الفصل العاشر

البرمجة الخطية *

تعتبر البرمجة الخطية أحد أهم الطرق وأكثرها انتشاراً في علم الاقتصاد التطبيقي في الإدارة التي يمكن استخدامها في حل عدد كبير من المشكلات الإدارية المتعلقة بالإنتاج والتسويق والتمويل . أشرنا في الفصل الأول إلى أن H. J. Heinz قد استخدمت البرمجة الخطية لتحديد كمية المنتج اللازم شحنها من كل مصنع إلى كل مخزن ، وليست هذه إلا واحدة من آلاف التطبيقات الصناعية للبرمجة الخطية والتي تتراوح بين زيادة كفاءة محطات تكرير البترول إلى مساعدة البنوك في اختيار الأصول الخاصة بها . وسنقوم في هذا الفصل بشرح البرمجة الخطية وكيف يمكن استخدامها .

ما هي البرمجة الخطية ؟

تعتبر البرمجة الخطية إحدى الطرق التي تسمح للقائمين على صنع القرار بحل مشكلات المعظمة والتدنية في وجود ضوابط معينة – أو قيود – تحدد ما ينبغي عمله . وعلى الرغم من أهمية البرمجة الخطية في الاقتصاد التطبيقي في الإدارة ، إلا أنها طريقة رياضية محضة تقتصر على إخبارنا بمعنى المعلومات التي جمعها (أو افترضها) صانع القرار أو المحلل . فإذا كانت هذه البيانات (أو الافتراضات) خاطئة فمن الطبيعي أن تأتي الحلول خاطئة هي الأخرى . تستخدم البرمجة الخطية في الحالات التي يكون فيها الهدف هو الحصول على أكبر أو أصغر ناتج من دالة معينة ، وهذه الدالة الهدف هي دالة خطية في المتغيرات التي يتم تحديدها . ولابد أن تفي قيمة هذه المتغيرات بعدد من الشروط ، التي تأخذ شكل عدد من المتباينات . ولاحظ أن ذلك يختلف عن طريقة Lagrange حيث تكون الشروط على شكل متساويات . وأفضل طريقة لمعرفة ما نعنيه بكلمة الدالة الهدف أو القيود التي تتعرض لها هذه الدالة – هو دراسة عدد من الحالات ولنبدأ بشركة الغزل الأمريكية .

تخطيط الإنتاج : إنتاج واحد

افترض أن أحد العمليات التي تقوم بها شركة الغزل الأمريكية هو تشطيب الأقمشة القطنية . وتعتمد سعة قسم التشطيب على قدرة المعدات وحجم العمالة المتوفرة للقيام بالعمل . وينظر مديرو الشركة في شأن ثلاث طرق لاستخدامها : الطرق 1 و 2 و 3 . وهم يعلمون أن الربح لكل دفعة قطن هي 1.00 دولار للطريقة 1 و 0.90 دولار للطريقة 2 و 1.10 دولار للطريقة 3 . كما يعلمون أن العملية 1 تستخدم 3 ساعات من وقت الآلات للتشطيب لكل دفعة يتم معالجتها ، بينما العملية 2 تستهلك 2.50 ساعة والعملية 3 تستهلك 5.25 ساعة . كما أن العملية 1 تستهلك 0.4 ساعة من وقت العمالة لكل دفعة قطن يتم معالجتها والعملية 2 تستهلك 0.50 ساعة والعملية 3 تستهلك 0.35 ساعة عمالة . وأخيراً فإن أقصى عدد ساعات للآلات يمكن استخدامه هو 6,000 ساعة أسبوعياً ، بينما 600 ساعة أسبوعياً هي أقصى كمية من العمالة يمكن للشركة استخدامها . ويجعل Q_1 تساوي عدد دفعات الأقمشة القطنية التي يتم معالجتها أسبوعياً باستخدام العملية 1 ، و Q_2 تساوي عدد الدفعات التي يمكن معالجتها باستخدام العملية 2 ، و Q_3 تساوي عدد الدفعات التي يتم معالجتها باستخدام العملية 3 ، فإنه يمكن النظر إلى مشكلة الإنتاج التي تواجهها شركة الأقمشة الأمريكية من زاوية البرمجة الخطية التالية : أي معظمة

$$\pi = 1.00Q1 + 0.90Q2 + 1.10Q3 \qquad (10.1)$$

وذلك طبقا للشروط التالية :

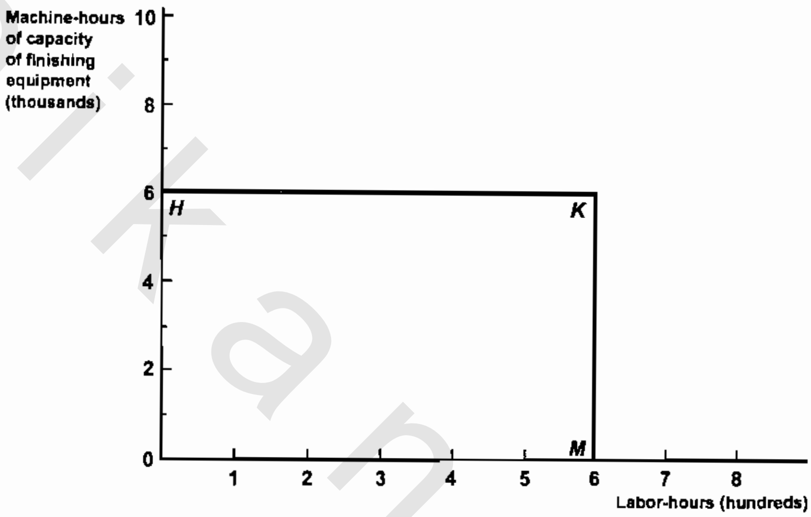
$$3Q_1 + 2.50Q_2 + 5.25Q_3 \le 6{,}000 \qquad (10.2)$$

$$0.40Q_1 + 0.50Q_2 + 0.35Q_3 \le 600 \qquad (10.3)$$

$$Q_1 \ge 0;\ Q_2 \ge 0;\ Q_3 \ge 0 \qquad (10.4)$$

* اشترك في تأليف هذا الفصل Edward D. Mansfield .

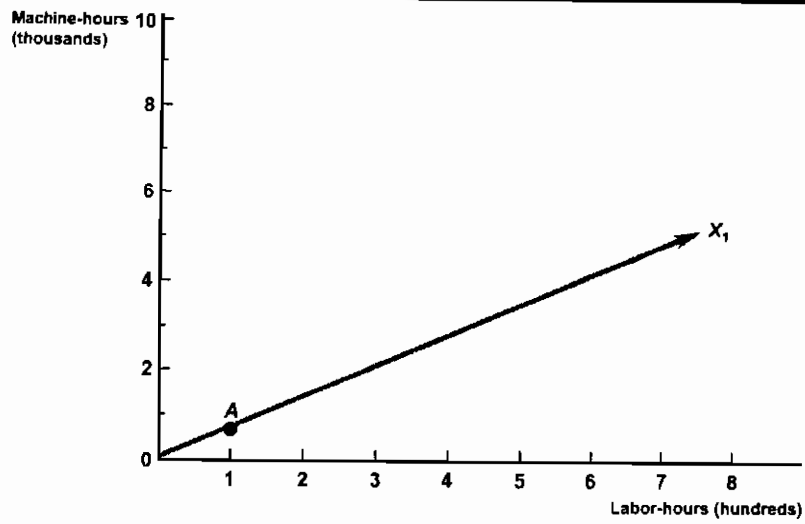
ودالة الهدف والتي تعرف أحياناً باسم دالة المعيار هي الدالة التي سوف يتم معظمتها في مسألة البرمجة الخطية في هذه الحالة ، والمعادلة (10.1) هـي الصياغة المعبرة عن حجم أرباح الشركة في هذه الحالة . والشروط معطاة في المتباينات (10.2) حتى (10.4) ؛ حيث تنص المتباينة (10.2) على أن إجمالي ساعات التشطيب أسبوعياً لابد أن يكون أقل من أو مساوي لـ 6,000 ، وتنص المتباينة (10.3) على أن إجمالي ساعات العمالة أسبوعياً لابد أن يكون أقل من أو يساوي 600 ، و تشتمل المتباينة (10.4) على شروط اللاسالبية التي قد تبدو واضحة إلى الدرجة التي لا تستوجب ذكرها . ولا تأتي هذه الشروط واضحة بنفس الدرجة في حالة استخدام الحاسب الآلي الذي قد يخرج علينا بأحد الحلول التي تنطوي على ناتج سلبي. ونلاحظ أخيراً أن كلا من الدالة الهدف والشروط هي عبارة عن دوال خطية Q_1 و Q_2 و Q_3 والتي تمثل المستويات التي يتم فيها إجراء هذه العمليات . ولحل هذه المشكلة نبدأ بتجميع توليفات عناصر الإنتاج القابلة للتنفيذ.[1] ويوضح الشكل (10.1) - والذي يحتوى على إجمالي الساعات الأسبوعية من وقت العمالة التي تستهلكها الطرق الثلاثة على المحور الأفقي وإجمالي الساعات الأسبوعية لتشغيل الآلات التي تستخدمها الطرق الثلاثة على المحور الرأسي - التوليفات القابلة للتطبيق من إجمالي ساعات العمالة وساعات الآلات . والمنطقة القابلة للتطبيق هي المستطيل $OHKM$ حيث أن القدر المتاح هو 600 ساعة عمالة و 6000 ساعة آلات .



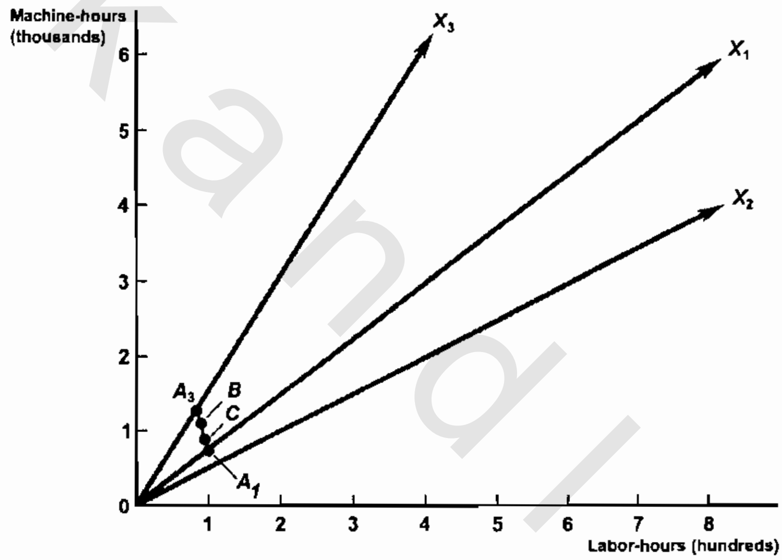
شكل (10.1) التوليفات الممكنة : بما أن أقصى قيمة متاحة لساعات العمالة هي 600 ولساعات الآلات هي 6,000 فإن منطقة التوليفات الممكنة هي المستطيل $OHKM$.

وكما أشرنا سابقاً فإن كل عملية يتم تحديدها بحيث تستخدم كميات متناسبة من عناصر الإنتاج . وبما إن كل النقاط التي لا تتغير عندها النسب تقع على خط مستقيم يمر بنقطة الأصل ، فإنه يمكننا تمثيل كل عملية بخط مستقيم أو شعاع يمر بتلك النقطة . وفي الشكل (10.2) نجد أن الشعاع OX_1 يعبر عن العملية 1 ، فالعملية 1 تستهلك 3 ساعات آلات للتشطيب و 0.4 ساعة عمالة لكل دفعة يتم معالجتها . أي أنها تستخدم 7.5 ساعة للتشطيب لكل ساعة عمل . لذلك فإن الشعاع OX_1 يحتوي كل النقاط التي تكون فيها النسبة بين الآلات والعمالة هي 7.5 : 1 . وتشير كل نقطة على الشعاع إلى مستوى إنتاج معين . فمثلاً ، تشير النقطة A (حيث يتم استخدام 100 ساعة عمالة و 750 ساعة آلات) إلى إنتاج حجمه 250 دفعة أسبوعياً حيث أن العملية 1 تستخدم 0.4 ساعة عمالة و 3 ساعات لتشغيل الآلات لكل دفعة . وبالإضافة إلى ذلك (وبما أن كل النقاط التي تكون فيها النسبة بين العمالة والآلات 7.5 : 1 موجودة على الشعاع OX_1) فإنه يمكن إيجاد كافة معدلات الإنتاج الممكنة على الشعاع OX_1 . كما يمكن إيجاد شعاع يمثل كل من العمليات الثلاثة . ويوضح الشكل (10.3) العمليات الثلاثة ، حيث يعبر OX_2 عن العملية 2 و OX_3 عن العملية 3 ويتم صياغة كل شعاع بنفس العملية التي تم بها صياغة OX_1 ليمثل العملية 1 .

[1] النقاش التالي لهذه المسألة مشابهة في العديد من النواحي (على الرغم من أن المشكلة نفسها مختلفة إلى حد كبير) إلى المشكلة الموجودة في : W. Baumol, *Economic Theory and Operations Analysis*, 3rd ed. (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1972), pp. 296-310.



شكل (10.2) التعبير عن طريقة 1 بشعاع : يحتوى الشعاع OX_1 على كافة النقاط التي تكون فيها النسبة بين التشطيب والعمالة هي 7.5 : 1 .

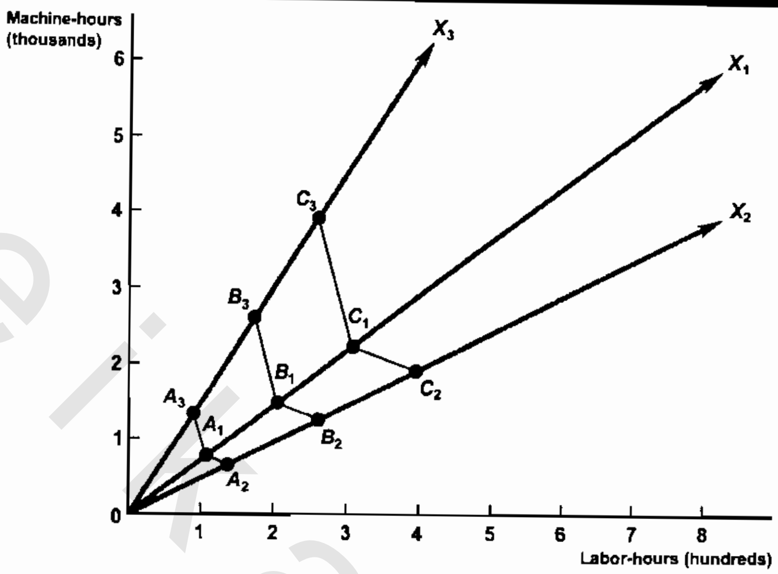


شكل (10.3) أشعة الخطوط المستقيمة تمثل الطرق 1 و 2 و 3 : منحنى الناتج المتساوي المناظر لناتج قدرة 250 دفعة أسبوعياً ، ويحتوى على كل نقاط القطعة المستقيمة التي تصل A_1 بـ A_3 .

وباستخدام هذه الأشعة المستقيمة يمكننا رسم منحنيات الناتج المتساوي – المنحنيات التي تحتوى على كل توليفات عناصر الإنتاج التي يمكنها تحقيق كمية معينة من الإنتاج .[2] ومنحنى الناتج المتساوي هنا له نفس المعنى الذي كنا نقصده في الفصل السابع ، إلا أنه يوجد فرق وحيد هو أن المنحنيات المشار إليها في هذا الفصل هي أكثر استواءً وسلاسة من تلك الوارد تفصيلها في الفصل السابع . ولإيضاح هذه النقطة ، دعنا نرسم منحنى الناتج المتساوي لحجم إنتاج 250 دفعة أسبوعياً . يتضح من الشكل (10.3) أن النقطة A_1 على OX_1 هي النقطة التي تشير إلى إنتاج حجمه 250 دفعة أسبوعياً ، والنقطة A_3 على $OX3$ تشير إلى إنتاج حجمه 250 دفعة أسبوعياً. لذلك فإن النقطتين A_1 و A_3 تقعان على منحنى الناتج المتساوي

[2] للتبسيط فإننا نتعامل مع كل دفعة يتم إنتاجها على أنها كمية متساوية من الإنتاج بغض النظر عن العملية المستخدمة . من الواضح أن مثل هذا الشرط قد لا يكون صحيحاً ، لكن ذلك لا يشكل اختلافاً هاماً في هذا المثال .

الذي يمثل 250 دفعة أسبوعياً من الناتج . وعلاوة على ذلك فإن أي نقطة تقع على القطعة المستقيمة التي تصل A_1 و A_3 تقع على هذا المنحنى أيضا، لأن الشركة يمكنها استخدام العملية 1 والعملية 3 في نفس الوقت للحصول على ناتج 250 دفعة أسبوعياً . فمثلاً تشير النقطة B إلى الحالة التي تستخدم عندها العملية 1 لإنتاج 25 دفعة والعملية 3 لإنتاج 225 دفعة والنقطة C تشير إلى الحالة التي تستخدم فيها العملية 1 لإنتاج 150 دفعة والعملية 3 لإنتاج 100 دفعة . وبتغيير نسبة إجمالي الإنتاج الناشئ عن استخدام كل طريقة ، يمكن الحصول على كل النقاط على القطعة المستقيمة التي تصل بين A_1 و A_3 .



شكل (10.4) منحنيات الناتج المتساوي عند مستويات معينة من الإنتاج : $A_3A_1A_2$ هو منحنى الناتج المتساوي المناظر لناتج قدرة 250 دفعة أسبوعيا و $B_3B_1B_2$ إلى 500 دفعة أسبوعيا و $C_3C_1C_2$ إلى 750 دفعة أسبوعيا .

في الشكل (10.4) إذا أردنا إكمال منحنى الناتج المتساوي المناظر لإنتاج حجمه 250 دفعة أسبوعياً ، فإننا نقوم بتوصيل A_1 بـ A_2 ، والنقطة التي تمثل إنتاج حجمه 250 دفعة أسبوعياً تقع على المستقيم OX_2 . لذلك فإن منحنى الناتج المتساوي الكامل هو $A_3A_1A_2$. (ولأول وهلة قد يتساءل القارئ لماذا لا يكون الجزء المستقيم الواصل بين A_3 و A_2 جزءاً من منحنى الناتج المتساوي . حيث أنه يمثل التوليفات المختلفة للعمل وقدرة التشطيب لتحقيق إنتاجاً حجمه 250 دفعة أسبوعياً . والسبب في استبعاد ذلك هو أن كل النقاط الواقعة على القطعة المستقيمة A_3A_2 تفتقر إلى الكفاءة . فهي تستخدم نفس الكمية من أحد المستلزمات وكمية من المستلزم الآخر أكبر من الكمية المستخدمة في النقاط على $A_3A_1A_2$. كما يوضح الشكل (10.4) منحنيات أخرى للناتج المتساوي ، حيث يشير $B_3B_1B_2$ إلى إنتاج قدره 500 دفعة أسبوعياً و $C_3C_1C_2$ إلى 750 دفعة أسبوعياً .

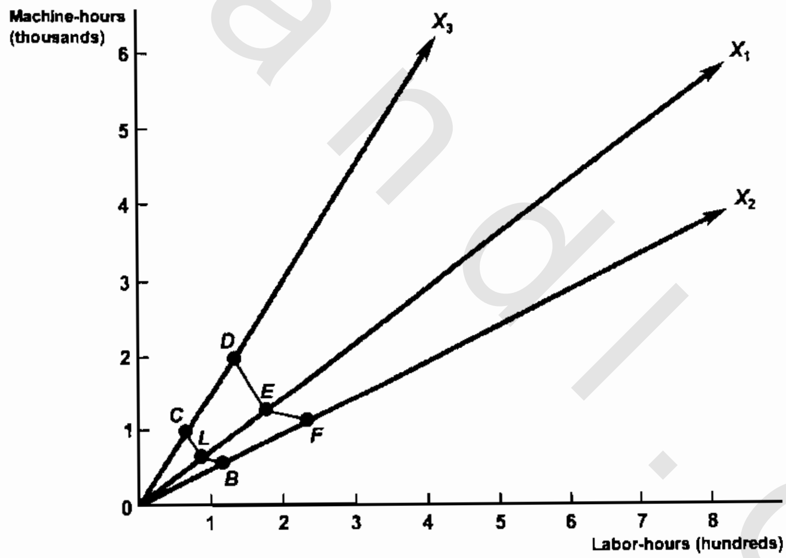
هذا وينبغي أن نضع ثلاثة اعتبارات في أذهاننا بخصوص شكل منحنيات الناتج المتساوي في مشكلات البرمجة الخطية . (1) أنها تتكون من سلسلة من القطع المستقيمة المتصلة وليست تلك المنحنيات السلسة التي قدمتها النظرية التقليدية في الفصل السابع ، لكن إذا كان عدد العمليات الممكنة كبيراً جداً فإنه يمكن تقريب منحنيات الناتج المتساوي إلى المنحنيات التقليدية .[3] (2) ميل هذه المنحنيات سالب أو على الأقل غير موجب . (3) أنها محدبة وهو ما يعني أن المعدل الحدي للإحلال الفني لعنصر ما بالنسبة لعنصر آخر يتناقص بزيادة إحلال العنصر الأول محل العنصر الآخر . وبغض النظر عن كونها ليست بالسلاسة التي افترض الفصل السابع وجودها ، فإن منحنيات الناتج المتساوي في البرمجة الخطية يكون لها نفس الشكل الأساسي مثل تلك الموجودة في الفصل السابع .

[3] السبب الأساسي لكونها تختلف عن الشكل التقليدي هو أن هناك عدد محدود من الطرق يفترض توافرها بالنسبة للشركة . وبزيادة عدد هذه الطرق فإن منحنيات الناتج المتساوي تقترب أكثر وأكثر من شكل المنحنى في النظرية التقليدية .

لما كان المعدل الحدي للإحلال الفني لمنحنيات الناتج المتساوي يفتقر إلى أحد العناصر بالمقارنة بالعنصر الآخر ، لذا فإن البرمجة الخطية تتوافق تماماً مع قانون تناقص الغلة . لكن افتراض الخطية في مشكلات البرمجة الخطية يوحي بأنه لا يوجد غلة حجم تناقصية أو تزايدية ، و يفترض دائماً أن دالة الإنتاج خط مستقيم ومتجانس وهو ما يعني وجود غلة حجم ثابتة .

كيفية الحصول على حل بياني

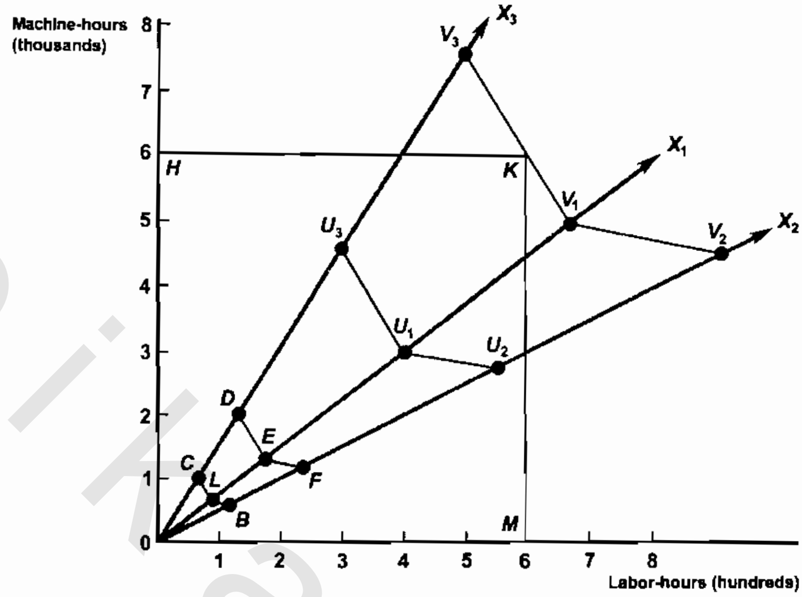
وبالعودة إلى مشكلة الغزل الأمريكية نجد أن الخطوة التالية نحو حل مشكلة البرمجة الخطية هي كيفية صياغة منحنيات الأرباح المتساوية ، وبعد ذلك يمكننا الحصول على الحل بيانياً . وإذا كان كل من منحنيات الناتج المتساوي في الشكل (10.4) يعبر هندسياً عن أحد التوليفات التي تمكننا من الحصول علي كمية معينة من الإنتاج ، فأننا نقوم بصياغة كل من منحنيات الأرباح المتساوية بحيث يشتمل علي كافة توليفات المنتجات التي يمكننا تحقيق كمية معينة من الربح . ولإيضاح ذلك دعنا نقوم بصياغة منحنى الأرباح المتساوية المناظر لربح قدره 200 دولار . لما كان الربح لكل دفعة هو 1.00 دولار أسبوعياً للعملية 1 ، فإن النقطة المناظرة لإنتاج حجمه 200 دفعة أسبوعياً على الخط OX_1 تقع على منحنى الأرباح المتساوية. وبما أن كل دفعة يتم إنتاجها باستخدام العملية 1 تتطلب 3 ساعات للتشطيب و 0.4 ساعة عمالة ، فإن النقطة الواقعة على المستقيم OX_1 والمناظرة لإنتاج حجمه 200 دفعة أسبوعياً هي L في الشكل (10.5). وبالمثل ، فبما أن الربح لكل دفعة باستخدام العملية 2 هو 0.90 دولار ، فإن النقطة المناظرة لإنتاج حجمه 222.2 دفعة أسبوعياً على الخط OX_2 تقع على ذلك المنحنى ، وهي النقطة B . وبما أن الربح لكل دفعة يتم إنتاجها باستخدام العملية 3 هي 1.10 دولار ، فإن النقطة المناظرة لإنتاج حجمه 181.1 دفعة أسبوعياً على الخط OX_3 تنتمي لذلك المنحنى، وهي النقطة C . وأخيراً ولنفس الأسباب التي وضعناها في الاعتبار في حالة الناتج المتساوي ، فإنه يمكننا أيضا تضمين كل النقط الواصلة بين هذه النقاط . لذلك فإن منحنى الأرباح المتساوية الذي يشير إلى ربح قدرة 200 دولار أسبوعياً هو CLB في الشكل (10.5) .



شكل (10.5) منحنيات الأرباح المتساوية لمستويات معينة من الأرباح : المنحنى CLB يمثل مستوى أرباح 200 دولار أسبوعياً ، والمنحنى DEF يمثل 400 دولار أسبوعياً .

وبالاستعانة بنفس هذا الأسلوب ، يمكننا صياغة منحنيات الأرباح المتساوية لمستويات مختلفة من الأرباح . وكما هو الحال بالنسبة لمنحنيات الناتج المتساوي في الشكل (10.4) ، فإن منحنيات الأرباح المتساوية في الشكل (10.5) تكون متوازية . فإذا أجرينا مقارنة بين DEF (منحنى الأرباح المتساوية المقابل لـ 400 دولار) و CLB (المنحنى المناظر لـ 200 دولار) نجد أنهما متوازيان ، أي أن ميل CL يساوي ميل DE وكذلك ميل LB مساوي لميل EF . وبعد صياغة منحنيات الأرباح المتساوية ، يمكننا بسهولة حل مشكلة الشركة . فكل ما نحتاج عمله هو إضافة

منحنيات الأرباح المتساوية إلى الرسم [شكل (10.1)] الذي يوضح التوليفات الكفأة بين توليفات عناصر الإنتاج ، وقد تم ذلك في الشكل (10.6) . ومن الواضح أن المشكلة هي إيجاد النقطة على المستطيل $OHKM$ التي تقع على أعلى منحنيات الأرباح المتساوية . ومن الواضح من الشكل (10.6) أن أفضل نقطة هي K . فإذا قمنا بصياغة عدد من منحنيات الأرباح المتساوية ، مثل $U_3U_1U_2$ و $V_3V_1V_2$. فإن أعلى منحنى للأرباح المتساوية الذي يمكن صياغته بحيث يشتمل على كافه النقاط الواقعة على $OHKM$ هو $V_3V_1V_2$. أما النقطة الوحيدة في $OHKM$ التي تقع على $V_3V_1V_2$ هي K .



شكل (10.6) منحنيات الأرباح المتساوية وتوليفات عناصر الإنتاج الكفأة : النقطة المثلى هي K ، حيث يتم استخدام 6,000 ساعة للتشطيب و 600 ساعة عمالة ، والأفضل استخدام العمليتين 3 و 1 فقط .

وبمعرفة أن K هي نقطة مثالية ، كيف يمكن تحديد أفضل قيم لـ Q_1 و Q_2 و Q_3 ؟ أولاً ، بما أن K تقع على القطعة V_3V_1 ، فإن ذلك يعني أنها لا تكون النقطة المثلى إلا في حاله استخدام العمليتين 3 و 1 فقط . من كل ذلك يتضح أن الحل الأمثل لمثل هذا النوع من مشكلات البرمجة الخطية يقتضي استخدام عدد من العمليات لا يتجاوز عدد الشروط أو الضوابط الموجودة اثنين في هذه الحالة (مع استبعاد شروط اللاسالبية) . ثانياً ، بما أن K هي النقطة التي يتم عندها استخدام 6,000 ساعة للتشطيب و 600 ساعة من العمالة ، فإن :

$$3Q_1 + 5.25Q_3 = 6{,}000 \qquad (10.5)$$

$$0.40Q_1 + 0.35Q_3 = 600 \qquad (10.6)$$

وبحل المعادلتين (10.5) و (10.6) آنياً ، نجد أن أفضل قيم هي $Q_3 = 571.4$ و $Q_1 = 1{,}000$. أي أن شركة الغزل الأمريكية سوف تعظم أرباحها إذا أنتجت 571 دفعة أسبوعياً باستخدام العملية 3 و 1,000 دفعة أسبوعياً باستخدام العملية 1 .

حالة الموارد غير المحدودة

لمزيد من الإيضاح حول كيفيه استخدام البرمجة الخطية في حل مشاكل الإنتاج ، افترض أن شركة الغزل الأمريكية لم تعد مقيدة بكميات معينة من العمالة وقدرة الآلات التي يمكن استخدامها . بل أنه باستطاعتها ، استخدام كل ما تريد من العمالة بتكلفة 12.00 دولار في الساعة ، وكل ما تريده من التشطيب بسعر 1.60 دولار لكل ساعة . وافترض أنه يمكنها استخدام أياً من العمليات الثلاثة المذكورة أعلاه ، والمشكلة هي اختيار التوليفة التي يمكن من خلالها إنتاج 400 دفعة أسبوعياً بأقل تكلفة مع ثبات سعر البيع في العمليات الثلاثة على حد سواء . (يمكننا ملاحظة أنه لا يمكننا الاعتماد حالياً على الأرقام الواردة تحت عنوان " تخطيط الإنتاج " في بداية هذا الفصل ، وهي الأرقام الخاصة بالأرباح لكل دفعة من الإنتاج . لأن سعر البيع يبقى ثابتا للعمليات الثلاثة) .

الآن يمكن اعتبار مشكلة الشركة مشكلة برمجة خطية – أي تدنية :

$$C = 9.60Q1 + 10.00Q2 + 12.60Q3 \qquad (10.7)$$

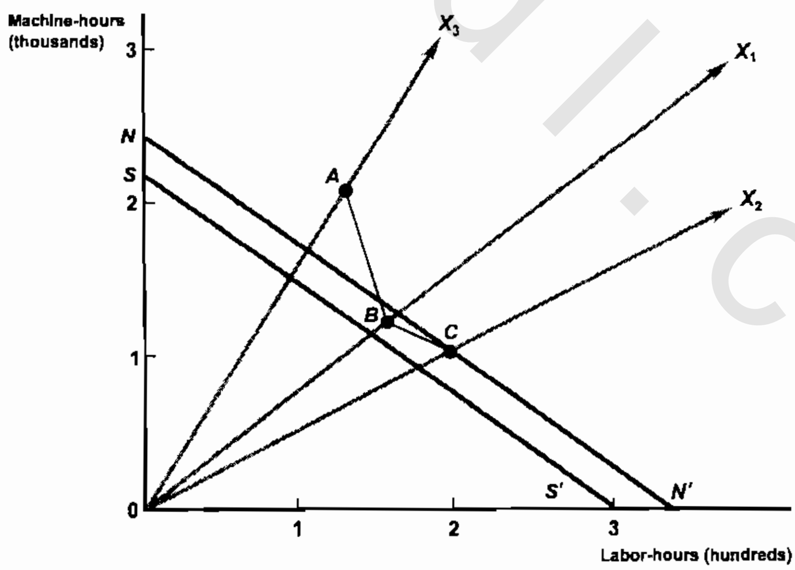
بشرط :

$$Q1 + Q2 + Q3 = 400 \qquad (10.8)$$

$$Q1\ ^{3}\ 0;\ Q2\ ^{3}\ 0;\ Q3\ ^{3}\ 0 \qquad (10.9)$$

والدالة الهدف في هذه الحالة هي دالة التكاليف C المعطاة في المعادلة (10.7) . ولاشتقاق هذه الدالة لاحظ أن تكلفة الدفعة باستخدام العملية 1 هي 9.60 دولار ، لأن العملية 1 تتطلب 3 ساعات من استخدام الآلة (بسعر 1.60 دولار للساعة) و 0.4 ساعة عمالة (بسعر 12 دولار للساعة) . لذلك فإن إجمالي التكلفة للدفعة باستخدام العملية 1 هو $9.60Q_1$. وبالمثل يكون إجمالي التكاليف للدفعة باستخدام العملية 2 هو $10.00Q_2$ ، وللطريقة 3 هو $12.60Q_3$. والشرط الوحيد هنا هو أن إجمالي الإنتاج من كل هذه العمليات لابد أن يساوي 400 .

هذا ويمكن حل هذه المشكلة بسهولة باستخدام العمليات المذكورة في الجزء قبل الأخير ، حيث يمكن صياغة منحنيات الناتج المتساوي لإنتاج حجمه 400 دفعة أسبوعياً . ويوضح الشكل رقم (10.7) منحنى الناتج المتساوي المشار إليه بـ ABC . الخطوة التالية هي أن نقوم بصياغة منحنيات التكاليف المتساوية ، وكل منها يوضح التوليفات المختلفة لحجم العمالة وقدرة التشطيب التي يمكن الحصول عليها عند مستوى تكاليف معين . منحنى التكاليف المتساوية المناظر لتكاليف قدرها 4,000 دولار و 3,600 دولار هي NN^1 و SS^1 في الشكل (10.7) . ومن الواضح أن المشكلة هي إيجاد النقطة على منحنى الناتج المتساوي ABC التي تقع على أقل منحنى تكاليف متساوية . كما يتضح أن النقطة المثلى هي B ، مما يعني ضرورة إتمام كافة العمليات الإنتاجية باستخدام التقنية الأولى أو العملية رقم 1 .



شكل (10.7) الحل الأمثل : بما أن منحنى الناتج المتساوي هو ABC ومنحنيات التكاليف المتساوية هي NN^1 و SS^1 ، فإن افضل نقطة هي B ، وهو ما يعنى أن الإنتاج يجب أن يتم باستخدام العملية 1 .

عند مقارنة هذه العملية بالعملية المستخدمة في الفصل السابع تحت عنوان " التوليفات المثلى من عناصر الإنتاج " نجد أنهما نفس الشيء . ففي كل من الحالتين نقوم بتحديد توليفات عناصر الإنتاج وتقنيات الإنتاج التي من شأنها تقليص النفقات اللازمة للحصول على حجم إنتاج معين . وعلاوة على ذلك ، فإن الشكل (7.9) – والذي يقدم الحل باستخدام النظرية التقليدية – يشبه إلى حد كبير الشكل (10.7) الذي يقدم الحل لهذه الحالة ، فما هو الفرق بين الحالتين ؟ في الفصل السابع افترضنا وجود دالة إنتاج سلسة ، بينما في هذه الحالة اعتمدنا على وجود الخواص الفنية للطرق المستخدمة . وعموماً فإن الوضع الذي قمنا بتحليله هنا هو الأكثر واقعية .

تخطيط الإنتاج : منتجات متعددة

فلننظر الآن إلى حالة أكثر تعقيداً ، افترض أن شركة National Auto تقوم بتصنيع نوعين من المنتجات – سيارات وشاحنات .[4] ولديها أربعة أنواع من قطاعات العمل ذات سعة ثابتة وهي : تجميع السيارات ، وتجميع الشاحنات ، وتجميع المحركات ، وتشكيل شرائح الصلب . والسؤال الذي يجب طرحه هو : ما هو عدد السيارات وما هو عدد الشاحنات الذي يجب على الشركة إنتاجه ؟ يعتمد الربح لكل سيارة أو شاحنة على ثلاثة عوامل هي سعرها والتكاليف المتغيرة لإنتاج كل سيارة أو شاحنة والتكاليف الثابتة للشركة . افترض أن السعر ومتوسط التكاليف المتغيرة ثابتين لكل منتج ؛ أي أنهما لا يتغيران بتغير كمية الإنتاج في المدى المحدد . وعلى وجه التحديد ، افترض أن سعر السيارة 20,000 دولار وسعر الشاحنة 30,000 دولار ، وأن متوسط التكاليف المتغيرة للسيارة 19,700 دولار وللشاحنة 29,750 دولار . وترغب هذه الشركة معظمة أرباحها مع إغفال التكاليف الثابتة (والتي تبقى دون تغير بغض النظر عما تفعله الشركة) ، وعليه فإن أرباح الشركة (لكل ساعة) تساوي :

$$\pi = 300Q_a + 250Q_t \qquad (10.10)$$

حيث Q_a هي عدد السيارات التي تنتجها الشركة في الساعة و Q_t هو عدد الشاحنات التي تنتجها الشركة في الساعة . ولما كانت الشركة تحقق هامش ربح قدره 300 دولار (أي $19,700 - $20,000) لكل سيارة يتم إنتاجها ، و 250 دولار (أي $29,750 - $30,000) لكل شاحنة يتم إنتاجها ، فإن أرباح الشركة (قبل خصم التكاليف الثابتة) تساوي 300 دولار مضروباً في عدد السيارات مضافاً إليها 250 دولار مضروباً في عدد الشاحنات .

جدول (10.1) السعة الإنتاجية المطلوبة من شركة National Auto لإنتاج سيارة أو شاحنة (كل ساعة) .

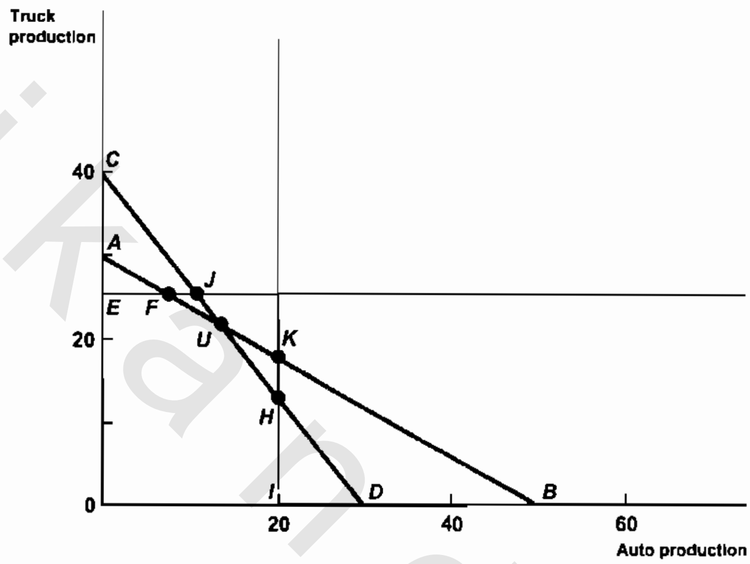
السعة	سيارة	شاحنة
تجميع سيارة	5	0
تجميع محركات	2	3.333
شرائح معدنية	$3\,^1/_3$	2.5
تجميع شاحنة	0	4

ما هي الشروط المقيدة لقرارات المديرين ؟ يمكن إجمال هذه الشروط في ثبات قدرة تجميع كل من السيارات والشاحنات والمحركات وتشكيل الشرائح المعدنية . يوضح الجدول (10.1) نسبة إجمالي قدرة قطاعات العمل اللازمة لإنتاج سيارة أو شاحنة واحدة . ومن هذا الجدول يمكننا التعبير عن الشروط المقيدة لإنتاج السيارات والشاحنات من خلال المتباينات التالية :

[4] هذه الحالة هي تعديل لمثال مشهور موجود في : R. Dorfman, "Mathematical or Linear Programming: a Nonmathematical Exposition," تم إعادة طبعه في Mansfield, *Managerial Economics and Operation Research*, 5th ed. . تم استخدام أرقام مختلفة لتبسيط النتائج . ولتطبيقات في صناعة البترول راجع : W. Garvin and others, "Applications of Linear Programming in the Oil Industry," in Mansfield, *Managerial Economics and Operation Research*, 5th ed.

$$0.05Q_a \le 1 \qquad (10.11)$$
$$0.04Q_t \le 1 \qquad (10.12)$$
$$0.02Q_a + 0.033Q_t \le 1 \qquad (10.13)$$
$$0.33Q_a + 0.025Q_t \le 1 \qquad (10.14)$$
$$Q_a \ge 0;\ Q_t \ge 0 \qquad (10.15)$$

تمثل المتباينات (10.11) و (10.12) الشروط التي تفرضها قدرة تجميع السيارات والشاحنات المتاحة . بما أن كل سيارة يتم إنتاجها في الساعة تستهلك 5% من قدرة تجميع السيارات ، فإن 0.05 مضروباً في الناتج لكل حالة لابد أن يكون أقل من أو مساوياً لـ 1 . ويوضح الشكل (10.8) إنتاج السيارات بالشركة في مقابل إنتاج الشاحنات ، ويوضح الخط الرأسي عند 20 سيارة تأثير ذلك الشرط ، نظراً لأن 20 هو أقصى عدد للسيارات التي يمكن إنتاجها تحت هذا الشرط . وبالمثل ، بما أن كل شاحنة يتم إنتاجها في الساعة تستهلك 4% من قدرة تجميع الشاحنات ، فإن 0.04 مضروباً في الإنتاج للساعة من الشاحنات لابد أن يكون أقل من أو مساوياً لـ 1 . ويوضح الخط الأفقي في الشكل (10.8) عند 25 شاحنة في الساعة ما لهذا الشرط من أثر ، حيث أن 25 هو أقصى عدد يمكن إنتاجه من الشاحنات تحت هذا الشرط .



شكل (10.8) توليفات الإنتاج المثلى لشركة National Auto : التوليفات الكفأة لإنتاج السيارات والشاحنات تقع كلها بداخل المساحة *OEFUHI* .

توضح المتباينة (10.13) أنه لا يمكن استخدام أكثر من القدرة المتاحة من تجميع وإنتاج المحركات . فبما أن كل سيارة يتم إنتاجها في الساعة تستهلك 2% من قدرة الإنتاج ، وبما أن كل شاحنة يتم إنتاجها في الساعة تستهلك 3.33% من قدرة الإنتاج ، لذا فإن 0.02 مضروباً في إنتاج السيارات بالساعة و 0.33 مضروباً في عدد الشاحنات التي يتم إنتاجها بالساعة يجب أن يكون أقل من أو يساوي 1 . لذلك فـإن الخـط AB في الشكل (10.8) يميز بين توليفات إنتاج السيارات والشاحنات من ناحية وتلك التوليفات التي تفوق قدرة إنتاج المحركات من ناحية أخرى . فلكي يكون أي من التوليفات كفئاً ، لابد أن يكون على المثلث OAB أو بداخله . وتوضح المتباينة (10.14) أنه لا يمكن استخدام أكثر من القدرة المتاحة لتشكيل المعادن . وبما أن كل سيارة يتم إنتاجها في الساعة تستهلك 3.33% من قدرة تشكيل المعادن ، وكل شاحنة يتم إنتاجها تستهلك 2.5% من قدرة تشكيل المعادن ، فإن 0.033 مضروباً في عدد السيارات التي يتم إنتاجها في الساعة مضافاً إليه 0.025 مضروباً في عدد الشاحنات التي يتم إنتاجها في الساعة لابد وأن يكون أقل من أو يساوي 1 . لذلك فإن الخط CD في الشكل (10.8) يميز بين التوليفات المجدية للمنتجات وتلك التي تفوق قدرة تشكيل المعادن . فلكي تكون التوليفات كفأة ، لابد أن تقع على أو بداخل المثلث OCD .

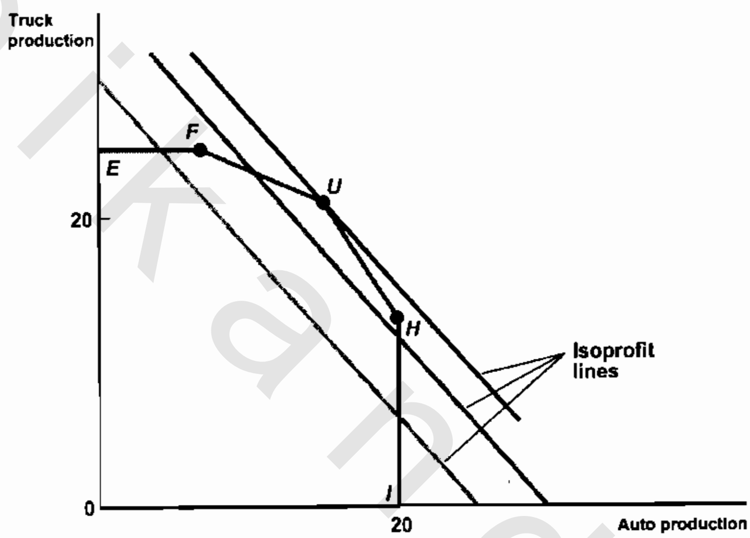
وللوفاء بكل هذه الشروط ، لابد أن تقع توليفة إنتاج السيارات والشاحنات بداخل المنطقة $OEFUHI$ في الشكل (10.8) . وأي نقطة تقع خارج هذه المنطقة فإنها تخل بواحد من الشروط على الأقل . فمثلا النقطة C تستخدم قدرة تجميع محركات وقدرة تجميع شاحنات أكبر من تلك

المتاحة ، والنقطة K تستهلك قدرة تشكيل معادن أكبر من تلك المتاحة . ونلاحظ أن هذه هي إحدى مشكلات البرمجة الخطية ، حيث أن الدالة الهدف معطاة في المعادلة (10.10) والشروط معطاة في المتباينات (10.11) حتى (10.15) . وتوجد عمليتان هما إنتاج السيارات وإنتاج الشاحنات ، وكل منهما تستخدم الأنواع الأربعة من القدرة بنسب ثابتة (وإن كانت مختلفة عن بعضها البعض) . ولعل أفضل الأساليب الممكنة لحل هذه المشكلة هو اللجوء إلى الحل البياني عن طريق إضافة مجموعه من مستقيمات الأرباح المتساوية في الشكل (10.8) . ويتحقق ذلك في الشكل (10.9)، حيث يعبر كل من هذه المستقيمات عن التوليفات المختلفة لإنتاج السيارات والشاحنات التي تؤدي إلى الحصول على نفس مقدار الأرباح (مشتملة على كافه التكاليف الثابتة) . فإذا كانت π هي الربح ، فإن معادلة منحنى الربح المتساوي هي :

$$Q_t = \frac{\pi}{250} - \frac{300}{250} Q_a \qquad (10.16)$$

من الواضح أنه يجب إيجاد النقطة التي تقع بداخل منطقة الحلول الممكنة $OEFUHI$ والتي تقع مماسة لأعلى خط مستقيم للأرباح المتساوية .

يوضح الشكل (10.9) أن الحل الأمثل هو عند النقطة U حيث تنتج الشركة 13.6 سيارة و 21.8 شاحنة في الساعة . وعند هذه المستويات من الإنتاج ، يكون إجمالي أرباح الشركة (متضمنا التكاليف الثابتة) هو 9,547 دولار في الساعة .[5]



شكل (10.9) توليفات الإنتاج الكفأة لشركة National Auto : التوليفة المثلى عند النقطة U حيث تنتج الشركة 13.6 سيارة و 21.8 شاحنة في الساعة .

[5] كيف يمكن أن تقوم إحدى الشركات بتحقيق إنتاج قدره 13.6 سيارة في الساعة ؟ يمكن ذلك بإنتاج 68 سيارة كل 5 ساعات . في الحالات التي ينبغي أن يتألف فيها الحل من أعداد صحيحة ، فإنه لابد من استخدام أحد مكملات البرمجة الخطية والمعروف ببرمجة الأعداد الصحيحة . راجع : W. Baulmol, *Economic Theory and Operations Analysis*, Chapter 8 . لاحظ أنه من السهل إيجاد إحداثيات U بتحويل المتباينتين (10.13) و (10.14) إلى معادلتين وحلهما آنيا لإيجاد Q_a و Q_t .

كيف تساعدنا البرمجة الخطية في رفع مستوى أداء الطائرات

تستخدم البرمجة الخطية في عدد كبير من الصناعات والشركات . ومن الأمثلة على ذلك ، شركة Delta Airlines والتي تستخدم البرمجة الخطية لخفض تكاليف نقل طاقم الطائرات من مكان لآخر . ولما كانت قواعد العمل تحدد ساعات الطيران اليومية للطاقم بالإضافة إلى وقت الانتظار في المطارات إلى غير ذلك من عوامل، فإن جزءاً كبيراً من وقت الطيارين والمضيفين يضيع هباءً ، وذلك من وجهة نظر شركة الطيران . ومع جهود الشركة المستمرة في تقليل الوقت والتكاليف الضائعة ، فقد تم تركيز الانتباه على جداول الطاقم (8,500 طيار و 17,600 مضيف ومضيفة) لتغطية حوالي 4,900 رحلة جوية يومياً إلى أكثر من 220 مدينة حول العالم ، وذلك بالاستعانة بأكثر من 550 طائرة من 8 أنواع تأتي من حوالي 12 قاعدة طيران مختلفة . ومحاولة منها للإسهام في حل هذه المشكلة الكبيرة والمعقدة ، قامت الشركة باستحداث نموذج جديد من البرمجيات . والجدير بالذكر أن هذا النموذج البرمجي الجديد – والذي يعمل بنظام البرمجة الخطية – يعتمد على طريقة النقطة الداخلية . وبالإضافة إلى ذلك ، فإنه يعطى أفضل القيم بدون الحاجة لتوليد ملايين الاحتمالات ، الأمر الذي يسهل من قدره الطاقم على تحليل جداول العمل المختلفة وإجراء التغيرات اللازمة في قواعد العمل .

وقد أسفرت النتائج التي حصلت عليها الشركة نتيجة لاستخدام هذا النموذج إلى تحقيق وفر يقدر بـ 20 مليون دولار سنوياً . وبالإضافة إلى الوفر المالي ، تم تحقيق تحسن في نوعية الحياة بالنسبة للطاقم ، لأنهم الآن يعملون وفق جداول تجعلهم يتغيبون عن القواعد الرئيسية لفترات أقل من قبل . وبالإضافة إلى جداول أطقم العاملين ، تقوم شركة Delta باستخدام البرمجة الخطية لمواجهة عدد من مشكلات التخطيط ، بما فيها صيانة الطائرات وتحديد أسطولها الجوى وتخطيط الموارد البشرية . وتقوم الوكالات الحكومية ، مثلها في ذلك مثل الشركات ، باستخدام البرمجة الخطية للمساعدة في حل عدد من المشكلات بخصوص عمليات الطيران . حيث قامت القيادة العامة للقوات الجوية باستخدام البرمجة الخطية للمساعدة على الحصول على أداء أفضل في مجال الطائرات . ففي بعض المشكلات التي تتضمن جدولة طائرات الإمداد العسكري يكون هناك أكثر من 300,000 متغير وحوالي 15,000 شرط يجب التعامل معها . وبينما تكون المشكلات من هذا النوع أكثر تعقيداً بشكل كبير من المشكلات التي نحن بصددها في هذا الفصل إلا أن المفاهيم الأساسية لا تختلف عن تلك المستخدمة هنا .*

* تمت مناقشه هذه الأمثلة في : D. Werkheiser, "Karmarker Algorithm," National Technological University 1991 . كما قامت شركة Delta Airlines بتوفير بعضاً من هذه المواد .

النقاط المتطرفة وطريقة الـ Simplex

كما أشرنا في بداية هذا الفصل ، فإن أحد الأسباب الهامة التي أسهمت في استخدام البرمجة الخطية هو استحداث طرق رياضية ناجحة لإيجاد حلول رقمية لمشكلات البرمجة الخطية . وتقوم هذه الطرق بالاستفادة من الحقيقة التالية : وهي أن افضل الحلول هو الحل الذي يقع عند أحد النقاط المتطرفة أو الأركان لمنطقة الحلول الممكنة .[6] وتتفق هذه القاعدة مع الحالات التي ناقشناها في الأجزاء السابقة . فمثلاً في الشكل (10.9) نجد أن النقطة المثلى U تقع على النقطة المتطرفة من المنطقة $OEFUHI$ ، وفي الشكل (10.6) كانت أفضل نقطة K نقطة متطرفة للمنطقة $OHKM$. وهذه الحقيقة تقلل بشكل كبير عدد النقاط التي يجب التعامل معها لمعرفة أفضل حل ، حيث أنها تعني أننا لسنا في حاجة إلا إلى النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة . فإذا نظرنا إلى الشكل (10.9) ، نلاحظ وجود ستة نقاط متطرفة للمنطقة $OEFUHI$. وللحصول على الحل الأمثل فإننا لسنا في حاجة إلا إلى حساب الأرباح (متضمنة التكاليف الثابتة) عند كل من هذه النقط . فعند نقطة الأصل ، نلاحظ أن الأرباح تساوي صفر . وعند

[6] بطبيعة الحال فإنه يحدث أحياناً أن تكون بعض النقاط الأخرى بنفس درجة النقاط المتطرفة ولكنها لا تكون أفضل منها .

$E(Q_a = 0 , Q_t = 25)$ ، تكون الأرباح 6,250 دولار . وعند $I (Q_a = 20 , Q_t = 0)$ تكون الأربـــاح 6,000 دولار . ويجـــب إيجـــاد إحداثيات النقاط الثلاث الأخرى قبل أن نتمكن من حساب الأرباح عندها . لمعرفة إحداثيات F يجب تحويل المتباينـــات (10.12) و (10.13) إلى معادلات وحلها آنياً ، ولمعرفة إحداثيات U نجعل المتباينات (10.13) و (10.14) معادلات ونحلها آنيا . ولمعرفة إحداثيات H نجعـــل المتباينـــات (10.11) و (10.14) معادلات ونحلها آنيا . وعند النقطة F تقع عند ($Q_a = 8.33$ و $Q_t = 25$) نجد أن الأرباح الناتجة تســـاوي 8,750 دولار ، وأن النقطة U تقع عند ($Q_a = 13.6$ و $Q_t = 21.8$) تكون النتيجة هي أن الأرباح تساوي 9,547 . وعند النقطـــة H تقـــع عنـــد ($Q_a = 20$ و $Q_t = 13.33$) تكون النتيجة هي أن الأرباح تساوي 9.333. وبناء على هذه الحسابات القليلة نجد أن النقطة U هـــي الحـــل الأفضل .

فإذا كان عدد الطرق والشروط كبيراً جداً بحيث يصعب استخدام العملية البيانية الموضحة في الأقسام السابقة ، فإن هذا النوع من المقارنـــات بين النقاط المتطرفة يمكن استخدامه للحصول على أفضل حل. وتلك العملية المعروفة باسم طريقة simplex – والتي يمكن استخدامها لهذا الغرض – هي طريقة منظمة للمقارنة بين حلول النقاط المتطرفة أو الأركان.[7] وفي وجود سرعة وقوة الحاسبات الحديثة فإن هذه العملية يمكنها حل المشـــاكل شديدة التعقيد بسرعة كبيرة .

مفاهيم وثيقة الصلة

استخدام البرمجة الخطية في اختيار مشروعات البحث والتطوير

سبق وأن أشرنا في الفصل الثامن إلى أهمية البحث والتطوير في زيادة الإنتاج ، ومع ذلك فقد تؤدي عمليتا البحث والتطوير بالشـــركات إلى تكبـــد تكاليف باهظة . لذا فإن تبني أحد المشروعات دون الآخر يتطلب اتخاذ قرارات حاسمة . وقد قامت العديد من الشـــركات والوكـــالات الحكوميـــة باستخدام طرق البرمجة الخطية للمساعدة في مشروعات البحث والتطوير . ولإيضاح ذلك افترض أنه لدى Du Pont قائمة تتكون من عدد n مـــن مشروعات البحث والتطوير الممكن إجراؤها ، وأن تبني إجراء المشروع i سوف يكلف C_i دولار . وبالإضافة إلى ذلك افترض أن المشـــروع i لـــه احتمال نجاح P_i ، وأنه في حالة نجاحه فإنه سيحقق ربحاً قدره π_i (مشتملا على تكاليف البحث والتطوير) . إذن ، إذا كان باســـتطاعة الشـــركة إنفاق ما لا يزيد عن C دولاراً على البحث والتطوير ، وكانت تريد معظمة قيمة الأرباح المتوقعة ، فإنه يمكن التعبير عن هذه المشكلة علـــى النحـــو التالي :

$$\text{Maximize} \sum_{i=1}^{n} X_i (P_i \pi_i - C_i)$$

بشرط أن :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i C_i \leq C$$

أي أن مشكلة Du Pont تتمثل في اختيار X_i (بحيث $X_i = 1$ عند قبول المشروع i و $X_i = 0$ عند رفضه) ، وبحيث تكون القيم المتوقعـــة للأرباح أكبر ما يمكن بشرط أن المبلغ المدفوع للبحث والتطوير لا يزيد عن C. ولما كانت X_i تساوي صفر أو 1 ، فإن هذه المشكلة ليست مشـــكلة برمجة خطية عادية ، إذا أنها تعرف ببرمجة الأعداد الصحيحة ، وهي من الأهمية بمكان لأغراض الدراسة الحالية. وتشير الأبحاث إلى أن عدد من المعـــامل الكبرى في الصناعات الكيميائية والدوائية والإلكترونية تستخدم هذه الطرق. لكن ذلك لا يعني أن هذه الطرق تلعب دوراً جوهريا في عملية اتخـــاذ القرار. ولعل أحد أسباب عدم استخدام طرق البرمجة الخطية بشكل أكثر كثافة هو أن البيانات المتعلقة بـــ P_i و π_i و C_i غالباً ما تكون تقريبيـــة إلى حد كبير. وكثيراً ما يكون هناك خلافات حول قيمة P_i بالنسبة للمشروع ، حيث يشعر البعض بأن المشروع اقرب ما يكون للنجاح ، بينما لا يـــرى آخرون فيه أية بادرة أمل . كما أنه من الصعب تقدير قيمة π_i . كما يكون من الصعب التنبؤ بتكلفة المشروع (C_i). فقد يقدم العلماء والمهندسون تقديرات مغرقة في التفاؤل كي يتمكنوا من تسويق مشروعاتهم لدى الإدارة العليا. وما يجب علينا تعلمه هو أنه على الرغم من أن طرق البرمجة مـــن

[7] في سنة 1984 قام السيد N. Karmarkar من شركة Bell Labs باقتراح نوع جديد من الحساب من شأنه التوصل إلى حلول أكـــثر ســـرعة لمشـــكلات البرمجة الخطية ، ولكننا لسنا في حاجة للخوض في هذا الحساب هاهنا .

الفائدة بمكان إلا أنه لا يمكن الاعتماد عليها تماماً في غياب البيانات الأساسية . فإذا كانت الأرقام في الدالة الهدف والشروط عرضة لأخطاء كبيرة جداً ، فإنه يجب التعامل مع النتائج بقدر من الحذر .

الصيغة الثنائية وأسعار الظل

تساعدنا البرمجة الخطية فيما هو أبعد من مجرد التوصل إلى أحد برامج الإنتاج المثلى ، حيث يمكن أيضاً إيجاد قيم عناصر الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية . ولإيضاح ذلك افترض أن شركة National Auto تريد أن تحسب أثر إضافة مقدار معين من عناصر الإنتاج على الربح أو دالة الهدف. أن ذلك يتطلب قيام الشركة بالاستعانة بالبرمجة الخطية الموضحة آنفاً مع افتراض أنه لدى الشركة كمية ضئيلة من هذه العناصر – المعادن . عندئذ يمكن المقارنة بين الحد الأقصى من الأرباح الممكنة في حالة وجود هذه الإضافة من ناحية والحد الأقصى من الأرباح الممكنة في حالة عدم وجود هذه الإضافة من ناحية أخرى . وعلى الرغم من أن هذه العملية سليمة تماماً إلا أنها تنطوي على شيء من التعقيد . هذا ويلاحظ أن لكل مشكلة من مشكلات البرمجة الخطية توجد مشكلة مقابلة تعرف بالمشكلة الثانوية بينما تعرف الأخرى بالمشكلة الأساسية . فإذا كانت المشكلة الأساسية مشكلة معظمة كانت المشكلة الثانوية مشكلة تدنية . أما إذا كانت المشكلة الأساسية مشكلة تدنية كانت المشكلة الثانوية مشكلة معظمة ، وحلول المشكلة الثانوية تؤدي إلى قيم أسعار الظل المطلوبة .

لذلك فإن أسعار الظل – في مشكلة شركة National Auto – تحدد ما الذي سوف يحدث لأرباح الشركة إذا نجحت الشركة في زيادة عنصر الإنتاج المعني بقدر معين . وتتميز أسعار الظل بفوائدها الجمه ؛ فهي تحدد قيمة العناصر التي قد تعترضها اختناقات أو عوائق فعالة للإنتاج ، لأن سعر الظل للعنصر الذي لا يستغل بشكل كامل دائماً يساوي صفراً . والأهم من ذلك أنها تمكن الإدارة من الوقوف على مدى جدوى التوسع في استخدام عناصر الإنتاج . ويمكن إجراء مقارنة بين الزيادة في الربح الناتجة عن التوسع في استخدام بعض عناصر الإنتاج وبين الزيادة في التكاليف التي لا مفر للشركة من تكبدها . فإذا كانت الزيادة في التكاليف أقل من الزيادة في الربح – كما يشير إلى ذلك سعر الظل – كان التوسع ذا نفع كبير . والعكس بالعكس فإذا كان باستطاعة شركة National Auto زيادة الشرائح المعدنية – كأحد عناصر الإنتاج بتكلفة قدرها 300 دولار، وكانت تلك الزيادة سبباً في زيادة قدرها 400 دولار في الأرباح، فإنه يجب على مديري الشركة استخدام المزيد من هذه الشرائح – شراءاً أو تأجيراً.

العلاقة بين المشكلة الأساسية والمشكلة الثانوية

لإيضاح العلاقة بين المشكلة الأساسية والمشكلة الثانوية، افترض أن شركة Ajax Chemical تبيع أسود الكربون والإيثير ، وأن نسبة الأرباح لكل وحدة أسود كربون يتم إنتاجها هي 50 دولار ولكل وحدة إيثير هي 80 دولار، وتريد الشركة معظمة إجمالي معظمة إجمالي الأرباح والتي تساوي :

$$\pi = 50Q_1 + 80Q_2 \qquad (10.17)$$

حيث Q_1 هو عدد وحدات أسود الكربون التي يتم إنتاجها و Q_2 هو عدد وحدات الإيثير التي يتم إنتاجها . ولإنتاج أسود الكربون والإيثير تستخدم الشركة عمالة ومعدات . وتستخدم كل وحدة أسود كربون عند إنتاجها 2 ساعة عمالة و 3 ساعات معدات ، وكل وحدة إيثير 3 ساعات عمالة و 2 ساعة معدات . ويتوافر للشركة أكثر من 4,000 ساعة عمالة و 5,400 ساعة معدات (ولا يمكنها استخدام المزيد) ، وحيث :

$$2Q_1 + 3Q_2 \leq 4{,}000 \qquad (10.18)$$

$$3Q_1 + 2Q_2 \leq 5{,}400 \qquad (10.19)$$

كما أن :

$Q_1 \geq 0$ و $Q_2 \geq 0$

تتمثل المشكلة الأساسية في إيجاد قيم Q_1 و Q_2 التي من شأنها معظمة قيمة π [في المعادلة (10.17)] في ظل شروط المعادلتين (10.18) و (10.19) . ما هي المشكلة الثانوية المناظرة ؟ كما أوضحنا في القسم السابق فإنها تنطوي على تدنية – وليس معظمة – وبالتحديد فإن المشكلة هي تدنية إجمالي قيمة العمالة والمعدات المتوافرة . وبمعرفة أن S_L و S_E هي أسعار العمالة والمعدات ، فإن القيمة الإجمالية تساوي :

$$V = 4{,}000S_L + 5{,}400S_E \qquad (10.20)$$

وهذه الأسعار (S_L و S_E) هي أسعار الظل التي ناقشناها في القسم السابق . وشروط المشكلة الثانوية هي :

$$2S_L + 3S_E \geq 50 \qquad (10.21)$$
$$3S_L + 2S_E \geq 80 \qquad (10.22)$$

كما أن :

$S_L \geq 0$ و $S_E \geq 0$

والشرط في المعادلة (10.21) ينص على أن إجمالي قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة أسود الكربون يجب أن يكون على الأقل مساوياً للربح من هذه الوحدة ، والشرط في (10.22) ينص على أن إجمالي قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة الإيثير لابد أن يكون على الأقل مساوياً للربح من هذه الوحدة .

والمطلوب هو إيجاد قيمة S_L و S_E التي تؤدي إلى تدنية V في المعادلة (10.20) في ظل الشروط (10.21) و (10.22) . وقيم S_L و S_E ، والتي يمكن تحديدها باستخدام الطرق البيانية المذكورة أعلاه هي أسعار الظل للعمالة والمعدات . وهي الأسعار التي يجب أن يكون المدير مستعداً لدفعها في مقابل استخدام هذه الموارد ، أي أنها تكلفة الفرصة البديلة لاستخدام هذه الموارد . فإذا لم يتم استخدام أحد الموارد بالشكل الأمثل فإن سعر الظل له سوف يكون صفراً ، لأن وجود وحدة إضافية منه لن تؤدي إلى زيادة الأرباح ، فالشركة تمتلك من ذلك المورد أكثر مما يمكنها استخدامه بكفاءة . ومن ناحية أخرى إذا كان ذلك المورد – أو العنصر – يتم استخدامه بالكامل فإن سعر الظل له سوف يكون موجباً لأن تكلفة الفرصة البديلة له تكون موجبة أيضاً .

تحليل القرارات الإدارية

نقل الرمال في مطار Brisbane

عند إعادة تطوير مطار Brisbane الدولي تم جلب حوالي 2 مليون متر مكعب من الرمال من أحد الخلجان القريبة ، وذلك عبر أحد خطوط الأنابيب إلى عدد من المواقع . وكان يتم جلب المزيد من الرمال للمساعدة في ضغط الأرضيات الطينية في المواقع ، أما الكميات الزائدة فكانت تنقل بعيداً باستخدام الشاحنات والأوناش . ويوضح الجدول التالي المسافة بين المصدر والوجهة في كل حالة ، بالإضافة إلى كمية الرمال المتوافرة في كل مصدر والكمية المطلوبة عند كل وجهة . وقد أدى استخدام البرمجة الخطية في هذه الحالة إلى وفر في تكاليف النقل يقدر بـــ 400,000 دولار .*

المصدر	الوجهة									الكمية المتاحة (m^3)
	محدد الموقع N	التمدد	الأراضي المنخفضة	الطرق	موقف السيارات	محدد الموقع S	محطة الإطفاء	صناعة البترول	محيط الطريق	
	المسافة (بالمتر) بين المصدر والوجهة									
ساحة المطار	22	26	12	10	18	18	11	8.5	20	960
المحط الأخير	20	28	14	12	20	20	13	10	22	201
منطقة شركة الطيران	16	20	26	20	1.5	28	6	22	18	71
الصيانة	20	22	26	22	6	__	2	21	18	24
منطقة دخول الطريق	22	26	10	4	16	__	24	14	21	99
الكمية المطلوبة (m^3)	62	217	444	315	50	7	20	90	150	1355

(أ) إذا كانت تكاليف نقل الرمال تتناسب مع كمية الرمال مضروبة في المسافة ، فما هي الصيغة الرياضية التي يمكن أن تعبر عن الكميات التي يجب على مديري المطار معظمتها أو تدنيتها ؟

(ب) ما هي الشروط التي يجب الوفاء بها ؟

(ج) في واقع الأمر ، لقد قام مديرو المطار بالاستعانة بالبرمجة الخطية - راجع برنامج LINDO السابق شرحه - لحل هذه المشكلة ، ووجدوا أنــه بالإمكان جلب كل الرمال المطلوبة في الأراضي المنخفضة من ساحة المطار . هل يبدو ذلك معقولاً ؟ لم ؟ أو لم لا ؟

(د) تم حذف رقمين من الأرقام السابقة . هل يمكن حل المشكلة بدونهما ؟ وكيف يمكن تقديرهما ؟

الحــل

(أ) تدنية

$$\sum_i \sum_j T_{ij} \cdot D_{ij}$$

حيث T_{ij} هو عدد الأمتار المكعبة من الرمال التي يتم نقلها من المصدر i إلى الوجهة j و D_{ij} هو المسافة بالأمتار من المصدر i إلى الوجهـــة j . وهذا هو مجموع كمية الرمال مضروباً في مسافة النقل ، وهي تتناسب مع إجمالي تكاليف نقل الرمال . علماً بأن قيم D_{ij} موضحة بـــالجدول . وتتمثل المشكلة في إيجاد قيم T_{ij} التي تؤدي إلى تدنية :

$$\sum_i \sum_j T_{ij} \cdot D_{ij}$$

(ب) لا يجب أن تزيد كمية الرمال المنقولة من المصدر i^{th} عن الكمية المتاحة . كما يجب ألا تقل كمية الرمال المنقولة إلى الوجهة j^{th} عـــن الكميـــة المطلوبة . ويجب أن تكون قيمة T_{ij} غير سالبة لكل من i و j .

(ج) المنطقة المنخفضة قريبة من ساحة المطار (12 متر) وهو ما يجعل ذلك معقولاً ، إلا أنه في مشكلة معقدة من هذا النوع لا يكون من الســـهل تحديد الحل من أول وهلة . فلو كان ذلك سهلاً لما كانت هناك حاجة لطرق تحليلية مثل البرمجة الخطية .

(د) لا . لتقدير هذين الرقمين قم بتحديد المسافة بين محدد الموقع S من ناحية وكلاً من منطقة الصيانة وطريق الدخول من ناحية أخرى .

* C. Perry and M. Lliff, "From the Shadows: Earthmoving on Construction Projects," *Interfaces* (February 1983), pp. 79-84.

المتغيرات الخاملة

لتحديد إحدى مشكلات البرمجة الخطية جبرياً فإنه من المفيد استخدام ما يسمى بالمتغيرات الخاملة للتعبير عن الكميات الغير مستخدمة مـــن عنـــاصر الإنتاج المختلفة . ففي حالة شركة Ajax التي قمنا بمناقشتها في الجزء السابق طبقاً للمتباينة (10.18) ، فإن كمية العمالة المستخدمة لابد أن تكـون أقل من أو تساوي 4,000 ساعة . فإذا جعلنا U_L هي المتغير الخامل وقيمته تساوي عدد ساعات العمالة غير المستخدمة ، فإنه يمكننا تحويل المتباينـــة (10.18) إلى المعادلة التالية :

$$2Q_1 + 3Q_2 + U_L = 4{,}000 \qquad (10.23)$$

وللتأكد من صحة هذه المعادلة تذكر أن عدد ساعات العمالة التي تستخدمها الشركة تساوي $2Q_1 + 3Q_2$ ؛ لذلك فإن هذه الكمية زائـــد عـــدد ساعات العمالة غير المستخدمة (U_L) يجب أن تساوي 4,000 ، أي الكمية المتاحة . وبالمثل إذا جعلنا U_M هو المتغير الخامل الذي يســـاوي عـــدد ساعات العمالة غير المستخدمة ، فإنه يمكننا تحويل المتباينة (10.19) إلى المعادلة التالية :

$$3Q_1 + 2Q_2 + U_M = 5{,}400 \qquad (10.24)$$

وللتأكد من صحة هذه المعادلة تذكر أن عدد ساعات الآلات التي تستخدمها الشركة تساوي $3Q_1 + 2Q_2$ ؛ لذلك فإن هذه الكمية زائـــد عـــدد ساعات الآلات غير المستخدمة (U_M) يجب أن تساوي 5,400 ، أي الكمية المتاحة . وبالإضافة إلى إمكانية وضع الشروط في صورة معـــادلات - وهو ما يبسط التحليل الجبري - فإن وجود هذه المتغيرات الخاملة يوفر معلومات هامة ، حيث تكون قيم هذه المتغيرات على قدر كبير من الأهميـــة . فإذا كان عدد المتغيرات الخاملة يساوي الصفر فإن ذلك يعني أن الشركة تستفيد من ذلك العنصر بشكل كامل عند معظمة الأرباح . وإذا كانت ذات قيمة موجبة ، فإن ذلك يعني أن جانباً من عناصر الإنتاج فائض عن الحاجة .

الحل الجبري لمشاكل البرمجة الخطية

بعد أن قمنا بوضع تعريف المتغيرات الخاملة يمكننا الآن شرح كيفية استخدام الطرق الجبرية كبديل للطرق البيانية التي سبق تفصيلها – لحل مشاكل البرمجة الخطية . ولنعاود الحديث عن شركة Ajax للكيماويات والتي سبق وأشرنا إلى رغبتها في معظمة إجمالي الأرباح :

$$\pi = 50Q_1 + 80Q_2 \qquad (10.25)$$

حيث Q_1 هو عدد وحدات أسود الكربون و Q_2 هو عدد وحدات الإيثير المنتجة . وبما أنه لا يمكن استخدام أكثر من 4,000 ساعة عمالة ، فإن :

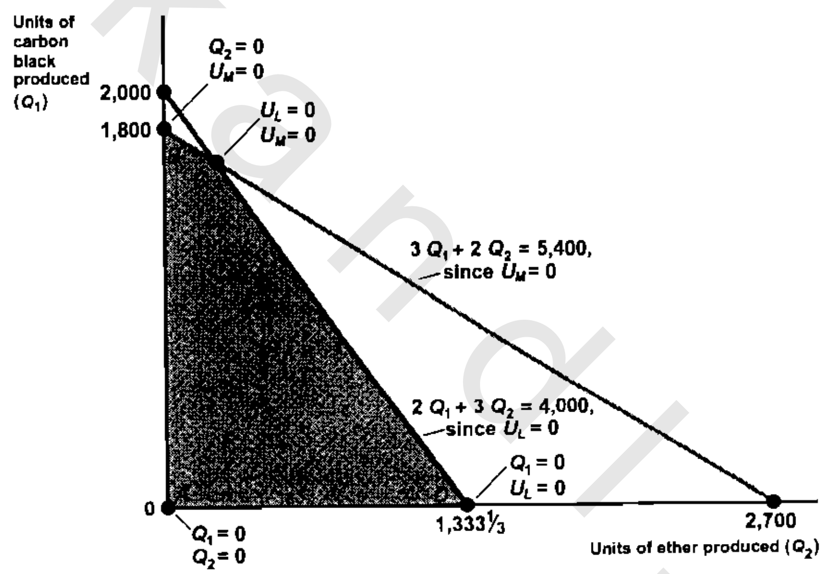
$$2Q_1 + 3Q_2 + U_L = 4{,}000 \qquad (10.26)$$

وبما أنه لا يمكن استخدام أكثر من 5,400 ساعة آلات ، فإن :

$$3Q_1 + 2Q_2 + U_M = 5{,}400 \qquad (10.27)$$

وقد علمنا من الجزء السابق أن U_L هي عدد ساعات العمالة غير المستخدمة و U_Mهو عدد ساعات الآلات غير المستخدمة وكلاهما متغيرات خاملة.

وقد أكدنا فيما سبق أن الحلول المثلى لكافة مسائل البرمجة الخطية دائماً ما تقع عند أحد الأركان أو النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة. وفي حالة Ajax ، نجد أن هذه المنطقة هي المنطقة المظللة في الشكل (10.10) ، وبما أن هذه هي النقاط الوحيدة التي تفي بالشروط [راجع المتباينات (10.18) و (10.19)] فإنه توجد أربعة أركان : A و B و C و D . ولا يمكننا حل هذه المشكلة جبرياً إلا بعد أن نقوم بتحديد قيم كل من Q_1 و Q_2 و U_L و U_M عند كل من هذه الأركان . وكما هو موضح في الشكل (10.10) فإن اثنين من هذه المتغيرات الأربعة يساويان الصفر عند كل ركن .[8] ويتمثل أفضل الحلول عند الركن الذي يبلغ عنده إجمالي الأرباح أعلى نقطة له .



شكل (10.10) تحديد المتغير المساوي للصفر عند الأركان (A و B و C و D) في المنطقة المجدية :
اثنان من المتغيرات الأربعة (A و B و C و D) يساويان الصفر عند كل ركن .

النقطة A : بما أن A تقع عند نقطة الأصل فإن كل من Q_1 و Q_2 تساوي الصفر . وبالتعويض عن هاتين القيمتين في المعادلتين (10.26) و (10.27) نجد أن $U_L = 4{,}000$ و $U_M = 5{,}400$ ، وبالإضافة إلى ذلك و بالتعويض في المعادلة (10.25) نجد أن $\pi = 0$. وتوجد هذه النتائج في الصف الأول من الجدول (10.2) .

النقطة B : بما أن النقطة B تقع على المحور الرأسي فإن Q_2 تساوي صفر . و بما أن B تقع على الخط في الشكل (10.10) حيث $U_M = 0$ ، فإن $U_M = 0$ عند هذه النقطة . وبالتعويض بهذه القيم في المعادلتين (10.26) و (10.27) نحصل على :

[8] في معظم مشكلات البرمجة الخطية نجد أن عدد المتغيرات التي لا تساوي صفر في كل من الأركان مساوياً لعدد الشروط . وفي هذه الحالة بالتحديد يوجد شرطان : هما المتباينتان (10.18) و (10.19) .

$$2Q_1 + 3(0) + U_L = 4{,}000$$
$$3Q_1 + 2(0) + 0 = 5{,}400$$

وهو ما يعني أن :

$$Q_1 = \frac{5{,}400}{3} = 1{,}800$$

و

$$U_L = 4{,}000 - 2(1{,}800) = 400$$

وبما أن $Q_1 = 1{,}800$ و $Q_2 = 0$ فإن المعادلة (10.25) تعني أن $\pi = 90{,}000$. وذلك كما هو موضح في الصف الثاني من الجدول (10.2) .

النقطة C : بما أن النقطة C تقع عند تقاطع الخطين في الشكل (10.10) حيث $U_L = 0$ و $U_M = 0$ ، فإن كل من U_M و U_L تساوي الصفر عند تلك النقطة وبالتعويض في المعادلتين (10.26) و (10.27) نحصل على :

$$2Q_1 + 3Q_2 + 0 = 4{,}000$$
$$3Q_1 + 2Q_2 + 0 = 5{,}400$$

وبحل هاتين المعادلتين آنيا نجد أن $Q_1 = 1{,}640$ و $Q_2 = 240$ لذلك وبناء على المعادلة (10.25) فإن :

$$\pi = 50(1{,}640) + 80(240) = 101{,}200$$

وذلك كما هو موضح في الصف الثالث من الجدول (10.2) .

النقطة D : بما أن النقطة D تقع على المحور الأفقي فإن $Q_1 = 0$ ، وبما أنها تقع على الخط في الشكل (10.10) حيث $U_L = 0$ ، فإن $U_L = 0$ عند هذه النقطة . وبالتعويض في المعادلتين (10.26) و (10.27) نحصل على :

$$2(0) + 3Q_2 + 0 = 4{,}000$$
$$3(0) + 2Q_2 + U_M = 5{,}400$$

وهو ما يعني أن :

$$Q_2 = \frac{4000}{3} = 1{,}333\,\tfrac{1}{3}$$

و

$$U_M = 5{,}400 - 2(1{,}333\,\tfrac{1}{3}) = 2{,}733\,\tfrac{1}{3}$$

بما أن $Q_1 = 0$ و $Q_2 = 1{,}333$ فإن المعادلة (10.25) تخبرنا بأن $\pi = 106{,}666$ وذلك كما هو موضح في الصف الرابع من الجدول (10.2).

أفضل حل : كما أشرنا سابقاً يتمثل في ذلك الركن الذي يبلغ عنده إجمالي الأرباح π أعلى نقطة له . ونلاحظ أن العمود الأخير من الجدول (10.2) يعطي قيمة π عند كل ركن ، ومن الواضح أن أعلى قيمة لـ π تقع عند الركن D أي عند $Q_1 = 0$ و $Q_2 = 1{,}333$. لذلك فإن الحل الأمثل لـ Ajax يتحقق بإنتاج 1,333 وحدة إيثير وعدم إنتاج أسود الكربون .

جدول (10.2) الحل الجبري لمشكلة البرمجة الخطية لشركة Ajax Chemical .

الركن	Q_1	Q_2	U_L	Q_M	π
A	0	0	4,000	5,400	0
B	1,800	0	400	0	90,000
C	1,640	240	0	0	101,200
D	0	1,333	0	2,7333	106,666

تدنية تكاليف الشحن لشركة Essex

لعل أغلب مشكلات البرمجة الخطية التي تتصدى لها الشركات تفوق تلك المشكلة التي تصدت لها شركة Ajax . وذلك من حيث درجة الصعوبة والتعقد . ومن بين الأمثلة على ذلك شركة Essex والتي تمتلك مصنعين للإنتاج وثلاث مواقع للتخزين . يقع المصنعان في Florida و Texas ، أما المخازن فتقع في California و Illinois و New York . يوضح الجدول (10.3) تكاليف الشحن لكل طن من مصانع الشركة إلى كل مخزن من المخازن . ويوضح الجدول (10.4) عدد الأطنان المنتجة يومياً من كل مصنع وعدد الأطنان المطلوبة يومياً من كل مستودع . ومن الواضح أن إجمالي الكمية التي ينتجها المصنعان (4,000 + 3,000 = 7,000 طن) وهي مساوية تماماً لإجمالي الطلب في المخازن الثلاثة (2,500+ 2,000 + 2,500 = 7,000 طن) .

جدول (10.3) تكاليف شحن منتج شركة Essex من كل مصنع إلى كل مستودع / لكل طن .

المصنع	المخزن		
	California	Illinois	New York
Florida	$ 15	$ 10	$ 7
Texas	6	8	11

جدول (10.4) الإنتاج اليومي للمصانع والطلب اليومي للمخازن لشركة Essex .

المصنع	الناتج (بالطن)	المخزن	الطلب (بالطن)
Florida	4,000	California	2,500
Texas	3,000	Illinois	2,000
	7,000	New York	2,500
			7,000

أما المشكلة التي ترغب الشركة حلها فهي : ما هو عدد الأطنان التي يجب شحنها من كل مصنع لكل مخزن ؟ ولما كانت تكاليف الشحن مرتفعة في العديد من الصناعات لذا فإن أثر هذه المشكلة عادة ما يكون كبيراً . هذا وترغب الشركة في تدنية تكاليف الشحن ، والتي تساوي :

$$15A + 10B + 7C + 6D + 8E + 11F \qquad (10.28)$$

حيث A هي عدد الأطنان التي يتم شحنها يومياً من مصنع Florida إلى مخزن California ، و B هي عدد الأطنان التي يتم شحنها يومياً من مصنع Florida إلى مخزن Illinois ، و C هي عدد الأطنان التي يتم شحنها يومياً من مصنع Florida إلى مخزن New York ، و D هي عدد الأطنان التي يتم شحنها من مصنع Texas إلى مخزن California، و E هي عدد الأطنان التي يتم شحنها من مصنع Texas إلى مخزن Illinois ، و F هي عدد الأطنان التي يتم شحنها من مصنع Texas إلى مخزن New York .

وتوجد ثلاثة مجموعات من الشروط :

أولاً : يجب أن تفي إجمالي الشحنات الواردة إلى كل مخزن بمتطلبات هذا المخزن ، وهو ما يعني وجوب تحقق المتباينات التالية :

$$A + D \geq 2,500 \qquad (10.29)$$

$$B + E \geq 2,000 \qquad (10.30)$$

$$C + F \geq 2,500 \qquad (10.31)$$

ثانياً : لا يمكن أن تزيد معدلات إنتاج كل مصنع عن إجمالي الشحنات ، وهو ما يعني وجوب تحقق المتباينات التالية :

$$A + B + C \leq 4,000 \tag{10.32}$$

$$D + E + F \geq 3,000 \tag{10.33}$$

ثالثاً : A و B و ...... و F يجب ألا تكون سالبة .

$$A \geq 0 \,, B \geq 0 \,, C \geq 0 \,, D \geq 0 \,, E \geq 0 \,, F \geq 0 \tag{10.34}$$

وكما هو موضح بالتفصيل في ملحق هذا الفصل ، فإن برامج الحاسب دائماً ما تستخدم في حل مشكلات البرمجة الخطية . ويعرض الشكل (10.11) مطبوعة الحاسب الآلي لهذه المشكلة . وبناء على نتائج هذه المطبوعة ، نجد أنه يتعين على الشركة شحن 1,500 طن يومياً من مصنع Florida إلى مخزن Illinois و 2,500 طن يومياً من مصنع Florida إلى مخزن New York و 2,500 طن من مصنع Texas إلى مخزن California و 500 طن يومياً من مصنع Texas إلى مخزن Illinois ، وأقل تكاليف شحن هي 51,500 دولار يومياً .

```
$ LINDO
 LINDO (UC 2 MARCH 85)
: MIN 15A + 10B + 7C + 6D + 8E + 11F
? SUBJECT TO
? A + D > 2500
? B + E > 2000
? C + F > 2500
? A + B + C < 4000
? D + E + F < 3000
? END

: LOOK ALL

MIN     15 A + 10 B + 7 C + 6 D + 8 E + 11 F
SUBJECT TO
        2) A + D >= 2500
        3) B + E >= 2000
        4) C + F >= 2500
        5) A + B + C <= 4000
        6) D + E + F <= 3000
END

: GO
    LP OPTIMUM FOUND AT STEP  4

         OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)          51500.0000

VARIABLE              VALUE                 REDUCED COST
        A            0.000000                 7.000000
        B         1500.000000                 0.000000
        C         2500.000000                 0.000000
        D         2500.000000                 0.000000
        E          500.000000                 0.000000
        F            0.000000                 6.000000

ROW              SLACK OR SURPLUS             DUAL PRICES
       2)            0.000000               -8.000000
       3)            0.000000              -10.000000
       4)            0.000000               -7.000000
       5)            0.000000                0.000000
       6)            0.000000                2.000000

NO. ITERATIONS=             4
```

شكل (10.11) حل مشكلة Essex .

كيف قامت شركة H. J. Heinz بتدنية نفقاتها

تقوم شركة Heinz بتصنيع الكاتشب في عدد من المصانع المنتشرة في مختلف أنحاء الولايات المتحدة ، ثم تقوم بتوزيعها على مخازنها المنتشرة في جميع أنحاء البلاد . ولتحديد كمية الكاتشب التي يجب على كل مصنع إرسالها إلى كل مخزن ، قامت الشركة بالاستعانة بأساليب البرمجة الخطية . وفيما يلي بياناً بقدرات كل مصنع واحتياجات كل مخزن ومعدلات الشحن في الجدول التالي : *

المخزن	المصنع												الاحتياجات اليومية [بالدقيقة لكل (cwt.)]
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
	معدلات الشحن [بالسنت لكل (cwt.)]												
A	16	16	6	13	24	13	6	31	37	34	37	40	1,820
B	20	18	8	10	22	11	8	29	33	25	35	38	1,530
C	30	23	8	9	14	7	9	22	29	20	38	35	2,360
D	10	15	10	8	10	15	13	19	19	15	28	34	100
E	31	23	16	10	10	16	20	14	17	17	25	28	280
F	24	14	19	13	13	14	18	9	14	13	29	25	730
G	27	23	7	11	23	8	16	6	10	11	16	28	940
H	34	25	15	4	27	15	11	9	16	17	13	16	1,130
J	38	29	17	11	16	27	17	19	8	18	19	11	4,150
K	42	43	21	22	16	10	21	18	24	16	17	15	3,700
L	44	49	25	23	18	6	13	19	15	12	10	13	2,560
M	49	40	29	21	10	15	14	21	12	29	14	20	1,710
N	56	58	36	37	6	25	8	19	9	21	15	26	580
P	59	57	44	33	5	21	6	10	8	23	15	18	30
Q	68	54	40	38	8	24	7	19	10	33	23	23	2,840
R	66	71	47	43	16	33	12	26	19	20	25	31	1,510
S	72	58	50	51	20	42	22	16	15	13	20	21	970
T	74	54	57	55	26	53	26	19	14	7	15	6	5,110
U	71	75	57	60	30	44	30	30	41	8	23	37	3,540
Y	73	72	63	56	37	49	40	31	31	10	8	25	4,410
السعة اليومية	10,000	9,000	3,000	2,700	500	1,200	700	300	500	1,200	2,000	8,900	40,000

ويوضح هذا الجدول الحجم الأمثل لشحنات يومية من كل مصنع لكل مخزن . فمثلاً يأتي كاتشب المخزن *A* من المصنع *I* .

(أ) طبقاً للمسئولين بالشركة فإن أحد أهم المميزات التي تم الحصول عليها من استخدام البرمجة الخطية هو أن كبار الموظفين في إدارة الشحن لم يعودوا مضطرين لقضاء وقت طويل في إعداد برامج الشحن . فمن الذي يتحمل هذا العمل نيابة عنهم ؟

(ب) كما صرح أولئك المسئولون أن أحد المزايا الهامة للبرمجة الخطية هي الشعور بالارتياح النسبي الناتج عن التأكد من أن البرنامج هو أقل البرامج الممكنة من حيث التكلفة . هل يعني ذلك أنه إذا كانت البيانات المتعلقة بمعدلات الشحن غير صحيحة فإن البرنامج سيظل هو أفضل السبل ؟

ج) ما هو الشيء الذي تحاول شركة Heinz معظمته أو تدنيته ؟

د) وضح بالتفصيل طبيعة الشروط .

المخزن	المصنع I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	الإجمالي
A	1,820												1,820
B	1,530												1,530
C		2,360											2,360
D	100												100
E		280											280
F		730											730
G	940												940
H				1,130									1,130
J		4,150											4,150
K	700		3,000										3,700
L	1,360					1,200							2,560
M		140		1,570									1,710
N	580												580
P								30					30
Q		1,340			500				500			500	2,840
R	810						700						1,510
S								90				880	970
T												5,110	5,110
U	2,160							180		1,200			3,540
Y											2,000	2,410	4,410
السعة اليومية	10,000	9,000	3,000	2,700	500	1,200	700	300	500	1,200	2,000	8,900	40,000

الحـــل

(أ) الحاسب الآلي وبعض الموظفين من ذوي الخبرة البسيطة .

(ب) لا ، فالنموذج المستخدم هنا هو أساسا مماثل تماماً لذلك المستخدم لتدنية نفقات الشحن في شركة Essex . وإذا كانت البيانـــات الخاصــة بمعدلات الشحن أو المتطلبات أو القدرات اليومية خاطئة ، فمن الطبيعي أن النتائج أيضاً لن تكون سليمة .

(ج) تحاول الشركة تدنية إجمالي مصاريف الشحن والتي يمكن تمثيلها بـــ

$$\sum_i \sum_j U_{ij} \cdot V_{ij}$$

حيث U_{ij} يساوي معدلات الشحن من المصنع i إلى المستودع j و V_{ij} تساوي الكمية التي يتم شحنها يومياً من المصنع i إلى المستودع j .

(د) مجموعة الشروط توضح أن إجمالي الشحنات من كل مصنع لا يمكن أن تزيد عن قدرته ، أي أن :

$$\sum_j V_{ij} \le K_i$$

حيث K_i هي قدرة المصنع i^{th} . مجموعة أخرى من الشروط توضح أن كل مخزن يجب أن يفي بمتطلباته ، أي أن :

$$\sum_j V_{ij} \geq R_j$$

حيث R_j هي إجمالي الشحنات المطلوبة في المخزن j^{th} . بالإضافة إلى ذلك هناك شروط تنص على أن الشحنات من كل مصنع إلى كل مخـــز لابد أن تكون غير سالبة أي أن :

$$V_{ij} \geq 0$$

A. Henderson and R. Schlaifer "Mathematical Programming," in Mansfield, *Managerial Economics and Operations Research*, 5th ed.
تعد هذه الأرقام تقريبية ، إلا أنها تفي بأغراض الدراسة الحالية .

الاحتياطي الفيدرالي ودوره مع البنوك التجارية

بناء على الأجزاء السابقة من هذا الفصل ، قد يتولد لدينا الانطباع بأنه لا يمكن تطبيق أساليب البرمجة الخطية إلا في المجال التي تنطوي على مشـــكلات النقل والتصنيع ، إلا أن ذلك ليس صحيحاً . فقد قام بنك الاحتياط الفيدرالي بإسداء النصح اللازم للبنوك التجارية بخصوص كيفية استخدام البرمجـــة الخطية .[9] ولنأخذ مثال First National Bank حيث يوجد نوعان من الأصول ، قروض واستثمارات . ولأن البنك لدية 400 مليـــون دولا يجب تخصيصها بين هذين النوعين من الأصول فإن :

$$I + L \leq 400 \qquad (10.35)$$

حيث I هي كمية الاستثمارات و L هي كمية القروض التي يمنحها البنك . ويرغب البنك ألا تقل القروض عن 150 مليون دولار ، أي :

$$L \geq 150 \qquad (10.36)$$

ولأن الاستثمارات يمكن تحويلها إلى نقود سائلة بشكل أسرع من القروض ، فإن البنك يرغب في ألا تقل الاستثمارات عن 20% من إجمالي قروضـ واستثماراته ، لذلك :

$$I \geq 0.20(L + I)$$

أو

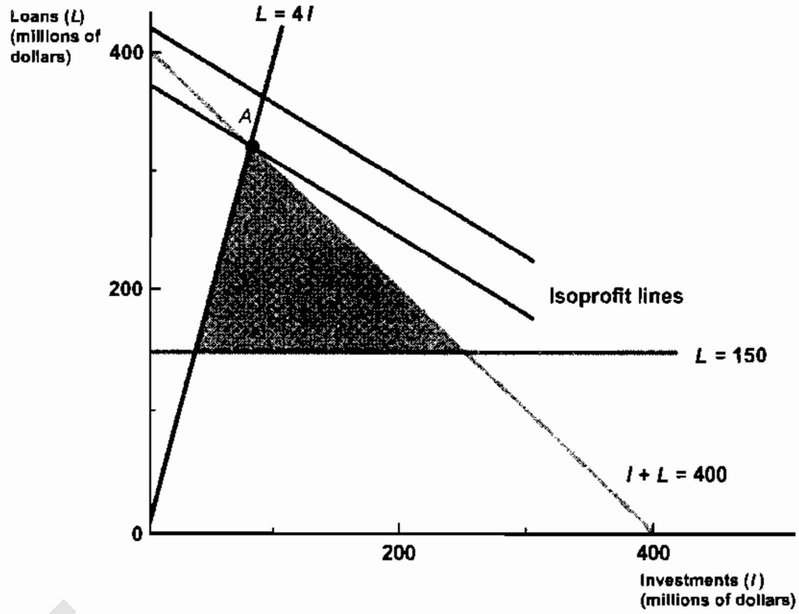
$$L \leq 4I \qquad (10.37)$$

ويرغب مديرو البنك في معظمة الأرباح ، فإذا كان البنك يحصل على عائد قدره 16% على القروض و 10% على الاستثمارات ، فإن الأربـــاح تساوي :

$$\pi = 0.16L + 0.10I \qquad (10.38)$$

وهكذا تتلخص مشكلة المديرين في معظمة π مع مراعاة الشروط في (10.35) و (10.36) و (10.37) وبشرط أن $I > 0$ و $L > 0$. وتعـــد هذه واحدة من تطبيقات البرمجة الخطية ، وكما هو موضح بالشكل (10.12) فإنه يمكن حل هذه المشكلة بيانياً ، وعند الوفاء بكل الشروط ، يتعـين على البنك اختيار إحدى النقاط في المنطقة المظللة في الشكل (10.12) . لاحظ أنه يتعين على البنك اختيار إحدى النقاط التي تقـــع أعلـــى أو أدنى الخط حيث $L = 150$ وذلك للوفاء بالشرط في (10.36) . كما يجب عليه اختيار إحدى النقاط التي تقع أعلى أو أدنى الخط حيـــث $I + L = 400$ وذلك للوفاء بالشرط في (10.35) ، وأخيراً يجب عليه اختيار إحدى النقاط أعلى أو أدنى الخط حيث $L = 4I$ وذلك للوفـــاء بالشـــرط في (10.37). هذا ويمكننا رسم منحنيات الأرباح المتساوية في الشكل (10.12) وذلك باستخدام المعادلة (10.38) . ولمعظمة الأرباح ، يجب علـــى المديرين اختيار إحدى النقاط في المنطقة المظللة والتي تقع أعلى منحنيات الأرباح المتساوية . ومن الواضح أن هذه النقطة هي A حيث يخصص البنـــك 320 مليون دولار للقروض و 80 مليون دولار للاستثمارات . وعلى الرغم من سهولة وبساطة هذا المثال ، إلا أنه يعد أحد الأمثلة المفيدة على قدرة البرمجة الخطية في حل المشكلات غير الصناعية . وما من شك في أن أهمية هذه التقنية تتجاوز حالات الإنتاج لتمتد إلى عالم التمويل والتسويق .

9 A. Broaddus, "Linear Programming: A New Approach to Bank Portfolio Management," *Federal Reserve Bank of Richmond Monthly Review*.



شكل (10.12) المحفظة المثلى للقروض والاستثمارات : أفضل نقطة هي A ، حيث يستثمر البنك 320 مليون دولار في القروض و 80 مليون دولار في الاستثمارات .

الركن الاستشاري

تقييم العملية التنظيمية لأحد برامج الشحن *

تم تأسيس شركة رائدة في مجال تصنيع وتوزيع المنتجات الاستهلاكية بحيث تقوم على مبدأ لامركزية الإدارة . وطبقاً لهذا المبدأ فإن كلاً من المخازن الإقليمية الستة تخضع لأحد مديري المبيعات الإقليميين – وهم الذين يقررون كمية المنتجات التي يتم طلبها من مصانع الشركة . ولما كان المخزن مكلفاً بدفع تكاليف الشحن ، كان من المتوقع أن يقوم كل مدير إقليمي بوضع ما لديه من طلبات بشكل يؤدي إلى تدنية نفقاته الخاصة ونفقات الشركة بصفة عامة . إلا أن واحداً من مصانع الشركة كان يقع بعيداً عن كل المخازن حتى أن أحداً من مديري المخازن الإقليمية الستة لم يكن يحول طلباته إليه إلا إذا اضطرته الضرورة القصوى إلى ذلك ؛ كأن تقوم المصانع الخمس الأخرى برفض الطلبات لعجزها عن مواجهة ضغوط الطلب المتزايدة عليها . لذلك فإن هذه المصانع تعمل طبقاً لمبدأ أسبقية الطلبات ، فمن يطلب مبكراً يتسلم مبكراً .

فإذا كنت تعمل كمستشاراً لهذه الشركة ، فما هي مقترحاتك بخصوص نظام الشحن لهذه الشركة ؟

* لاختبار مماثل لهذه الحالة راجع : N. Harlan, C. Christenson, and R. Vancil, *Managerial Economics: Text and Cases* (Home wood, Ill. : Irwin, 1962).

شركة Apple ومشروع تطوير جهاز Lisa-Macintosh *

في عام 1982 بدأ Steve Jobs – الرئيس التنفيذي لشركة Apple – في تطوير عائلة جديدة من المنتجات – هي أجهزة الكمبيوتر الشخصي من طراز Lisa-Macintosh . حقيقة الأمر هو أن المنتج الجديد كان موجهاً صوب سوق رجال الأعمال والمحترفين في التعامل مع أجهزة الكمبيوتر الشخصية ، و لم يكن موجهاً بأي حال من الأحوال صوب السوق التعليمية – والتي كانت أجهزة Apple مسيطرة عليها بالفعل . وقد تم تنفيذ هذا المشروع بواسطة فريق صغير يتبع Jobs مباشرة . وقد كان مشروعاً طموحاً تم إسناده إلى عدد من ذوي الكفاءة ، الذين هم اتصال يومي بالإدارة العليا في الشركة .

وسرعان ما احتل الجهاز الجديد مكانه كأحد أهم الأجهزة الجديدة التي طورتها الشركة ، وهو ما جعل سعره يتراوح ما بين 8,000 دولار إلى 10,000 دولار في بادئ الأمر . وكانت الفكرة تتمثل في البدء بتطوير هذا الجهاز نفسه حتى يمكن له إظهار فاعلية التكنولوجيا الجديدة المنوط تجسيدها بغرض استخدامه للمساعدة في الحصول على منتج آخر أضخم من حيث الأهمية والحجم – وهو جهاز Macintosh . وكان كلاً من Lisa و Macintosh يلعبان دوراً هندسياً في المقام الأول بينما كان التسويق يأتي في المرتبة الثانية – أو أقل . و لم تأتِ مواصفات Lisa متماشية مع احتياجات مكاتب الشركات ، والتي كان اهتمامها منصباً على الدعم الميداني والبرامج التطبيقية وسهولة الاتصال ، بل كانت المواصفات أكثر تماشياً مع أغراض المشروعات التجارية الصغيرة والجامعات مما هو الأمر في حالة الشركات الكبرى .

وعلى الرغم من أن تصميم Lisa كان مبتكراً للغاية ، إلا أن المبيعات لم تصل مطلقاً إلى الحد المرجو . وكان من الضروري إجراء تعديل على تصميم Macintosh مرة تلو الأخرى قبل أن يصبح هذا التصميم متوائماً مع متطلبات السوق . ومع أن الخطة كانت ترمي إلى إدخال Macintosh إلى الأسواق بحلول مارس 1983 ، إلا أن ذلك قد تأجل مراراً و لم يتحقق إلا في أوائل عام 1984 عندما تم إذاعة إعلان تليفزيوني يعرض IBM في صورة الحاكم الشيوعي الطاغية – Big Brother – بينما يعرض Macintosh في صورة جهاز الكمبيوتر الذي يمثل الذراع اليمنى لرجال الأعمال . وعلى الرغم من تلك الإعلانات لم يحقق Macintosh نجاحاً كبيراً في سوق العمل المستهدف ، وكان أحد الأسباب قلة البرامج المتوافرة .

وقد بدأت شركة Apple بوضع خطة ترمي إلى إنشاء مصنع بدرجة عالية من الأوتوماتية (الآلية) لإنتاج أجهزة Macintosh عند بدء تسويقه . لكن عند بدء تشغيل المصنع الذي تكلف 20 مليون دولار في أوائل 1984 لم تكن الناحية الأوتوماتية قد وصلت إلى الحد المطلوب ، الأمر الذي أدى إلى الاستغناء عن عدد من المعدات تصل تكلفتها إلى 7 مليون دولار وذلك خلال الثمانية أشهر الأولى من الافتتاح . ولعل أحد أسباب ذلك هو افتقار مصانع Apple السابقة إلى مثل هذه الدرجة العالية من الأوتوماتية ، فحتى عام 1981 كانت الخبرة الإنتاجية للشركة تفتقر إلى حد كبير بمجالات تجميع الأجهزة والتي تتطلب كثافة عمالية كبيرة .

ونظراً لكثرة العيوب التي كانت تشوب مشروع التطوير هذا ، فقد انخفضت إيرادات شركة Apple بشكل ملحوظ ، وكان ذلك يرجع جزئياً إلى مشروع Lisa-Macintosh [راجع جدول (1)] ، وتلا ذلك قيام السيد Steve Jobs بتقديم استقالته كرئيساً للشركة في 17 سبتمبر 1985 . وقد أقدم خليفته John Sculley ، بعد أن شعر بأن الشركة لديها زيادة كبيرة في القدرة الإنتاجية – على إغلاق مصنع الشركة في Dallas ، وتم تسريح حوالي 20% من القوة العاملة بالشركة . وأصبحت شركة Apple شيئاً مختلفاً تماماً عما كانت عليه قبل بدء مشروع تطوير Lisa-Macintosh .

جدول (1) بيان الدخل لشركة Apple .

	بعد انقضاء ثلاثة شهور	
	27 سبتمبر 1985	28 سبتمبر 1984
صافي المبيعات	$ 409,709	$ 477,400
التكلفة والنفقات	373,899	432,528
الدخل العامل قبل إمدادات التدعيم	35,810	44,872
إمدادات التدعيم	3,373	—
صافي سعر الفائدة وغيرها من أنواع الدخول	4,654	3,861
الدخل قبل الضريبة	43,837	48,733
الإمدادات قبل ضريبة الدخل	21,480	17,927
صافي الدخل	22,357	30,806
الكسب لكل سهم	$ 0.36	$ 0.50

* المصدر : Wheelen and Hunger, *Cases in strategic Management and Business Policy* . كل البنود ما عدا الدخل لكل سهم بالألف دولار .

(أ) إذا كان متوسط سعر الجهاز 1,500 دولار ، وإذا كان متوسط سعر التكاليف المتغيرة هو 1,200 دولار فما هي نقطة التعادل ، علماً بـأن التكاليف الثابتة 15 مليون دولار سنوياً ؟

(ب) إذا كانت دالة التبادل العكسي بين الوقت والتكاليف تشير إلى أن تقليل زمن المشروع عام واحد كان من الممكن أن يكلف 2 مليـون دولار ، فما هي العوامل التي يجب وضعها في الاعتبار عند اتخاذ القرار بشأن ما إذا كان يجب إنفاق هذا المبلغ الإضافي ؟

(ج) هل كانت توليفة عناصر الإنتاج الخاصة بشركة Apple لإنتاج Macintosh على دالة الإنتاج أم خارجها ؟ بمعنى هل كانت على القـدر اللازم من الكفاءة أم لا ؟

(د) إذا ما أولينا عنصر التسويق مجرد عناية ثانوية ، ترى ما هي عيوب Lisa-Macintosh الأخرى ؟

(هـ) هل ترى أنه من الأفضل دائماً استغلال أكثر المصانع استخداماً لرأس المال وأكثرها آلية ؟ نعم أم لا ؟ ولماذا ؟

(و) هل كان من الممكن أن تساعد البرمجة الخطية في تحديد أي نوع من مرافق الإنتاج يجب إنشاؤها وكيفية تشغيلها ؟ إذا كانت الإجابـة نعـم ، فكيف ؟

* المادة في هذه الحالة مستمدة من : Hayes, Wheelwright, and Clark, *Dynamic Manufacturing,* and Wheelen and Hunger, *Cases in strategic Management and Business Policy.* Also, see P. Feddeler, T. Wheelen, and D. Croll, "Apple Computer, Inc., 1987 … The Second Decade."

موجز بما ورد في الفصل العاشر

1- تعد البرمجة الخطية إحدى الطرق التي تسمح لصانعي القرار بحل مشكلات المعظمة والتدنية عندما تكون هناك قيود تقلل من قدرتهم علي الحركة . كما أن البرمجة الخطية تساعدنا في مجال قرارات الإنتاج فعلى العكس من النظرية التقليدية الواردة في الفصل السابع ، نجد أن البرمجة الخطية لا تتعامل مع دالة الإنتاج علي النحو التي هي عليه قبيل قيام المديرين بمواجهة ما لديهم من مشكلات . كما أن تحليل البرامج أسهل في تطبيقه في العديد من الجوانب ، وتسمح التقنيات الحاسبة الفعالة بالحصول على نتائج وحلول .

2- غالباً ما يختار المدير واحداً (أو توليفة) من الطرق الممكنة حتى يتسنى له إنتاج سلعة معينة ، مع الوضع في الاعتبار أنه يوجد لدى الشركة كمية محدودة من بعض عناصر الإنتاج . وقد قمنا بحل هذه المشكلة باستخدام الطرق البيانية ، حيث تم صياغة منحنيات الأرباح المتساوية ووضعها على مخطط التوليفات الكفأة ، ثم يتم اختيار نقطة على منطقة الحلول الممكنة ، تقع عند أعلى منحنيات الأرباح المتساوية . وبالإضافة إلى ذلك فقد تعاملنا مع شكل آخر من هذه المشكلة لم تكن فيه الشركة مقيدة من حيث كمية عناصر الإنتاج المتاحة لديها .

3- غالباً ما تنتج الشركة أكثر من منتج واحد ويكون لديها عدد من وسائل الإنتاج ذات الكميات الثابتة مما يحدد الكمية التي يمكن إنتاجها من كل منتج . وهذه المشكلة أيضا يمكن حلها بيانيا باستخدام منحنيات الأرباح المتساوية على مخطط التوليفات الكفأة من عناصر الإنتاج .

4- لكل مشكلة من مشكلات البرمجة الخطية مشكلة مقابلة تعرف بالمشكلة الثانوية . فإذا كانت المشكلة الأساسية مشكلة معظمة كانت المشكلة الثانوية مشكلة تدنية والعكس بالعكس . ففي المثال الخاص بتحديد أفضل التوليفات لإنتاج معين ، كانت المشكلة الأساسية تبحث عن أفضل معدلات إنتاج بينما كان الفرض من المشكلة الثانوية تحديد قيم للقطاعات الثابتة . وهذه القيم المفترضة – التي تعرف بأسعار الظل – تعد ذات فائدة كبيرة لأنها توضح ما يمكن أن يحدث لأرباح الشركة إذا تمكنت بشكل أو بآخر من زيادة كل نوع من عناصر الإنتاج .

5- يمثل المتغير الخامل كمية العناصر غير المستغلة . وعند استخدام المتغير الخامل يمكن تحويل الشروط من متباينات إلى معادلات . وبمجرد حدوث ذلك التحويل ، يمكن استخدام الطرق الجبرية لحل مشكلة البرمجة الخطية . والعملية هي تقدير الدالة الهدف – وهي الدالة التي نحاول معظمتها أو تدنيتها – عند كل ركن من أركان منطقة الحلول الممكنة . والركن الذي تكون عنده الدالة الهدف عند أعلى أو أدنى قيمة لها هو الحل الأمثل .

تمارين

(1) يجب على Martin Casey وهو نائب الرئيس التنفيذي لشركة Summit أن يوظف عمال الشركة وآلاتها لإنتاج ثلاثة أنواع من صناديق الملفات المعدنية بالخصائص التالية :

متطلبات عناصر الإنتاج أو الأرباح	المنتج		
	صناديق كبيرة	صناديق متوسطة	صناديق صغيرة
ساعة عمالة لكل صندوق	25	15	10
ساعة آلات لكل صندوق	40	15	5
الربح لكل صندوق	$ 50	$ 25	$ 12.50

وتمتلك الشركة إجمالي 3,500 ساعة عمالة و 2,500 ساعة آلات يمكن استخدامها يومياً .

(أ) ما هي دالة الهدف ؟

(ب) ما هي الشروط ؟

(ج) ما هو عدد ساعات العمالة وساعات الآلات التي يجب على السيد Casey توظيفها لإنتاج كل نوع من المنتجات ؟

(2) يجب على Frank Chidester كبير مهندسي شركة Cartwright تحديد أياً من الطرق الثلاثة يجب استخدامها لإنتاج منتج الشركة وهو المناديل الورقية . ويوضح الجدول التالي خصائص كل من الطرق الثلاثة :

متطلبات عناصر الإنتاج (لكل وحدة ناتج)	العملية		
	A	B	C
ساعة عمالة مدربة	2	4	1
ساعة عمالة غير مدربة	1	1	1
ساعة آلات	3	1	5

فإذا كان سعر ساعة العمالة المدربة 11 دولار وسعر ساعة العمالة غير المدربة 5 دولار وسعر ساعة الآلات 15 دولار . ويجب على الشركة إنتاج 100 طن يومياً ويمكنها استخدام أي كمية تريدها من كل من العناصر .

(أ) ما هي الدالة الهدف ؟

(ب) ما هي الشروط ؟

(ج) ما هي العملية (أو العمليات) التي يجب على السيد Chidester اختيارها ؟

(د) أترى أن هذه المشكلة تعد واحدة من مشكلات البرمجة الخطية ؟ نعم أو لا ؟ ولماذا ؟

(3) تستخدم شركة Adams ثلاثة عمليات وهي X و Y و Z لإنتاج سلعة معينة . ولإنتاج وحدة واحدة من تلك السلعة تحتاج العملية X إلى 2 ساعة عمالة و 1 ساعة آلات ، بينما تتطلب العملية Y 1.5 ساعة عمالة و 1.5 ساعة آلات ، أما العملية Z فتتطلب 1.1 ساعة عمالة و 2.2 ساعة آلات .

(أ) باستخدام رسم بياني تظهر فيه ساعات العمالة على المحور الرأسي وساعات الآلات على المحور الأفقي ، قم برسم خطوط الأشعة التي تمثل العمليات الثلاث .

(ب) باستخدام الرسم في الجزء (أ) قم برسم منحنى الناتج المتساوي المناظرة لـ 100 وحدة .

(4) باستخدام البرمجة الخطية وجد نائب رئيس إدارة شركة Summers أن سعر الظل للعمالة المدربة 15 دولار في الساعة وسعر الظل لماكينة الخياطة يساوي صفر .

(أ) ما الذي يشير إليه سعر الظل للعمالة المدربة ؟

(ب) ما الذي يشير إليه سعر الظل لوقت ماكينات الخياطة ؟

(5) افترض أن في حالة Martin Casey [المسألة رقم (1)] يرغب في تحديد قيمة الساعة الإضافية من العمالة ومن الآلات .

(أ) ما هي المشكلة الثانوية ؟

(ب) ما هو الحل لهذه المشكلة الثانوية ؟

(ج) ما هي قيمة الساعة الإضافية من كل العناصر ؟

(6) تستخدم شركة Murray نوعين من عناصر الإنتاج ، ساعات الآلات في حجرة التشطيب وساعات العمالة .

(أ) إذا كان هناك حد أقصى قدرة 2,000 ساعة آلات و200 ساعة عمالة متاحة أسبوعياً ، قم برسم مجموعة من التوليفات الكفأة في صورة شكل بياني .

(ب) تستخدم العملية X 1 ساعة آلات و 1 ساعة عمالة للحصول على وحدة من الإنتاج . قم برسم الشعاع الذي يمثل هذه العملية .

(ج) تستخدم العملية Y ½ ساعة آلات و 2 ساعة عمالة للحصول على وحدة من الإنتاج ، وتستخدم العملية Z 2 ساعة آلات و ½ سلعة عمالة للحصول على وحدة من الإنتاج . قم برسم خطوط الأشعة التي تمثل هاتين الطريقتين .

(د) قم برسم منحنى الناتج المتساوي لـ 1,000 وحدة إنتاج (باستخدام الثلاث عمليات الموضحة أعلاه) .

(هـ) افترض أن الشركة يمكنها استخدام كل ساعات الآلات التي تريدها بسعر 10 دولار في الساعة وكل ساعات العمالة التي تريدها بسعر 10 دولار في الساعة فما هي العملية التي يجب استخدامها لإنتاج 1,000 وحده ؟

(7) يمكن لشركة Brown استخدام ثلاثة عمليات في مصنعها بالمكسيك A و B و C لإنتاج إحدى السلع . وللحصول على كل وحدة من الإنتاج ، تحتاج العملية A لـ 2 ساعة عمالة و 1 ساعة آلات ، بينما تحتاج العملية B لـ 1.5 ساعة عمالة و 1.5 ساعة آلات ، أما العملية C فتحتاج لـ 1.1 ساعة عمالة و 2.2 ساعة آلات . ويجب على الشركة دفع 3 دولار لكل ساعة عمالة و 2 دولار لكل ساعة آلات ، لكنها لا تستطيع استخدام أكثر من 120 ساعة آلات أسبوعياً حيث أن ذلك هو أقصى قدر متاح في المدى القصير .

(أ) إذا ما رغبت الشركة في إنتاج 100 وحدة أسبوعياً ، فما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجه باستخدام العملية A ؟

(ب) ما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجه باستخدام العملية B ؟

(ج) ما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجه باستخدام العملية C ؟

(8) في المسألة رقم (7) ، افترض أنه يمكن لشركة Brown استخدام أكثر من 120 ساعة آلات أسبوعياً . وفي ظل هذه الظروف ما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجها باستخدام العمليات A و B و C ؟

(9) طبقا لنتائج الحاسب الآلي في الشكل (10.13) ، فإن سعر الظل (السعر الثانوي) للدقيقة من وقت العمالة هو 2.5 سنت ، وللدقيقة من وقت الآلات 65 سنت .

(أ) إذا كان بمقدور George Kramer (راجع ملحق الفصل السابق) استخدام عمالة إضافية بسعر 5 دولار في الساعة ، فهل يلزم عليه استخدام تلك العمالة الإضافية ؟

(ب) إذا كان بمقدوره استخدام آلات إضافية بتكلفة 35 دولار في الساعة ، فهل يلزمه استخدام أي آلات إضافية ؟

(10) تمتلك شركة Dartmouth مصـــانع في ولايـــتي Kentucky و Oregon ومخـــازن في Florida و Oklahoma و Arizona . والجدول التالي يوضح تكاليف شحن المنتجات من كل مصنع إلى كل مخزن :

المصنع	المخزن		
	Florida	Oklahoma	Arizona
Kentucky	$ 4	$ 6	$ 7
Oregon	11	7	6

ولا يمكن للإنتاج اليومي للمصانع أن يتخطى 4,000 طن (Kentucky) و 5,000 طن (Oregon) . ولا يمكن للطلبـــات اليوميـــة للمخازن أن تقل عن 2,500 طن (Florida) و 3,500 طن (Oklahoma) و 3,000 طن (Arizona) .

(أ) ما هي دوال الهدف ؟

(ب) ما هي الشروط ؟

(ج) لتدنية إجمالي تكاليف الشحن ، ما هو عدد أطنان المنتج التي يجب شحنها من مصنع Kentucky إلى كل المخازن ؟

(د) لتدنية إجمالي تكاليف الشحن ، ما هو عدد أطنان المنتج التي يجب شحنها من مصنع Oregon إلى كل من المخازن ؟

ملحوظة : الأسئلة (ج) و (د) للطلاب الذين يمكنهم استخدام برامج LINDO . (راجع الملحق) .

ملحق

إحدى الحزم البرمجية لحل مشكلات البرمجة الخطية

عند قيامنا بحل أغلب مشكلات البرمجة الخطية عملياً (يتم ذلك) بالاستعانة ببرامج الكمبيوتر بدلاً من الأساليب الجبرية والبيانية . ويعـــد برنـــامج LINDO أحد أهم البرامج المساعدة في حل مشكلات البرمجة الخطية لما له من شيوع وسهولة في استخدامه . ويجدر بنا الآن أن نقدم وصفاً موجـزاً لإيضاح كيفية تبسيط وتيسير حل مشكلات البرمجة الخطية بواسطة الكمبيوتر .

بمجرد دخول المستخدم على برنامج LINDO تظهر أمامه هذه العلامة (:) في أقصى يسار الشاشة . ويجب إعطاء الأمر المناسب للبرنـــامج بشأن ما إذا كان عليه معظمة أو تدنية دالة الهدف المستخدمة. ولعمل ذلك فإننا ندخل "MIN" أو "MAX" ثم دالة الهدف بعد (:) وبعد ذلك ندخل "SUBJECT TO" والتي تعد بمثابة إشارة للبرنامج أن الجزء التالي هو مجموعة الشروط أو الضوابط. وبعد الانتهاء من إدخال كافة هـــذه الضوابط ، نقوم بإدخال "END" [10] للدلالة على أن البرنامج قد حصل على كافة المعلومات المطلوبة . وأخيراً نقوم بإدخـال "LOOK ALL" والذي يعد بمثابة أمر موجه للبرنامج حتى يقوم بإمدادنا بدالة الهدف وجميع الشروط أو الضوابط التي تم إدخالها. وتعد هذه الخطوة إجـــراءً ذا فـــائدة كبيرة للتحقق من عدم حدوث أخطاء. وبعد إصدار الأمر"GO" للبرنامج يخرج الحل، وبذلك يتم تشغيل البرنامج لحل مشكلة البرمجة الخطية .[11]

وللإيضاح ، سوف نلقي النظر على حالة السيد George Kramer – والذي يمتلك مصنعا يقوم بإنتاج الإيشاربات وأربطة العنق . علمـا بأن السيد Kramer يحقق ربحا قدره 50 سنتاً للإيشارب و 2 دولار لرابطة العنق . هذا ويتطلب إنتاج الإيشارب الواحد 30 ثانية فقط من العمالـة في مقابل 15 دقيقة لرابطة العنق . وبصفة عامة ، فان زمن العمالة المتوفر لدى السيد Kramer هو 12,000 دقيقة أسبوعياً يمكن تخصيصها لإنتـاج الإيشاربات وربطات العنق ، ويمكن استخدام آلات الشركة لإنتاج كل من السلعتين ، علما بأن إنتاج الإيشارب الواحد يتطلب 0.75 دقيقة مـــن وقت الآلات في مقابل 2.5 دقيقة لإنتاج رابطة عنق واحدة . وبصفة عامة ، فإن زمن الآلات المتوفر لدى السيد Kramer هـــو 5,000 دقيقـــة أسبوعياً .

[10] عند إدخال الضوابط أو الشروط يقوم برنامج LINDO بتفسير " > " بمعنى أكبر من أو مساويا لـــ ، و " < " بمعنى أقل من أو مساويا لـــ . والسـبب في ذلك هو عدم وجود إمكانية لإدخال " أكبر من أو مساويا لـــ " أو " أقل من أو مساويا لـــ " في معظم لوحات المفاتيح .
ونلاحظ أنه عند قيامنا بإدخال الأمر "LOOK ALL" فإن LINDO يكون قد قام بقراءة هذه المتباينات بالطريقة الموضحة أعلاه .

[11] لأغراض الدراسة الحالية ، يمكنك تجاهل عدد المتكررات والخطوة التي يوجد عندها الحل .

وبما أن السيد Kramer يرغب في معظمة أرباحه ، لذا فبإمكانه صياغة دالة الهدف بالشكل التالي :

$$\text{معظمة } Z = 0.5X + 2Y \qquad (10.39)$$

حيث Z هو إجمالي الربح الأسبوعي و X هو عدد أربطة العنق التي يتم إنتاجها أسبوعياً . وشروط العمالة هي :

$$0.5X + 15Y \leq 12{,}000 \qquad (10.40)$$

حيث يمكن القول أن معاملات X و Y هي عدد دقائق العمالة اللازمة لإنتاج إيشارب ورابطة عنق على الترتيب ، و 12,000 هو إجمالي عدد دقائق العمالة المتاحة للشركة أسبوعياً وشرط الآلات هو :

$$0.75X + 2.5Y \leq 5{,}000 \qquad (10.41)$$

حيث معاملات X و Y هي عدد دقائق الآلات اللازمة لإنتاج إيشارب ورابطة عنق على الترتيب ، و 5,000 هو إجمالي دقائق الآلات المتاحة للشركة أسبوعياً .

```
$ LINDO
 LINDO (UC 2 MARCH 85)
: MAX .5X + 2Y
? SUBJECT TO
? .5X + 15Y < 12000
? .75X + 2.5Y < 5000
? END

: LOOK ALL

MAX     0.5 X + 2 Y
SUBJECT TO
       2) 0.5 X + 15 Y <= 12000
       3) 0.75 X + 2.5 Y <= 5,000
END

: GO
       LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

                      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)                    3550.00000
VARIABLE              VALUE                REDUCED COST
        X             4500.000000              0.000000
        Y              650.000000              0.000000

    ROW               SLACK OR SURPLUS         DUAL PRICES
        2)               0.000000              0.025000
        3)               0.000000              0.650000

NO. ITERATIONS=        2
```

شكل (10.13) حل المسألة المتعلقة بالسيد George Kramer .

فإذا قمنا باستخدام برنامج LINDO ، فسوف تكون الخطوة الأولى هي إدخال دالة الهدف والشروط على النحو الموضح بالشكل (10.13) والذي يعرض هذه المشكلة في صورة مطبوعة الكمبيوتر النهائية . وبعد إدخال المعلومات ، يمكننا استخدام أمر "LOOK ALL" للتأكد من دقة المدخلات . أما الأمر "GO" فهو المسئول عن إعطاء الإشارة للكمبيوتر لكي يبدأ في حل المشكلة . ويقوم البرنامج بإمدادنا بقيمة (دالة الهدف) والذي يشكل أقصى ربح يمكن للسيد Kramer الحصول عليه في ظل وجود هذه الشروط أو الضوابط : 3,550 دولار أسبوعياً كما يمدنا البرنامج بأفضل توليفة من الإيشاربات (X) ورابطات العنق (Y) الواجب على الشركة تحقيقها . فإذا رغبت الشركة في معظمة أرباحها في ظل وجود هذه الشروط ، فإنه يتعين عليها إنتاج 4,500 إيشارب و 650 ربطة عنق أسبوعياً . والجدير بالذكر أن العمود المعنون " العددي أو الفائض " يخبرنا بأن المتغير العددي لكل من العمالة والآلات يساوي صفر ؛ أي أنه تتم الاستفادة من كل دقيقة عمالة وآلات عند استخدام هذه التوليفة الإنتاجية . أما العمود المعنون " الأسعار الثنائية " فهو الذي يمدنا بأسعار الظل لزمن العمالة والآلات ، علماً بأن سعر الظل لدقيقة واحدة من زمن العمالة هو 2.5 سنت ، وسعر الظل لدقيقة واحدة من زمن الآلات هو 65 سنت .