

الباب الثاني

الاستنتاج الرياضي

Mathematical Induction

تعريف:

هو طريقة قوية في غاية من الأهمية نستخدمها لإثبات كثير من القوانين والعلاقات الرياضية التي لا يمكن الوصول إليها بطريقة مباشرة.

مثال:

ومثال ذلك إذا أردنا إثبات أن

$$1+3+5+ \dots + (2n-1) = n^2 \quad (1)$$

أي أن المطلوب إثبات أن مجموع أول " n " من الأعداد الفردية الصحيحة يساوي " n² " ولبرهنة ذلك فإننا نعتمد على الاستنتاج الرياضي.

طريقة الاستنتاج الرياضي

يكون هناك في الطرفين n من الحدود

أولاً: نثبت أن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر في حالة n=1
وبعدها في حالة n = 2 .

ثانياً: نفرض صحة القانون في حالة n = k .

ثالثاً: نثبت القانون في حالة

$n = k + 1$ عن طريق استخدام الحالة التي قبلها $n = k$.

نظرية: تكون قضية ما (قانون - نظرية) صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n حيث $n \geq n_0$ (حيث n_0 عدد صحيح موجب) إذا تحقق الشرطان :

(١) القضية صحيحة عندما $n = n_0$

(٢) افتراض صحة القضية عندما $n = k$ يستلزم صحتها عندما

$n = k + 1$ (من الطبيعي أن $k \geq n_0$).

أمثلة

مثال:

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن:

(Prove by induction)

$$\sum_{r=1}^n r = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (1)$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة (١) في الصورة:

$$1+2+3+ \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

1) at $n = 1$

$$\text{L. H. S.} = \sum_{r=1}^n r = 1,$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{1}{2}1(1+1) = 1$$

at $n = 2$

$$\text{L. H. S.} = \sum_{r=1}^2 r = 1 + 2 = 3,$$

$$\text{R. H. S.} = \frac{1}{2}2(1+2) = 3$$

2) $n = k$

نفرض أن الحل صحيح في حالة

$$\sum_{r=1}^k r = \frac{1}{2}k(k+1)$$

3) at $n = k + 1$

أولا نكتب المطلوب إثباته وهو أن

$$\sum_{r=1}^{k+1} r = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \quad (2)$$

ونحاول إثبات ذلك من خلال المعادلة (2)

$$\text{L. H. S.} = \sum_{r=1}^{k+1} r = 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1)$$

$$= \sum_{r=1}^k r + (k+1)$$

أي بإضافة (k+1) إلى الطرفين باستخدام (٢)
نجد أن

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{k+1} r &= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \text{R. H. S.}\end{aligned}$$

مثال:

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن

$$\begin{aligned}\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ = \frac{n}{2(n+2)}\end{aligned}$$

الحل:

1) at $n = 1$

$$\text{L. H. S.} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6},$$

$$\text{R. H. S.} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

نفرض صحة الحل في حالة

$n = k$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ = \frac{k}{2(k+2)}\end{aligned}$$

$$3) n = k + 1$$

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k+1}{2(k+3)}$$

أولاً: نكتب المطلوب إثباته وهو:

$$L.H.S. = \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(k+2)(k+3)} =$$

$$= \left[\frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] + \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k+1}{2(k+3)}$$

باستخدام الحالة الثانية والتعويض بها ويكون الطرف الأيسر هو:

$$\frac{k}{2(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2(k+2)} \left[k + \frac{2}{(k+3)} \right]$$

$$= \frac{1}{2(k+2)} \left[\frac{k^2 + 3k + 2}{(k+3)} \right] = \frac{(k+2)(k+1)}{2(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)}{2(k+3)} = R.H.S.$$

مثال:

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1)$$

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

الحل:

1) at $n = 1$

$$L. H. S. = 1 \times 2 = 2,$$

$$R.H.S. = \frac{1}{3} 1(2)(3) = 2$$

2) $n = k$

نفرض صحة الحل في حالة

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1)$$

$$= \frac{1}{3} k(k+1)(k+2)$$

3) $n = k + 1$

أولاً: نكتب المطلوب إثباته

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3} (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$LHS = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k+1)(k+2)$$

$$= [1 \times 2 + \dots + k(k+1)] + (k+1)(k+2)$$

بالتعويض من العلاقة الثانية ينتج أن

$$L. H. S. =$$

$$L.H.S. = \frac{1}{3} k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{1}{3} (k+1)(k+2)[k+3] = R.H.S.$$

مثال:

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

الحل:

1) at $n = 1$ L. H. S. = 1,

$$R. H. S. = \frac{1}{6}1(2)(3) = 1$$

2) at $n = k$

نفرض صحة الحل في حالة

$$\sum_{r=1}^k r^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(k+2)(2k+1)$$

3) at $n = k + 1$

أولاً: نكتب المطلوب إثباته وهو

$$\sum_{r=1}^{k+1} r^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)(2k+3)$$

وبالتعويض من الحالة الثانية ينتج أن

$$\sum_{r=1}^{k+1} r^2 = \sum_{r=1}^k r^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(k+2)(2k+1)$$

$$+ (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)[k(k+2)(2k+1) + 6(k+1)] =$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)[2k^3 + 5k^2 + 8k + 6] = \frac{1}{6}(k+1)(k+2).$$

$$.(k+3)(2k+3) = R.H.S.$$

مثال: باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت " $n = n + 1$ " أي أن كل عدد طبيعي يساوي العدد الذي يليه.

الحل:

1) at $n = 1$ L. H. S. = 1,
R. H. S. = "1+1" = 2

2) at $n = k$ نفرض صحة الحل في حالة
" $k = k + 1$ "

3) at $n = k + 1$

أولاً: نكتب المطلوب إثباته وهو

$$"k + 1 = k + 2$$

L. H. S. = "k + 2" = "(k + 1) + 1"
= " k + 1" = R. H. S.

مثال:

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \dots \dots \dots + (-1)^{n-1} n^2 =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

الحل:

1) at $n = 1$ L. H. S. = 1 and
R. H. S. = $(-1)^0 \frac{1(2)}{2} = 1$

2) at $n = k$ نفرض صحة الحل في حالة

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \dots \dots \dots + (-1)^{k-1} k^2 =$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot \frac{k(k+1)}{2}$$

3) at $n = k + 1$

أولاً: نكتب المطلوب إثباته وهو

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \dots \dots \dots + (-1)^k (k+1)^2 =$$

$$= (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\left[1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \dots \dots \dots + (-1)^{k-1} k^2 \right] + (-1)^k (k+1)^2 =$$

$$(-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^k \frac{(k+1)}{2} [-k + 2k + 2]$$

L.H.S. =

$$= (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= RHS$$

مثال:

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots \dots \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

الحل:

1) at $n = 1$ L. H. S. = $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$ and

R. H. S. = $1 - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

2) at $n = k$

نفرض صحة الحل في حالة

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

3) at $n = k + 1$

أولاً: نكتب المطلوب إثباته وهو

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}$$

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k+1}{(k+2)!} = \left[\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!} \right] \\ &+ \frac{k+1}{(k+2)!} = \left[1 - \frac{1}{(k+1)!} \right] + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \left[\frac{1}{(k+1)!} - \frac{k+1}{(k+2)!} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{(k+2)!} [k+2-k-1] \\ &= 1 - \frac{1}{(k+2)!} = RHS \end{aligned}$$

مثال:

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$$

الحل:

1) at $n = 1$ L. H. S. = 2 and

$$R.H.S = 2(2-1) = 2$$

2) at $n = k$

نفرض صحة الحل في حالة

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k = 2(2^k - 1)$$

3) at $n = k + 1$

أولاً: نكتب المطلوب إثباته وهو

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{k+1} = 2(2^{k+1} - 1)$$

L. H.S. =

$$[2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k] + 2^{k+1} = 2(2^k - 1) + 2^{k+1}$$

$$= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$$

$$= 2[2^{k+1}] - 2 = 2(2^{k+1} - 1) = RHS$$

مثال:

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

الحل:

1) at $n = 1$ L. H. S. = $1^3 = 1$,

R. H. S. = $1(2-1) = 1$

2) at $n = k$

نفرض صحة الحل في حالة

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k - 1)^3 = k^2(2k^2 - 1)$$

3) at $n = k + 1$

أولاً: نكتب المطلوب إثباته وهو

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k + 1)^3 =$$

$$= (k + 1)^2(2(k + 1)^2 - 1) = L.H.S.$$

$$[1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k - 1)^3] + (2k + 1)^3 =$$

$$= k^2(2k^2 - 1) + (2k + 1)^3 = 2k^4 + 8k^3 + 4k^2 +$$

$$+ 6k + 1 = (k + 1)^2 \cdot [2(k + 1)^2 - 1] = R.H.S.$$

تمارين

باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي اثبت العلاقات الآتية:

$$1) \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1}$$

2) اثبت قانون دي موافر باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي.

$$3) n = n + 1''$$

اثبت أن كل عدد طبيعي يساوي العدد الذي يليه.

$$4) 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} (n(n+1))/2$$

$$5) 1/2! + 2/3! + 3/4! + \dots +$$

$$n/(n+1)! = 1 - 1/(n+1)!$$

$$6) 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$$

$$7) 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

* * *