الباب الثالث

الكسور الجزئية

Partial Fraction

تعريف:

كثيرة الحدود : يقال على الدالة التي لها الصورة

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 , \quad a_0 \neq 0$$

- كثيرة حدود من الدرجة n حيث n عدد صحيح غير سالب.
- **الكسر الجبري القياسي:** هو خارج قسمة كثيرتي الحدود.
- P(x), Q(x) أي أن الكسر الجبري القياسي له الشكل العام:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} , \dots\dots\dots Q(x) \neq 0$$

- إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام يسمى **كسرا غير حقيقيًّا** (والعكس صحيح) ويكتب على الصورة

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{h(x)}{Q(x)}$$

حيث درجة h(x) أقل من درجة Q(x)

حالات الكسور الجزئية

- **الحالة الأولى:**

إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الأولى أو معادلات تربيعية قابلة للتحليل تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)(x-c).....(x-n)}=$$

$$=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}+...+\frac{N}{(x-n)}$$

وبعد ذلك نقوم بضرب طرفي المعادلة في المقام

(x-a)(x-b)...(x-n)

فنحصل على

F(x) = A(x-b)(x-c)….(x-n) + B(x-a). (x-c)….(x-n)+…+ N(x-a)(x-b)(x-c)...(x-m)

وبعد ذلك نوجد قيمة A,B,C,….,   N عن طريق مساواة المعاملات أو عن طريق فرض قيم الx والحصول على معادلات في الثوابت.

أمثلة

مثال١:

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}$$

الحل:

أولا نتأكد أن درجة البسط أقل من درجة المقام وهذا متحقق وثانيا شكل الكسر من النوع الأول

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{3x+2}$$

بعد ذلك نقوم بالضرب في المقام (x+2)(3x+2) أو بمعنى توحيد

المقامات ينتج أن:

$$5x+2=A(3x+2)+B(x+2)$$

هناك طريقتين لتعيين قيمة الثوابت ولكن نحن سنتبع عملية مساواة المعاملات:

X: $5=3A+B$

الحد المطلق: $2=2A+2B$

or $1=A+B$

بحل المعادلتان ينتج أن (-1) = A = 2 and B أي أن الكسر الأساسي هو:

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x+2)}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{3x+2}$$

مثال ٢ :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}$$

الحل:

أولا درجة البسط أقل من درجة المقام ثانيا واضح أن المقام عبارة عن معادلة تربيعية قابلة للتحليل لذلك هي تتبع الحالة الأولى وحلها كما يلي:

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}=\frac{2x+3}{(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}$$

وبضرب طرفي المعادلة في المقام أو بتوحيد المقامات

$$2x+3=A(x+1)+B(x-3)$$

وعن طريق مساواة المعاملات ينتج

X: $2=A+B$

الحد المطلق: $\mathbf{3=A-3B}$

بحل هاتين المعادلتين ينتج أن:

A = (9/4) and B = (-1/4) ويكون الحل النهائي

$$\frac{2x+3}{x^2-2x-3}$$

$$=\frac{2x+3}{(x-3)(x+1)}$$

$$=\frac{9/4}{x-3}-\frac{1/4}{x+1}$$

مثال٣ :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+3)}$$

الحل:

أولا درجة البسط تساوي درجة المقام لذالك نقوم بعملية اختصار أو قسمة مطولة وذلك لجعل درجة البسط أقل من درجة المقام ثانيا المقام عبارة عن الحالة الأولى

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2+x-6 & x^2 \\ & \underline{x^2+x-6} \end{array}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(x-2)(x+3)}=1+\frac{-x+6}{(x-2)(x+3)}$$

وبعد ذلك نقوم بتحليل الكسر الجديد والذى يتحقق فيه أن درجة البسط أقل من درجة المقام:

$$\frac{-x+6}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

وبالضرب في المقام أو بتوحيد المقامات:

$$-x+6=A(x+3)+B(x-2)$$

وبمساواة المعاملات:

X^1: $-1 = A + B$

X^0 :الحد المطلق ٦ = ٣ A -2B

وبحل المعادلتان ينتج أن:

A = (4/5),
B = (-9/5)

ويكون الحل هو

$$\therefore \frac{x^2}{(x-2)(x+3)}=1+\frac{-x+6}{(x-2)(x+3)}=1+\frac{4/5}{x-2}-\frac{9/5}{x+3}$$

• الحالة الثانية:

- إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الأولى أو معادلات تربيعية قابلة للتحليل مكررة تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n(x-b)^m}$$

$$=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{N}{(x-a)^n}+\frac{C}{(x-b)}+$$

$$+\frac{D}{(x-b)^2}\ldots+\frac{M}{(x-b)^m}$$

مثال ٤ :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)}$$

أولا: درجة البسط أقل من درجة المقام

ثانيا: المقام عبارة عن الحالة الأولى والثانية

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

وبعد ذلك نقوم بتوحيد المقامات

$$2x^2 = A(x-1)^3 + B(x+1)(x-1)^2 +$$

$$+ C(x+1)(x-1) + D(x+1)$$

وبمساواة المعاملات

X^3: $0 = A + B$ (1)

X^2: $2 = +3A - B + C$ (2)

X^1: $0 = +3A - B + D$ (3)

الحد المطلق: $4 = -A + B - C + D$ (4)

بجمع المعادلة (٢) و(٤) ينتج

$4 = -4A + D$

ثم بجمع المعادلة (١) و(٣) ينتج

$0 = 4A+D$

بحل هاتين المعادلتان ينتج أن $A = -2$ وبالتعويض ينتج

$D = 2$ وبالتعويض في (١) ينتج $B = 1/2$ والتعويض في (٢) ينتج

$C = 1$

ويكون الحل النهائي

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{-1/2}{(x+1)} + \frac{1/2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3}$$

• الحالة الثالثة:

إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الثانية الغير قابلة للتحليل تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{F(x)}{(x^2+ax+b)(x^2+c)..(x^2+d)}=$$

$$=\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)}+\frac{Cx+D}{(x^2+c)}+...+\frac{Nx+M}{(x^2+d)}$$

وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات المذكورة في الحالة الأولى.

مثال ٥ :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

الحل:

- أولا واضح أن درجة البسط أقل من درجة المقام:
- ثانيا المقام يحتوي على معادلة من الدرجة الثانية غير قابلة للتحليل وهناك دمج بين الحالة الأولى والثالثة ويكون الحل كما يلي:

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

وبتوحيد المقامات ينتج أن

$$x^2+15=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)$$

وبمساواة المعاملات

X^2: **$1 = A + B$**

X^1: **$0 = 2A - B + C$**

الحد المطلق: **$15 = 5A - C$**

بجمع الثلاث معادلات ينتج أن $A = 2$ وبالتعويض في المعادلة الأولى والثالثة ينتج أن $B=-1$, $C=-5$

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{2}{x-1} - \frac{x+5}{x^2+2x+5}$$

• الحالة الرابعة:

- إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الثانية الغير قابلة للتحليل ومكررة تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{f(x)}{(x^2+ax+b)^n(x^2+c)^m} =$$

$$= \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)} + \frac{Cx+D}{(x^2+ax+b)^2} + \ldots$$

$$+ \frac{Nx+M}{(x^2+ax+b)^n} + \ldots$$

وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات المذكورة في الحالة الأولى.

مثال٦ :

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}$$

الحل:

أولا: درجة البسط أقل من درجة المقام.

ثانيا: يوجد معادلة تربيعية غير قابلة للتحليل مكرر أي دمج بين الحالة الأولى والرابعة.

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

وبتوحيد المقامات ينتج أن

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x)(x^2+1) +$$
$$+ (Dx+E)(x)$$

وبمساواة المعاملات:

X^4: $0 = A + B$ (1)
X^3: $0 = C$ (2)
X^2: $0 = 2A + B + D$ (3)
X^1: $0 = C + E$ (4)
X^0 الحد المطلق: $1 = A$ (5)

من المعادلة (٢) و(٤) نستنتج أن $C = E = 0$

ومن المعادلة (٥) نستنتج أن $A = 1$

وبالتعويض في المعادلة (١) ينتج $B = -1$

وبالتعويض في المعادلة (٣) ينتج $D = -1$

وعلى ذلك يكون الكسر الأساسي هو:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

* * *

تمارين

حلل كلاً من الكسور التالية:

1) $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x-3)}$ 2) $\dfrac{2x^2+10x-2}{(x+1)(x^2-9)}$

3) $\dfrac{4x^2+2x+4}{(2x+3)^3}$ 4) $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x-4)}$

5) $\dfrac{x^2+2x+5}{(2x^2+6x+7)^2}$

6) أوجد مجموع من الحدود

$$\frac{1}{1(5)}+\frac{1}{5(9)}+\frac{1}{9(12)}+.........$$

ملاحظة:

(في هذا المثال نكتب الصورة العامة لهذه المتسلسلة على صورة $\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ ثم نقوم بتحليل هذا باستخدام الكسور الجزئية)

* * *

البـاب الرابع

المتتـابعـات والمتسلسلات

Sequences and infinite series

أولا: المتتابعة: Sequence

تعاريف:

١) المتتابعة:

إذا كان لكل عدد طبيعي n يوجد عدد Z_n فإن هذه الأعداد

$\mathbf{Z_1, Z_2 \ldots\ldots, Z_N}$

تسمى متتابعة لا نهائية والعدد $\mathbf{Z_N}$ يسمى عنصر من عناصر المتتابعة وللاختصار نكتبها على الصورة $\mathbf{\{Z_n\}}$

٢) تقارب المتتابعة:

يقال: إن المتتابعة $\{Z_n\}$ متقاربة **Convergence** إذا وجد عدد C وله الخواص التالية:

أنة لكل عدد موجب ε (ابسلن يمكن أن يكون صغيرا صغرا كافيا ولكنة لا يساوي الصفر) يمكن إيجاد عدد طبيعى N بحيث أن

$$\left|Z_n - C\right| \leq \varepsilon, \forall n \geq N \qquad (1)$$

حيث تسمى **نهاية المتتابعة** ويمكن كتابتها على الصورة

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = C$$

أو بمعنى آخر

at $Z_n \to C$

عندما $(n \to \infty)$ وتكون المتسلسة **متباعدة Divergent** إذا لم

يتحقق هذا الشرط.

أمثلة

مثال ١ :

اختبر المتتابعة التالية من حيث التقارب والتباعد:

$$1)\ \{Z_n\} = 1 + \frac{2}{n}$$

الحل:

الطريقة الأولى للحل:

يمكن حل هذا المثال بمجرد أننا إذا أخذنا نهاية المقدار عندما n تؤول إلى ∞ يكون الناتج 1 فتكون متقاربة

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n}) = 1$$

الطريقة الثانية للحل:

وذلك عن طريق ملاحظة أنه كلما اقتربت n من ∞ تقترب المتتابعة من العدد 1 فتكون متقاربة، فمن المعادلة (١)

$$|Z_n - c| = \left|1 + \frac{2}{n} - 1\right| = \left|\frac{2}{n}\right| \le \varepsilon, \Rightarrow n \ge \frac{2}{\varepsilon}$$

كمثال إذا أخذنا القيمة $\varepsilon = 0.01$ فيكون $\frac{2}{n} \rangle 0.01$

عندما **n < 200**

فتكون المتتابعة متقاربة من العدد 1 .

مثال ٢: اختبر المتتابعة التالية من حيث التقارب والتباعد:

$$Z_n = \{ \frac{n}{n+1} \}$$

الحل:

المتتابعة $\{ \frac{n}{n+1} \}$ متقاربة وتتقارب إلى العدد "1" ومن المعادلة (1) نجد أن

$$Z_n - C = \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{-1}{n+1}$$

$$|Z_n - c| = \left|\frac{-1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| \rangle \varepsilon,$$

$$\frac{n+1}{1} \rangle \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n+1 \rangle \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n \rangle \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

وبالتالي نختار العدد N وهو أصغر عدد صحيح أكبر من $\frac{1}{\varepsilon}-1$.

كمثال إذا كانت ε = 0.01 فإن

$\frac{1}{\varepsilon}-1 = 99$ إذن N=99 فالمتتابعة متقاربة من العدد 1 .

تمارين

اختبر تقارب أو تباعد المتتابعات:

1) $\{Z_n\} = \frac{2n^2}{n+1}$

2) $\{Z_n\} = \frac{1}{n-3}$

3) $\{Z_n\} = \frac{-1}{n-3}$

ثانيًا: المتسلسلات Series

هناك ثلاث أنواع من المتسلسلات:

أ) متسلسلة عادية.

ب) متسلسلة متبادلة الإشارة.

ج) متسلسلة القوى.

أ) المتسلسلة العادية

تعاريف

١- المتسلسلة:

إذا كانت $\{w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n\}$ متتابعة لا نهائية من الأعداد سواء كانت حقيقية أو مركبة فإن المقدار

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = w_1 + w_2 + w_3 \qquad \ldots(1)$$

يسمى بالمتسلسلة اللانهائية infinite series

أما مجموع n من الحدود الأولى S_n حيث

$$S_n = w_1 + \ldots\ldots + w_n$$

يسمى هذا التعبير "المجموع الجزئي النوني"

فتتكون لدينا المتتابعة على الشكل $\{S_1, S_2 \ldots, S_n\}$

٢- تقارب المتسلسلات وتباعدها:

١) إذا كانت هذه المتتابعة متقاربة بمعنى

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = S$$

فإنه يقال: إن المتسلسلة (1) متقاربة **Converge** ويكون مجموعها يساوي S أي أن

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = w_1 + w_2 + \dots$$

٢) إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \infty$$

فأن المتسلسلة اللانهائية تكون متباعدة **Divergent** .

٣) إذا كانت S_n تذبذبية (**Oscillating**) محدودة فهي تكون تباعدية.

٤) إذا كانت S_n تذبذبية بين $\infty, -\infty$ فإن المتسلسلة تذبذبية غير محدودة وهي تباعدية.

مثال٣:

اختبر المتسلسلة اللانهائية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\dots(1)$$

الحل:

المجموع الجزئي النوني S_n للمتسلسلة (1) هو

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots + (\frac{1}{2})^{n-1}$$

هذه متوالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $\frac{1}{2}$

وعدد حدودها n فيكون مجموعها

$$S_n = (\ 1-(\frac{1}{2})^n\ \ )/(\ 1-(\frac{1}{2})\ \ \ ) = 2-\frac{1}{2^{2-1}}$$

وبناء على التعريف المعطى يكون مجموع المتسلسلة (١) هو

$$S = \underset{n\to\infty}{Lim}(S_n) = Lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{2^{n-1}}) = 2$$

وعليه فإن المتسلسلة (1) تقاربية ومجموعها يساوي 2

مثال ٤:

اختبر المتسلسلة اللانهائية

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+\ldots+n+\ldots\ldots(1)$$

الحل:

المتسلسلة (1) عبارة عن متوالية عددية فنجد أن S_n هو

$$S_n\ = 1+2+\ldots+ = \frac{n(n+1)}{2}$$

وبالتالي فإن مجموع المتسلسلة (1) هو:

$$S = \underset{n\to\infty}{Lim}(S_n) = Lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

$\therefore$ **المتسلسلة متباعدة.**

مثال٥:

اختبر المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots(1)$$

الحل:

واضح أنه إذا كانت المتسلسلة

زوجية $\Rightarrow n=1$

فردية $\Rightarrow n=0$

$$S_n = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

وعليه فإن S ليست قيمة محدودة وبالتالي فالمتسلسلة (1) تباعدية.

٣- المتسلسلة التوافقية

Harmonic Series

المتسلسلة التي على الصورة التالية هي المتسلسلة التوافقية وهي متسلسلة متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

وتكون متباعدة وذلك لأن

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

ويمكن كتابتها على الصورة:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots + \frac{1}{n}$$

بمقارنتها بالمتسلسلة الأخيرة $1 + \frac{(n+1)}{2}$

وبالتالي:

$$\underset{n\to\infty}{Lim}(S_n) = Lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(n+1)}{2} = \infty$$

٤- التقارب المطلق

المتسلسلة العادية

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

تسمى متقاربة القياس (التقارب المطلق) إذا كانت المتسلسلة المناظرة لها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = |w_1| + |w_2| + \dots \qquad (3)$$

متقاربة. تسمى هذه المتسلسلة أيضا **مطلقة التقارب Absolutely convergence** إذا كانت المتسلسلة

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

متقاربة ولكن المتسلسلة (3) متباعدة فإن المتسلسلة تسمى **مشروطة التقارب (Conditionally Convergent)**

ملاحظة:

إذا كانت المتسلسلة متقاربة مطلقا فإنها تكون متقاربة.

الاختبارات لدراسة تقارب أو تباعد المتسلسلات العادية

مثال٦:

المتسلسلة المتقاربة شرطيا ومطلقا

المتسلسلة:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$$

متقاربة وقيمتها "1" وذلك لأن:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

فهي عبارة عن متتابعة هندسية حدها الأول وأساسها **½**

ومجموعها هو

$$\frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1$$

بينما المتسلسلة

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

متقاربة شرطيًّا وذلك لأن المتسلسلة

$$w_1 + w_2 + \ldots$$

متقاربة فإنها تكون متقاربة.

نظرية١ :

إذا كانت المتسلسلة

$$w_1 + w_2 + \ldots$$

متقاربة مطلقا فإنها تكون متقاربة.

نظرية٢ :

إذا كانت المتسلسلة $w_1 + w_2 + \ldots$

متقاربة فإن:

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0$$

وبالتالي المتسلسلة التي لا تحقق هذا الشرط تكون متباعدة.

١- اختبار النهاية:

وهو بأن نقوم بأخذ النهاية للحد العام إذا كانت النهاية مساوية للصفر تكون غير معلومة بمعنى يفشل الاختبار وغير ذلك تكون متباعدة.

(ويطبق هذا الاختبار في حالة المسائل التي يكون فيها درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام)

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \begin{cases} 0 & test.fails \\ otherwise & div \end{cases}$$

٢- اختبار الجذر النوني: Cauchy test

بفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة حدودها موجبة وبفرض أن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{matrix} \prec 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots conv \\ \succ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots div \\ = 1 \ldots\ldots\ldots test.fails \end{matrix}$$

اختبار كوشي:

المتسلسلة تكون متقاربة إذا وفقط إذا كان لكل عدد موجب ε صغير جدًّا

يمكن إيجاد عدد N بحيث إن الفرق بين أي حدين مختلفين أقل من N يكون مقدار أقل من ε وهذا ما يسمى بنظرية كوشي للتقارب وهذا الاختبار ليس للتطبيق وإنما كتعريف.

مثال٧ :

اختبر المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$

من حيث كونها متقاربة أو متباعدة

الحل:

باستخدام اختبار كوشي نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$$

إذن المتسلسلة تقاربية.

٣- اختبار المقارنة: Comparison test

قبل توضيح هذا الاختبار لابد من سرد النظرية التالية:

نظرية١ :

إذا كانت

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \ldots \qquad (2)$$

وهو اختبار عن طريق مقارنة المتسلسلة بأخرى معلومة من النظرية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة (يطبق في المسائل التي يكون فيها بسط ومقام وتكون درجة البسط أقل من درجة المقام)

If $a_n \le b_n$ and b_n convergent then a_n convergent,
If $a_n \ge b_n$ and b_n divergent then a_n divergent

٤- اختبار القسمة: Division Test

ويعتبر من أهم الاختبارات ويطبق هذا الاختبار في نوعين من المسائل:

(١) مسائل الأعداد ذات الأسس.

(٢) مسائل المضروب وهو يطبق كما يلي:

إذا كانت لدينا

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{matrix} \prec 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots conv \\ \succ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots div \\ = 1 \ldots\ldots\ldots test.fails \end{matrix}$$

٥- اختبار التكامل: Integral Test

ويطبق في المسائل القابلة للتكامل ويطبق كما يلي:

إذا كانت لدينا

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\int_0^{\infty} a_n dn = \begin{cases} a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots conv \\ \infty, \ldots or, \ldots -\infty \ldots\ldots\ldots\ldots div \end{cases}$$

وهو ما يعني أنه يوجد المساحة ما تحت المنحنى والذي يمثله دالة الحد العام للمتسلسلة، وإذا كانت هذه المساحة محدودة تكون متقاربة، وغير ذلك تكون متباعدة.

أمثلة

مثال ١ :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$

الحل:

من الظاهر أن الاختبار المناسب هنا هو اختبار القسمة

$$a_n=\frac{1}{2^{n-1}},\quad a_{n+1}=\frac{1}{2^n}$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\div\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\prec 1$$

فتكون المتسلسلة متقاربة (convergent) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$

مثال ٢ :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}n$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هو اختبار النهاية (لأن درجة البسط أعلى من درجة المقام)

$$a_n = n, \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(n) = \infty \neq 0$$

divergent (متباعدة)

مثال٣ :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هو اختبار المقارنة (لأن درجة البسط أقل من درجة المقام)

$$a_n = \frac{n+2}{n^2}, \qquad b_n = \frac{1}{n} \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergent}$$

ومن النظرية

$$\because \frac{n+2}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \geq \frac{1}{n},$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2} \geq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة من النظرية ومن هذا تكون المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}$$

متباعدة باستخدام اختبار المقارنة.

مثال ٤ :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^5+1}$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هو اختبار المقارنة

(لأن درجة البسط أقل من درجة المقام)

$$\therefore a_n=\frac{3n^2+n+1}{n^5+1},\quad b_n=\frac{1}{n^3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

ومن نظرية التقارب convergent Theorem

$$\because \frac{3n^2+n+1}{n^5+1}\le\frac{1}{n^3},$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^5+1}\le\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ متقاربة من النظرية وبالتالي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^5+1}$ متقاربة باستخدام اختبار المقارنة.

مثال ٥ :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

الحل:

يمكن في هذا المثال تطبيق اختبار التكامل على أساس أن دالة الحد العام شكلها معلوم لدينا في التكامل

$$\int_1^{\infty} \frac{dn}{1+n^2} = \tan^{-1} n \,\Big|_1^{\infty} = \tan^{-1}[\infty - \tan^{-1} 1]$$

$$= 90 - 45 = 45$$

وهذا عدد محدود أي أن المساحة محدودة ولذلك فهي متقاربة.

مثال ٦:

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هنا هو اختبار القسمة (عدد أس إن)

$$\because a_n = \frac{n}{3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}\div\frac{n}{3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}\times\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}\prec 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\ \text{(convergent)}$$

وبالتالي فإن المتسلسلة متقاربة.

مثال ٧:

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هنا هو اختبار النسبة (عدد أس إن)

$$\because a_n=\frac{3^n}{n^2},\quad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\div\frac{3^n}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n}\times\frac{n^2}{(n+1)^2}=3\succ 1$$

divergent وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$

متباعدة.

مثال ٨ :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[Ln(n)]^n}$$

الحل: الاختبار المناسب في هذه الحالة هو اختبار الجذر النوني (ذلك لأن الكل أس إن)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{[Ln(n)]^n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{Ln\,(n)}=0\prec 1$$

متقاربة.

مثال ٩ :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n[Ln(n)]}$$

الحل:

من الواضح أن الاختبار المناسب هو اختبار التكامل وذلك لأنها دالة سهلة التكامل

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dn}{n[Ln(n)]}=[Ln.Ln(n)]_{1}^{\infty}=\infty$$

الناتج كمية غير محدودة وعلى ذلك يكون الناتج أو المساحة غير محدودة وبالتالي تكون متباعدة.

مثال ١٠:

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-4i)^{n}}{n!}$$

الحل:

الواضح أن الاختبار المناسب هو اختبار القسمة لأنه يوجد مضروب في المثال

$$a_{n+1}=\frac{(3-4i)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3-4i)^{n+1}}{(n+1)!}\div\frac{(3-4i)^{n}}{n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}\times(3-4i)=0\prec 1$$

وبالتالي فإن الدالة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-4i)^{n}}{n!}$ convergent

متقاربة.

مثال 11 :

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث كونها متقاربة أو متباعدة :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+..........$$

الحل:

أولا يمكن كتابة الحد العام للمتسلسلة على الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

ويمكن حل هذا المثال باستخدام التكامل

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dn}{\sqrt{n+2}}=\frac{2}{1}[\sqrt{n+2}]_{0}^{\infty}=\infty$$

الناتج كمية غير محدودة وعلى ذلك يكون الناتج أو المساحة غير محدودة، وتكون المتسلسلة متباعدة.

تمارين

في كلٍّ مما يأتى وضح ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أم متباعدة:

1) $\frac{1}{Ln2}+\frac{1}{Ln3}+..........$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n2^n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$

(ب) المتسلسلة المتبادلة الإشارة (المتعاقبة)

Alternating Series

تعريف:

تسمى المتسلسلة الآتية بالمتعاقبة وتأخذ الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots$$

ويكون الاختبار فيها كما يلي (اختبار وحيد): وهو أننا نقوم باختبار المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

فإذا كانت متقاربة انتهى المثال وفي هذه الحالة تسمى المتسلسلة متقاربة تقارب مطلق، أما إذا كانت متباعدة نقوم بأخذ النهاية للحد العام a_n فإذا ساوى صفرًا تكون متقاربة تقارب مشروط، أما غير ذلك فتكون متباعدة.

أمثلة عامة :

اختبر المتسلسلات الآتية من حيث التقارب أو التباعد:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

الحل:

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متسلسلة متقاربة من اختبار المقارنة العادي

وعلى ذلك تكون المتسلسلة المتعاقبة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ متقاربة تقارب مطلق.

$$2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$$

الحل:

بما أن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ باستخدام اختبار المقارنة نجد أن

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \geq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\ \text{(divergent)}$$

ويكون على ذلك المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ متباعدة وعلى ذلك نقوم بأخذ نهاية الحد العام

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0,$$

وعلى ذلك تكون المتسلسلة المتعاقبة الإشارة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ متقاربة تقارب مشروط.

$$3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n}$$

الحل:

واضح أننا سنطبق على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n}$ اختبار النسبة وهي تباعدية

(تمرين) لذلك نقوم بأخذ النهاية للحد العام $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n} = \infty$

فعلى ذلك تكون **متباعدة**.

(ج) متسلسلة القوى

Power series

تعريف:

تسمى المتسلسلة ذات الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

بمتسلسلة القوى في x حيث إنه متغير والأعداد

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n,\ldots}$

ثوابت. وهذه المتسلسلة تكون تقاربية أو تباعدية على فترات ينتمي لها المتغير x وذلك يخضع لثلاث حالات:

١) إذا كانت المسألة تحتوي على مضروب في المقام كان الناتج = صفر ٠ وتكون تقاربية على كل قيم R.

وفى هذه الحالة نصف قطر التقارب هو ∞.

٢) إذا كانت المسألة تحتوي على مضروب في البسط كان الناتج = ∞ وتكون تباعدية على R .

وفي هذه الحالة نصف قطر التقارب = صفر.

٣) إذا كانت لا تحتوي على مضروب أو مضروب في البسط والمقام كانت هناك فترة تقارب [a, b].

وفى هذه الحالة يكون نصف قطر التقارب هو نصف الفترة.

ملاحظة: والاختبارات الخمس السابقة هي التي تطبق هنا ولكن الأكثر استخدامًا هو اختبار القسمة.

أمثلة

في كلٍّ مما يأتي عيِّن نصف قطر التقارب (أو عيِّن فترة التقارب):

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

الحل:

من الواضح أنها متسلسلة قوى لوجود المتغير x ومن الواضح أيضا أنه لا يوجد مضروب، لذلك الناتج سيكون فترة وعن طريق اختبار النسبة

$$a_n=\frac{x^n}{n}\ ,\quad a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\div\frac{x^n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)}\times x\right|$$

$$=|x|\prec 1$$

$$\Rightarrow -1\prec x\prec 1$$

في هذه الفترة تكون متقاربة ولكن يبقى أن ندرس ذلك عندما

x = 1 أو x=-1

أولا: عندما: x = 1

فتصبح المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة (لماذا؟) وبعدها

عندما x = -1 تكون المتسلسلة $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ المتبادلة الإشارة متقاربة (لماذا؟) وعلى ذلك تكون فترة التقارب هي $-1 \le x \prec 1$ ونصف قطر التقارب هو 1.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,x^{2n}}{n+1}$

الحل:

من الواضح أنها متسلسلة قوى لوجود المتغير x ومن الواضح أيضا أنه يوجد مضروب في البسط لذلك الناتج سيكون ∞ وستكون تباعدية على كل R ويكون نصف قطر التقارب مساويًا صفر

$$\because a_n = \frac{n!x^{2n}}{n+1},$$

$$a_{n+1} = \frac{x^{2n+2}(n+1)!}{(n+2)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}(n+1)!}{(n+2)} \div \frac{n!x^{2n}}{n+1}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)}\times x^2\right| = \infty \succ 1$$

لذلك تكون تباعدية على كل R ويكون نصف قطر التقارب مساويًا صفر.

$$3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

الحل:

من الواضح أنها متسلسلة قوى لوجود المتغير x ومن الواضح أيضا أنه يوجد مضروب في المقام لذلك الناتج سيكون مساويًا صفر وتكون فترة التقارب R ويكون نصف قطر التقارب ∞.

$$\because a_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\ a_{n+1} = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \div \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}x^2\right| = 0 \prec 1$$

وعلى ذلك يكون هذا مؤديًا إلى أنها متقاربة على كل قيم R ونصف قطر التقارب مساويًا ∞.

* * *

تمارين

أوجد فترة التقارب لكل من المتسلسلات الآتية:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(x+i)^{n}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}n!}{(2n+1)!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}n^{n}x^{n}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{n}}{(2n+1)!}$

5) $\frac{x}{e^{x}}+\frac{2x}{e^{2x}}+\dots,$

6) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^{2}}+\dots,$

7) $Ln(x)+Ln^{2}x+\dots$

* * *