

الباب السادس

البرمجة الخطية

Linear Programming

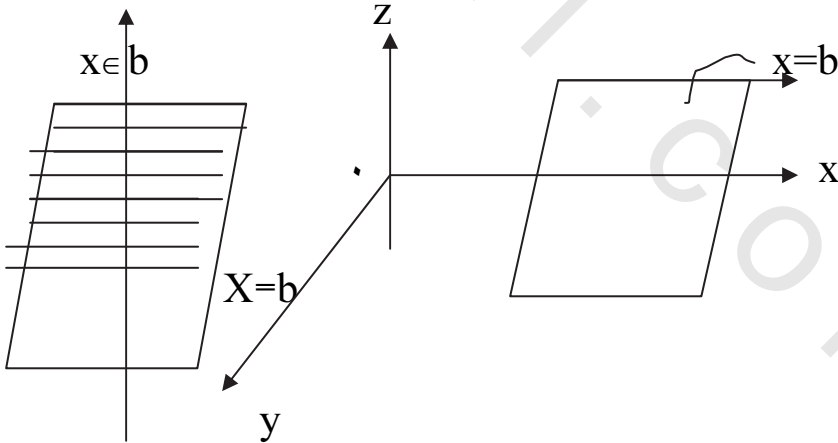
تعريف:

هى أسلوب رياضي لحل المشاكل التي يمكن صياغتها في شكل خطّي عن طريق المتباينات.

المستويات والمتباينات

Planes & Inequalities

المتساوية $x = b$ حيث $b \in \mathbb{R}$ (قيمة ثابتة) تمثل نقطة أو عدد b في فراغ ذو بعد واحد أي على خط مستقيم للأعداد الحقيقية. بينما تمثل مستقيماً يوازي محور y في فراغ ذي بعدين (أي مستوي xy) ذي ثلاثة أبعاد.



المتباينة $b > x$ أو $x < b$

حيث $b \in \mathbb{R}$ تمثل فئة جميع النقط الواقعة على يسار النقطة (أو

المستقيم (أو المستوى) حسب طبيعة الفراغ.
المتباينة

$x \geq b$ أو $x \leq b$ حيث $b \in \mathbb{R}$ تمثل فئة جميع النقط الواقعة على
 $x = b$ وعلى يسارها (انظر الشكل).
بالمثل المتساوية التي من الدرجة الأولى

$$4x + 3y = 120 \quad (1)$$

تمثل خطا مستقيما في فراغ ذي بعدين (مستوى) ويمر بالنقطتين
(30,0), (0,40) وبمعنى آخر فهي تمثل فئة جميع النقط (x,y) الواقعة
على المستقيم (1) أي تحقق متساويته.

المستقيم (1) يقسم المستوى xy إلى ثلاث مناطق؛ الأولى منها هي
المستقيم نفسه، والثانية هي نصف المستوى الذي يحتوي على نقطة
الأصل (0,0) وجميع النقط (x,y) التي تحقق المتباينة
 $4x + 3y < 120$

المتباينتان:

$$4x + 3y \leq 120$$

تمثلان فئة جميع النقط في المنطقة الأولى والثانية.

المتباينتان:

$$4x + 3y \geq 120$$

تمثلان فئة جميع النقط الواقعة في المنطقتين الأولى والثالثة. وبما أن
المستويات

$$4\lambda x + 3\lambda y \leq 120\lambda$$

$$4x + 3y = 120$$

لكل λ تمثل نفس المستقيم
فان المتباينات

$$4\lambda x + 3\lambda y = 120\lambda$$

$$4x + 3y \leq 120$$

هما بعينهما المتباينتان

إذا كانت λ موجبة وهي نفسها المتباينتان

$$4\lambda x + 3\lambda y \geq 120\lambda$$

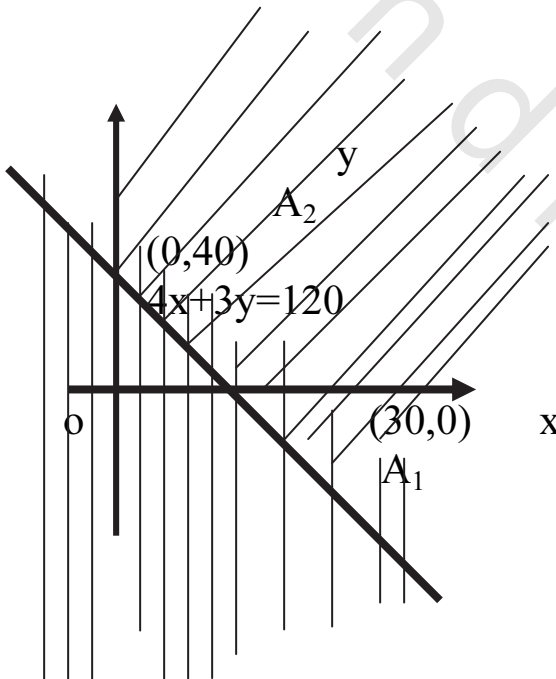
إذا كانت λ سالبة.

- فئة جميع النقط

$$4x + 3y \leq 120$$

ويمكن كتابتها على الصورة:

$$A_1 = \{p(x, y) : 4x + 3y - 120 \leq 0\}$$



$$4x + 3y \geq 120$$

والفئة

يمكن كتابتها على الصورة

$$A_2 = \{p(x, y) : 4x + 3y - 120 \geq 0\}$$

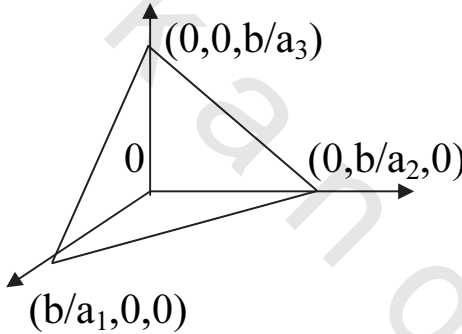
وعلى العموم فئة جميع النقط $p(x, y)$ في الفراغ ذي n بعد والتي

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad x_i \leq b$$

تحقق المتباينتين

حيث a_i, b ثوابت ليسوا جميعاً أصفاراً.

يمكن كتابتها بالصورة:



$$A_n = \{p(x_1, x_2, \dots, x_n) : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - b \leq 0\}$$

عند $n=1$

$$A_1 = \{p(x_1) : a_1 x_1 - b \leq 0\}$$

$$A_2 = \{p(x_1, x_2) : a_1 x_1 + a_2 x_2 - b \leq 0\}$$

عند $n=2$

عند $n=3$

$$A_3 = \{p(x_1, x_2, x_3) : a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - b \leq 0\}$$

عند $n=n$

$$A_n = \{p(x_1, x_2, \dots, x_n) : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - b \leq 0\}$$

a_1, a_2, a_3 لست جميعها أصفار وتمثل جميع النقط الواقعة في نصف الفراغ ذى الثلاثة أبعاد وعلى المستوى المنصف للفراغ الذي يحقق المتباينة

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$$

أمثلة على المتباينات الخطية والغير خطية في متغيرين

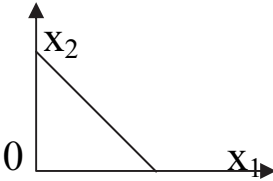
خطوات رسم المتباينات:

١- تحويل المتباينة إلى معادلة وذلك باستخدام علامة التباين وتحويلها إلى علامة (=) فمثلا لو لدينا المتباينة:

٢- حل المتباينة وذلك بوضع $x_1=0$ وإيجاد قيمة x_2 ثم وضع

$x_2=0$ وإيجاد قيمة x_1 وبذلك يمكن الحصول على نقطتين

٣- يتم تمثيل النقط أحدهما على المحور الأفقي x_1 ، والأخرى على المحور الرأسى x_2 ثم توصيل الخط بينهما.



٤- التظليل أعلى الخط إذا كانت المتباينة أكبر من .

التظليل أسفل الخط إذا كانت المتباينة أقل من .

مثال:

ارسم المتباينة الآتية:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 16, \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0,$$

الحل:

١- تحويل المتباينة إلى معادلة

$$2x_1 + 4x_2 = 16$$

٢- وضع $x_1 = 0$ وإيجاد قيمة x_2

$$2x_0 + 4x_2 = 16 \Rightarrow x_2 = \frac{16}{4} = 4 \quad (0,4)$$

ثم وضع $x_2 = 0$ وإيجاد قيمة x_1

$$2x_1 = 16 \Rightarrow x_1 = 8$$

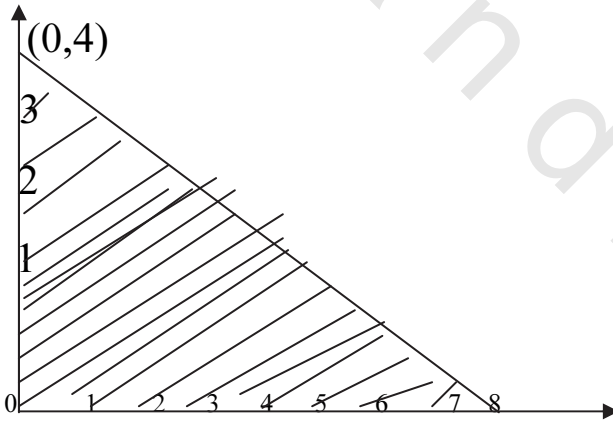
إذن النقطة الثانية هي $(0,8)$

٣- رسم المعادلة

٤- التظليل لأسفل

لأن المتباينة أقل من

$(8,6)$



مثال:

اجعل المتباينة $2x_1 + 3x_2$ أقل ما يمكن بشرط

$$x_1 + 2x_2 \leq 8, \quad x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0$$

الحل:

١- رسم المتباينات ثم تحويلها ثم حلها ثم الرسم:

$$x_1 + 2x_2 = 8,$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

Put

$$x_1 = 0 \Rightarrow \text{at } x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow (0,4) \quad x_2 = 0 \Rightarrow (0,2)$$

$$\text{at } x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 2$$

النقطة الثانية (8,0)

إذن النقطة الثانية (2,0)

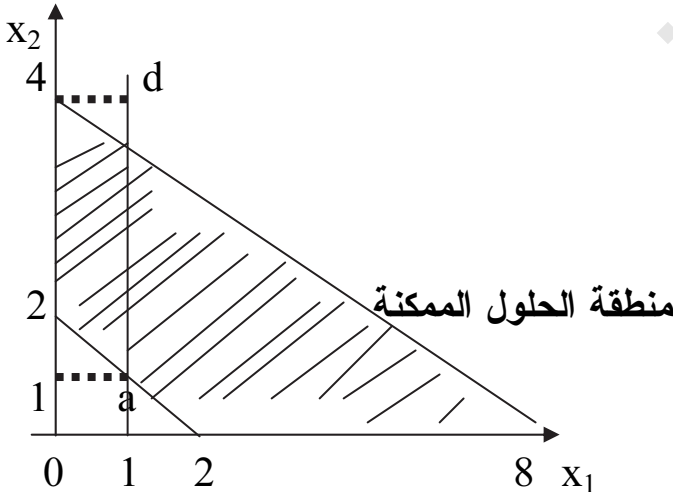
إذن $x_1 = 1$ ترسم مباشرة بعمل خط حراسي عند (1) على

المحور الأفقي موازيا للمحور الرأسى.

- رسم المتباينات على نفس الشكل:

دعنا نضع النقاط التالية:

$$a \rightarrow (1,1), b \rightarrow (2,0), c \rightarrow (8,0), d \rightarrow (1,3)$$



$$\text{At } a=(1,1) \rightarrow 2(1)+3(1)=5$$

$$\text{At } b=(2,0) \rightarrow 2(2)+3(0) = 4$$

$$\text{At } c=(8,0) \rightarrow 2(8)+3(0) = 16$$

$$\text{At } d=(1,3.5) \rightarrow 2(1) + 3(3.5) = 12.5$$

إذن نقطة الحل الأمثل هي النقطة $b(2,0)$ لأنها أعطت أقل قيمة للدالة 4 والتي كانت أقل ما يمكن.

$$4x_1 + 6x_2$$

مثال: اجعل المتباينة

أعظم ما يمكن بشرط أن:

$$9x_1 + 8x_2 \leq 72,$$

$$7x_1 + 5x_2 \leq 35 \quad x_1 \geq 2 \quad x_2 \geq 1,$$

الحل:

$$9x_1 + 8x_2 \leq 72, \quad 7x_1 + 5x_2 = 35$$

$$\text{at } x_1 = 0, \Rightarrow 8x_2 = 72$$

$$\text{at } x_1 = 0, \Rightarrow 5x_2 = 35$$

$$\therefore x_2 = 0, \Rightarrow (0,9), \quad x_2 = 7 \Rightarrow (0,7)$$

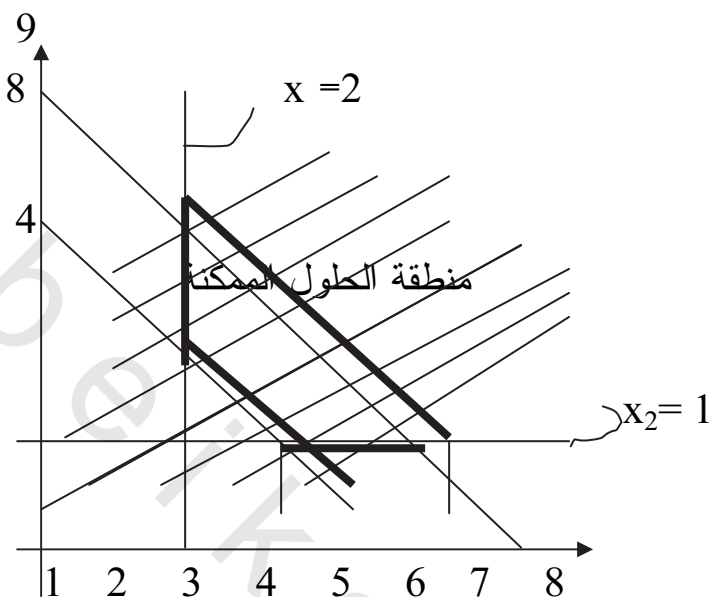
$$\text{at } x_2 = 0, \Rightarrow 9x_1 = 72, \quad \text{at } x_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = 8 \quad (8,0), 7x_1 = 35 \quad \therefore x_1 = 5(5,0)$$

إذن $x_1 = 2$ لاتحل وترسم مباشرة من (2) على المحور الأفقي،

$x_2 = 1$ بخط رأسي من (1) على المحور الرأسي



$$a(4.2,1), b(7,1), c(2,6.5), d(2,4)$$

$$a(4.2,1) \rightarrow 4(4.2) + 6(1) = 22.8$$

$$\text{At } b(7,1) \rightarrow 4(7) + 6(1) = 34$$

$$\text{At } c(2,6.5) \rightarrow 4(2) + 6(6.5) = 47$$

$$\text{At } d(2,4) \rightarrow 4(2) + 6(4) = 32$$

إذن نقطة الحل الأمثل هي النقطة $c(2,6.5)$ لأنها أعطت أكبر قيمة للدالة (47).

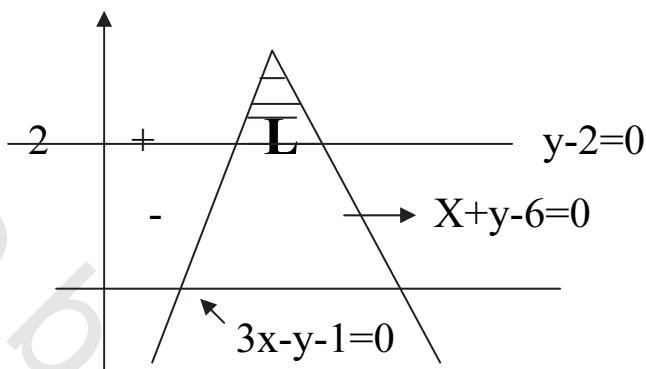
مثال: حل المتباينة التالية موضحا إجابتك برسم مناسب

$$A_1 = \{p(x, y) : 3x - y < 1\}$$

$$A_2 = \{p(x, y) : x + y \leq 6\}$$

$$A_3 = \{p(x, y) : y > 2\}$$

$$L = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \quad \text{الحل: التقاطع}$$



ويمثل المنطقة المظلمة

$$L = \{p(x, y) : 3x - y > 1, x + y \leq 6, y - 2 > 0\}$$

مثال:

حل المتبينات الآتية مع الإيضاح برسم مناسب

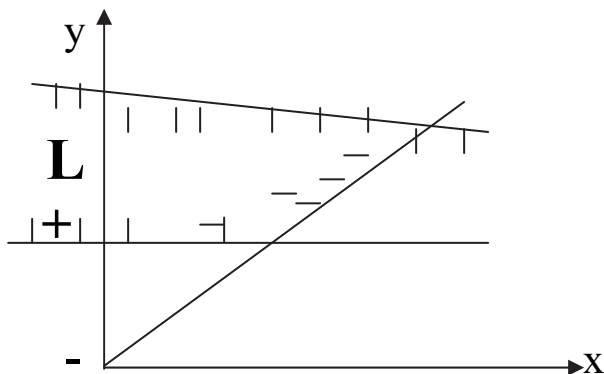
$$A_1 = \{p(x, y) : x - 2y - 6 \leq 0\},$$

$$A_2 = \{p(x, y) : x + y < 6\},$$

$$A_3 = \{p(x, y) : y > 1\}$$

الحل:

التقاطع يعطينا المنطقة L اللانهائية.

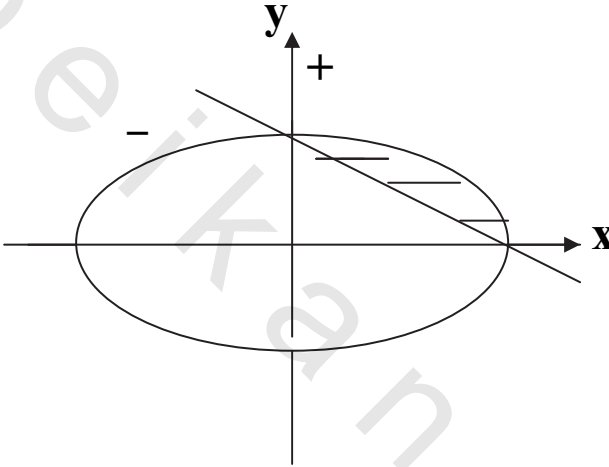


مثال:

حل المتباينات التالية مع إيضاح بياني مناسب

$$A_1 = \left\{ p(x, y) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} < 1 \right\},$$

$$A = \left\{ p(x, y) : x + y > 4 \right\}.$$



الحل:

التقاطع

$$L = A_1 \cap A_2$$

يعطينا المنطقة المظللة.

بعض القواعد في المتباينات

إذا كان

$$1) \quad a > b, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad d < 0, \quad m > 0$$

فإن

$$2) \quad a+c > b+c, \quad a-c > b-c \quad b-c \quad . \quad (1)$$

$$a \cdot c > bc, \quad a/c > b/c \quad . \quad (2)$$

أي أن جمع وطرح وضرب وقسمة كمية موجبة في الطرفين لا تغير إشارة التباين.

$$Ad < bd, \quad a/d < b/d \quad (3)$$

$$c/a < c/b \quad (4)$$

$$\text{لأن } 1/b > 1/a \text{ أى } a/ab > b/ab$$

$$a^m > b^m$$

$$a^m > b^m$$

أي ضرب أو قسمة أو رفع لأس سالب يغير إشارة التباين.

(٦) أما إذا كانت a, b, c كلها موجبة وكان

$$a < c, \quad b < d$$

$$\text{فإن } a/b < c/d$$

(٧) لكل عدد حقيقي a نعرف القيمة المطلقة

$|a|$ (أو القيمة العددية) كما يلي

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

مثال:

$$|\pm 2| = 2, \quad |0| = 0$$

والآن إذا كان العددين a, b حقيقيين ، $b > 0$ فإن

$$-|a| = |a|,$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b,$$

$$|a| \leq \quad \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$$

مثال: حل المتباينتين ووضح بياناً

$$3x + 3 > -1, \quad 4 - 3x > 2$$

$$3x + 3 > -1 \Rightarrow 2x > -4 \Rightarrow x > -2$$

$$4 - 3x > 2 \Rightarrow 3x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

أي أن الحل يمثل بالفئة

$$\{x \in R : -2 < x < 2/3\}$$



المعنى الهندسي:

أ- $|a - b|$ تمثل المسافة بين القطتين $(a, 0), (b, 0)$

ب- حل المتباينة $|x - a| < b$ يعني هندسياً النقط x

حيث المسافة بينها وبين a أقل من b لأن

$$|x - a| < b \Leftrightarrow -b < x - a < b$$

$$\Leftrightarrow a - b < x < a + b$$

ج- إذا كان $a_1, a_2, \dots, a_n$ أعداداً حقيقية فإن

$$|a_1, a_2, \dots, a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

مثال: أوجد العدد الحقيقي الموجب M بحيث يكون

$$|x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5| < M$$

لجميع قيم x التي تقع في الفترة التالية $-2 < x < 2$

الحل:

$$|x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5| \leq$$

$$|x^4| + |-2x^3| + |3x^2| + |-4x| + 5 =$$

$$= |x|^4 + 2|x|^3 + 3|x|^2 + 4|x| + 5 < \\ < 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 57$$

وبالتالي يمكن اعتبار أن العدد $M=57$

مثال:

حل المتباينة

$$2x^5 - 3x^4 > -x^3 \\ 2x^5 - 3x^4 + x^3 > 0 \\ 2x^3(x-1)(x-\frac{1}{2}) > 0$$

لدينا

وينعدم الطرف الأيسر (مثلا L) عند القيم

$$x=0, 1/2, 1$$

وباعتبار قيم أخرى للمتغير x بين القيم السابقة نجد أن:

x	2	3/4	1/4	$1-$
إشارة L	+	-	+	-

أي أن:

$$\frac{1}{2} < x < 1 \quad L > 0, \quad x > 1$$

$$x < 1 \quad L > 0, \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore 2x^5 - 3x^4 > -x^3 \Leftrightarrow$$

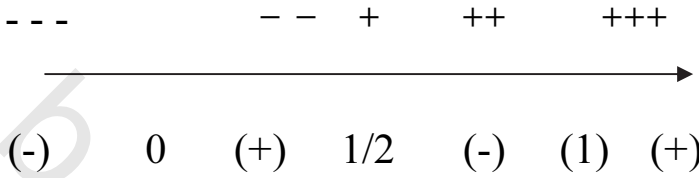
$$x > 1$$

$$or \quad 0 < x < 1/2$$

ويمكن تمثيل الحل بالفئة التالية

$$\{x \in R : 0 < x < 1/2, x > 1\}$$

وكذلك يمكن تمثيله بيانيا كما يلي



مثال:

حل المتباينة

$$\frac{210}{3x-2} - \frac{50}{x}$$

الحل:

لدينا

$$\frac{210}{3x-2} - \frac{50}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{60x+100}{x(3x-2)} < 0 \quad (1)$$

وينعدم البسط عند $x = -5/3$ وينعدم المقام عند القيم $x = 0$, $x = 2/3$

x	-2	-1	1/2	1
إشارة الطرف الأيسر (١)	-	+	-	+

أي أن:

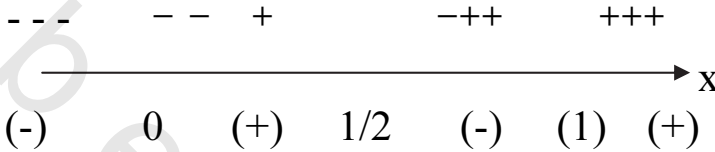
$$\frac{210}{3x-2} < \frac{50}{x}$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{5}{3}, \text{ or } 0 < x < \frac{2}{3}$$

ويمكن تمثيل الحل بالفئة التالية

$$\{x \in R : x < -5/3, 0 < x < 2/3\}$$

وكذلك يمكن تمثيله بيانيا كما يلي



وكتطبيق على المتباينات سندرس:

البرمجة الخطية Linear Programming

وتهتم بحل نوع خاص جداً من المسائل والتي تكون العلاقة بين متغيراتها خطية للدالة المراد إيجاد النهاية العظمى والصغرى لها وكذلك للشروط الواقعة على تلك الدالة.

وسوف نعتبر هنا في هذا الجزء المسائل المحتوية على متغيرين فقط ويمكن إيضاح الحل بيانيا لهذا النوع من المسائل.

ملحوظة مهمة:

مع ملاحظة أننا سبق وأن درسنا الحل الجبري كما في الأمثلة السابقة

مثال:

أوجد الحل والإيضاح الهندسي لمسألة البرمجة الخطية التالية:

$$3x + 5y \geq 15, \quad 5x + 2y \leq 10, x,$$

$$y \geq 0, \quad \max. f(x, y) = 5x + 3y$$

أي أوجد قيم (x,y) التي تحقق المتباينات الثلاثة المعطاة وتعطي نهاية

عظمى للدالة f .

الحل: سوف نرسم أولاً المنطقة التي تتحقق بالمتباينات المعلومة وهي المظللة في الشكل التالي.

ملاحظة: اتبع نفس الخطوات السابقة للحصول على الرسم المعطى.

والآن لأي قيمة ثابتة للمتغير f نرى أن

$$5x + 3y = f$$

تمثل خطا مستقيما بحيث أن أى نقطة عليه تعطي القيمة f وبتغير قيمة

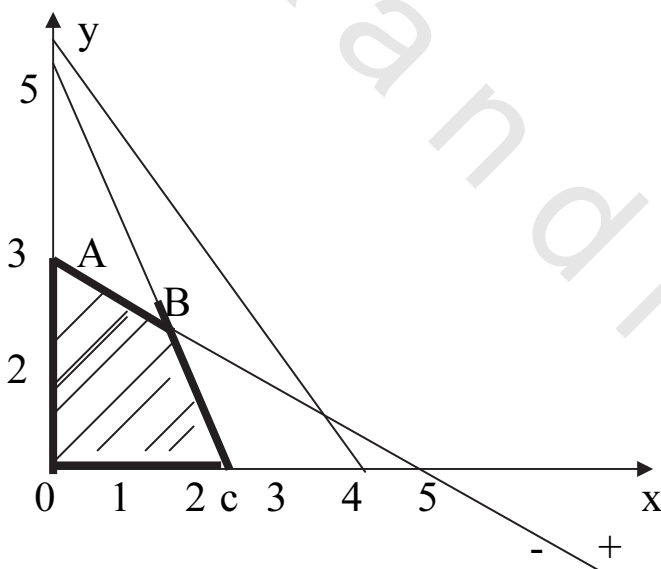
f نحصل على خط آخر موازي للخط السابق، وهكذا لأن ميل أي خط

مستقيم منها يكون على الصورة:

$$f = c_1x + c_2y$$

ويساوي القيمة $-c_1/c_2$ وهو لا يتوقف على الثابت وهذا الميل

يساوي $-3/5$



ونود الآن معرفة المستقيم الذي يعطينا أكبر قيمة f والذي تكون إحدى

نقطة في المنطقة المظللة أو حدودها ويتحقق ذلك إذا مر المستقيم

$$F = 5x + 3y$$

بالرأس B للمضلع OABC فنجد أن

$$f_{\max.} = 12.37$$

حيث إن القيمة B هي (10.53, 3.368)

يلاحظ هنا أن القيمة العددية للمقدار $c_1x + c_2y$

تتناسب طرديا مع طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم

$$f(\text{constant}) = c_1x + c_2y$$

لأن الجزء المقطوع يساوي f / c_2 أي يتناسب مع f ومن ثم يمكن

تحليلها إيجاد أن القيم التالية صحيحة:

$$f(0) = 0, \dots f(c) = 10, \dots f(a) = 9, \dots f(b) = 12.37$$

نرى أن النقطة B تعطي نهاية عظمى، النقطة o تعطي نهاية صغرى.

مثال:

$$(2.5x + y)$$

أوجد النهاية العظمى للدالة

إذا حققت (x, y) المتباينات

$$3x + 5y \leq 15, \dots 5x + 2y \leq 10, \dots x \geq 0, \dots y \geq 0$$

الحل:

مثل المثال السابق (انظر الشكل السابق) ، ولكننا نرى أن المستقيم

$$2.5x + y = f(\text{constant})$$

يمكن أن ينطبق بتمامه على الضلع BC لأنه يوازيه وواضح أنه في هذا

الوضع نحصل على نهاية عظمى للدالة أي أن أي نقطة على الضلع

BC تعطينا نهاية عظمى وبذلك يكون لدينا عدد لا نهائي من الحلول،

ويلاحظ أن

$$f(c) = 5, \dots f(B) = 5, \dots f(A) = 3$$

مثال:

أوجد النهاية الصغرى للدالة

$$2x + 3y$$

إذا حققت x, y المتباينات الآتية:

$$2x + 3y \leq 4, \quad 6x + 2y \geq 8,$$

$$x + 5y \geq 4, \quad x \leq 3, \quad y \leq 3$$

الحل:

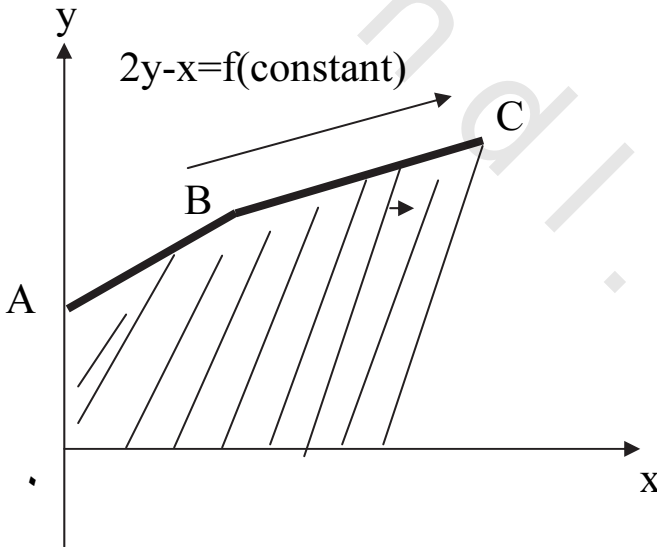
انظر الشكل الآتي فنرى أن

$$2x + 3y = f(\text{constant})$$

$$f_{\max.} = 4 \quad \text{وكذلك} \quad -0.5x + y = 2$$

يوازي

لأي نقطة على المستقيم BC الذي يمتد إلى ما لا نهاية.



* * *

تمارين

أوجد حل المتباينات الآتية:

- 1) $x^2 - x - 12 < 0$ 2) $2x^2 + 6x + 2 > 0$
3) $6x^5 - x^4 < x^3$ 4) $x^3 < x$
5) $x^3 + x^2 < x + 2$ 6) $\frac{2x}{3} - \frac{x^2 - 3}{2} + \frac{1}{2} < \frac{x}{6}$
7) $\frac{10}{6 - 8x} < \frac{5x - 2}{5x}$

أوجد الحل والإيضاح الهندسي لمسائل البرمجة الخطية التالية:

- 8) $2x + 3y \leq 6, \dots x + 4y \leq 4, \dots$
 $x, y \geq 0, \text{Max} Z = x + 1.5y$
9) $5x + 10y \leq 50, \dots x + y \geq 1, \dots y \leq 4$
 $x, y \geq 0, \text{Min} W = 2x + y$
 $x - y \geq 0, \dots x - 5y \geq -5, \dots$
10) $x, y \geq 0, \text{Min} F = 2x - 10y$
 $x + y \leq 2, \dots -x - 5y \geq -10, \dots$
11) $x, y \geq 0, \text{Max} W = -5y$

* * *