الفصل السابع

نظرية الإنتاج

قامت شركة John Deere – وهي إحدى الشركات الكبرى المصنعة للميكنة الزراعية ، ومقرها مدينة Illinois بولاية Chicago – بإجراء تغيير هام في أساليب خط التجميع التي كانت تتبعها ، وذلك بوضع اثنتي عشر خطوة من خطوات الإنتاج في حيز التنفيذ في موقع واحد . وهي نفس الخطوات التي كان يتم إجراؤها في عدة مواقع مختلفة . وتعتبر مثل هذه القرارات على قدر كبير من الأهمية بغض النظر عن نوع النشاط التجاري المتبع . فأياً كانت السلعة التي تقوم المؤسسة بإنتاجها ، يجد مديرو ومهندسو تلك المؤسسة أنفسهم مضطرين إلى اتخاذ القرارات الصائبة بشأن أفضل الأساليب المتاحة لإنتاج هذه السلعة أم تلك مما يعني أنهم مطالبون بإتباع أحدث الطرق ، ومقارنة أدائهم الإنتاجي بأداء منافسيهم . ومع أن أسرار الإنتاج الجيد ليست محاطة بتلك الهالة من التعقيد والسرية التي قد يخالها البعض ، إلا أن ثمن الكفاءة مثل ثمن الحرية هو اليقظة الدائمة . وسوف نعرض في هذا الفصل الجوانب الأساسية لنظرية الإنتاج ، ونشير إلى كيفية استخدامها من قبل محللي الأعمال والمديرين والاقتصاديين.

دالة الإنتاج ذات المتغير الواحد

يمكن التعبير عن دالة الإنتاج لأي منتج في صورة جدول أو رسم بياني أو معادلة توضح أقصى معدلات الإنتاج للمنتج الذي يمكن تحقيقه من خلال توليفات مختلفة تؤدي إلى التشغيل الأمثل لعناصر الإنتاج . وكذلك فإن دالة الإنتاج هي التي توجز خواص التكنولوجيا المتاحة في عصر ما ، كما أنها تحدد الضوابط التكنولوجية التي يجب أن تضعها الشركة في اعتبارها . وسوف نفترض في هذا الفصل أن الشركة تتعامل مع دالة الإنتاج كما هي ، على أن نقوم في الفصل التالي بتحليل عملية التطوير التكنولوجي ، ودراسة محاولات الشركة لتغيير دالة الإنتاج .

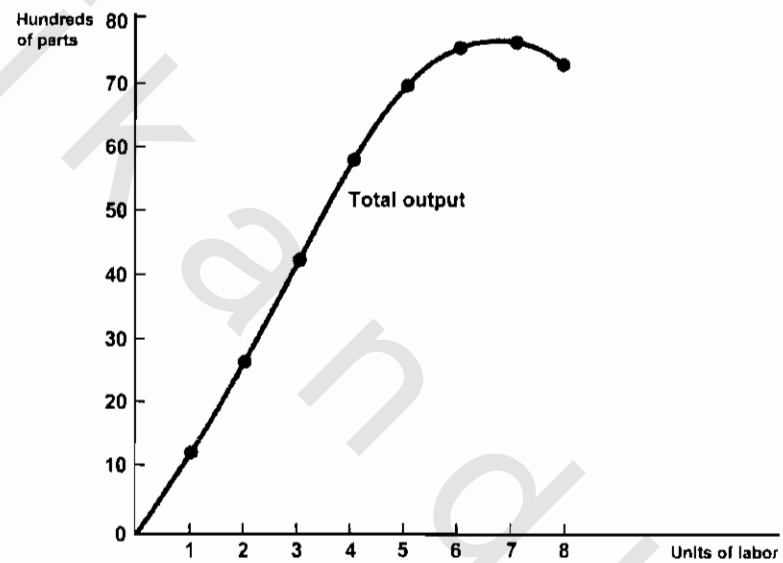
ولنضرب أحد الأمثلة البسيطة ، فعندما يكون هناك أحد عناصر الإنتاج ذي كمية ثابتة وآخر ذي كمية متغيرة . وبفرض أن العنصر الثابت هو صيانة خمسة آلات ، والمنتج هو أحد قطع الغيار المعدنية . وبفرض أن السيد John Thomas – مالك أحد الشركات الصغيرة المنتجة للميكنة – يعتزم الوقوف على ما سيلحق بالإنتاج الكلي من تغيرات إذا ما قام باستخدام مجموعات مختلفة من وحدات العمالة وتشغيلها في إدارة تلك الماكينات الخمسة على مدار العام (مع افتراض رغبته في معظمة الإنتاج) . ووجد لو أن عاملاً واحداً يعمل طوال اليوم يمكنه إنتاج 1200 قطعة في العام من الآلات ، إلا أن السيد John Thomas قد اكتشف أيضاً أنه بوسعه إنتاج عدد أكبر من القطع إذا استأجر المزيد من العمال كما هو موضح بالجدول (7.1) . يمكن اعتبار النتائج في الجدول (7.1) بمثابة دالة الإنتاج في هذا الموقف إذا كانت شركة Machine Thomas تتبع أسلوب معظمة الإنتاج من المعدات والعمالة . وفي المقابل ، يمكن اعتبار المنحنى المبين في شكل (7.1) بأنه دالة الإنتاج التي تمثل نفس النتائج تماماً .

هذا وتوفر دالة الإنتاج معلومات أساسية عن طبيعة تكنولوجيا الإنتاج في الشركة ، كما أنها توضح لنا أقصى درجة يمكن الوصول إليها من إجمالي الإنتاج باستخدام مختلف التوليفات المتاحة من عناصر الإنتاج . وهناك أمران آخران على جانب من الأهمية هما متوسط الناتج والناتج الحدي لأحد عناصر الإنتاج . ويمكن تعريف متوسط الناتج لعنصر ما بأنه إجمالي الناتج (أي إجمالي الإنتاج) مقسوماً على كمية العنصر المستخدم في إنتاج سلعة ما. أما الناتج الحدي لعنصر ما فهو الكمية المضافة إلى إجمالي الإنتاج الناجمة عن إضافة الوحدة الأخيرة من عنصر الإنتاج ، وذلك مع افتراض ثبات كميات العناصر الأخرى المستخدمة في العملية الإنتاجية .[1]

[1] وبعبارة أدق ، فإن الناتج الحدي لأحد عناصر الإنتاج يساوي مشتقة الإنتاج بالنسبة لكمية العنصر . أي أنه إذا كانت Q هي الإنتاج و x هي كمية العنصر ، فإن الناتج الحدي للعنصر يساوي dQ / dX في حالة ثبات باقي عناصر الإنتاج .

جدول (7.1) إنتاج قطع الغيار المعدنية عند الاستعانة بأعداد مختلفة من العمالة لتشغيل خمسة معدات آلية ، شركة Thomas Machine .

حجم العمالة (الأعداد السنوية للوحدات)	إنتاج قطع الغيار (مئات القطع سنوياً)
1	12
2	27
3	42
4	56
5	68
6	76
7	76
8	74



شكل (7.1) العلاقة بين إجمالي الإنتاج ومقدار العمالة المستخدمة لتشغيل خمس معدات آلية في شركة Thomas Machine : توضح دالة الإنتاج العلاقة بين الإنتاج الكلي لقطع الغيار المنتجة من ناحية ، ووحدات العمالة من ناحية أخرى .

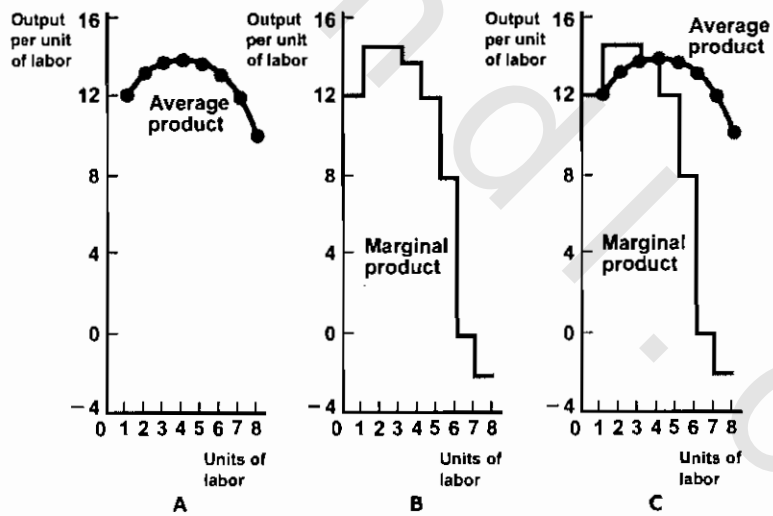
وبالرجوع إلى شركة Thomas Machine السالف ذكرها ، يمكننا حساب كل من الناتج المتوسط والناتج الحدي للعمالة بناء على دالة الإنتاج في الجدول (7.1) . وبالطبع فإن كلاً من الناتج المتوسط والناتج الحدي سوف يتغير تبعاً لكمية العمالة المستخدمة . وإذا كان $Q(L)$ هو معدل الإنتاج الكلي عندما يتم استخدام عدد L من وحدات العمالة في العام ، فإن الناتج المتوسط للعمالة عند استخدام L وحدة من العمالة في العام هو $Q(L) / L$. كذلك إذا كان الناتج الحدي للعمالة بين L و $(L-1)$ من وحدات العمالة المستخدمة سنوياً هي $Q(L) - Q(L-1)$ ، فإن متوسط نتاج العمالة هو 1,200 قطعة ، بينما الناتج الحدي هو 1,500 قطعة منتجة . كما يوضح جدول (7.2) نتائج أخرى عند أحجام مختلفة من العمالة .

جدول (7.2) ناتج العمالة الحدي والمتوسط ، شركة Thomas Machine .

حجم العمالة	إجمالي الإنتاج	متوسط إنتاج العمالة (مئات قطع الغيار)	الناتج الحدي للعمالة *
0	0	—	—
1	12	12.0	12
2	27	13.5	15
3	42	14.0	15
4	56	14.0	14
5	68	13.6	12
6	76	12.7	8
7	76	10.9	0
8	74	9.2	−2

* ترتبط هذه الأرقام بالفترة ما بين حجم العمالة المشار إليه ونفس الحجم ناقص وحدة واحدة .

هذا ويوضح الرسم A في شكل (7.2) – من خلال الجدول السابق – منحنى الناتج المتوسط . وفي أغلب عمليات التصنيع (إن لم تكن جميعها) ، فإن متوسط ناتج العمالة (وهو العنصر المتغير الوحيد في هذه الحالة) يأخذ في الارتفاع حتى يصل إلى نقطة الذروة ، ثم ما يلبث أن يعاود الانخفاض . ويوضح الرسم B من الشكل (7.2) منحنى الناتج الحدي للعمالة الذي يأخذ في الارتفاع أيضاً ثم ما يلبث أن ينخفض . وهو الأمر الذي ينطبق على عدد كبير من عمليات التصنيع (إن لم يكن جميعها) . وأخيراً يوضح الرسم C من الشكل (7.2) كلاً من منحنى الناتج المتوسط ومنحنى الناتج الحدي للعمالة ، وكما هو الحال دائماً ، فالناتج الحدي يساوى الناتج المتوسط عندما يبلغ الأخير أقصى قيمة له .



شكل (7.2) منحنيات الإنتاج الحدية والمتوسطة للعمالة : يزداد الناتج الحدي على متوسط الناتج عندما يأخذ الأخير في التزايد ويقل عنه عندما يأخذ الأخير في التناقص .

وللتأكد من صحة ذلك ستقوم بتطبيق أساليب التفاضل والتكامل التي سبق وأن عرضناها في الفصل الثاني . فإذا كانت x هي الكمية المستخدمة من العنصر المتغير ، و Q هي معدل التغير في الإنتاج الكلي ، فإن متوسط الناتج للعنصر المتغير هو $Q \div X$ ، والناتج الحدي للعنصر المتغير هو dQ / dx (انظر ملاحظة 1 من الفصل الثاني) حيث تعرف أن :

$$\frac{d(Q/x)}{dx} = \frac{x \cdot \frac{dQ}{dx} - Q\frac{dx}{dx}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{Q}{x}\right)$$

وعندما يكون متوسط الناتج في أعلى قيمة له ، $d(Q/x)/dx = 0$ تكون :

$$\frac{d(Q/x)}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{Q}{x}\right) = 0,$$

وهو ما يعني أن dQ/dx لابد أن تساوى Q/x عندما يكون متوسط الناتج في أعلى قيمة . لكن بما أن dQ/dx هو الناتج الحدي و Q/X هو متوسط الناتج فإن ذلك من شأنه أن يدعم الفرض السابق ويثبته ، أي أنه عندما يكون متوسط الناتج في أعلى قيمته فإنه يصبح مساوياً للناتج الحدي.

قانون تناقص الغلة

بعد أن قمنا بتعريف دالة الإنتاج ، ومتوسط الناتج ، والناتج الحدي لأحد عناصر الإنتاج ، نقوم الآن بدراسة أحد أهم قوانين التطبيق الاقتصادي في الإدارة – ألا وهو قانون تناقص الغلة . وينص هذا القانون على أنه إذا تم إضافة كميات متساوية من عنصر ما ، مع افتراض ثبات العناصر الأخرى . فإن الزيادة في الناتج الكلي سوف تتناقص وتستمر في التناقص إلى درجة معينة ، بمعنى تناقص الناتج الحدي من العنصر المتغير . ويعطى الجدول (7.3) مثالاً على ذلك ، حيث نجد أن الناتج الحدي للعمالة يتناقص . هذا ويجب مراعاة ثلاثة أمور هامة عند دراسة قانون تناقص الغلة :

أولاً : أن هذا القانون هو بمثابة تعميم إجرائي ، وليس استنباطاً مأخوذاً من قوانين الطبيعة والأحياء .

ثانياً : افتراض ثبات التكنولوجيا ، إذ أنه ليس بمقدور هذا القانون التنبؤ بأثر زيادة الإنتاج بمقدار وحدة واحدة في حالة حدوث تطورات تكنولوجية .

ثالثاً : يفترض وجود وحدة واحدة على الأقل ذات كمية ثابتة . وذلك حيث أن قانون تناقص الغلة لا ينطبق على الحالات التي تنطوي على تغير جميع عناصر الإنتاج .

ومن اليسير تفهم أسباب صحة هذا القانون . فإذا افترضنا أن شركة Thomas Machine تمتلك عدداً ثابتاً من الماكينات ، وإذا قام المصنع بتعيين عدد إضافي من العمال ، سيكون من الطبيعي أن يأخذ الناتج الحدي للعامل في التناقص ، حيث سيضطر عدد من العمال إلى الانتظار حتى يفرغ زملائهم من العمل ليحلوا محلهم في التعامل مع تلك الماكينات ، كما سيؤدي ذلك إلى توزيع نفس الكم من العمل على عدد كبير من العمال مما يعني قيام العمال بتحمل مسئولية أعمال أقل وأقل في الأهمية .

المستوى الأمثل للاستفادة من عناصر الإنتاج

إذا كان لشركة ما عنصر ثابت وآخر متغير ، فما هو القدر الذي يجب استخدامه من ذلك العنصر المتغير ؟ ويعد هذا السؤال هاماً لمديري الشركات على اختلاف أنواعها وأحجامها . وللإجابة عن هذا السؤال يجب تعريف الإيراد الحدي للعنصر المتغير وكذلك الإنفاق الحدي له . وينبغي الإحاطة بمعنى هذين المفهومين إذا ما كنا نبحث عن إجابة لسؤالنا هذا . ويمكن تعريف الإيراد الحدي لعنصر ما بأنه مقدار الزيادة التي تطرأ على إجمالي إيرادات الشركة من جراء وجود وحدة إضافية من العنصر المتغير . أي باعتبار MRP_Y هو الإيراد الحدي للعنصر Y :

$$MRP_Y = \frac{\Delta TR}{\Delta Y} \qquad (7.1)$$

حيث ΔTR هو التغير في إجمالي إيرادات الشركة الناتج عن تغير قدره ΔY في كمية العنصر Y الذي تستخدمه الشركة .[2] وبالإمكان إثبات أن الإيراد

[2] وبعبارة أدق فإن : $MRP_Y = dTR/dY$

الحدي للعنصر Y يساوى الإنتاج الحدي لـ Y مضروباً في الإيراد الحدي للشركة . وللدلالة على ذلك ، نلاحظ أن الإيراد الحدي (MR) يساوى $\Delta TR / \Delta Q$ حيث ΔQ هو التغير في حجم الإنتاج الكلي للشركة ، وأن :

$$MRP_Y = \frac{\Delta TR}{\Delta Y} = \frac{\Delta TR}{\Delta Q} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta Y}$$

وبما أن $\Delta Q / \Delta Y$ تساوى الإنتاج الحدي (MP_Y) للعنصر Y ، وبالتالي :

$$MRP_Y = MR \cdot MP_Y \qquad (7.2)$$

وهو المطلوب إثباته .

ويمكن تعريف الإنفاق الحدي بأنه مقدار الزيادة التي تطرأ على إجمالي تكاليف المنشأة من جراء استخدام وحدة إضافية من العنصر المتغير . أي باعتبار ME_Y هو الإنفاق الحدي للمُدخل Y :

$$ME_Y = \frac{\Delta TC}{\Delta Y} \qquad (7.3)$$

حيث ΔTC هي التغير في إجمالي التكاليف الناجم عن تغير مقداره ΔY في كمية العنصر Y الذي تستخدمه الشركة .[3] وإذا كان بمقدور الشركة شراء كل احتياجاتها من العنصر Y بسعر عشرة دولارات للوحدة ، فإن ME_Y تساوى 10 دولار . لكن في بعض الحالات تضطر الشركة لرفع سعر العنصر Y من أجل الحصول على المزيد منه ، وفي هذه الحالات نجد أن ME_Y تساوى أكثر من سعر عنصر الإنتاج Y .

ولمعظمة الأرباح يجب على الشركة أن تستخدم كمية العنصر Y بالقدر الذي يتساوى عنده الإيراد الحدي مع الإنفاق الحدي أي أن تجعل :

$$MRP_Y = ME_Y \qquad (7.4)$$

وهذا من منطلق ما قمنا بمناقشته عن التحليل الحدي في الفصل الثاني . ولمعظمة الأرباح ، فإن على الشركة أن تمد نشاطها طالما أن الأرباح الحدية تتجاوز التكاليف الحدية . وعليها أن تتوقف عن التوسع عندما يتساوى الربح الحدي MRP_Y مع التكلفة الحدية ME_Y .

مؤسسة Rondo

(مثال رقمي)

ويمكن إعطاء مثال لذلك بحالة شركة Rondo ، وهي شركة تنتج آلات حاسبة للجيب ولديها عدد ثابت من المنشآت والمعدات ، ولكنها تستطيع تغيير عدد العمال الذين تستأجرهم يومياً . والعلاقة بين عدد الآلات الحاسبة التي يتم إنتاجها يومياً (Q) وعدد العمال المستأجرين يومياً (L) هي :

$$Q = 89L - 3L^2 \qquad (7.5)$$

ويمكن للشركة بيع كل الآلات التي تنتجها (مستخدمة منشآتها ومعداتها الحالية) بسعر 20 دولار للوحدة ، لذلك فإن الإيراد الحدي يساوى 20 . كما يمكنها أن تستأجر العدد الذي تريده من العمال مقابل 40 دولار في اليوم . فما هو عدد العمال الذي يجب على الشركة استئجارهم ؟

ولتطبيق نتائج الجزء السابق ، يتعين علينا أن نحدد الإيراد الحدي لعنصر الإنتاج – العمل (MRP_L) وكذلك الإنفاق الحدي للعمل (ME_L) لهذه الشركة . وباستخدام المعادلة (7.2) :

$$MRP_L = 20\ MP_L$$

وحيث أن الإيراد الحدي للشركة يساوى 20 دولار . وبما أن : $MP_L = dQ / dL$

$$MRP_L = 20\frac{d(98L - 3L^2)}{dL} = 20(98 - 6L)$$

وحيث أن MRP_L لابد وأن تساوى ME_L ، فإن عدد العمال المستأجرين لابد وأن يكون :

$$20(98 - 6L) = 40$$

وبما أن الإنفاق الحدي لعنصر العمل بالشركة يساوي 40 دولار . فبحل هذه المعادلة نجد أن L لابد وأن تساوى 16 ، لذلك إذا كانت شركة Rondo ترغب في معظمة الأرباح فعليها أن تستأجر 16 عامل يومياً .

---

[3] وبعبارة أدق فإن : $ME_Y = dTC / dY$

obeikandi.com

كيفية تحديد القدرة المثلى
لخطوط أنابيب البترول (مقاسةً بالحصان)

يتم نقل النفط الخام عبر أنابيب البترول من حقول البترول ومناطق التخزين لمسافات قد تبلغ مئات الأميال إلى المراكز العمرانية والصناعية . ويمكننا القول أن إنتاج مثل هذه الأنابيب تتمثل في كمية النفط التي يتم ضخها يومياً ، وأن العنصرين الأساسين هما قطر خط الأنابيب وحجم قوة الضخ مقاسة بالحصان . وقد قامت Leslie Cookenboo من شركة Exxon بتقدير دالة الإنتاج لخط أنابيب قطرة 10 بوصة على النحو التالي :

$$Q = 286H^{0.37}$$

حيث Q هي كمية الزيت الخام المنقول يومياً ، و H هي قدرة الضخ مقاسا بالحصان .

(أ) قم باشتقاق معادلة الناتج الحدي لقدرة الضخ مقاسة بالحصان .

(ب) هل تؤدي الزيادة في قدرة الضخ إلى تناقص العوائد الحدية ؟

(ج) قم باشتقاق متوسط الناتج لقدرة الضخ ؟

(د) إذا كان الإيراد الحدي لكل وحدة إضافية يتم ضخها من البترول الخام يومياً هو 2 دولار ، فما هو الإيراد الحدي لقدرة الضخ مقاسةً بالحصان ؟

(هـ) إذا كان بمقدور إحدى شركات أنابيب البترول توفير كل القدرة المطلوبة بسعر 30 دولار للوحدة ، فما هي التكلفة الحدية لقدرة الضخ مقاسه بالحصان ؟

(و) في ظل الظروف الموضحة أعلاه ، ما هو حجم قدرة الضخ الواجب أن تتبعها الشركة ؟

الحل

(أ) الناتج الحدي لقدرة الضخ تساوي : $dQ / dH = 0.37(286)H^{-0.63} = 105.82H^{-0.63}$.

(ب) نعم . فكلما تناقص الناتج الحدي لقدرة الضخ ، كلما ازدادت قدرة الضخ ، كما هو موضح في الصياغة السابق ذكرها في الإجابة (أ) .

(ج) الناتج المتوسط لقدرة الضخ مقاساً بالحصان تساوي : $Q / H = 286H^{-0.63}$.

(د) باستخدام المعادلة (7.2) فإن الإيراد الحدي لقدرة الضخ مقاساً بالحصان يساوي 2 دولار مضروباً في $(105.82H^{-0.63}) = 211.64H^{-0.63}$ دولار .

(هـ) 30 دولار .

(و) باستخدام المعادلة (7.4) يجب على الشركة أن تجعل الإيراد الحدي للضخ مساوياً للتكلفة الحدية . وعليه فإن الحجم الأمثل لقدرة الضخ مقاسة بالحصان هو :

$$211.64H^{-0.63} = 30$$
$$H^{-0.63} = 0.14175$$
$$H = 22.22 \text{ وحدة}.^*$$

* للمزيد من الدراسة راجع : L. Cookenboo, "Production Functions and Cost Functions in Oil Pipelines" in the study guide accompanying this textbook.

دالة الإنتاج لأكثر من متغير

كنا حتى هذه اللحظة نتعامل مع الحالات التي تنطوي على عنصر واحد متغير ، وسوف نبدأ الآن في التعامل مع حالات أكثر اتساعاً ، تنطوي على عنصرين متغيرين . ويمكن النظر إلى هذين العنصرين على أنهما قد يرتبطان في العمل بعنصر واحد ثابت أو أكثر ، كما يمكن النظر إليهما باعتبارهما العنصرين الوحيدين . (أي إحدى حالات المدى الطويل ، حيث أن جميع عناصر الإنتاج متغيرة .) وفي أياً من الحالتين ، يمكن توسيع النتائج لتتضمن أي عدد من عناصر الإنتاج .

وعندما نزيد عدد العناصر من واحد إلى اثنين فإن دالة الإنتاج تتعقد نسبياً ، ولكن لا يزال من الممكن الحصول على العلاقة بين الائتلافات المختلفة من عناصر الإنتاج بالإضافة إلى أقصى قدر ممكن من الإنتاج . وفي الواقع فإن التغير الوحيد هو كون الناتج عبارة عن دالة ذات متغيرين بدلاً من متغير واحد . ولمزيد من الإيضاح ، نفرض أن شركة Monroe Machine ، تنتج قطع غيار معدنية معيناً غير تلك التي تنتجها شركة Thomas Machine . ونفترض أنه يمكنها إجراء تغييرات في أعداد الآلات والعمال . وعليه فإن الجدول (7.3) يعرض دالة الإنتاج لهذه الشركة . ويمكن حساب الناتج المتوسط لأي من الآلات أو العمال عن طريق قسمة الإنتاج الإجمالي على أي من عدد الآلات أو العمال المستخدمين. كما يمكن الحصول على الناتج الحدي لكل عنصر عن طريق تثبيت العنصر الآخر . فعلى سبيل المثال نجد أن الناتج الحدي للآلة عند استخدام 4 وحدات عمل واستخدام ما بين 3 و 4 آلات هو 5,100 قطعة لكل آلة ، والناتج الحدي للعمل عند استخدام 4 آلات وما بين 3 و 4 وحدات عمل هو 2,100 قطعة لكل وحدة . فإذا كانت X_1 هي كمية العنصر الأول و X_2 هي كمية العنصر الثاني ، فإن دالة الإنتاج تكون :

$$Q = f(X_1 , X_2) \qquad (7.6)$$

حيث Q هي معدل الإنتاج الكلي للشركة . والناتج الحدي للعنصر الأول هو $\partial Q / \partial X_1$ ، والناتج الحدي للعنصر الثاني هو $\partial Q / \partial X_2$.

جدول (7.3) دالة الإنتاج ذات العنصرين المتغيرين ، شركة Monroe Machine

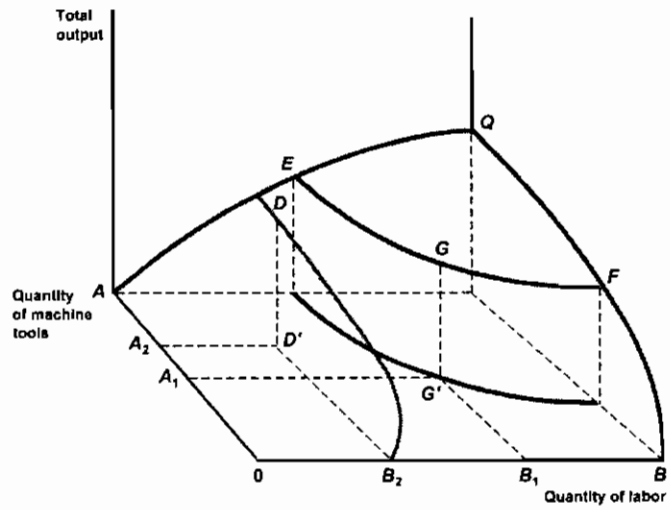
حجم العمالة	عدد معدات الآلات (مئات القطع المنتجة سنوياً)			
(وحدات)	3	4	5	6
1	5	11	18	24
2	14	30	50	72
3	22	60	80	99
4	30	81	115	125
5	35	84	140	144

كما يمكن التعبير عن دالة الإنتاج بمسطح مشابه لذلك الموجود بالشكل (7.3) وهو $OAQB$.[4] ويشير ارتفاع أي نقطة على هذا السطح إلى كميات الإنتاج . وإذا قمنا بإسقاط عمود من ذلك السطح على " الأرضية " لمعرفة بعد النقطة الناتجة عن محاور العمل والمعدات فإنه يتضح لنا الكمية المطلوبة من العنصر التي تؤدي إلى الحصول على الكمية المطلوبة من الإنتاج . وعلى سبيل المثال ، نجد أن الحصول على $G'G$ من الإنتاج يتطلب $OB_1 (= A_1G')$ وحدة من العمل ، و $OA_1 (= B_1G')$ من المعدات والعمالة معاً . وبالعكس ، مثلاً يمكننا أخذ كمية من المعدات الآلية والعمالة (OA_2 معدات و OB_2 من العمالة مثلاً) لمحاولة إيجاد كمية الإنتاج المترتب على ذلك بحساب ارتفاع سطح الإنتاج عند النقطة D' ، وهي النقطة التي يصل عنصر الإنتاج فيها إلى OB_2 ، والمعدات الآلية إلى OA_2 . وطبقاً للشكل (7.3) ، فإن الإجابة تساوي $D'D$.

ولا تشتمل دالة الإنتاج على الكثير من الطرق التي تمكننا من الحصول على أحدث التقنيات الإنتاجية ولكنها فقط تدلنا على التوليفات العالية الكفاءة بين عناصر الإنتاج المختلفة . فإذا كان بالإمكان الحصول على وحدة واحدة من الإنتاج عن طريق استخدام وحدتين من العمل وثلاث وحدات من رأس المال ، فإن دالة الإنتاج تتعاظم أهميتها إذا استطعنا الحصول على نفس كمية الإنتاج بعينها باستخدام نفس القدر من العمالة ومقدار أقل من رأس المال .

[4] ليس مقصوداً أن يعبر السطح عن القيم الرقمية الواردة في الجدول (7.3) ، ولكنه بمثابة تعبير عام عن الشكل الذي يحتمل أن يكون عليه .

obeikandl.com



شكل (7.3) دالة الإنتاج ذات العنصرين المتغيرين : يوضح مسطح الإنتاج *OAQB* إجمالي الإنتاج الذي يمكن تحقيقه عن طريق توليفات مختلفة من مقادير متباينة للمعدات الآلية والعمالة .

تحليل القرارات الإدارية

Nucor وكيفية بقائها على دالة الإنتاج

لم تحل بشركة Nucor – رابع أكبر شركة لتصنيع الحديد و للصلب في الولايات المتحدة – أي خسارة موسمية واحدة طوال الثلاثين عاما الماضية . وفي عام 1988 ، وبينما كانت أي شركة صلب عادية متكاملة في الولايات المتحدة تنتج متوسط 400 طن من الصلب للعامل ، كانت Nucor تنتج متوسط 980 طناً للعامل . ولعل أحد أسباب ذلك هو أنNucor تعد بمثابة " وحدة إنتاجية صغيرة " وليست شركة متكاملة لإنتاج الصلب . و تتميز الشركات الصغيرة بدالة إنتاج مختلفة عن تلك التي تتميز بها الشركات المتكاملة . فهم يستخدمون أفران القوس الكهربائية لعمل خط إنتاج ضيق من الصلب الخردة . وعلى العكس من شركات الصلب المتكاملة ، فلقد ازدهرت المصانع الأمريكية الصغيرة في الأعوام الأخيرة .

ومن الأسباب الأخرى لارتفاع متوسط الإنتاج بشكل نسبي للعامل في Nucor هو أن الإدارة تعمل جاهدة على إبقاء الشركة على دالة الإنتاج . فكما أوضحنا فيما سبق ، فدالة الإنتاج تشتمل على عناصر الإنتاج المستخدمة ذات الكفاءة العالية . فإذا كان بالإمكان إنتاج وحدة واحدة باستخدام 3 وحدات عمل و 3 وحدات رأس مال ، فإن باستخدام دالة إنتاج تشتمل على4 وحدات رأس مال و3 وحدات عمل لن تدخل حيز التنفيذ لعدم كفاءتها . أما الشركات التي تفتقر إلى الكفاءة فإنها تكون خارج دالة الإنتاج حيث تقوم بإنتاج كميات أدنى مما تسمح به قدراتهم وذلك في ضوء كميات عناصر الإنتاج المستخدمة .

ويصف Kenneth Iverson – رئيس Nucor – بعضاً من الطرق التي يستخدمها هو وزملائه لرفع مستوى الكفاءة بالشركة : "*يمكنك معرفة الكثير عن أي شركة بمجرد النظر إلى خرائطها التنظيمية . فإذا وجدت الكثير من الإداريين ، فسوف تتأكد من افتقارها إلى الكفاءة . وكذلك ينبغي عليك أن تحد من استعانتك بالمساعدين . ويمكنك ملاحظة عدم وجود مثل هذه الوظيفة في شركتنا ، فرؤساء الأقسام يقومون بالرجوع إلى مباشرة . ولعل أحد أهم عوامل النجاح هي الإقلال من عدد المستويات الإدارية .* "

"*ويعد كل قسم بمثابة مركز مستقل للربح و لمدير القسم الحق في اتخاذ القرارات اليومية التي تجعل ذلك القسم مربحاً أو غير مربح . ونحن ننتظر قيام كل قسم من الأقسام بمساهمة فعالة تضيف إلى أرباح الشركة . ونحن نتوقع أيضاً من كل قسم أن يحقق عائداً قدره 25% على إجمالي الأصول المستخدمة ، قبل نفقات الشركة والضرائب والفوائد أو توزيع الأرباح . ومن المبادئ التي تطبقها شركتنا في حالة إخفاق أحد المديرين في*

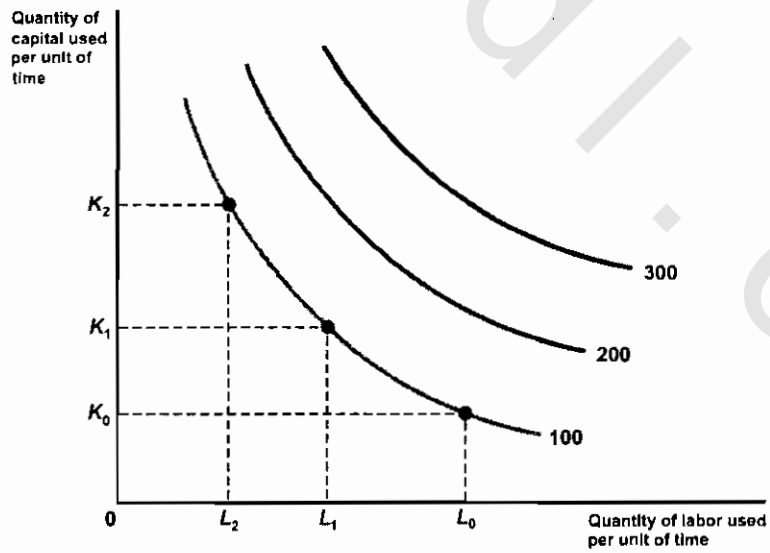
تحقيق هذا المستوي لعدد معين من الأعوام ، فإننا نقوم إما بالتخلص من القسم أو من مدير القسم ، وعادة ما يكون الضحية هو مدير القسم . "

من الضروري معرفة أنه من واجب مديري الشركة إبقاء الشركة على دالة الإنتاج فهي ليست مهمة المهندسين والفنيين فقط . ولعل أحد الأمثلة علي ذلك بعض تلك العمليات التي وردت علي لسان أحد مديري Nucor . "*عندما أتيت إلى هذه الشركة منذ أربعة أعوام كان لدينا عمالة زائدة، ولعلمي بعدد ما لدينا من عمال في مصنع الشركة في Nebraska ، لذا فقد كنت أرى أن عدد 410 عاملاً في مصنعنا هذا كان أكبر بكثير من حجم احتياجنا من العمالة . ولاستخدام هذا المقياس ، شرعت الشركة في تقليص هذه الأعداد الزائدة تدريجيا . كما قمنا بإجراء بعض التغييرات البسيطة في المعدات، وكان من شانها تسهيل العمل ، وإعطائهم الفرصة للحصول علي المزيد من الحوافز . وكان من الطبيعي أن تكون تلك التغييرات غير مفهومة في كثير من الحالات ، إلا أنه يمكننا القول أننا قد تمكننا علي مدار الأعوام الأربعة السابقة من مد يد العون لعدد كبير منهم بشكل لا بأس له . وعلي الرغم من قيامنا بتخفيض إجمالي عدد العمال بمقدار 55 عاملاً معظمهم في قسم الإنتاج بمفرده ، إلا أننا مازلنا نتمتع بالقدرة علي تحقيق نفس حجم الإنتاج (مقاساً بالطن) الذي كنا نحققه منذ أربعة أعوام مضت . "*

* Bartlett, Cases in Strategic Management; American Produetivity and Quality Center Letter 8, no. 7 (January 1989); and Business Week (April 4, 1994).

منحنيات الناتج المتساوي

يمكن التعبير عن مقادير الإنتاج المتساوية في شكل منحنى يوضح كافة التوليفات الممكنة بين عناصر الإنتاج المختلفة (ذات الكفاءة العالية) القادرة علي إنتاج كمية بعينها من الإنتاج . وبمعرفة دالة الإنتاج يمكننا اشتقاق منحنى الناتج المتساوي المتعلق بأي مستوى من الإنتاج . و بفرض أننا نريد إيجاد مقدار الإنتاج المتساوي المناظر للإنتاج $G'G$ كما هو موضع في الشكل (7.3) . فكل ما تحتاجه هو القيام بقطع مسطح الإنتاج عند الارتفاع $G'G$ بالتوازي مع السطح السفلي ، بحيث يكون الناتج EGF ، ثم نقوم بإسقاط أعمدة من EGF علي القاعدة . ويؤدي ذلك إلى إيجاد منحنى يشتمل على كافة التوليفات الممكنة (ذات الكفاءة العالية) للآلات والعمالة ، التي يمكنها إنتاج كمية $G'G$ من قطع الغيار . وباستخدام البيانات الوارد ذكرها في المعادلة (7.6) يوضح مقدار الإنتاج المتساوي كافة المجموعات المؤلفة من X_1 و X_2 بحيث $f(X_1, X_2)$ تساوي معدل إنتاج معين .



شكل (7.4) منحنيات الناتج المتساوي : توضح هذه المنحنيات التوليفات المختلفة لرأس المال والعمالة عند ثلاث مستويات مختلفة : 100 و 200 و 300 وحدة إنتاج .

يوضح الشكل (7.4) عدداً من منحنيات الناتج المتساوي التي يتعلق كل منها بمعدل إنتاج معين . ويقيس المحوران كميات عناصر الإنتاج المستخدمة . وعلى خلاف الأشكال السابقة ، فإننا نعتبر أن أهم العناصر في هذه الحالة هي العمل ورأس المال – وليس العمل والمعدات . وتوضح المنحنيات التوليفات المختلفة من عناصر الإنتاج التي يمكنها إنتاج 100 ، 200 ، 300 وحدة إنتاج . ولنأخذ مثلاً مقدار الإنتاج المتساوي المتعلق بـ 100 وحدة إنتاج لكل فترة زمنية . فمن الممكن عندئذٍ الحصول على مثل هذا المعدل من الإنتاج باستخدام عدد L_0 وحدة عمل ، K_0 وحدة رأس مال . كما يمكن الحصول على نفس هذا المعدل باستخدام L_1 وحدة عمل ، K_1 وحدة رأس مال (أو L_2 وحدة عمل ، K_2 وحدة رأس مال) وذلك في كل فترة زمنية معينة .

المعدل الحدي للإحلال بين عناصر الإنتاج

سبق وأن تعرفنا على مجموعة من الأساليب التي تمكننا من الحصول على مقدار ما من الإنتاج بكفاءة عالية . أما عن مفهوم المعدل الحدي للإحلال فيعني إحلال عناصر الإنتاج محل بعضها البعض واستخدامهما بنسب مختلفة عند مستويات الإنتاج – المفترض فيها الثبات . وطبقاً للمعادلة (7.6) فإذا كانت الكمية التي تنتجها أحد الشركات دالة لكميات من عناصر الإنتاج :

$$Q = f(X_1 , X_2)$$

فإن المعدل الحدي للإحلال يكون :

$$MRTS = -\frac{dX_2}{dX_1} \qquad (7.7)$$

مع افتراض ثبات Q .

وهندسياً فإن المعدل الحدي للإحلال يساوي 1– مضروباً في ميل منحنى الناتج المتساوي . ولا غرابة في ذلك لأن dX_2 / dX_1 هو ميل منحنى الناتج المتساوي . ونلاحظ هنا أن الإحلال يساوي $MP_1 \setminus MP_2$ حيث MP_1 هي الناتج الحدي للعنصر 1 ، MP_2 هي الناتج الحدي للعنصر 2 . ولإثبات ذلك نشير إلى أن :

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial Q}{\partial X_2} dX_2$$

وحيث أنه يفترض ثبات مستوى الإنتاج $(dQ = 0)$ ، أي أن :

$$\frac{\partial Q}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial Q}{\partial X_2} dX_2 = 0$$

إذن :

$$\frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{\partial Q}{\partial X_1} \div \frac{\partial Q}{\partial X_2} = -\frac{MP_1}{MP_2} \qquad (7.8)$$

وبما أن :

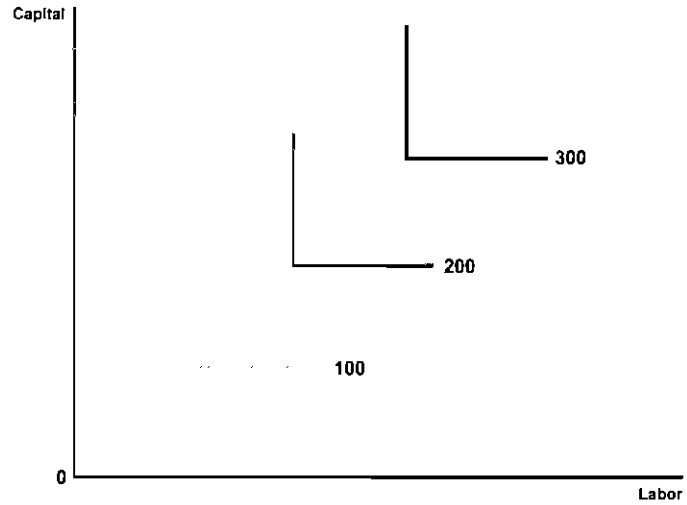
$$MRTS = - dX_2 / dX_1$$

فإن :

$$MRTS = MP_1 / MP_2$$

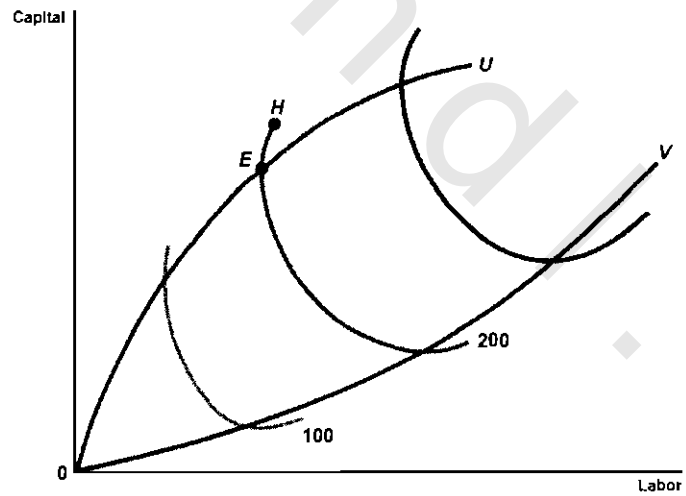
هناك اختلافات كبيرة بين عناصر الإنتاج من حيث كيفية إحلالها لبعضها البعض . فمثلاً في بعض عمليات الإنتاج يمكن إحلال نوع معين من العمل محل نوع آخر بسهولة ، بينما قد يتعذر ذلك في حالات أخرى . كما توجد حالات أكثر حدة يتعذر فيها إحلال عناصر الإنتاج . أي أن إنتاج كل وحدة من المنتج يتطلب توافر كمية معينة من جميع عناصر الإنتاج ، وينبغي عدم المساس بالنسبة الثابتة لعناصر الإنتاج المستخدمة . ويوضح الشكل (7.5) منحنيات الإنتاج المتساوي للشركة في مثل هذه الحالة التي تأخذ شكل الزوايا القائمة . هذا ونلاحظ هنا قلة العمليات الإنتاجية التي يتعذر معها استبدال بعض عناصر الإنتاج ببعضها الآخر .

obeikandi.com



شكل (7.5) منحنيات الناتج المتساوي عند ثبات النسب : إذا كان من الضروري استخدام عناصر الإنتاج بنسب ثابتة ، تتحور منحنيات الناتج المتساوي إلى زوايا قائمة .

كما يمكن أن تحظى منحنيات الناتج المتساوي بمقاطع موجبة الميل ، عند انحناءها جهة الخلف كما هو الحال بالشكل (7.6) . ويكون ميل منحنيات الناتج المتساوي موجباً أعلى OU وأدنى من OV ، وهو ما يعني أن الإبقاء على معدل إنتاج معين يقتضي زيادة كل من رأس المال والعمالة . وفي مثل هذه الحالة ، فإن الناتج الحدي لأحد عناصر الإنتاج لابد وأن يكون سالباً . ويكون الناتج الحدي لرأس المال سالباً فوق OU ، مما يعني إمكانية زيادة الإنتاج مع تخفيض حجم رأس المال وتثبيت العمالة . ويكون الناتج الحدي للعمالة سالباً أسفل OV ، مما يعني إمكانية زيادة الإنتاج مع تخفيض حجم العمالة وتثبيت رأس المال . هذا ويعرف الخطان OU و OV بخطي المتن .



شكل (7.6) المنطقة الاقتصادية للإنتاج : من غير الطبيعي أن تسعى إحدى الشركات الرامية إلى معظمة أرباحها إلى العمل عند نقطة خارج خطي المتن OU و OV .

من الطبيعي ألا تحاول أي من الشركات التي ترمي إلى معظمة أرباحها العمل عند أي نقطة خارج نطاق خطي المتن ، وذلك لقدرتها على طرح نفس كمية الإنتاج باستخدام كميات أقل حجماً من كل من العنصرين ، مما يؤدي إلى تقليص نفقات الشركة . ولنلقي نظرة على النقطة H في الشكل (7.6) حيث نجد أن هذه النقطة تشهد ميلاً موجباً لمنحنى الناتج المتساوي ، مما يجعلها خارج نطاق خطي المتن ، وعلية فإنها تتطلب مقداراً

أكبر حجماً من كل من العمالة ورأس المال مما هو الحال في غير ذلك من النقاط عند نفس مقدار الإنتاج (كالنقطة E مثلاً) ولما كانت أسعار كل من رأس المال والعمالة موجبة ، لذا فإنه من الطبيعي أن تلجا الشركة للعمل عند النقطة E أكثر من النقطة H . وهكذا فإنه يمكن استنباط قاعدة واضحة ومبسطة ، ألا وهى عدم اللجوء إلى العمل عند أي من النقاط الخارجة عن نطاق خطي المتن ، وذلك في حالة الرغبة في معظمة الربح .

التوليفات المثلى من عناصر الإنتاج

إذا كانت إحدى الشركات ترغب في معظمة أرباحها ، فمن الطبيعي أن تسعى إلى تقليص التكاليف الناشئة عن كم بعينة من الإنتاج أو زيادة كمية المنتج المشتق من مستوى معين من التكاليف .[5] وبفرض أن الشركة تقبل أسعار عناصر الإنتاج كما هي ، وأن هناك نوعين من عناصر الإنتاج هما رأس المال والعمالة ، وأنهما متغيران في الفترة الزمنية التي يرتبطان بها . فما هي افضل التوليفات المتاحة المؤلفة من رأس المال والعمالة التي يجب أن تختارها الشركة إذا ما كانت ترغب في معظمة حجم الإنتاج المشتق من مستوى التكاليف الموجودة بالفعل .

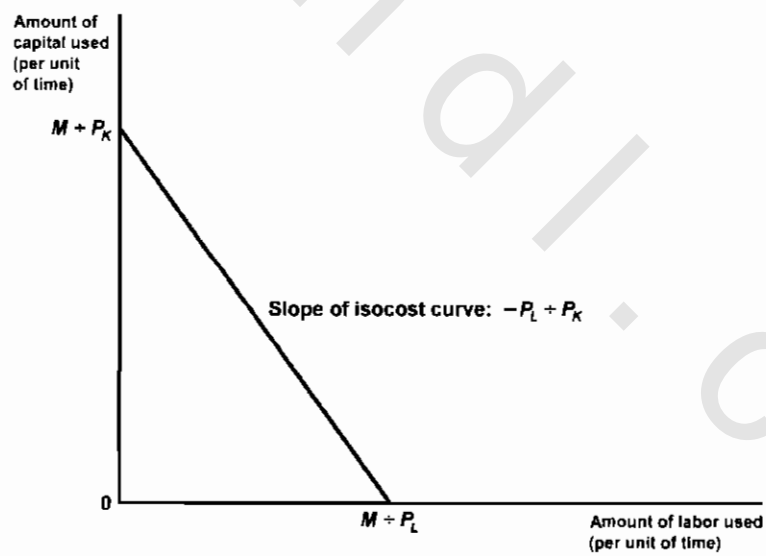
وللإجابة على هذا السؤال ، يتعين علينا تحديد مختلف التوليفات الممكنة من عناصر الإنتاج في مقابل مستوى معين من النفقات . فإذا كان رأس المال والعمالة هما العنصران ، وكان سعر العمالة هو P_L لكل وحدة وسعر رأس المال هو P_K لكل وحدة ، فإن التوليفات التي يمكن الحصول عليها مقابل مقدار كلي قدره M هي :

$$P_L L + P_K K = M \qquad (7.9)$$

حيث L هي كمية العمالة ، و K هي كمية رأس المال . وبمعلومية M و P_L و P_K ينتج أن :

$$K = \frac{M}{P_K} - \frac{P_L L}{P_K} \qquad (7.10)$$

إذن ، يمكن التعبير عن التوليفات المختلفة من رأس المال والعمالة التي يمكن شراؤها - بمعلومية M و P_L و P_K - بخط مستقيم ، مثل ذلك الموضح بالشكل (7.7) . (ويظهر رأس المال على المحور الرأسي والعمالة على المحور الأفقي .) ويعرف هذا الخط المستقيم بخط التكلفة المتكافئ الذي يقطع المحور الرأسي عند نقطة تساوي M / P_K ، وبميل يساوي $-P_L / P_K$.

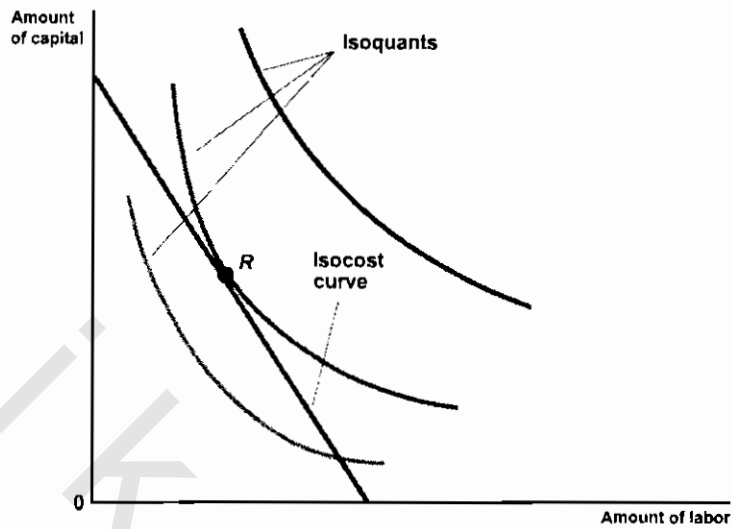


شكل (7.7) خط التكلفة المتكافئ : يوضح خط التكلفة المتكافئ عدداً من توليفات عناصر الإنتاج التي يمكن الحصول عليها مقابل مقدار إجمالي من M .

[5] إن الشروط اللازمة لتقليص تكلفة مقدار معين من الإنتاج إلى أدنى حد ممكن هي نفس الشروط اللازمة لمعظمة الإنتاج عند تكلفة معينة . وهو الأمر الموضح في هذا الجزء من الفصل . وهو ما يساعدنا على النظر إلى المشكلات التي تواجهها الشركة من هذه الناحية أو تلك .

obeikandl.com

وبتطابق الخط الملائم من التكلفة المتكافئ على خريطة منحنيات الناتج المتساوي يكون من الممكن بيانياً تحديد التوليفات المثلى من عناصر الإنتاج التي تؤدي إلى معظمة الإنتاج في ظل التكاليف القائمة . ويتعين على الشركة اختيار تلك النقطة على خط التكلفة المتكافئ التي توجد على أعلى منحنى ناتج متساوي ، كأن تختار النقطة R في الشكل (7.8) . وهي النقطة التي يكون عندها خط التكلفة المتكافئ مماساً لمنحنى الناتج المتساوي . وبما أن ميل منحنى الناتج المتساوي يساوي MP_L / MP_K – وميل خط التكلفة المتكافئ يساوي P_L / P_K – ، وعلى ذلك تتأتى التوليفة المثلى لعناصر الإنتاج عند النقطة التي يتساوى عندها $MP_L / MP_K = P_L / P_K$.



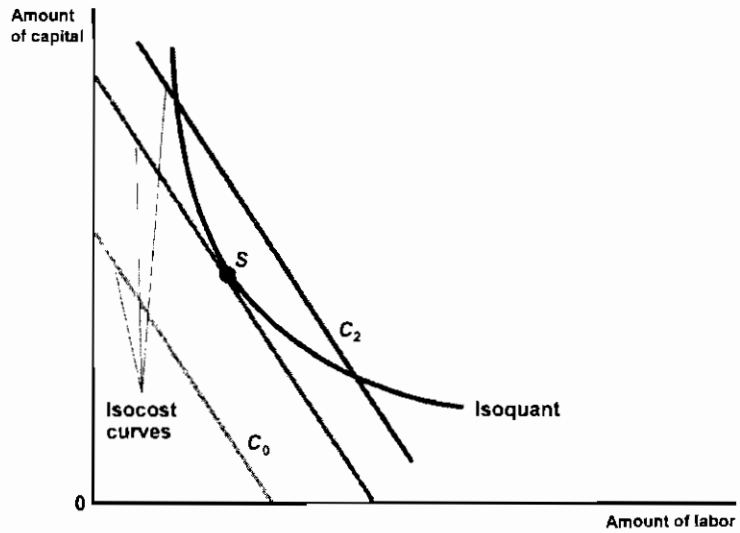
شكل (7.8) معظمة الإنتاج عند تكلفة معينة : إذا كانت الشركة ترغب في معظمة إنتاجها في مقابل تكلفة معينة ، فإنه يتعين عليها اختيار التوليفة المثلى من عناصر الإنتاج الكائنة عند النقطة R .

أما إذا كان هناك أكثر من عنصرين ، فإن الشركة تقوم بمعظمة الإنتاج من خلال توزيع نفقاتها على كافة عناصر الإنتاج بحيث يكون الناتج الحدي لما قيمته دولار واحد من عنصر معين مساوياً للناتج الحدي لما قيمته دولار واحد من أي عنصر إنتاج آخر من العناصر المستخدمة ، وعلى ذلك فإن الشركة سوف تختار توليفاتها بحيث :

$$\frac{MP_a}{P_a} = \frac{MP_b}{P_b} = \ldots = \frac{MP_n}{P_n} \qquad (7.11)$$

حيث MP_a ، MP_b ، ..... ، MP_n هي النواتج الحدية للعناصر a ، b ، ..... ، n ، و P_a ، P_b ، ..... ، P_n هي أسعار عناصر الإنتاج a ، b ، ..... ، n . [ولمزيد من إثبات أهمية الدور الذي يلعبه اتخاذ هذا القرار في المعادلة (7.11) ، راجع ملحق هذا الفصل .]

ولتحديد توليفة عناصر الإنتاج التي تؤدي إلى تقليص التكاليف إلى أدنى درجة ، فإننا نستخدم رسماً بيانياً مشابهاً للشكل (7.8) . فبالتحرك بطول منحنى الناتج المتساوي عند حد الإنتاج المفترض ، فإننا نجد تلك النقطة تقع عند أدنى خط تكلفة متكافئ (S) في الشكل (7.9) ، ومع أن توليفات عناصر الإنتاج الواقعة على خطوط التكلفة المتكافئة مثل C_O تقع أدنى من S أي أقل تكلفة من S إلا أنها تعجز عن تحقيق الإنتاج المراد تحقيقه . أما التوليفات الواقعة على خطوط التكلفة المتكافئة مثل C_2 ، والتي تقع أعلى من S فإنها تؤدي إلى إنتاج ما يراد إنتاجه ولكن بتكلفة أعلى من S . ومن الواضح أن النقطة المثلى S هي النقطة التي يكون عندها خط التكلفة المتكافئ مماساً لمنحنى الناتج المتساوي . ولتقليل تكاليف إحدى مستويات الإنتاج المعينة أو معظمة الإنتاج في ظل قدر معين من التكاليف فإنه يتعين على المؤسسة الإنتاجية مساواة MP_L / MP_K بـ P_L / P_K مما يعني أن : $MP_L / P_L = MP_K / P_K$. وإذا كان هناك حاجة لأكثر من عنصرين فيجب على الشركة تحقيق المعادلة (7.11) .



شكل (7.9) تخفيض التكلفة إلى أدنى حد ممكن عند حجم معين من الإنتاج : إذا كانت الشركة ترغب في خفض تكلفة إنتاجها إلى أدنى حد ممكن عند مستوى الإنتاج الكائن على منحنى الناتج المتساوي ، فإنه يتعين عليها اختيار التوليفة المثلى عند النقطة S .

شركة Beiswanger

(مثال رقمي)

ولإيضاح كيفية استخدام التقنية المعروضة في الجزء السابق ، فلننظر لشركة Beiswanger – وهي شركة صغيرة تعمل بالتحليل الهندسي . فقد قرر مدير الشركة أن الإنجاز الشهري للشركة (Q) يرتبط بعدد المهندسين (E) وعدد الفنيين (T) على النحو التالي :

$$Q = 20E - E^2 + 12T - 0.5T^2 \qquad (7.12)$$

فإذا كان الراتب الشهري للمهندس هو 4,000 دولار ، وللفني 2,000 دولار . وإذا كانت الشركة تخصص 28,000 دولاراً شهرياً لإجمالي مرتبات المهندسين والفنيين ، فما هو عدد المهندسين والفنيين الذي يجب على الشركة الاستعانة بهم ؟

وبناء على المثال السابق ، إذا رغبت الشركة في معظمة إنتاجها ، لابد أن تستعين بتوليفة من المهندسين والفنيين بحيث :

$$\frac{MP_E}{P_E} = \frac{MP_T}{P_T} \qquad (7.13)$$

حيث MP_E هو الناتج الحدي للمهندس ، و MP_T هو الناتج الحدي للفني ، و P_E هو راتب المهندس و P_T هو راتب الفني . وبأخذ المشتقة الجزئية لـ Q في المعادلة (7.12) بالنسبة لـ E و T . فإننا نجد أن :

$$MP_E = \frac{\partial Q}{\partial E} = 20 - 2E \qquad (7.14\ a)$$

$$MP_T = \frac{\partial Q}{\partial T} = 12 - T \qquad (7.14\ b)$$

وبالتعويض عن MP_E و MP_T في المعادلة (7.13) ، وبملاحظة أن $P_E = 4{,}000$ و $P_T = 2{,}000$ ، فإننا نجد أن :

obeikandl.com

$$\frac{20-2E}{4{,}000}=\frac{12-T}{2{,}000}$$

$$\frac{2{,}000(20-2E)}{4{,}000}=12-T$$

$$10-E=12-T$$

وهو ما يعني أن $T=E+2$.

وبما أن الشركة سوف تنفق 28,000 دولاراً شهرياً على إجمالي مرتبات المهندسين والفنيين ، فإن :

$$4{,}000E+2{,}000T=28{,}000$$

وبإحلال $(E+2)$ محل T ، نجد أن :

$$4{,}000E+2{,}000(E+2)=28{,}000$$

وهو ما يعني أن $E=4$ (و $T=6$) . وعليه فإنه لمعظمة الإنتاج عند إنفاق 28,000 دولار على المرتبات ، يتعين على الشركة تعيين 4 مهندسين و 6 فنيين .

شركة Miller

(مثال رقمي آخر)

لإيضاح كيفية الاستعانة بعملية التحليل الاقتصادي لتحديد توليفة العناصر التي من شأنها الوصول بتكاليف الإنتاج إلى أدنى مستوى ممكن ، سوف نتعرض لمثال شركة Miller ، حيث تكون العلاقة بين الإنتاج (Q) ، وعدد العمال (L) ، وعدد الآلات (K) المستخدمة لكل ساعة هي :

$$Q=10\sqrt{LK}$$

علماً بأن أجر العامل هي 8 دولار لكل ساعة ، وسعر الآلة 2 دولار لكل ساعة . فإذا كانت شركة Miller تنتج 80 وحدة كل ساعة ، فما هو عدد العمال والآلات اللازم استخدامها ؟

وطبقاً للمعادلة (7.11) فإن على شركة Miller أن تختار توليفة عناصر الإنتاج بحيث :

$$\frac{MP_L}{P_L}=\frac{MP_K}{P_K}$$

حيث MP_L هي الناتج الحدي للعامل الواحد ، MP_K هو الناتج الحدي للآلة الواحدة ، P_L هو أجر العامل ، P_K هو سعر استخدام الآلة الواحدة .

وبما أن :

$$Q=10\sqrt{LK}$$

فإن :

$$MP_L=\frac{\partial Q}{\partial L}=5\sqrt{K/L}$$

$$MP_K=\frac{\partial Q}{\partial K}=5\sqrt{L/K}$$

وإذا كان : $MP_L/P_L=MP_K/P_K$ فإن :

$$\frac{5\sqrt{K/L}}{8}=\frac{5\sqrt{L/K}}{2}$$

وبضرب الطرفين في :

$$\sqrt{K/L}$$

نحصل على :

obeikandl.com

$$\frac{5K}{8L} = \frac{5}{2}$$

وهو ما يعني أن : $K = 4L$. وبما أن $Q = 80$ ، إذن :

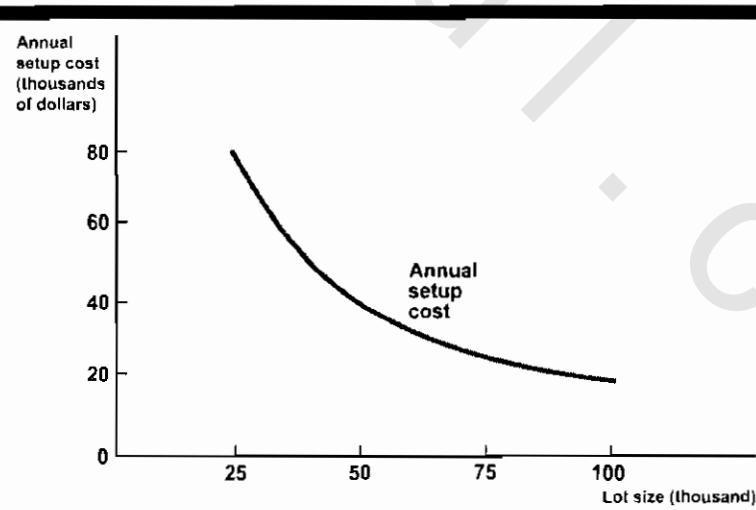
$$10\sqrt{LK} = 80$$
$$10\sqrt{L(4L)} = 80$$
$$L = 4$$

لذا فإن تقليص النفقات إلى أدنى مستوى ممكن يستوجب قيام شركة Miller باستخدام 4 عمال و 16 آلة .

حجم المخزون الأمثل من الإنتاج

قمنا فيما سبق بشرح كيفية توصل المديرين إلى توليفات العناصر التي من شأنها تقليص التكلفة التي يتم إنفاقها على مقدار معين من الإنتاج . وسوف نقوم في هذا الجزء من الفصل بتوسيع نطاق عملية التحليل هذه بحيث تتضمن أكثر من فترة زمنية واحدة . مع إدراكنا لحقيقة هامة ، وهي قيام عدد كبير من الشركات بإنتاج السلع في شكل أحجام كبيرة ، وذلك بشكل متقطع أو غير منتظم . ولعل أهم سؤال يجب طرحه في حالات هذه الشركات ما هو الحجم الأمثل لهذا الإنتاج ؟ والجدير بالذكر أن القائمين على التطبيق الاقتصادي في الإدارة يولون عنايتهم القصوى لمثل هذا السؤال . وباستخدام أساليب الأمثلية فإنه يمكن الإجابة عن هذا السؤال بسهولة ، ومن ثم توسيع نطاق عملية التحليل التي بدأناها من قبل .

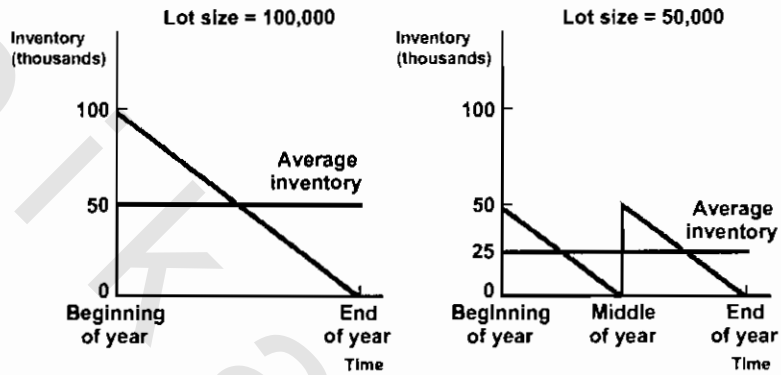
وبفرض أن شركة Monarch – وهي إحدى الشركات المصنعة لعربات النقل ، تسعى إلى إنتاج 100,000 قطعة غيار من نوع خاص ، نظراً لاحتياج عربات النقل لذلك النوع من قطع الغيار . وكلما شرعت الشركة في إنتاج قطعة الغيار هذه ، كلما تكبدت ما قيمته 20,000 دولار كتكلفة مبدئية . حيث أنه يتعين على الشركة تخصيص قدرٍ كافٍ من وقت العمل لتجهيز المعدات اللازمة لإنتاج مثل هذه القطع . ويتميز إنتاج الأحجام الكبيرة بتقليص التكلفة الإجمالية لتجهيز المعدات على مدار العام . فإذا قامت الشركة بإنتاج الكمية المطلوبة منها سنوياً (100,000 قطعة) على دفعة واحدة ، فسيكون عليها تجهيز معدات التصنيع بحيث يكون إجمالي التكلفة السنوية لتجهيز المعدات 20,000 دولار . أما إذا قامت بتقسيم الكمية المطلوبة منها سنوياً على دفعتين (50,000 قطعة كل مرة) ، فسوف تضطر الشركة لتجهيز معدات التصنيع مرتين ، الأمر الذي يؤدي إلى مضاعفة إجمالي التكلفة لتجهيز المعدات حيث تبلغ 40,000 دولار . ويوضح الشكل (7.10) العلاقة بين حجم المخزون من الإنتاج وإجمالي التكاليف السنوية لتجهيز المعدات .



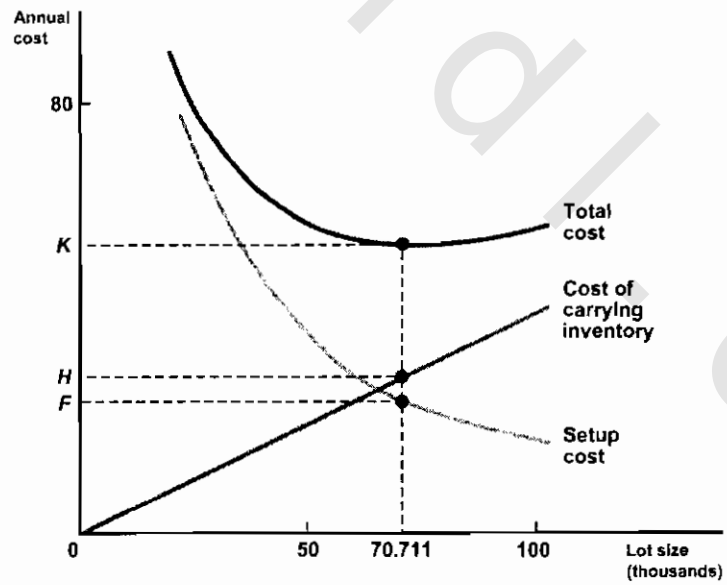
شكل (7.10) العلاقة بين حجم الإنتاج والتكاليف السنوية لتجهيز المعدات : كلما زاد حجم الإنتاج كلما تناقصت التكاليف السنوية لتجهيز المعدات .

وكثيراً ما تحجم الشركات عن إنتاج أحجام كبيرة ، لأن ذلك يتسبب في وجود مخزون كبير مكلف في صيانته وتمويله . فعلى سبيل المثال ، إذا قامت الشركة بإنتاج الـ 100,000 قطعة على دفعة واحدة في بداية العام، فإن مخزونها يساوي 100,000 قطعة في بداية العام وصفر في نهايته ، ومتوسط المخزون يساوي 50,000 قطعة - كما هو موضح في الشكل (7.11) . أما إذا قامت الشركة بتقسيم الكمية المطلوبة منها سنوياً من الـ 100,000 قطعة على مرتين (كلاً منها 50,000) ، فإن المخزون يساوي 50,000 قطعة عند بداية السنة وصفر عند نهاية الستة شهور ، ثم يرتفع مرة أخرى إلى 50,000 وبعد ذلك يتناقص إلى الصفر في نهاية العام . ومن هنا يكون متوسط المخزون يساوي 25,000 قطعة - كما هو موضح في الرسم الأيمن من الشكل (7.11) .

وإذا كانت التكلفة السنوية للتخزين متناسبة مع متوسط المخزون ، فإنه يمكن التعبير عن العلاقة بين حجم الإنتاج وبين التكلفة السنوية بالشكل (7.12) . وبإضافة التكاليف السنوية لتجهيز المعدات إلى تكاليف التخزين ، يمكننا الحصول على التكاليف الإجمالية لكل حجم . وفي ظل الظروف الموضحة في الشكل (7.12) ، فإن أفضل حجم للإنتاج هو 70,711 ، حيث يكون إجمالي التكاليف السنوية عند أدنى حد له .



شكل (7.11) حجم المخزون على مدار العام : إذا كان حجم الإنتاج يساوي 100,000 فإن متوسط المخزون يكون 50,000 . أما إذا كان حجم الإنتاج يساوي 50,000 فإن متوسط المخزون يكون 25,000 .



شكل (7.12) العلاقة بين حجم الإنتاج والتكاليف السنوية لتجهيز المعدات : يتألف إجمالي التكاليف من كل من تكلفة التخزين وتكلفة تجهيز المعدات . أي أن منحنى إجمالي التكليف هو المجموع الرأسي لمنحنى تكلفة التخزين ومنحنى تكلفة تجهيز المعدات . فإذا كان حجم الإنتاج 70,711 فإن التكلفة السنوية لتجهيز المعدات تساوي OF والتكلفة السنوية للتخزين تساوي OH والتكلفة السنوية الإجمالية تساوي $OF + OH = OK$.

كيف يمكننا – إذن تحديد أفضل حجم للإنتاج للوط بشكل عام ؟ لو أن إجمالي التكاليف السنوية تبلغ $20,000Q / L$ دولار ، حيث Q هي حجم المطلوب من قطع الغيار سنوياً ، L هي عدد الأجزاء المتطابقة التي يتم إنتاجها في كل مرة . فإذا كانت التكلفة السنوية لتخزين كل من هذه الأجزاء لمدة عام تساوي 80 سنت ، فإن التكلفة السنوية للتخزين تساوي $0.8L / 2$ دولار . وبجمع كل من التكلفة السنوية لتجهيز المعدات والتكلفة السنوية للتخزين نحصل على المعادلة التالية الخاصة بإجمالي التكاليف السنوية :

$$C = 0.8L / 2 + 20,000Q / L$$

وللوصول بإجمالي التكلفة السنوية إلى أدنى مستوى ممكن نجعل :

$$\frac{dC}{dL} = 0.4 - \frac{20,000Q}{L^2} = 0$$

وبحل المعادلة لإيجاد L ، نجد أن الوصول بإجمالي التكلفة السنوية إلى أدنى مستوى ممكن يستوجب أن تكون :

$$\sqrt{\frac{20,000Q}{0.4}} \qquad (7.15)$$

وبشكل عام فإن الحجم الأمثل للإنتاج عند تكلفته الدنيا يساوي :

$$\sqrt{2SQ / b}$$

حيث S هي تكلفة تجهيز المعدات ، و b هي التكلفة السنوية لكل من القطع المراد تخزينها .

وبالرجوع إلى حالة شركة Monarch نجد أن $Q = 100,000$ ، ومن ثم فإن الوصول إلى بإجمالي التكلفة السنوية إلى أدنى مستوى ممكن يتعين أن تكون :

$$\sqrt{20,000(100,000) / 0.4} = \sqrt{5\text{billion}} = 70,711$$

أي أن الحجم الأمثل للإنتاج هو 70,711 ، أي ما يستوجب إنتاج 70,711 وحدة متماثلة من هذا النوع في كل مرة . (وبالطبع لا يوجد ما يدعو لأن يكون عدد مرات تجهيز المعدات عدداً صحيحاً، حيث يمكن أن يتم تجهيز المعدات بواقع 5 مرات كل عامين ، أو ½ 2 في العام الواحد.)[6]

Toyota تلقن العالم درساً

ما من شك في أن اليابانيين قد أحرزوا تفوقاً كبيراً على منافسيهم في جميع أنحاء العالم في العديد من ميادين الإنتاج . فقد أدى نجاحهم في تخفيض تكلفة تجهيز معدات الصناعة إلى تمكنهم من تقليص الحجم الأمثل للتخزين . ولنأخذ مثال شركة Toyota ، والتي كان يقوم عملها في أواخر السبعينيات بتجهيز المكابس المستخدمة في إنتاج أغطية المحركات والإكصدام (وهي المكابس التي تزن 800 طن) في خلال 10 دقائق ، وهي العملية التي كانت تستغرق 6 ساعات كاملة في أيدي منافسيهم من عمال صناعة السيارات الأمريكيين . [ويعرض الجدول (7.4) أمثلة أخرى مشابهة .] ومن الواضح أن تخفيض تكلفة تجهيز المعدات تؤدي إلى تخفيض الحجم الأمثل للتخزين ، ولعل أحد أفضل الأمثلة على ذلك شركة Monarch – التي سبق الإشارة إليها . إذا استطاعت هذه الشركة تخفيض الإعداد من 20,000 دولار إلى 5,000 دولار ، فإن الحجم الأمثل للمخزون من الإنتاج سوف يكون :

$$\sqrt{5,000Q / 0.4}$$

وليس :

$$\sqrt{20,000Q / 0.4}$$

وهو ما يعني أن الحجم الأمثل سوف يقل إلى النصف (مع ثبات Q) .

[6] J. Magee, "Guides to Inventory Policy: Functions and Lot Sizes, in Mansfield, *Managerial Economics and Operations Research*, 5th ed.

obeikandl.com

جدول (7.4) تخفيض الوقت الضائع في تجهيز المعدات المختارة للعمل في الشركات اليابانية .

الشركة	الآلة	وقت التجهيز الأصلي	وقت التجهيز المنخفض
Toyota	Bolt maker	8 ساعة	1 دقيقة
Mazda	Ring gear cutter	6.5 ساعة	15 دقيقة
Mazda	Die cast machine	1.5 ساعة	4 دقيقة
Mitsubishi	8-arbor boring machine	24 ساعة	3 دقيقة

* المصدر : J. Blackburn, *Time-Based Competition* .

ومن بين المزايا المترتبة على تخفيض حجم الإنتاج هي إمكانية تخفيض حجم المخزون ، وهو الأمر الذي استرعى انتباه العديد من المديرين اليابانيين ، إلى الحد الذي جعل واحداً منهم يصف المخزون بأنه " أصل لجميع الشرور " . والجدير بالذكر أنه يوجد نظام إنتاجي تتبعه شركة Toyota يشتهر بمراعاته الشديدة لعنصر الوقت ، وهو البرنامج المعروف بنظام (إنتاج التو واللحظة) الذي يقوم على أساس وصول كل من أجزاء السيارة المنتجة في الوقت الذي تظهر فيه الحاجة إلى هذا الجزء ، أو في نفس لحظة توفر المعدات الداخلة في الإنتاج . ويمكن أن يسفر ذلك عن زيادة كبيرة في الكفاءة . وكلما تناقص حجم الإنتاج الذي لا يزال في طور التصنيع كلما انخفضت تكاليف التخزين وكلما تزايدت سرعة دورة الإنتاج وكلما أصبح من الأيسر مراقبة سير العمل في المصنع .[7]

وطبقاً لبعض التقديرات ، فإن 35,000 شركة أمريكية تجرب نظم إنتاج التو واللحظة ، كما أن ما لا يقل عن 500 شركة تسعى إلى تعميمها في جميع نواحي العمل داخلها . وقد جاءت النتائج رائعة أحياناً . ولنأخذ مثال شركة Northern Telecom في مدينة Santa Clara بولاية California ، والتي تقوم بتصنيع لوحات الدوائر الإلكترونية – التي تستخدم في معالجة البيانات . حيث يؤكد المديرون أن الإنتاج قد ازداد بنسبة 25% دون الحاجة إلى تعيين المزيد من العمال ، وان المخزون قد انخفض بنسبة تزيد عن 80% .

وثمة نظام إنتاج آخر يتبعه اليابانيون ، وهو ما يعرف (بالتصنيع المركز) . وكانت شركة Toyota قد قامت بتبني هذا النظام عندما طبقته في عملية تصنيع ما يعرف بأوناش الشركات ، حيث قامت بقصر خط إنتاجها على 6 أنواع من هذه الأوناش في مصنع الشركة في Nagoya . مما أدى إلى الحد من العمليات الإنتاجية المعقدة ، ومن ثم تخفيض عدد الأجزاء الداخلة في تركيب تلك الأوناش ومستوى حجم المخزون ، ومقدار ما يلزم من الإشراف . بالإضافة إلى ما قد يطرأ من عيوب وأخطاء . ويقارن الجدول (7.5) بين متوسط تكلفة إنتاج أحد أوناش الشركة في Toyota بمثيلاتها في إحدى الشركات في غرب أوروبا والتي تنتج 20 نوعاً من الشاحنات في مصنعها . ومن الواضح أن شركة Toyota تحقق تكلفة بحوالي 20%.[8]

وقد جاء رد فعل الشركات الأوروبية والأمريكية في شكل تبني تقنيات مماثلة . وقامت الشركة المنتجة لأحد دول غرب أوروبا المذكورة في الجدول (7.5) بتخفيض الأنواع التي تنتجها من 20 إلى 6 . وكانت النتائج تقريبا مماثلة لما حدث في اليابان ، حيث تناقصت التكلفة لكل ونش بمقدار 19% .[9] ومن الأمور الهامة التي تتضح لنا هاهنا أن العديد من هذه الأفكار التي قام بها اليابانيون بالاستفادة منها بنجاح – كتقنيات مراقبة الجودة – قد ظهرت أصلاً في الولايات المتحدة . وكان خطأ الشركات الأمريكية هو أنها كانت بطيئة في تطبيق هذه الأفكار . وبالتالي كانوا أحياناً يستخدمون قدر أكبر من المطلوب من عناصر الإنتاج ، مما جعلهم يعملون بمعزل عن دالة الإنتاج الصناعية وليس طبقاً لها . وتعرف دالة الإنتاج الصناعية بأنها دالة الإنتاج لأكثر الشركات كفاءة في الصناعة .

[7] R. Hayes and S. Wheelwright, *Restoring Our Competitive Edge* (New York: Wiley, 1984). And National Research Council "The Japanese Cost and Quality Advantages in the Auto Industry," in Mansfield, Managerial Economics and Operations Research, 5th ed.

[8] *J. Abegglen and G. Stalk, Kaisha*: The Japanese Corporation (New York: Basic Books, 1985) .

ومن وجهة النظر التسويقية قد تكون هناك بعض العيوب الناجمة عن تخفيض عدد السلع المنتجة ، والتي يجب أن تتوازن مع أي تخفيضات يتم اتخاذها .

[9] نفس المرجع السابق .

جدول (7.5) تكلفة إنتاج أحد الأوناش (التكلفة في الشركات الأوروبية = 100) .

	المصنع	
	غرب أوروبا	Toyota
عدد الأنواع المنتجة	20	6
التكلفة لكل ونش		
المواد	75	65
العمالة المباشرة	4	2
التكلفة الثابتة	21	14
إجمالي التكلفة	100	81

* المصدر : Abegglen and Stalk, *Kaisha* .

تحليل القرارات الإدارية

مزايا إنتاج التو واللحظة

قامت شركة Toyota باستحداث وتطوير نظام إنتاجي جديد يعرف بنظام التو واللحظة ، وهو النظام الذي كان ذا أثر جماً على صناعة السيارات في اليابان وغيرها من البلاد طوال فترة الخمسينيات والستينيات . ويقضي هذا النظام بإنتاج وتسليم مختلف الخامات والمكونات والأجزاء قبل وقت وجيز من ظهور الحاجة إليها . ومن بين مزايا هذا النظام أن حجم المخزون من قطع الغيار والأعمال الجاري تنفيذها تكون عند أدنى مستوى لهما . حيث يتم توفير واضح في كل من الوقت والتكلفة الذين يتطلبهما التحرك من إنتاج قطع غيار إلى أخرى أو نموذج إلى آخر ، مما يؤدي إلى تقليص نفقات تجهيز المعدات ومساعدة الشركة على إنتاج الأحجام الصغيرة بسعر اقتصادي .

وقد أسفرت مقارنة متأنية بين إحدى شركات السيارات التي تتبنى نظام إنتاج التو واللحظة من ناحية وشركة أخرى لا تتبنى هذا النظام من ناحية أخرى عن ظهور البيانات التالية : *

	شركة تتبنى نظام التو واللحظة	شركة لا تتبنى نظام التو واللحظة
عدد السيارات المنتجة يومياً	1,000	860
إجمالي عدد عمال المصنع	1,000	2,150
عدد العمال لكل سيارة يومياً		
العمالة المباشرة	0.79	1.25
العمالة غير المباشرة	0.21	1.25
الإجمالي	1.00	2.50

(أ) بناءاً على الجدول السابق ، هل من الواضح أن الناتج المتوسط للعمالة يزداد في حالة تطبيق نظام التو واللحظة عنه في حالة عدم تطبيقه ؟

(ب) هل يؤدي هذا النظام إلى زيادة الناتج المتوسط للعمالة غير المباشرة أكثر مما هو الحال في حالة العمالة المباشرة ؟

obeikandi.com

(ج) إذا كانت عملية التحول في إنتاج إحدى قطع الغيار إلى غيرها أو من أحد النماذج إلى غيره يتطلب قدراً كبيراً من الوقت ، فإن الجهد الـــذي تتطلبه عمليتا التخطيط والإدارة يكون أكبر مما هو الأمر في حالة التمكن من إنجاز هذه التحولات بشكل سريع . فهل ترى أن ذلك يفسر سبب زيادة الناتج المتوسط للعمالة غير المباشرة بهذا الشكل الكبير ؟

(د) يذكر كل من James Abegglen و George Stalk أن عدد من الشركات اليابانية قد نجحت في مضاعفة قوتها الإنتاجيـــة بالاســـتعانة بنظام التو واللحظة ، مما أدى إلى مضاعفة إنتاجية الأصول التي تتملكها . فهل أدى ذلك إلى حدوث انحراف في منحنيات الناتج المتساوي هـــذه الشركات ؟

الحـــل

(أ) نعم . فإن عدد السيارات المنتجة مقسوماً على عدد العمال هو 1.0 في الشركة التي تتبنى نظام التو واللحظـــة ، بينمـــا ينخفـــض إلى 0.4 في الشركات التي لا تتبنى هذا النظام .

(ب) تتضح صحة ذلك بناءاً على الأرقام الوارد ذكرها في الجدول . حيث أن الناتج المتوسط للعمل – عدد السيارات المنتجة يومياً مقسوماً على عدد العمال – هو معكوس عدد العمال لكل سيارة يومياً . ومن ثم فإن الناتج المتوسط للعمالة هو 4.76 = 1/0.21 وذلك في حالة استخدام نظـام التو واللحظة ، بينما ينخفض إلى 0.8 = 1/1.25 في حالة عدم استخدام هذا النظام . ومن الناحية الأخرى ، فإن الناتج المتوســـط للعمالـــة المباشرة هو 1.27 = 1/0.79 وذلك في حالة استخدام نظام التو واللحظة ، بينما ينخفض إلى 0.8 = 1/1.25 في حالة عدم استخدام هـــذا النظام . ومن الواضح أن نسبة الزيادة للناتج المتوسط تزداد في حالة العمالة غير المباشرة عنها في حالة العمالة المباشرة .

(ج) نعم . ربما يكون أحد الأسباب التي تجعل نظام التو واللحظة يؤدي إلى تقليص العمالة غير المباشرة بشكل كبير هو أن مقدار الوقت المطلـــوب للتخطيط والإدارة يقل هو الآخر نظراً لسرعة الانتهاء من عمليات التغير أو التحول .

(د) انحرفت منحنيات الناتج المتساوي لتلك الشركات ناحية الداخل تجاه نقطة الأصل .

---

* Abegglen and Stalk, Kaisha.

غلة الحجم أو العوائد القياسية

تعلمنا فيما سبق كيفية التعبير عن التكنولوجيا في إحدى الصناعات بدالة إنتاج ، كما قمنا بوصف خصائص دوال الإنتاج (والمفاهيم المتعلقة بها مثـل الناتج المتوسط والحدي) التي تبدو أن كافة عمليات الإنتاج لا تخلو منها . على الرغم من ذلك ، هناك خاصية هامة من خـــواص دوال الإنتـــاج لم نتعرض لها بعد وهي : كيف يستجيب الإنتاج على المدى الطويل للتغيرات في حجم الشركة . وبفرض أن لدينا أحد مواقف المدى الطويل التي تمكننـا من النظر إلى جميع عناصر الإنتاج باعتبارها عناصر متغيرة وبفرض أن الشركة ستزيد من حجم كل العناصر بنفس النسبة . فما هو مصـــير الإنتـــاج الكلي ؟

توجد احتمالات ثلاث : أولاً احتمال زيادة الناتج بنسبة أكبر من نسبة كلٍ من عناصر الإنتاج على حده ، فقد تؤدي مضاعفة كل عنـــاصر الإنتاج إلى الحصول على ما هو أكثر من مجرد مضاعفة الإنتاج وهذه هي الحالة التي تشهد فيها العوائد القياسية زيادة ملحوظة . ثانياً ، احتمال زيـادة الناتج بنسبة أقل من كل من عناصر الإنتاج على حده حيث قد تؤدي مضاعفة كل العناصر إلى الحصول على ما هو أقل من مضاعفة الإنتاج . وهـذه هي الحالة التي تشهد فيها العوائد القياسية تناقصا ملحوظا . ثالثاً احتمال زيادة الناتج بنفس نسبة زيادة عناصر الإنتاج . فقد تؤدي مضاعفـــة كـــل العناصر إلى مضاعفة الإنتاج بالضبط . وهذه هي الحالة التي تشهد فيها العوائد القياسية ثباتاً .

وقد يبدو أنه من الضروري أن تؤدي دوال الإنتاج إلى ظهور عوائد قياسية ثابتة . فإذا كان هناك مصنعان لإحدى الشركات وكانت نوعيـــة العمالة مماثلة من حيث النوعية والمستوي ، فمن الطبيعي أن تحقق هذه الشركة ضعف الإنتاج التي كانت تستحقه لو كانت تمتلك مصنعاً واحـــد . إلا أن الأمور ليست بهذه البساطة دائما . فإذا ضاعفت الشركة حجمها ، فقد يكون من الممكن استخدام تقنيات لم يكن من الممكن استخدامها علـــى نطاق أصغر . وبعض العناصر لا يمكن استخدامها في وحدات صغيرة ، فعلي سبيل المثال لا يمكن استخدام نصف إنسان إلى . لذا فقد تنشـــا بعـــض

الزيادات في العوائد القياسية نتيجة لمثل هذه الظروف التي تتسم بعدم إمكانية تجزئة هذه العناصر .

كما تنشأ زيادة العوائد القياسية من وجود علاقات هندسية معينة . فالصندوق الذي أبعاده 2×2×2 قدم يكون ثمانية أضعاف حجم الصندوق الذي تكون أبعاده 1×1×1 ؛ لذلك فإنه يمكن للصندوق الأول أن يحتوي على ثمانية أضعاف ما قد يحتويه الصندوق الثاني . ومن ناحية أخرى فإننا نجد أن الحيز الذي يشغله الصندوق الأول ذو الجوانب الستة والأبعاد التي تساوي 2×2×2 قدم هو 24 قدماً مربعاً ، بينما يبلغ الحيز الذي يشغله الصندوق الثاني ذو الجوانب الستة والأبعاد التي تساوي 1×1×1 قدماً هو 6 قدماً مربعاً . وهو ما يعني أن الصندوق الأول يحتاج إلى كمية من الخشب تبلغ أربعة أضعاف الكمية التي يحتاجها الصندوق الثاني . والمزيد من التخصص قد يؤدي أيضاً إلى زيادة العوائد القياسية . فباستخدام المزيد من الرجال والمعدات ، يمكن تقسيم الأعمال والسماح لعناصر الإنتاج المتعددة بالتخصص . كما قد تنشا سياسات التوسع الحجمي نتيجة لاعتبارات أخرى احتمالية : كميل السلوك الجماعي لأعداد أكبر من المستهلكين إلى الاستقرار ، وقد لا تضطر الشركة إلى زيادة مخزونها بالتناسب مع المبيعات .

ما هي أسباب تناقص العوائد القياسية ؟ لعل من أهم الأسباب وأكثرها شيوعا صعوبة التنسيق في حالة الاستثمارات الضخمة . فقد يكون من الصعب حتى في الشركات الصغيرة الحصول على المعلومات المطلوبة لاتخاذ قرارات حاسمة ، مما يزيد الأمر تعقيداً في حالة الشركات الكبيرة . وإذا كان من الصعب في الشركات الصغيرة التأكد من أنه يتم تنفيذ رغبات الإدارة ، فإن هذه المشكلة تزداد حدة في الشركات الكبيرة . وعلى الرغم من أن الهيئات الكبيرة تتمتع بميزات واضحة إلا أنها لا تخلو من بعض العيوب حيث تميل مجموعات العمل الهندسية الكبيرة أن تكون أقل فاعلية وكفاءة من المجموعات الهندسية الأصغر في بعض أنشطة البحث والتطوير .

وسواء كانت العوائد القياسية ثابتة أو متناقصة أو متزايدة في موقف معين ، فهي مسالة تجريبية يجب التعامل معها كل حالة بمفردها . فلا توجد إجابة بسيطة جامعة مانعة . ففي بعض الصناعات قد تشير الدلائل إلى وجود عوائد متزايدة في مجموعة معينة من المنتجات . وفي صناعات أخرى قد تكون هناك عوائد ثابتة أو متناقصة . ومن الضروري ملاحظة أن الأمر قد يعتمد على حجم الإنتاج الذي يتم دراسته . فقد يكون هناك غلة حجم ثابتة في مستويات الإنتاج الصغيرة ، وثابتة أو متناقصة في المستويات الأكبر .

الركن الاستشاري

اختيار حجم ناقلة بترول

تحرص كل من شركات النفط الكبرى ، وكذا ملاك السفن المستقلين من أمثال Stavros Niarchos و Y. K. Pao على استثمار بلايين الدولارات في مجال ناقلات البترول . ويمكن النظر إلى ناقلات البترول على أنها اسطوانة ضخمة ، ومن المعروف أن مساحة سطح الأسطوانة لا تتناسب طردياً مع حجمها بل أن مساحة سطح الأسطوانة لا تتزايد بدرجة متناسبة مع تزايد حجمها . ولذلك فإن ناقلة البترول التي تبلغ حمولتها 200,000 طن من الوزن تزداد عن تلك التي تقتصر حمولتها على 20,000 طن بمقدار الضعف فقط من حيث الاتساع والطول والعمق .

وحتى نهاية السبعينيات ، كان الميل لا يزال متجهاً صوب الناقلات الضخمة ، كما هو موضح فيما يلي :

العام	متوسط السعة لناقلة البترول (الوزن المبين بآلاف الأطنان)
1956	16.2
1964	23.5
1967	35.0
1973	64.0
1978	103.0

وبحلول خريف عام 1977 ، كان هناك فائضاً ملحوظاً في سعة النقل لناقلات البترول العملاقة . مما أدى إلى زيادة حجم المعروض عن حجم الطلب بمقدار 30% سنة 1976 وذلك بناءاً على التقديرات التي خرجت بها إحدى شركات النفط الكبرى .

فإذا لم يكن هناك فائضاً في المعروض من ناقلات البترول ، وإذا كنت تعمل استشارياً لدى إحدى شركات النفط التي ترغب في إنشاء ناقلة جديدة ، فهل تنصح الشركة بإنشاء ناقلة تبلغ حمولتها 20,000 طن من الوزن ؟

* ولمزيد من الدراسة ، راجع : Miehael Porter, *Cases in Competitive Strategy* (New York: Free Press, 1993)

مرونة الإنتاج

لقياس ما إذا كان هناك عوائد قياسية متزايدة أو ثابتة أو متناقصة فمن الممكن حساب مرونة الإنتاج . وتعرف مرونة الإنتاج بأنها النسبة المئوية للتغير في الإنتاج الناجمة عن زيادة قدرها 1% في كل عناصر الإنتاج . فإذا زادت مرونة الإنتاج عن 1 كانت العوائد القياسية متزايدة ، وإذا كانت تساوي 1 كانت العوائد القياسية ثابتة ، وإذا كانت أقل من 1 كانت العوائد القياسية متناقصة .

ولنأخذ مثال شركة Lone Star التي تقوم بتصنيع أجزاء الطائرات ، ودالة الإنتاج لهذه الشركة هي :

$$Q = 0.8L^{0.3} K^{0.8}$$

حيث Q هي عدد الأجزاء المصنعة سنوياً و L هي عدد العمال و K هي رأس المال المستخدم . وهذه الدالة هي دالة Cobb-Douglas (والمسماة كذلك تبعاً Paul Douglas و Charles Cobb - الرائدين في تطبيق هذه الدالة) والتي سترد مناقشتها تفصيلياً في الأجزاء التالية . (ويتم قياس Q بملايين القطع .)

ولحساب مرونة الإنتاج في شركة Lone Star نقوم بضرب عناصر الإنتاج (L و K) في 1.01 . من الواضح أن القيمة الجديدة لـ Q (أي Q') تساوي :

$$\begin{aligned} Q' &= 0.8(1.01L)^{0.3} (1.01K)^{0.8} \\ &= 0.8(1.01)^{1.1} L^{0.3} K^{0.8} \\ &= (1.01)^{1.1} (0.8L^{0.3} K^{0.8}) \\ &= (1.01)^{1.1} Q \\ &= 1.011Q \end{aligned}$$

فإذا ازدادت كمية كل من العنصرين بمقدار 1.1% فإنه من الطبيعي أن يزداد الإنتاج بمقدار 10% وهو ما يعني أن مرونة الإنتاج تساوى 1.1 .

كيف تحصل الشركات على المعلومات المتعلقة بدالة الإنتاج

العلامات القياسية التنافسية لمؤسسة XEROX

وبعد أن ناقشنا الدور الهام الذي تلعبه دالة الإنتاج في اتخاذ القرارات الإدارية ، ينبغي أن نولي عنايتنا لدراسة كيفية حصول المديرين على المعلومات المتعلقة بدالة الإنتاج . ما هي الطريقة المثلى التي يمكن من خلالها للشركات التعرف على الأسلوب الذي يساعدها على تحقيق أفضل ما يمكن من خلال مجموعة العناصر المتوفرة لدينا ، وكذا التعرف على الحد الأقصى من الإنتاج الممكن الحصول عليه ؟ ومن بين أفضل الطرق التي تلجأ إليها هذه الشركات هي إرسال فرق من المهندسين والفنيين لزيارة شركات أخرى للحصول على معلومات تتعلق بأفضل الطرق والإجراءات العملية المتبعة . وبهذه الطريقة ، تحاول الشركات تحديد ما إذا كانت لا تزال تعمل على دالة الإنتاج الصناعية أم أنها أقل كفاءة مقارنة بالشركات الأخرى . وتعرف هذه الطريقة باسم العلامات القياسية التنافسية وهي ذات آثار مفيدة للعديد من المؤسسات مثل Xerox .

ففي سنة 1979 وجدت مؤسسة Xerox نفسها تواجه مشكلة كبيرة ، متمثلة في تقلص حصتها في السوق وانخفاض أرباحها من مجال نشاطها الرئيسي وهو بيع ماكينات التصوير ، وعندئذٍ شرعت الشركة في تبني عملية فحص واختبار كاملة للطرق التي كانت تتبعها على مدار السنوات السابقة . وبالفعل بدأت الشركة بدراسة هندسية للمنتجات المنافسة بما في ذلك دراسة لماكينات Fuji Xerox ، وهو الفرع الذي تمتلك الشركة جزءاً منه والذي يعمل في اليابان . وقد خرج مديرو Xerox التنفيذيون بأدلة دامغة بأن ذلك الفرع لم يكن يعمل بنفس الكفاءة التي يتمتع

بها أكبر منافسيه اليابانيين .[10]

وأهم ما في الأمر أن الشركة قد وقفت على حقيقة هامة وهو أنه بإمكانها تعلم الكثير والكثير من بعض الشركات التي قد يبدوا أنها تعمل في مجالات غير مرتبطة بمجال عملها . فعلى سبيل المثال قام مديرو Xerox التنفيذيون والذين كانوا يرغبون في رفع مستوى التخزين بالشركة بالبحث عن إحدى الشركات المتفوقة في هذا المجال والتي يمكن الاستفادة من دراستها لهذا الغرض . وكان من الطبيعي أن يلجأ أولئك المديرون إلى الصحف والدوريات المتخصصة في مجال الإدارة وأن يقوموا بمناقشة أنظمة التخزين مع المستشارين في هذا المجال ، وأخيراً وقع اختيارهم على شركة L. L. Bean وهي أحد الشركات التي تعمل في بيع القفازات والجوارب والتي اكتسبت سمعة طيبة في مجال خدمة العملاء والتي كانت تعاني على الرغم من ذلك من مشكلات جمه في التوزيع مشابهة لتلك التي عانت منها شركة Xerox .

واكتشف مديرو Xerox أنه على الرغم من عدم ميكنة أنظمة التخزين في شركة L. L. Bean من ناحية (حيث تعمل معظمها يدوياً) ، إلا أنها تحقق أعلى إنتاجية لكل عامل . ويعرض الجدول 7.6 مقارنة بين إنتاج العمليات التي تعتزم شركة Xerox القيام بها من ناحية أخرى . وربما كان سر تفوق شركة L. L. Bean راجع في معظمه إلى قيامها بإتباع بعض الطرق والأساليب المختلفة . فهي تتبع ترتيبات معينة خاصة بالمواد التي تنتجها بحيث تكون المعدات الأكثر مبيعاً في متناول أيدي الموردين ، كما أنها تنتقي أماكن مخازنها بالكيفية التي تمكنها من تقليص مسافة نقل الأونلش التي تنتجها إلى أدنى حد ممكن .

جدول (7.6) مقارنة بين عمليات التخزين .

قياس إنتاج كل عامل يومياً	L. L. Bean	Xerox
الطلبيات الخاصة بكل عامل يومياً	550	117
الخطوط الخاصة بكل عامل يومياً	1,440	497

المصدر : Hayes, Wheelwright, and Clark, *Dynamic Manufacturing* .

وبهذه الطريقة تعرفت شركة Xerox على دالة الإنتاج المناسبة لمثل هذا النوع من عمليات التخزين . وبناءاً على هذه النتائج نجحت الشركة في تحديث عمليات التخزين الخاصة بها . وتعتبر العلامات القياسية التنافسية أحد الطرق الهامة والقابلة للتطبيق في شتى المجالات . ولقد استشعر القائمون بالإدارة العليا لشركة Xerox أهمية هذه العلامات القياسية التنافسية إلى الدرجة التي جعلتهم يرجعون معظم التحسن في الأداء إلى استخدامها إبان الثمانينيات . كما أصبحت هذه العلامات مضرب المثل لدى العديد من الشركات الأخرى لما لها من أهمية وتأثير .

قياس دوال الإنتاج

على الرغم مما لبعض الطرق (مثل العلامات القياسية التنافسية) من أهمية بالغة ، إلا أنها لا توفر إلا جزءاً من المعلومات التي يحتاجها المديرون بخصوص دوال الإنتاج . لذا فأن علماء التطبيق الاقتصادي والإداري قد توصلوا إلى طرق أخرى ، تقوم بشكل كبير على طرق تحليل الانحدار – التي قمنا بدراستها في الفصل الخامس – لقياس دوال الإنتاج . وكما سنرى في الأجزاء القادمة من هذا الفصل ، فإن النتائج غالباً ما تكون ذات نفع كبير . ولعل أولى الخطوات التي يجب إتباعها لتقدير دالة الإنتاج هو اختيار الصيغة الرياضية المناسبة لتلك الدالة . وإذا كانت العمالة ورأس المال هما العنصران الوحيدان ، كانت المعادلة التكعيبية التالية هي إحدى الصيغ الممكن استخدامها :

$$Q = aLK + bL^2K + cLK^2 - dL^3K - eLK^3 \qquad (7.16)$$

حيث Q هي الإنتاج و L هي كمية العمالة و K هي كمية رأس المال المستخدم. وتشير هذه الصيغة الرياضية إلى تزايد العوائد القياسية في بادئ الأمر ثم تناقصها فيما بعد . وكذلك يبدأ الناتج الحدي لكل من العناصر بالتزايد ثم يأخذ في التناقص كلما زادت عناصر الإنتاج وللتحقق من صحة ذلك ،

[10] يعتمد هذا الجزء إلى حد كبير على R. Hayes , S. Wheelwright و K. Clark . Dynamic Manufacturing (New York : Free Press , 1988)

علينا بالنظر إلى الناتج الحدي للعمالة والذي يساوي :

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \left(aK + cK^2 - eK^3\right) + 2bKL - 3dKL^2$$

من الواضح أن الناتج الحدي للعمالة هو دالة رباعية لحجم العمالة ، وهي تبدأ بالزيادة ثم ما تلبث أن تتناقص كلما زاد حجم العمالة .

صيغة رياضية أخرى أكثر شيوعاً هي صيغة Cobb-Douglas التي تعرضنا لها في القسم قبل السابق . ففي ظل اثنين من عناصر الإنتاج فقط لا غير ، تظهر هذه الصيغة على النحو التالي :

$$Q = aL^bK^c \qquad (7.17)$$

وأحد مزايا هذه الصيغة أن الناتج الحدي لكل عنصر يعتمد على كل عناصر الإنتاج ، وهو الأمر الذي غالباً ما يكون أكثر واقعية . فإذا نظرنا إلى الناتج الحدي للعمالة ، والذي يساوي :

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = baL^{b-1}K^c$$

فإنه من الواضح أن الناتج الحدي للعمالة يعتمد على قيم كل من L و K . وميزة أخرى هي أنه إذا أخذنا لوغاريتم الطرفين للمعادلة 7.17 فإنها تصبح هكذا :

$$\log Q = \log a + b \log L + c \log K \qquad (7.18)$$

ومن هنا يمكن استخدام تقنيات الانحدار الوارد ذكرها في الفصل الخامس لتقدير b و c بالإضافة إلى $\log Q$. فإذا ما أرجعنا $\log Q$ على $\log L$ و $\log K$ فإن معاملات الانحدار تكون على النحو السالف ذكره .

لاحظ أنه إذا ما قمنا باستخدام دالة الإنتاج الخاصة بـ Cobb-Douglas ، فإنه يمكن تقدير العوائد القياسية بسهولة . فإذا كان مجموع الأسس أي $(b + c)$ يتعدى 1 ، فأن ذلك يشير إلى عوائد قياسية متزايدة ، وإذا كان أقل من 1 فأن ذلك يعني أن العوائد القياسية متناقصة ، وإذا كان يساوي 1 فأن ذلك يشير إلى ثبات العوائد القياسية. ذلك لأنه إذا كانت دالة Cobb-Douglas هي الدالة السائدة فأن مرونة الإنتاج تساوي مجموع الأسين. وكما سبق ورأينا في حالة شركة Lone Star أن مرونة الإنتاج كانت 1.1 وهو ما يساوي مجموع الأسين (0.3 و 0.8) .

هذا ولا توجد طريقة واحدة مثلى لتحديد أفضل الصيغ الرياضية ، حيث أن كل حالة تتوقف على الظروف التي تنطوي عليها وربما كان من الأفضل دائماً أن نقوم بتجربة عدة صيغ رياضية للوقوف على الصيغة الأكثر ملائمة لما لدينا من بيانات ومعلومات . المهم أن تعبر الصيغة التي يقع علينا اختيارها تعبيراً صادقاً عن الموقف الذي نكون بصدده . وللتحقق من صحة ذلك ، فإنه من المفيد بمكان التعرف على مدى دقة أحد دوال الإنتاج في التنبؤ بمقدار الإنتاج الناشئ عن توليفة من عناصر الإنتاج التي يتم استخدامها بالفعل .

ثلاث طرق للتحليل الإحصائي

بعد أن يكون قد وقع اختيارنا على أحد الصيغ الرياضية لدالة الإنتاج ، يتبقى أن نحدد أي من أنواع البيانات الثلاثة سوف نلجأ إلى استخدامه . في أولى هذه الاحتمالات يمكن استخدام بيانات السلاسل الزمنية المتعلقة بمقدار عناصر الإنتاج المختلفة والتي تم استخدامها في أوقات عديدة في الماضي ، والمتعلقة أيضاً بحجم الإنتاج في كل فترة من الفترات . فعلى سبيل المثال يمكنك الحصول على بيانات خاصة بحجم العمال ورأس المال ومختلف المواد الخام المستخدمة في صناعة الحديد والصلب في كل من الأعوام ما بين 1958و 1996 . وعلى أساس هذه البيانات ، يمكن تقدير العلاقة بين كميات عناصر الإنتاج والإنتاج الكلي باستخدام طرق تحليل الانحدار التي تم مناقشتها في الفصل الخامس .

والاحتمال الثاني هو استخدام بيانات مقطعية تتعلق بكميات العناصر المستخدمة وأحجام الإنتاج في العديد من الشركات أو القطاعات الصناعية في وقت معين . وقد يمكنك الحصول على معلومات عن حجم العمالة ورأس المال والمواد الخام المختلفة المستخدمة في عدد من شركات الصلب عام 1996 . وبناءاً على مثل هذه البيانات وغيرها من المعلومات المتعلقة بإنتاج كل من هذه الشركات خلال عام 1996 ، يمكنك الاستعانة بتقنيات تحليل الانحدار لتقدير العلاقة بين مقدار عناصر الإنتاج وحجم الإنتاج الذي يتم تحقيقه .

أما الاحتمال الثالث هو استخدام البيانات الفنية التي يوفرها المهندسون أو علماء الزراعة. ويتم تجميع هذه المعلومات من خلال التجربة العملية أو من مجال الخبرة في الأداء اليومي للعمليات الفنية. هذا وتوجد عدة مزايا يمكن تحقيقها من خلال التعامل مع قياس دالة الإنتاج من هذه الزاوية

نظراً لأن القدرة على تطبيق مثل هذه المعلومات عادة ما يكون معلوماً . وعلى العكس من الاحتمالين السابقين فأن هذا الاحتمال الثالث لا يقتصر على المدى الضيق للملاحظات الفعلية .[11]

وبغض النظر عن الطريقة التي قد يقع اختيارك عليها ، فإنه من الضروري معرفة أن البيانات المتوفرة قد لا تعبر بالضرورة عن توليفات جيدة للعناصر والإنتاج . فربما تكون بعض الأخطاء أو الضوابط قد أدت إلى تخفيض حجم عناصر الإنتاج اللازمة لتصنيع الصلب إلى أقل من الحد الأدنى المطلوب للحصول على كمية الإنتاج المتوقعة لعام 1996 . ولما كانت دالة الإنتاج تقتصر على التوليفات الجيدة من عناصر الإنتاج ، ولو من الناحية النظرية ، فإنه يتعين علينا استبعاد مثل هذه الحالات وذلك إذا ما كنا نبغي الحصول على مقاييس سليمة تماماً . إلا أنه عند قيامنا بالتطبيق ، فإنه عادة لا يتم استبعاد مثل هذه الحالات ، والتي قد لا يتم التعرف عليها أصلاً ، مما يعني أن تقدير دالة الإنتاج قد يأتي مشوباً بالأخطاء في هذا الصدد .

ومن الصعوبات الأخرى الهامة عملية قياس رأس المال . وتكمن الصعوبة في أن إجمالي رأس المال غالباً ما يتألف من أنواع مختلفة من الآلات والمباني والمخزون ، وليس من السهل تجميع كل هذه المكونات في مقياس واحد أو عدة مقاييس . كما قد تنشأ الأخطاء نتيجة لأن عددا من مختلف البيانات التي ينتظر أن تكون على نفس دالة الإنتاج تظهر في الحقيقة على دوال أخرى متعددة . وعلاوة على ذلك ، قد يحدث نوعاً من التحيز نظراً لمشكلات مماثلة نوعاً ما لتلك الواردة في الفصل الخامس مثل مشكلات تحديد الهوية .

ومن الناحية الهندسية ، فقد يكون من الصعب تجميع نتائج العمليات التي يكون المهندسون قد حصلوا على بيانات خاصة بها في شكل دالة إنتاج متكاملة خاصة بمصنع أو شركة . ولما كانت المعلومات الهندسية تتعلق بأحد عناصر أنشطة الشركة وليس الأنشطة جميعها ، لذا فعادة ما تكون هذه المهمة على قدر كبير من الصعوبة . فعلى سبيل المثال نجد أن البيانات الهندسية لا تمدنا إلا بمعلومات زهيدة عن أنشطة الشركة المالية والتسويقية بل قد لا تمدنا بأية معلومات عن مثل هذه الأنشطة بالمرة .

صناعة الخدمة التليفونية في كندا
(دراسة تطبيقية)

على الرغم من هذه الصعوبات ، فقد أثبتت تقديرات دالة الإنتاج ما لها من قيمة وأهمية . فلقد أوضحت النتائج التجريبية التي قام بها A. Dobell و L. Taylor و L. Waverman و T. Liu و M. Copeland [12] أن دالة الإنتاج الخاصة بصناعة الخدمة التليفونية في كندا هي :

$$Q = AL^{0.70} K^{0.41} \qquad (7.19)$$

حيث A هي مستوى الإنتاج عندما تكون كل من K و $L = 1$. وبناءاً على هذه المعادلة ، يبدو أن زيادة العمالة بمقدار 1% (مع ثبات كمية رأس المال) سوف تؤدي إلى زيادة الإنتاج بمقدار 0.70% . وللتحقق من صحة ذلك لاحظ أن :

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 0.70 AL^{-0.30} K^{0.41}$$

$$= 0.70 \frac{Q}{L}$$

إذن :

$$\frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = 0.70 \qquad (7.20)$$

ولما كانت $(\partial Q / \partial L)(L / Q)$ تساوي نسبة الزيادة في الإنتاج الناشئة عن زيادة العمالة بمقدار 1% (تقريباً) فأن زيادة العمل بمقدار 1% ستؤدي إلى زيادة الإنتاج بمقدار 0.70% .

وبناءاً على دالة الإنتاج في المعادلة (7.19) ، فإنه من الممكن أيضاً تحديد أثر زيادة رأس المال بمقدار 1% على الإنتاج . إذ أن :

---

[11] ولإيضاح هذا المنهج راجع in the study guide accompanying"Production Functions and Cost Functions in Oil Pipelines"Cookenboo, this textbook.

[12] A. Dobell, L. Taylor, L. Waverman, T. Liu, and Mr. Copeland, "Communications in Canada," *Bell Journal of Economics and Management Science* (1972).

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 0.41AL^{0.70}K^{-0.59}$$

$$= 0.41\frac{Q}{K}$$

معنى ذلك أن زيادة رأس المال بمقدار 1% ستؤدي إلى زيادة الإنتاج في صناعة الخدمة التليفونية الكندية بمقدار 0.41% . لماذا ؟ يرجع السبب في ذلك إلى أن $(\partial Q / \partial K)(K / Q) = 0.41$

بالإضافة إلى ذلك ، فإن المعادلة (7.19) توفر معلومات قيمة تخص العوائد القياسية في صناعة الخدمة التليفونية في كندا . ولما كانت دالة الإنتاج هذه من نوع Cobb-Douglas لذا فأن مرونة الإنتاج تساوي مجموع الأسس ، أي $0.70 + 0.41 = 1.11$. وهو ما سبق أن تحدثنا عنه تحت العنوان السابق . ولما كانت مرونة الإنتاج هي النسبة المئوية للتغير في الإنتاج الناشئة عن زيادة كل من عناصر الإنتاج بمقدار 1% ، لذا فإن زيادة كل العناصر بمقدار 1% ستؤدي إلى زيادة الإنتاج بمقدار 1.11% . ومن الواضح أن هذه النتائج تشير لتزايد العوائد القياسية .

ويمكن للقائمين على الإدارة والتحليل الاستفادة الجمه من دوال الإنتاج من هذا النوع نظراً إلى أنها تساعد المحلل أو الإداري على تقدير الناتج الحدي لكل عنصر إنتاج وتحديد ما إذا كان هناك عوائد قياسية متزايدة أو ثابتة أو متناقصة . وكما أوضحنا في هذا الفصل ، فأن مثل هذه المعلومات تعد ذات أهمية جوهرية لتحديد الأسلوب الأمثل لتقليص نفقات الشركة أو المؤسسة إلى أدنى درجة . ففي عالم تسوده المنافسة الشديدة وتمثل فيه التكاليف أهمية بالغة ، فإنه ليس بمستغرب أن تجد الشركات في دالة الإنتاج قيمة كبيرة .

إنتاج الدواجن في الولايات المتحدة
(دراسة تطبيقية أخرى)

لمزيد من الإيضاح نقوم بإلقاء نظرة على إنتاج الدجاج ، وهو أحد الصناعات الكبرى في الولايات المتحدة (حيث بلغت قيمة الإنتاج لعام 1990 8.4 بليون دولار) . وقد تم إجراء العديد من التجارب بغية الحصول على تقدير دقيق لدالة الإنتاج ، وذلك بتغذية الدجاج بكميات متفاوتة من الذرة وفول الصويا ، ثم تبع ذلك قياس زيادة الوزن في كل دجاجة بعناية فائقة .[13] وبناءاً على تحليل الانحدار الوارد ذكره في الفصل الخامس وجدنا أن :

$$G = 0.03 + 0.48C + 0.64S - 0.02C^2 - 0.05S^2 - 0.02CS \qquad (7.21)$$

حيث G هي الزيادة في الوزن (بالرطل لكل دجاجة) و C هي عدد أرطال الذرة لكل دجاجة و S هي عدد أرطال فول الصويا لكل دجاجة . ويحقق معامل الارتباط الخطي (R^2) ارتفاعاً كبيراً ، حوالي 0.998 .

وبناءاً على المعادلة (7.21) يمكننا الحصول على منحنيات الناتج المتساوي لإنتاج الدواجن . وبفرض أننا نرغب في إيجاد منحنيات الناتج المتساوي المتعلقة بزيادة في الوزن قدرها رطل واحد . أي أننا نرغب في إيجاد التوليفات المختلفة من كميات الذرة وفول الصويا لكل دجاجة التي من شأنها أن تزيد وزن الدجاجة بمقدار رطل واحد . ولإيجاد هذه التوليفات ، نفرض أن $G = 1$. فتكون النتيجة :

$$1 = 0.03 + 0.48C + 0.64S - 0.02C^2 - 0.05S^2 - 0.02CS \qquad (7.22)$$

ثم نجعل C مساوية لمجموعة من القيم المختلفة حتى يتسنى لنا معرفة كل قيمة من قيم S ، وبفرض أن $C = 1$ ، إذن :

$$1 = 0.03 + 0.48(1) + 0.64S - 0.02(1^2) - 0.05S^2 - 0.02(1)S$$

أو :

$$1 = 0.03 + 0.48 - 0.02 + (0.64 - 0.02)S - 0.05S^2$$

أو :

$$0 = -0.51 + 0.62S - 0.05S^2$$

إذن :

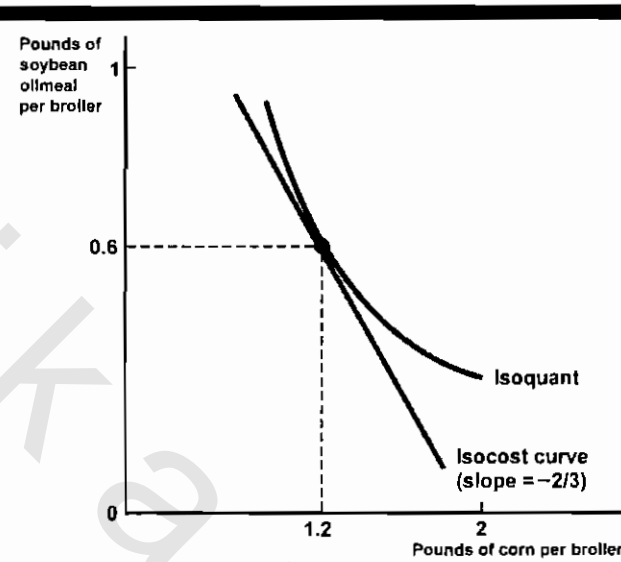
$$S = -0.62 + \sqrt{0.62^2 - 4(-0.05)(-0.51)} / 2(-0.05) = 0.9$$

[13] Organization for Economic Cooperation and Development, *Interdisciplinary Research in Input/Output Relationships and Production Functions to Improve Decisions and Efficiency for Poultry Production*. Paris, 1966.

obeikandl.com

وعليه فإذا كان المطلوب هو زيادة وزن الدجاجة رطلاً واحداً فإنه يجب إطعامها 0.9 رطلاً من فول الصويا ورطلاً من الذرة .[14]

وإذا جعلنا $C = 1.1$ فإنه يمكننا إيجاد القيمة المناظرة لـ S عن طريق استبدال C بـ 1.1 في المعادلة (7.22) وبالتعويض عن S . وإذا جعلنا $C = 1.2$ فإنه يمكن إيجاد القيمة المناظرة لـ S عن طريق استبدال C بـ 1.2 في المعادلة (7.22) والتعويض عن S . وبمزيد من هذه الدراسة يمكننا إيجاد عدد أكبر من النقاط على منحنيات الناتج المتساوي تشير إلى زيادة الوزن بمقدار رطل واحد . ويوضح الشكل (7.13) منحنيات الناتج المتساوي الناشئة عن هذه الدراسة . وتعد منحنيات الناتج المتساوي من هذا النوع ذات أهمية كبرى في نظر القائمين على الإدارة ، والذين يمكنهم تحديد كمية ما يجب استخدامه من عناصر الإنتاج لتقليص التكلفة إلى أدنى حد بالاستعانة بكل من منحنيات الناتج المتساوي والبيانات المتعلقة بأسعار عناصر الإنتاج . [راجع شكل (7.9)] .



شكل (7.13) منحنى الناتج المتساوي لزيادة وزن الدجاجة بمقدار رطل واحد ، وخط التكلفة المتكافئ – إذا كان سعر الذرة هو $^2/_3$ من سعر فول الصويا : التوليفة المثلى لعناصر الإنتاج هي 1.2 رطل من الذرة و 0.6 رطل من فول الصويا .

المصدر : Organization for Economic Cooperation and Development, *Interdisciplinary Research* .

وبالفعل قام منتجو الدواجن باستخدام منحنيات الناتج المتساوي في الشكل (7.13) لتحديد كمية الذرة وفول الصويا التي يجب أن تحصل عليها كل دجاجة إذا كان المطلوب زيادة وزن الدجاجة بمقدار رطل واحد . ولمعرفة كيف نجحوا في ذلك ، نفرض أن سعر رطل الذرة يساوي ثلثي سعر رطل فول الصويا . عندئذ يكون ميل كل من خطوط التكلفة المتكافئة في الشكل (7.13) يساوي $-^2/_3$ ، حيث أن [كما أوضحنا في شكل (7.7)] الميل يساوي سعر عنصر الإنتاج عند المحور الأفقي (أي الذرة) مقسوماً على سعر عنصر الإنتاج عند المحور الرأسي (أي فول الصويا) . ولكن تكون تكلفة الزيادة في الوزن عند أدنى حد ممكن ، ينبغي أن يكون خط التكلفة المتكافئ مماساً لمنحنى الناتج المتساوي ، مما يعني أنه ينبغي أن يكون ميل المنحنى يساوي $-^2/_3$. وكما هو موضح في الشكل (7.13) فإن هذا يحدث عندما يتم استخدام 1.2 رطل من الذرة و 0.6 رطل من فول الصويا . وخلاصة القول أن هذه هي التوليفة المثلى إذا كان سعر رطل الذرة يساوي ثلثي سعر رطل فول الصويا .

[14] للحصول على هذه الصيغة لإيجاد S فأننا نستخدم القاعدة المذكورة في الملاحظة 4 من الفصل الثاني . وهناك قيمة أخرى محتملة S وهي تتناسب مع استخدام الرمز السالب (أكثر مما هو الحال عند استخدام رمز الناقص قبل :

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

في هذه المعادلة إلا أن هذه القيمة ليست ذات أهمية في هذا السياق .

openkanal.com

موجز بما ورد في الفصل السابع

1- تعد دالة الإنتاج هي العلاقة بين كميات عناصر الإنتاج المستخدمة لفترة زمنية معينة والحد الأقصى لكمية السلعة التي يمكن إنتاجها في تلك الفترة . وبالحصول على دالة الإنتاج لشركة معينة يمكن حساب الناتج المتوسط لعنصر ما والناتج الحدي له .

2- إذا كانت إحدى الشركات ترغب في تحديد مقدراً ما يجب استخدامه من عنصر ما ، فإنه يتعين إليها عقد مقارنة بين ناتج الإيرادات الحدية للإنتاج من ناحية والنفقات الحدية للعنصر من ناحية أخرى . وإذا كانت الشركة ترغب في معظمة أرباحها ، فإنه يتحتم عليها استغلال مقدار عنصر الإنتاج الذي ينشأ عن ناتج الإيرادات الحدية والذي يكون مساوياً للإنفاق الحدي .

3- يمكن التعبير عن منحنيات الناتج المتساوي في شكل منحنى يوضح جميع التوليفات الجيدة للعناصر القادرة على طرح كمية ما من الإنتاج . ويوضح المعدل الحدي للاستبدال أو للإحلال المعدل الذي يمكن عنده استبدال أحد عناصر الإنتاج بعنصر آخر وذلك مع افتراض ثبات الإنتاج . ومن غير الطبيعي أن تسعى إحدى الشركات التي ترمي إلى معظمة أرباحها إلى العمل عند النقطة التي يكون فيها ميل منحنى الناتج المتساوي موجباً .

4- إذا كانت إحدى الشركات ترغب في تقليص تكاليف إنتاج إحدى السلع إلى أدنى حد ممكن ، فإنه يتعين عليها توزيع نفقاتها على عدد من عناصر الإنتاج بحيث تكون نسبة الناتج الحدي للعناصر قياساً إلى سعر هذه العناصر ثابتاً في حالة كافة عناصر الإنتاج المستخدمة . ويمكن التعبير عن هذا الأمر بيانياً باختيار توليفات عناصر الإنتاج التي يكون معها منحنى الناتج المتساوي مماساً لإحدى خطوط التكلفة المتكافئة .

5- تقوم العديد من الشركات بإنتاج أحجام كبيرة . والحجم الأمثل للتخزين يساوي :

$$\sqrt{2SI/b}$$

حيث S هي التكلفة لكل مرة يتم فيها تجهيز المعدات ، و Q هي إجمالي المطلوب السنوي من البضاعة ، و B هي التكلفة السنوية لتخزين كل وحدة من البضاعة . ومن الضروري أن تقوم الشركات بتصنيع عدد من الأحجام المثلى ، وإلا ترتفع نفقاتها عما هو مرغوباً فيها .

6- إذا قامت الشركة بزيادة جميع عناصر الإنتاج بنفس النسبة ، وإذا صاحب ذلك زيادة (أو نقصان) في حجم الإنتاج عن هذه السنة ، فإن ذلك قد يؤدي إلى تزايد (أو تناقص) العوائد القياسية . قد تنشأ زيادة العوائد القياسية نتيجة للتخصص أو للعديد من العلاقات الهندسية أو عدم إمكانية تجزئة عناصر الإنتاج . وقد ينشأ الانخفاض في العوائد القياسية عن مجموعة من الأسباب أهمها وأكثرها شيوعاً الصعوبات التي تواجه القائمين على إدارة المشروعات الضخمة . وسواءً كان هناك زيادة أو نقصان أو حتى ثبات في العوائد القياسية ، فإن ذلك يبقى أحد المسائل التجريبية التي يجب تسويتها كل على حدة .

7- كثيراً ما يتم استخدام العلامات القياسية التنافسية للحصول على معلومات تخص دالة الإنتاج . وبالإضافة إلى ذلك وباستخدام الطرق الموضحة بالفصل الخامس ، قام عدد من المهندسين والمحللين بتقدير دالة الإنتاج في الكثير من الشركات والصناعات . هذا وقد تم إجراء العديد من التحاليل الإحصائية للسلاسل الزمنية والبيانات المقطعية والبيانات الهندسية ، ومن أمثلة ذلك قيام عدد كبير من الدراسات بمضاهاة دالة إنتاج Cobb-Douglas بالبيانات المتوفرة . وأثبتت نتائج هذه الدراسات ما لها من فائدة كبيرة للمديرين سواءً كان ذلك في الولايات المتحدة أم غيرها .

obeikandl.com

تمارين

(1) إذا نظرنا إلى شركة Elwyn نجد أن العلاقة بين حجم الإنتاج (Q) وعدد ساعات العمالة المدربة (S) وكذلك عدد ساعات العمالة غير المدربة (U) هي على النحو التالي .

$$Q = 300S + 200U - 0.3U^2$$

(أ) إذا أوصى كبير مهندسي الشركة بالاستعانة بحجم العمالة يساوي 400 ساعة من العمالة المدربة و 100 ساعة من العمالة غير المدربة . فما تقييمك لمثل هذه التوصية ؟

(ب) إذا قررت الشركة إنفاق ما جملته 5000 دولار على العمالة المدربة وغير المدربة ، فكم ساعة من كل نوع يجب استخدامها ؟

(ج) إذا كان سعر الوحدة التي يتم إنتاجها هو 10 دولار (وإذا كان هذا السعر ثابتاً حتى في حالة اختلاف حجم الإنتاج) فما هو عدد ساعات العمالة غير المدربة التي يتعين على الشركة الاستعانة بها ؟

(2) بناءاً على تقنيات تحليل الانحدار الواردة في الفصل الخامس ، وجدت شركة Washington أن دالة إنتاجها على النحو التالي :

$$\log Q = 1.50 + 0.76 \log L + 0.24 \log K$$

حيث Q هو حجم الإنتاج اليومي ، L هي عدد العمال المستأجرين يومياً ، و K هي عدد الآلات المستخدمة يومياً . هذا وتقوم الشركة بطرح إنتاجها للبيع في سوق تنافسية على أن يكون سعر الوحدة 10 دولار . ولا تتدخل الشركة للتأثير على أجر العمالة أو سعر الآلات .

(أ) إذا كان الأجر اليومي للعامل هو 30 دولار .فكم عدد العمال الذين يتعين على الشركة استئجارهم لكل وحدة يتم إنتاجها ؟

(ب) ما هي النسبة المئوية من دخل الشركة التي سيتم إنفاقها على العمالة ؟ ولماذا ؟

(ج) هل تتغير هذه النسبة بتغير الأجر اليومي للعامل ؟ نعم أم لا ولماذا ؟

(3) قررت إحدى الشركات الاستشارية المتخصصة في الزراعة أن التوليفات التالية من البرسيم والحبوب سوف تؤدي إلى زيادة في وزن الضأن بمقدار 25 رطل .

عدد أرطال البرسيم	عدد أرطال الحبوب
40	130.9
50	125.1
60	120.1
70	115.7
80	111.8
90	108.3
110	102.3
130	97.4
150	93.8

(أ) إذا رغب رئيس الشركة في تقدير الناتج الحدي بالرطل من اللحم فهل يمكنه القيام بذلك من خلال هذه البيانات ؟

(ب) إن مديري الشركة على قناعة تامة بأن العوائد القياسية الثابتة كثيرة الحدوث في صناعة إنتاج الضأن . فإذا صّحت ظنونه ، وإذا كان البرسيم والحبوب التي تستهلكه الخراف هما العنصران الوحيدان ، فما هو الربح الذي سوف يتحقق إذا كان حجم استهلاك الخروف من البرسيم هو 100 رطل ، وحجم استهلاك الحبوب هو 250.2 رطل ؟

(ج) ما هو المعدل الحدي للاستبدال من البرسيم عن الحبوب عندما يكون حجم استهلاك الخروف هو ما بين 40 و 50 رطل من البرسيم (وما بين 125.1 - 130.9 رطل من الحبوب) ؟

(د) تم استحداث تطوير تكنولوجي هام من شأنه مساعدة المزارعين على زيادة حجم إنتاج الضان بمقدار 25 رطل باستخدام مقادير أقل من كل من البرسيم والحبوب من مثيلاتها الواردة في الجدول السابق. إذا كان المعدل الحدي للاستبدال (عند كل من معدلات الاستهلاك لكل من عناصر الإنتاج) لم يتأثر بالتطور التكنولوجي السابق ذكره . فهل يمكنك رسم منحنى الناتج المتساوي المتعلق بهذه الزيادة ومقدارها 25

رطلاً للمخروف ؟

(4) قامت مؤسسة Ascot – لإنتاج الأدوات الكتابية – بالاستعانة بأحد الاستشاريين كي يقوم بتقدير دالة الإنتاج الخاصة بهـــا . وقـــد خـــرج الاستشاري بالنتيجة التالية :

$$Q = 0.9P + 0.06L$$

حيث Q هي عدد الأرطال التي تنتجها مؤسسة Ascot من الأدوات الكتابية سنوياً ، و L هي عدد ساعات العمالة سنوياً ، و P هي عـــدد أرطال الورق المستخدمة سنوياً .

(أ) هل ترى أن دالة الإنتاج هذه تشتمل على كل عناصر الإنتاج المهمة ؟ وضح ذلك .

(ب) هل تبدو هذه الدالة معقولة في حالة تطبيقها على جميع قيم L ؟ وضح ذلك .

(ج) هل تشير هذه الدالة إلى تناقص الغلة ؟

(5) تم تقدير دالة إنتاج Cobb-Douglas لستة أنواع مـــن المـــزارع ، علمـــاً بأنـــه توجـــد 5 عنـــاصر إنتـــاج في دالـــة الإنتـــاج هـــي :

1- الأرض . 2- العمالة . 3- المعدات . 4- الثروة الحيوانية والعلف . 5- خدمات موارد أخرى .

وفيما يلي إيضاح أسس جميع هذه العناصر :

أنواع المزارع	الأس				
	الأرض	العمالة	المعدات	الثروة الحيوانية والعلف	موارد أخرى
مزارع المحاصيل	0.24	0.07	0.08	0.53	0.02
مراعي خنازير	0.07	0.02	0.10	0.74	0.03
مزارع منتجات الألبان	0.10	0.01	0.06	0.63	0.02
المزارع العامة	0.17	0.12	0.16	0.46	0.03
المزارع الكبيرة	0.28	0.01	0.11	0.53	0.03
المزارع الصغيرة	0.21	0.05	0.08	0.43	0.03

(أ) هل توجد عوائد قياسية متزايدة لأي من هذه الأنواع الستة من المزارع ؟

(ب) في أي نوع من هذه المزارع الستة يتأثر الإنتاج إلى أقصى درجة نتيجة لحدوث زيادة في العمالة بمقدار 1% .

(ج) بناءاً على هذه النتائج ، هل تتوقع أن يحقق الإنتاج زيادة ملحوظة في حالة قيام عدد كبير من هذه المزارع بالاندماج .

(6) طبقاً لكبير مهندسي شركة Zodiac فإن دالة الإنتاج : $Q = AL^{a}K^{\beta}$

حيث Q هي معدل الإنتاج ، و L هي معدل العمالة ، و K هي معدل رأس المال . ويشير التحليل الإحصائي إلى أن : $a = 0.8$ و $\beta = 0.3$

ويرى مالك الشركة أن هناك عوائد قياسية متزايدة في المصنع .

(أ) هل ترى أن مالك الشركة على حق ؟

(ب) وهل يبقى على حق إذا كانت $\beta = 0.2$ ؟

(ج) هل يتوقف الإنتاج لكل وحدة عمالة على a و β فقط ؟ نعم أم لا ولماذا ؟

(7) بناءاً على ما حصلت عليه وزارة الزراعة الأمريكية من معلومات ، يتضح أن العلاقة بين إجمالي إنتاج الأبقار من اللبن من ناحية ومقدار ما تتغذى عليه من حبوب من ناحية أخرى هي على النحو التالي :

كميات الحبوب (بالأرطال)	كميات الألبان (بالأرطال)
1,200	5,917
1,800	7,250
2,400	8,379
3,000	9,371

(وتفترض هذه العلاقة المبينة في الجدول ثبات عنصر إنتاج الكلأ عند مقدار 6,500 رطلاً من البرسيم)

(أ) قم بحساب الناتج المتوسط للحبوب عند استخدام كل من هذه الكميات .

(ب) قم بتقدير الناتج الحدي للحبوب عندما تكون الكمية المستهلكة منها هي ما بين 1,200 و 1,800 رطل ، وما بين 1,800 و 2,400 رطل ، وما بين 2,400 و 3,000 رطل .

(ج) هل تشير دالة الإنتاج هذه إلى تناقص الغلة ؟

(8) يعتقد صاحب شركة Hughes لغسيل السيارات أن العلاقة بين عدد السيارات المغسولة وعنصر العمالة هو :

$$Q = -0.8 + 4.5L - 0.3L$$

حيث Q هي عدد السيارات المغسولة في الساعة ، و L هي عدد العمال المستأجرين في الساعة . علماً بأن الشركة تتقاضى 5 دولار لكل سيارة يتم غسلها وأجر العامل 4.50 دولار في الساعة . ويمكن إغفال التكاليف الأخرى مثل تكلفة الماء لأنها لا تكاد تذكر .

(أ) ما هو عدد العمال الواجب استئجارهم بهدف معظمة الربح ؟

(ب) ما هو حجم أرباح الشركة المتوقعة لكل ساعة ؟

(ج) هل تنطبق العلاقة السابقة على كل قيم L ؟ نعم أم لا ولماذا ؟

(9) يمكن التعبير عن دالة الإنتاج لأحد مصانع الإلكترونيات كما يلي $Q = 5LK$ ، حيث Q هي معدل الإنتاج و L هي حجم العمالة المستخدمة خلال فترة زمنية ما و K هي حجم رأس المال المستخدم لكل فترة زمنية ما . فإذا كان أجر العمالة هو 1 دولار لكل وحدة و وتكلفة رأس المال هو 2 دولار لكل وحدة . وبفرض أن نائب مدير الشركة لشئون التصنيع قد أوكل إليك مهمة تحديد توليفات عناصر الإنتاج التي يتعين على الشركة استخدامها إذا ما أرادت إنتاج 20 وحدة في فترة زمنية ما .

(أ) ما هو نوع النصح الذي سوف تسديه إليه ؟

(ب) بفرض حدوث زيادة في سعر العمالة بمقدار 2 دولار لكل وحدة ما هو أثر ذلك على الإنتاج لكل وحدة عمالة ؟

(ج) هل ترى أن هذا المصنع عرضة لأن يشهد عوائد قياسية متناقصة ؟ نعم أم لا ولماذا ؟

(10) قامت شركة General Electric بوضع نظام إنتاج جديد في حيز التنفيذ ، وهو نظام مرن يرمي إلى إنتاج القاطرات في مصنعها الكائن في Erie-Pennsylvania . وتعمل أنظمة التصنيع المرنة من خلال أشكال بالغة التعقيد للتصنيع الآلي ، وبحد أدنى من التدخل اليدوي . وهي أنظمة متكاملة للماكينات التي تعمل وفق نظام تحكم كامل مبرمج . وحسب مصادر الشركة ، فإنه يمكن المقارنة بين هذا النظام الجديد والنظام الذي كان متبعاً في الماضي على النحو التالي :

	النظام القديم	النظام الجديد
عدد الماكينات	29	9
عدد العمال	86	16
الإنتاج السنوي	4,100	5,600

(أ) هل يزيد النظام الجديد من الناتج المتوسط للعمالة ؟

(ب) وهل يؤدي إلى زيادة الناتج المتوسط للآلات ؟

(ج) طبقاً لدراسة أجراها Ramchandran Jaikumar من جامعة Harvard فإنه نادراً ما تقوم الشركات الأمريكية بالاستغلال الأمثل لأنظمة التصنيع المرنة . وقد يرجع السبب في ذلك إلى أن نسبة الوقت الذي تستغرقه هذه الأنظمة بالفعل تبدو ضئيلة نسبياً إذا ما قورنت بكمية الوقت الذي تستغرقه عمليات التعديل والإصلاح . ويرى السيد Ramchandran Jaikumar أنه يتعين على الشركات الأمريكية استثمار المزيد والمزيد من الأموال في مجال العمالة الهندسية المدربة . فهل يمكن أن تؤدي مثل هذه الإجراءات إلى حدوث انحرافات واضحة في دوال الإنتاج ؟

(د) كيف يمكن للشركة التأكد من أن مثل هذه الإجراءات جديرة بالتنفيذ ؟ [15]

(11) تقوم شركة Arbor بإنتاج الكباسات المعدنية . وتبلغ تكلفة تجهيز المعدات لكل مرة 8,000 دولار ، وتبلغ تكلفة تخزين كل وحدة يتم إنتاجها 40 دولار سنوياً . ما هو الحجم الأمثل للتخزين إذا قامت الشركة بإنتاج الكميات التالية سنوياً :

(أ) 1,000 دولار .

(ب) 10,000 دولار .

(ج) 100,000 دولار .

(12) افتتحت شركة A. B. Volvo السويدية للسيارات مصنعاً لتجميع السيارات في Udevalla عام 1988 . كانت الفكرة أن يقوم فريق صغير من العمال المدربين جيداً ببناء سيارة كاملة . وكان أصحاب هذه الفكرة يسعون إلى تقليل الملل والعناء المصاحبين لنمط التجميع التقليدي وإلى الحد من حالات التغيب والإحلال بين العمالة . في عام 1991 ، كان ثمة تقارير تفيد بأن تجميع السيارة الواحدة يستغرق 50 ساعة في مصنع Udevalla ، بينما لا يستغرق الأمر أكثر من 25 ساعة فقط في مصنع Volvo التقليدي في Ghent Belgium . فإذا كنت تعمل مديراً تنفيذياً لشركة Volvo .فما هي الأسئلة التي ستوجهها للمديرين العاملين بمصنع Udevalla ؟ وما هي الإجراءات التي ستقوم بإتباعها؟

ملحق

مضاعفات Lagrange

والتوليفات المثلى لعناصر الإنتاج

سبق وأن قررنا في هذا الفصل أنه لابد من تلبية الشروط الواردة في المعادلة (7.11) في حالة رغبة الشركات في معظمة إنتاجها عند مستوى معين من النفقات أو في حالة رغبتها في تدنية التكلفة الخاصة بمقدار معين من الإنتاج . وفي هذا الملحق ، سنقوم بإيضاح كيفية اشتقاق قاعدة القرارات الواردة في المعادلة (7.11) وذلك باستخدام طريقة مضاعفات Lagrange (السابق مناقشتها في الفصل الثاني) . وسوف نفترض على سبيل التبسيط قيام الشركة باستخدام أثنين فقط من عناصر الإنتاج .

معظمة الإنتاج من مستوى نفقات محدد : بفرض أن دالة الإنتاج الخاصة بإحدى الشركات هي :

$$Q = f(X_1 , X_2)$$

حيث Q هي الإنتاج و X_1 هي الكمية المستخدمة من عنصر الإنتاج الأول و X_2 هي الكمية المستخدمة من عنصر الإنتاج الثاني . علماً بأن إجمالي نفقات الشركة لكل من العنصرين تساوي E^* . أي أن :

$$X_1P_1 + X_2P_2 = E^*$$

حيث P_1 هي سعر العنصر الأول و P_2 سعر العنصر الثاني . هذا وترغب الشركة في معظمة حجم إنتاجها عند هذا المستوى المحدد من التكلفة . أي أن الشركة ترغب في معظمة Q ، حيث :

$$Q = f(X_1 , X_2) \qquad (7.23)$$

---

[15] وللمزيد من الدراسة راجع S. Miller, *Impacts of Industrial Robotics* (Madison: University of Wiseonsin Press, 1988); R. Jaikumar, Flexible Manufacturing" *Harvard Business Review* (November-Dccember 1986); and E. Mansfield, "Postindustrial Manufacturing," *Japan and the World Economy*, 1992"Systems: Economic Effects in Japan, United States, and Western Europe.

وذلك بشرط أن :

$$E^* - X_1P_1 - X_2P_2 = 0 \qquad (7.24)$$

وبإتباع الطريقة الموضحة في الفصل الثاني ، يمكننا الاستعانة بمضاعفات Lagrange لحل هذه المسألة ، بحيث تكون الخطوة الأولى هي إنشاء دالة Lagrange ، والتي هي عبارة عن الطرف الأيمن من المعادلة (7.23) + λ مضروباً في الطرف الأيسر من المعادلة (7.24) :

$$L_1 = f(X_1 , X_2) + \lambda(E^* - X_1P_1 - X_2P_2)$$

حيث λ هي مضاعف Lagrange . وبأخذ المشتقات الجزئية لـ L_1 بالنسبة لـ X_1 و X_2 و λ ، وبجعلها جميعاً مساوية للصفر ، نكون قد حصلنا على :

$$\frac{\partial L_1}{\partial X_1} = \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1} - \lambda P_1 = 0 \qquad (7.25)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial X_2} = \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \lambda P_2 = 0 \qquad (7.26)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda} = E^* - X_1P_1 - X_2P_2 = 0 \qquad (7.27)$$

وهذه هي الشروط اللازمة لمعظمة الإنتاج في ظل ضوابط النفقات .

فإذا جعلنا MP_1 هو الناتج الحدي لعنصر الإنتاج الأول و MP_2 هو الناتج الحدي لعنصر الإنتاج الثاني ، عندئذ يصح ما يلي (تحديداً) :

$$\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1} = \frac{\partial Q}{\partial X_1} = MP_1$$

$$\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2} = \frac{\partial Q}{\partial X_2} = MP_2$$

أي أنه يمكن إعادة صياغة المعادلتين (7.25) و (7.26) على النحو التالي :

$$MP_1 - \lambda P_1 = 0$$
$$MP_2 - \lambda P_2 = 0$$

وهو ما يعني أن :

$$MP_1 = \lambda P_1 \qquad (7.28)$$
$$MP_2 = \lambda P_2 \qquad (7.29)$$

وبقسمة كل من طرفي المعادلة (7.28) على الطرف المناظر من المعادلة (7.29) ، نجد أن :

$$\frac{MP_1}{MP_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

أو :

$$\frac{MP_1}{P_1} = \frac{MP_2}{P_2} \qquad (7.30)$$

وهي القاعدة الخاصة باتخاذ قرارات الإنتاج في المعادلة (7.11) وذلك في حالة وجود أثنين فقط من عناصر الإنتاج . وعليه ، فإننا نكون قد أثبتنا ما كنا نسعى إلى إثباته – وهو أنه يمكن اشتقاق هذه القاعدة باستخدام طريقة مضاعفات Lagrange عندما يكون الهدف هو معظمة الإنتاج في ظل أحد ضوابط النفقات .

تدنية التكلفة الخاصة بمقدار محدد من الإنتاج : إذا افترضنا أن هذه الشركة ملتزمة بطرح مقدار محدد من الإنتاج (Q^*) ، وهو ما يعني أن :

$$f(X_1 , X_2) = Q^*$$

عندئذ تكون مشكلة الشركة متمثلة في تدنية تكلفتها ، تساوي :

$$C = X_1P_1 + X_2P_2 \qquad (7.31)$$

بشرط أن :

$$Q^* - f(X_1 , X_2) = 0 \qquad (7.32)$$

openkanal.com

وبإتباع الطريقة الموضحة في الفصل الثاني ، يمكننا الاستعانة بمضاعفات Lagrange لحل هذه المسألة . بحيث تكون الخطوة الأولى هي إنشاء دالة Lagrange ، والتي هي عبارة عن الطرف الأيمن من المعادلة (7.31) + λ مضروباً في الطرف الأيسر من المعادلة (7.32) :

$$L_2 = X_1P_1 + X_2P_2 + \lambda\,[Q^* - f(X_1, X_2)]$$

حيث λ هي مضاعف Lagrange . وبأخذ المشتقات الجزئية لـ L_2 بالنسبة لـ X_1 و X_2 و λ وبجعلها جميعاً مساوية للصفر نكون قد حصلنا على :

$$\frac{\partial L_2}{\partial X_1} = P_1 - \lambda \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1} = 0 \qquad (7.33)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial X_2} = P_2 - \lambda \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2} = 0 \qquad (7.34)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda} = Q^* - f(X_1, X_2) = 0 \qquad (7.35)$$

وهذه هي الشروط اللازمة لتدنية التكلفة في ظل ضوابط الإنتاج .

وبالتعويض عن MP_1 بـ $\partial f(X_1 , X_2) / \partial X_1$ و MP_2 بـ $\partial f(X_1 , X_2) / \partial X_2$ في المعادلات (7.33) و (7.34) نجد أن :

$$P_1 - \lambda MP_1 = 0$$
$$P_2 - \lambda MP_2 = 0$$

وهو ما يعني أن :

$$P_1 - \lambda MP_1 \qquad (7.36)$$
$$P_2 - \lambda MP_2 \qquad (7.37)$$

وبقسمة كل من طرفي المعادلة (7.36) على الطرف المناظر للمعادلة (7.37) ، فإننا نجد أن :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{MP_1}{MP_2}$$

أو :

$$\frac{MP_1}{P_1} = \frac{MP_2}{P_2}$$

وهي القاعدة الأساسية في اتخاذ قرارات الإنتاج في المعادلة (7.11) وذلك في حالة وجود اثنين فقط من عناصر الإنتاج . وعليه نكون قد أثبتنا ما كنا نسعى إلى إثباته – وهو أنه يمكن اشتقاق هذه القاعدة أيضاً باستخدام طريقة مضاعفات Lagrange عندما يكون الهدف هو تدنية التكلفة في ظل أحد ضوابط الإنتاج .

obeikandl.com