega^2, \quad -3\omega-\omega^2)$$
$$\omega=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \omega^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

∴ جذور المعادلة هي

$$(-4, 2+\sqrt{3}i, 2-\sqrt{3}i)$$

(ج) حل المعادلة $X^4+4X^3-6X^2+20X+8=0$

باستخدام طريقة فراري

$$X^4+4X^3=6X^2-20X-8$$
$$(X^2+2K+L)^2=(10+2L)X^2+(4L-20)X+(L^2-8)$$
$$=(mX+n)^2$$
$$(10+2L)(L^2-8)=(2L-10)^2$$
$$L^3+3L^2+12L-20=0$$

وبالتخمين $L=3$ ومنها

$$m=4 \quad , \quad n=-1$$
$$(X^2+2X+3)^2=(4X-1)^2$$
$$X^2+2X+3=|4X-1|$$

$$\boldsymbol{X^2+2X+3=4X-1} \qquad \boldsymbol{X^2+2X+3=4X+1}$$
$$X=1\pm\sqrt{3}i \qquad\qquad X=-3\pm\sqrt{7}$$

وعلى ذلك فإن جذور المعادلة الأربعة هي

$$(1\pm\sqrt{3}i \quad , \quad -3\pm\sqrt{7})$$

(د) أوجد مفكوك $(1-2X)^6$

الحل:

$$(1-2X)^6 = 1+6(-2X)+\frac{(6)(5)}{2!}(-2X)^2$$
$$+\frac{(6)(5)(4)}{3!}(-2X)^3+\frac{(6)(5)(4)(3)}{4!}(-2X)^4$$
$$+\frac{(6)(5)(4)(3)(2)}{5i}(-2X)^5+(-2X)^6$$

$$(1-2X)^6 = 1-12X+60X^2-160X^3-24X^4-192X^5+64X^6$$

(أ) اختبر المتتابعة التالية من حيث التقارب والتباعد

$$\{Zn\} = 1+\frac{2}{n}$$

الحل:

$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 1+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 1$$

$\therefore$ المتتابعة متقاربة من [1] فهي نحقق الشرط

$$|Zn-c|1+\frac{2}{n}-1|=|\frac{2}{n}|\geq\varepsilon_0$$

(ب) اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n-1}}$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+.....$$

$$Sn = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....(\frac{1}{2})^{n-1} = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

وهي عبارة عن متتابعة هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول 1

$S = \lim_{n\to\infty} Sn = 2$ $\leftarrow$ **مجموعها**

$\therefore$ المتسلسلة متقاربة ومجموعها 2 .

(ج) أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

الحل:

$$\because A^{-1} = \frac{adjA}{\det A}$$

$$\det A = (3)(4) - (1)(2) = 10$$

$$adjA = adj\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .4 & -.1 \\ -.2 & .3 \end{pmatrix}$$

❋ ❋ ❋

إجابة امتحان التخلفات ٢٠٠٧

السؤال الأول:

بقسمة الطرفين إلى النهاية على (x-2)

2	2	-3	4	-	6
	0	4	2	5	14
				12	
2	2	1	6	7	$20=R_1$
	0	4	10		
				32	
2	2	5	16		
	0	4	18	$39=R_2$	
2	2	9	$34=R_3$		
	0	4			
	Qn=2	$13=R_4$			

فتكون الدالة الجديدة التي تنقص جذورها بمقدار ٢ هو

$$G(x)=2y^4+13y^3+34y^2+39y+20$$

بوضع y=x-2

$$F(x)=2(x-2)^4+13(x-2)^3+34(x-2)^2+39(x-2)+20$$

ب)

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}=\frac{2x-3}{(x-3)(x+1)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-1}$$

2x+3=a(x+1) +b(x+3)

At x=-1 -2+3 = 0 + b×-4

b=-0.25

6+3 = a×4 +0∴ At x=3

a=2.25

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+1}$$

ج)

At n=1 l.h.s.=1^3=1   r.h.s.= $1^2(2\times1^2 -1)$=1

l.h.s.=r.h.s.

At n=2 l.h.s.=3^3+1^3=28 r.h.s=$2^2(2\times2^2 -1)$=28

L.H.S=R.H.S

At n=3 L.H.S.=$1^3+3^3+5^3$=153 R.H.S=$3^2(2\times3^2 -1)$ =153

L.H.S.=R.H.S

At n=k $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3=k^2(2k^2-1)$

At n=k+1 $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3+(2k+1)^3=(k+1)^2(2(k+1)^2-1)$

$k^2(2k^2-1) +(2k+1)^3=(k+1)^2(2(k+1)^2-1)$

L.H.S.=$2k^4+8k^3+4k^3+6k+1=(k+1)^2(2(k+1)^2-1)$= R.H.S.

د)

2x-1=2(x-0.5)

0.5	1	-3	4	1	5
	0	0.5	-5/4	11/8	19/16
	1	-5/2	11/4	19/8	R_1=99/16

$$\frac{99}{16}R=$$

$$Q(X)=2(X^3-\frac{5}{2}X^2+\frac{11}{4}X+\frac{`19}{8}$$

السؤال الثاني:

أ – نختار الفترة

لذلك $(0.5,1)$ لأن $F(0.5) = -0.375$, $f(1)=1$

$$= 0.64 = c\,\frac{0.5\times 1-1\times(-0.375)}{1-(-0.375)} = \frac{a1F(b1)-b1f(a1)}{F(b1)-f(a1)}\,X_1 =$$

فتكون الفترة الجديدة $(0.64,1)$

$X_2 = a_{n+1}f(b_n)-b_nf(a_{n+1}) \;/\; f(b_n)-f(a_n) \quad = 0.64\times1 - 1\times0.0496 \;/\; 1-0.0496 \; = 0.672 = c$

$F(c)=f(a_{n+2})=F(0.672)=0.124$

وعلى ذلك تكون الفترة الجديدة $(0.67,1)$

$x_3 = a_{n+2}\, f(b_n) - b_nf(_{an+2}) \;/\; f(b_n)-f(a_{n+2}) \quad = 0.672\times1 - 1\times0.124 \;/\; 1-0.124 \; = 0.674$

So the root is 0.674

ب)

$A = -9 \quad b=28$

$0» = (b/2)^2+(a/3)^3 = 14^2 - 3^3\Delta$

$\therefore m^2+28m+27=0$

$m_1=1 \quad l= m^{1/3}=1$

$m_2=27 \quad n={m_2}^{1/3}=3$

Roots are $l+n$, $lw+nw^2$, $nw+lw^2$

$4,\; w+3w^2 \quad , \quad w^2+3w$

$\sqrt{3}\ell\,, -2+\sqrt{3\ell 4}\,, \qquad -2-$

ج)

$A=4$, $b=-6$,$c=20$, $d=8$

$X^4+4x^3= 6x^2-20x-8$

$(x^2+2x+L)^2=x^4+4x^3+(10+2L)x^2+L^2+4Lx$

$(x^2+2x+L)^2 = (10+2L)x^2 + (4L-20)x + L^2 - 8 = (m\,x +$

$n)^2 = m^2x^2 + 2mnx + n^2$

وبمقارنة المعاملات

$m^2=2(5+L)$, $2mn=2(2L-10)$,
$n^2=L^2-8$
$mn=2L-10$
$m^2n^2=(2L-10)^2$

و بالتعويض

$L^3+3L^2+12L-90=0$

بالتخمين $L=3$

$. m^2=16$, $mn=4$, $n^2=1$
$. m=\pm4$, $n=\pm1$
$(x^2+2x+L)^2 = (mx+n)^2$
$(x^2+2x+3)^2=(4x-1)^2$ $x^2+2x+3=\pm(4x-1)$
$x^2+2x+3=4x-1$ $x^2+2x+3=-(4x-1)$
$x^2-2x+4=0$ $x^2+6x+2=0$
$\sqrt{7\ell}$ $x=-3\pm\sqrt{3\ell}$ $x=1\pm$

و تكون الجذور هذه

السؤال الثالث:

ب)

باستخدام اختبار المقارنة لأن درجة البسط أقل من درجة المقام

$\frac{1}{n}$ $b_n=\frac{n+2}{n^2}$ $A_n=$

والمتسلسلة متباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

وبما أن

$$\frac{1}{n}\geq\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}=\frac{n+2}{n^2}$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} \geq \sum_n^\infty = 1\frac{n+2}{n^2}$$

متباعدة فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$$

متباعدة هي الأخرى

د) بفرض أن الفترة التي يوجد بها الحل هي

(1,2)

ثم نعين نقطة البداية

$$\frac{b+a}{2} X_o =$$

$$= 1.347 \frac{1.875}{12.25} = 1.5 - \frac{3x^3 + x^2 - 11x + 6}{9x^2 + 2x - 11} = 1.5 - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} X_1 = x_o -$$

$$= 1.306 \frac{0.329}{8.024} = 1.347 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} X_2 = x_1 -$$

$$= 1.302 \frac{0.0223}{6.96} = 1.306 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} X_3 = x_2 -$$

The root is 1.302

❊ ❊ ❊