الباب السابع

الوعى بالأعداد التخيلية

«إن العصر القادم العظيم لصحوة الذكاء البشرى ربما يتمخض عن طريقة لفهم المحتوى الكيفى للمعادلات. فى هذه الأيام لا نستطيع ذلك».

ريتشارد فاينمان – حاصل على جائزة نوبل فى الفيزياء

مقدمة :

لقد رأينا كيف يمكن أن تصف مجالات الأعداد التفاعلات الواعية بين الراصد والمرصود سواء كانت هذه التفاعلات داخلية او خارجية. ورأينا كيف أن الرياضيات قادرة على وصف ليس فقط الأحداث الخارجية، وإنما أيضًا رأينا كيف تقوم عقولنا بتضخيم الأحداث، تخلق فراغات وتكشف أحاسيس. سوف نقوم فى هذا الباب بإضافة الأعداد التخيلية.

الأعداد التخيلية :

ظهرت الأعداد التخيلية فى القرنين السادس عشر والسابع عشر؛ لكى تكمل دور الرياضيات فى وصف المدركات الإجماعية واللاإجماعية. فى البداية لم يتصور أحد أهمية هذه الأعداد التخيلية لكن الآن هى عماد ميكانيكا الكم والنظرية النسبية، ولا يمكن دونها أن تستقيم النظريات الفيزيائية الحديثة فى كل المجالات. لقد تطورت نظم العد على مدى آلاف السنين، وظهرت المفاهيم الحديثة مثل الأعداد الحقيقية الموجبة والسالبة، ثم الصفر والكسور. تلى ذلك الأعداد المنطقة (rational) والصماء (irrational) . عندما أدخل جوتفريد ليبنيتز (Gottfried Leibniz) مفهوم الأعداد التخيلية فى عصر النهضة الأوروبى لحل بعض المسائل الرياضياتية، اعتبر مفهوم العدد التخيلى بأنه سماوى، وأطلق عليها مسمى «الأشباح» لأنها موجودة ولكنها لا يمكن رؤيتها.

بدأ كل شىء عندما فكر علماء الرياضيات فى جذور الأعداد السالبة. التعريف الأساسى فى مفهوم العدد التخيلى هو الحرف (i) حيث يرمز للجذر التربيعى للعدد (-١) أى أن $i = \sqrt{-1}$. كان العالم الإيطالى چيروم كاردان (Jerome Cardan) أول من تجرأ ونشر معادلة تحوى الأعداد التخيلية، وكان ذلك فى القرن السادس عشر الميلادى،ورغم ذلك.. فقد كان كاردان نفسه غير واثق فى أهمية ومصداقية المعادلات التى توصل إليها.

obeikandl.com

ولكن ما الأعداد التخيلية فى الواقع؟ تذكَّر أن الأعداد الحقيقية ترمز إلى الأحاسيس أى المدركات غير الإجماعية (NCR) ولكنها تهمشها. عند إجراء عمليات العد، نهمل جوانب كثيرة فى صفات الأشياء التى نقوم بعدِّها. ونظرًا لهذه الصفة بالذات نجد أن الأعداد الحقيقية لا تصف الأحداث بشكل كامل. لذا فهناك احتياج حقيقى لشىء ما لكى يصف الأحداث التى أسميناها مدركات غيرإجماعية (NCR).

من الطريف أن كثيرًا من البشر لا يعرفون شيئًا عن المدركات غير الإجماعية (NCR) ولكنهم يؤمنون بأن للأعداد صفات سحرية. كما هو الحال فى المبانى يستخدم الناس أشكالًا مثل الأسقف المدببة، والصلبان والنجوم المختلفة؛ لكى يرمزوا للأفكار الروحية، ويعتقد العديد من البشر فى العصور القديمة والحديثة بوجود أسرار خفية فى الأعداد؛ فمثلا يرمز العدد (١) للوحدانية، والعدد (٢) للشيطان أو الازدواجية، والعدد (٣) يرمز للقدر أو الثلاثية فى الديانة المسيحية، والعدد (٤) للكمال (wholeness) وهكذا ...

تعود هذه الاعتقادات إلى خواص العدد نفسه، فمثلا العدد (١) لا يزداد إذا ضرب فى نفسه، ولا ينقص إذا قسم على نفسه مما يوحى بأن له صفات إلهية. إنى أرى أن العدد (١) يرمز للعملية ذاتها، شىء دائما موجود وثابت مثل التغير سنة الحياة. إن العدد (١) هو أول عدد أولى (Prime number).

العدد الأولى ليس له عوامل (factors) ، أى لا يقبل القسمة إلا على نفسه أو الوحدة. الأعداد الأولية الأخرى هى ٢، ٣، ٥،٧، ١١ وهكذا . كذلك الأعداد -٢، -٣،-٥، -٧، -١١ وهلم جرّا.

العدد (٢) يحمل صفة سرية أيضا لأنه عند جمعه مع نفسه ٢ + ٢ = ٤، وعند ضربه فى نفسه يعطى نفس العدد (٤). العدد (٣) هو مجموع العددين الأولين ١، ٢ حيث ١ + ٢ = ٣ . العدد ٤ أول عدد غير أولى، ولكنه مربع العدد (٢).

يعتقد بعض الأشخاص، وكذلك فى بعض الثقافات، اعتقادًا راسخًا بأن تواريخ الميلاد وحروف الأسماء ليست مصادفة، وإنما لها دلالات كبيرة، فمن ولد فى الثانى من يناير فسوف ترتبط حياته بشكل ما بالعددين ١، ٢ ؛ حيث أن البعض له مثل هذه الاعتقادات، والبعض الآخر لا يؤمن بها فإننا أمام واقع إجماعى (CR)، وآخر غير إجماعى (NCR) . بالطبع يؤمن العلماء فى الصفات الإجماعية (CR) للأعداد ولا يعترفون بالجانب غير الإجماعى، ولكنهم جميعًا يؤمنون بأن الأعداد تمثل منظومة، منطقية خالية من العيوب تمامًا، إذا استبعدنا الأمور غير المنطقية جانبًا.

فى عام ١٩٣١م أثبت عالم المنطق كورت جودل (Kurt Goedel) (أو ذكّر هؤلاء الذين نسوا ذلك) أن تعريفات الأعداد والعلاقات الرياضية بأنها واقع إجماعى (CR) تحوى عيوبًا، وأنها لا تصلح بمفردها لإثبات صحتها بحسب الاستدلال المنطقى. كذلك أوضح جودل وجود تناقضات يستحيل التغلب عليها فى الرياضيات، وبعض المنطوقات لا يمكن برهنة صحتها أو خطأها. لذا يستحيل أن نسلم بأن علم الرياضيات لا يقود إلى متناقضات أو أن الأعداد خالية من السحر.

مع ذلك لم تزعزع نظرية جودل ثقة علماء الرياضيات فى التوصل إلى مجموعة من البديهيات، يمكنها أن تصف كل الظواهر الفيزيائية. بل على العكس من ذلك يؤمن الرياضياتيون أنهم سوف يتوصلون إلى نظرية نهائية واحدة يمكن منها استنتاج كل الأحداث الفيزيائية باستخدام الرياضيات.

إن اللازمة(*) الوحيدة لنظرية جودل فى علم النفس هى قاعدة غير مكتوبة فى عقول إخصائى العلاج النفسى، وهى أن الجنس البشرى متناقض. إن العمليت الحسابية بحق تبدى اتساقا (Consistency) أعمق بكثير مما يبدو لأول وهلة بالنسبة للأحلام وحالات الوعى المتغيرة، ولكن هذا الاتساق هوعبارة عن خطوط إرشادية وليست قانونًا جامدًا.

السمات الأولية والثانوية لجودة المادة:

توصل جاليليو فى عام ١٦٢٣م، فى الوقت نفسه الذى ظهرت فيه الأعداد التخيلية، إلى كيفية فصل السمات الأولية عن الثانوية لجودة المادة. حدد جاليليو السمات الأولية بأنها تلك التى يمكن قياسها، وبالتالى يمكن وصفها باستخدام الأعداد الحقيقية (مثل ٤ أوقيات، ١٠ أميال...) أما السمات الثانوية (مثل احب واللون...) لا يمكن اختزالها إلى قياسات إمبيريقية وبالتالى وحسب جاليليو، هذه خارج نطاق العلم.

من وجهة نظر نقاشنا هذا، يناظرهذا ما ذكرناه من الحقيقة الإجماعية (CR) واللاإجماعية (NCR) . عبر أينشتين عن ذلك بقوله: «إن مدارك حسية معينة لأشخاص مختلفة يناظر بعضها البعض، ولكن لا يمكن التوصل إلى مثل هذا التناظر لمدارك حسية أخرى». لقد عاش جاليليو فى فترة نقطة تحول فى الحضارة الغربية، عندما بدأ الفصل بين الصفات الكمية للمادة عما يسمى بالأحاسيس. يعتقد الكثير من العلماء بأن الأعداد التخيلية تناظر السمات الثانوية للمادة حسب جاليليو.

(*) اللازمة (corollary) هى حقيقة مثبتة.

تزامن كل ذلك بالطبع خلال عصر النهضة الأوروبية؛ حيث كان يجرى الفصل بين المادة والروح، أى بين النطاقين الفيزيائى وغيرالفيزيائى. لقد ظهرت الأعداد التخيلية فى وقت كان يتم فيه ابتعاد الفيزياء والرياضيات عن الدين وغموض الخيمياء (Alchemy) ، وكذلك عن خليط الكيمياء، التأمل (meditation)، علم النفس والفيزياء.. لقد كان هذا الفصل ذا قيمة عالية، ولكن الآن حان وقت الاتحاد مرة أخرى.

رياضيات الأعداد التخيلية :

إن تاريخ تطور مفهوم الأعداد التخيلية مهم؛ حيث إنه يعكس دأب العلماء وإصرارهم على التخلص من هذه السمات الثانوية لجودة المادة – فى القرن السابع عشر كان عالما الرياضيات جـون ويلـيس (١٦١٦ -١٧٠٣) (John Willis) وجوتفريد ليبنيتز (١٦٤٦-١٧١٦) وآخرون يتفكرون فى معنى الجذر التربيعى للأعداد السالبة. كانت المعضلة أنه لا يوجد عدد معروف بحيث عند تربيعه نحصل على عدد سالب. أحس عندئذ هؤلاء العلماء أن شيئًا ما ينقص مجال الأعداد الحقيقية. توصل العلماء فى ذلك الوقت أنه لابد من إدخال تعريف جديد فنى محض وهوعلى شكل رمز للجذر التربيعى للعدد السالب (١-). وهكذا دخل التعريف التالى $i = \sqrt{-1}$ فى علم الرياضيات.

تلى ذلك بعض التعريفات حتى تكتمل الصورة، تقضى بأن ضرب العدد (i) فى نفسه يعطى العدد السالب (١-)، وهكذا أضيف مجال جديد فى الرياضيات أى مجال الأعداد التخيلية.. لقد أضاف إدخال مجال الأعداد التخيلية بعدًا جديدًا فى العلم. بالنسبة مثلا للعدد (٥) نعلم أنه أكبر من العدد (٤)، وأقل من العدد (٦)، ويمكن استخدامه للتعبير عن قدر معين من الأشياء، ولكن ما معنى العدد (5i).

لقد اختلف العلماء على طبيعة هذه الأعداد، وآمن كثيرون بأنها مجرد تجريد رياضياتى، ولكن ليبنتز أسماها «بالشبح المقدس» فى علم الرياضيات، لأن معناها الفيزيائى مازال شيئًا غامضًا.

بالنسبة للعالم ليبنتز، كانت الأعداد التخيلية «ملاذًا دقيقًا ورائعًا» للروح المقدسة، إنها كائن برمائى، أى شىء ما بين الوجود والعدم.

بالنسبة للعالم الإيطالى رافائيل بوميللى Rafael Bombelli – فى عام ١٥٧٥م بدت الأعداد التخيلية «أفكارًا متوحشة»: قال العالم ليونارد إيلر (Leonard Euler)

(١٧٠١- ١٧٨٣م) بأن «هذه الأعداد التى بطبيعتها مستحيلة وعادية فى الوقت نفسه، تسمى بالتخيلية أو الغريبة؛ لأنها موجودة فى تخيلنا فقط».

تبدو الأمور وكأن فراغات "spaces" غير مرئية دخلت العلم، ولن تخرج ثانية. تعتبر هذه الأعداد كذلك، لأنه لا يمكن قياسها مباشرة وإنما يمكن قياس مربعها، فالعدد (i) ليس عددًا حقيقيًّا ولكن مربعه (-١) هوعدد حقيقى. مازال الوضع كما هو منذ ٤٠٠ عاما ، ولا يدرى أحد إلى ماذا تشير هذه الأعداد التخيلية.

عن العمليات السيكولوجية للعدد (i) :

لقد تحدثنا فيما سبق عن الأهمية السيكولوجية للأعداد السالبة، وأنها تمثل ديونًا. يمكننا تعميم مفهومى الدين والإسقاط على الأعداد التخيلية، واعتبار أن الجذر التربيعى للعدد السالب هوجذر تربيعى لإسقاط ما. ولكن ما الجذر التربيعى لاسقاط ما؟ هو فى الواقع إحساس شبيه بالحلم. عندما أغضب وأقول دائما إن بعض الناس سيئون، فربما أقوم باسقاط على جزء من نفسى أنا. إن جذر هذا الإسقاط ربما يظهر فى حلم، تظهر فيه «شخصية سيئة». هذه «الشخصية السيئة» هى بالطبع أنا ذاته.

بالقدر نفسه فإن العدد (i) هو جذر عدد سالب. فى هذا السياق نجد أن i مثل الشبح كما قال ليبنتز ينكشف عندما يُربَّع ويصبح مساحة فى الحياة. بكلمات أخرى، يمكن أن نقول إن النظير السيكولوجى للعدد التخيلى هو صورة حلم، تتضخم عندما يصحو صاحبها إلى درجة أنه يظن أنها حقيقية.

كمثال، أذكر أن أحد أصدقائى رأى فى الحلم أن صديقته تصادق شخصا آخر، وعندما استيقظ من نومه سألها عما إذا كان هذا صحيحًا فنفت ذلك تمامًا، ومع ذلك ظل يصدق ما رآه فى الحلم.

إن عملية الحلم تنكشف تباعًا على شكل إسقاطات تمثل دينًا فى الواقع، وتناظر كـون أن العدد التخيلى (i) والذى يعبر عـن حلم، يربع نفسه وينتج العدد السالب (-١).

لقد أخطأ صديقى فى حق صديقته، وأصبح مدينًا لها بشىء ما. ولكن فى الحلم أى فى حقيقة غير إجماعية (NCR) لم يكن مخطئًا. فى حلم صديقى، رأى أن الشخص الذى تصادقه صديقته كان أكثر رقة وأكثر تجاوبًا معها. لقد كان صديقى يغير من «الشخص الآخر» لأنه يحمل كل هذه المشاعر، والتى لا يحملها صديقى.

وهكذا يمكن أن نعتبر الأعداد التخيلية هى رموز لأشكال فى «الحقيقة غير الإجماعية NCR)»، أو ما يمكن قوله بأن الأعداد التخيلية هى أعداد حقيقية، ولكن في «الواقع غيرالإجماعى NCR ».

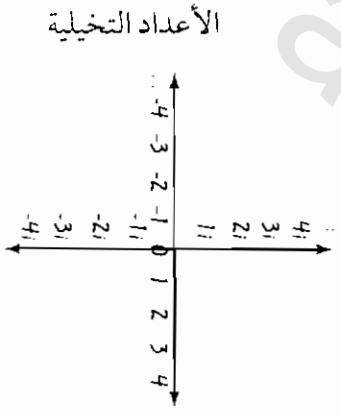
إن عملية الأحلام – تخيلية كما هى – تربع نفسها وتحدث إسقاطات فى الحياة اليومية. إن الأحلام يمكن أن تكون حقيقية أوغيرحقيقية فى «الواقع الإجماعى CR» ولكنها مائة بالمائة حقيقية «بالواقع اللاإجماعى NCR».

لا تحدث الأحلام بالليل فقط وإنما تحدث أيضا فى النهار. إن الإسقاطات التى تحدث فى النهار مثل الأحاسيس والأفكار المرهفة، والنظرات والعبث ماهى إلا جذور تربيعية من الإسقاطات. إنها تحدث بسرعة؛ بحيث تندرج تحت دنيا الأحلام أو قدراتنا الحسية على إدراك الأمر بشكل مرهف وعموما شكل غيرمفهوم.

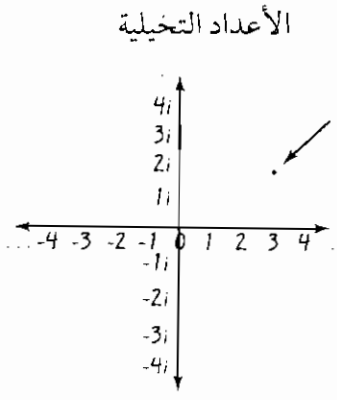
الأعداد المركبة :

الأعـــداد المركبة هى خليط مـن الأعـداد الحقيقية والأعداد التخيلية. فمـــثلا (3 + 4i) عدد مركب.

تمثل الأعداد المركبة بمستوى محورة الأفقى مخصص للجزء الحقيقى، والمحور الرأسى للجزء التخيلى فى العدد المركب كما هو مبين فى شكل (٧-١).



شكل (٧-١): كيفية تمثيل الأعداد المركبة فى مستوى أى مجال الأعداد المركبة أوالخريطة.



شكل (٧-٢): موضع العدد المركب (2 + 3 i).

فى شكل (٧-٢) نرى كيف يمثل العدد (3+2i) بنقطة فى المستوى المذكور.

إن المجال المركب هومجال رياضياتى لأنه مجال مغلق، ويمكنك التأكد من هذا بجمع بعض الأعداد المركبة وطرحها، وتكون النتائج واقعة فى المجال نفسه. فى الواقع مجال الأعداد المركبة من أكمل المجالات فى الرياضيات.

مجالات الوعى:

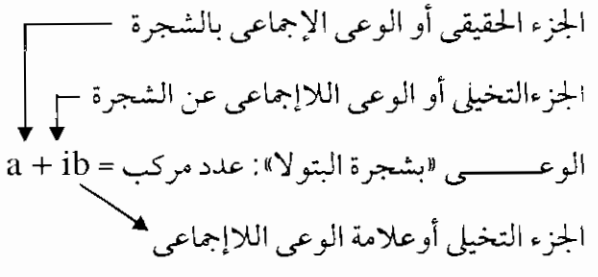
إن مجال الأعداد المركبة شديد الاهمية؛ لأنه يمكّننا ليس فقط من وصف قدراتنا على حساب بعض الكميات المركبة، ولكنه يقول لنا الكثير عن أنفسنا؛ حيث ن الأعدد تصف بعض قدراتنا فى الرصد، فيمكن أن نصف مجال الأعداد المركبة بأنه «مجال رصد» أوبالأحرى «مجال وعى».

لنأخذ مثلا شجرة معينة، لتكن شجرة «البتولا»(*) ولها شكل يوحى بالأمومة. يعتبر أناس كثيرون حول العالم أن الشجرة الكبيرة الخضراء رمز للأمومة.

فى الوقت نفسه لا يعتقد الكثيرون فى العلاقة بين الشجرة والأمومة – وهذا مرة أخرى قدر من «الواقع غير الإجماعى (CR)».

إنى أرى أن الجزء الحقيقى (a) فى العدد المركب بالنسبة للشجرة يمثل مثلًا أنها شجرة «البتولا» - ارتفاعها مثلا 8 أقدام عمرها (مثلا عشرة أعوام) وهكذا. أما الجزء التخيلى (ib) فإنه يمثل احساسنا نحو الشجرة وأنها تمثل الأمومة، وهذا «حد إجماعى» يعبرعن «شعور لا إجماعى» للشجرة هذه.

فى شكل (٧-٣) نضع رسما تخطيطيا لما قلناه.



شكل (٧-٣) : جزء حقيقى + جزء تخيلى، أو إدراك إجماعى + إدراك غير إجماعى

إننا عادة ما نلاحظ أجزاء مختلفة من إدراكنا.. إننا نرى شجرة ما أو ما شابه، ولكن الأعداد المركبة تساعدنا فى فهم بعض الخواص المتميزة لإدراكنا. إن الجزء

(*) Birchtree.

الإجماعى من وعينا يسمى الملاحظة أو الرصد. أما الجزء غيرالإجماعى أسميه بالوعى الحسى.. وهكذا نرى أن مفهوم الشجرة «البتولا» وأنها تمثل الأمومة يمكن وصفها فى فراغ الإدراك غيرالإجماعى (NCR) بالأعداد المركبة.

لقد كان جاليليو واعيًا لهذه الحقيقة قائلاً: إننا نهمل الإدراك الحسى لمجرد أننا لا نستطيع قياسه فى فراغ الإدراك الإجماعى.

هرمية الأعداد (Hierarchy of Numbers)

رغم التشابه بين الأرقام الحقيقية والمركبة، إلا أنه توجد فروق جذرية بين الاثنين، فمثلا نحن نعلم أنه بالنسبة للأعداد الحقيقية العدد (5) أكبر من العدد (3) بالتأكيد. لكن بالنسبة للعددين (5 + 5i) ، (3 + 3i) لانستطيع أن نجزم بأن الأول أكبر من الثانى؛ لأننا لانستطيع قياسهما.

بالمثل لا نستطيع أن نحكم على جمال شجرة أو أنها تجسد شعور الأمومة، فهذا يختلف من شخص لآخر بشكل لا يمكن قياسه إذ لا يوجد إجماع على حجم أومقاس مثل هذه التعبيرات.

لكن فى الأحلام بالتأكيد نشعر بحجم وأهمية ما نراه.. إن الأشجار فى الأحلام يمكن أن تكون مدهشة (amazing) ، كارثيه (catastrophic)، رائعة (Wonderful)، عملاقة (huge) ، أوغيرذات اعتبار (insignificant) ، وهكذا نرى أن هذه الصفات التى يمكن أن تكون غير ذات اعتبار فى الواقع، تصبح شيئًا مختلفًا فى الأحلام؛ حيث إنها تتضخم وتتربع وخلافه.

وهكذا نرى أن الأعداد المركبة (a + ib) تحوى الأعداد الحقيقية مثل a ، وتخيلية مثل ib ، والأعداد الحقيقية هى أعداد مركبة دون الجزء التخيلى، والأعداد التخيلية هى أعداد مركبة بدون الجزء الحقيقى.. وهكذا. وبالتالى يمكن أن أقول إن مشاعرنا هى خليط من أجزاء حقيقية (المدركات الإجماعية (CR))، وأجزاء تخيلية (المدركات غيرالإجماعية (NCR)).

بكلمات أخرى، نرى أن كل ما نعتبره حقيقيا هو حالة خاصة من واقع مركب؛ حيث نهمش الأجزاء التخيلية أو نسقطها تماما. وحينما يتحدث شخص عن أحلامه أو أى أمور خيالية جامحة، لابد وأن نفكر بها كحالة خاصة من الوعى لا نعترف بها، أو لا تندرج فى السياق العام أوالتفكير العلمى فى الوقت الحالى؛ حتى تتضخم ويحدث تربيعها وتنكشف حتى نراها وكأنها حقيقية.

إن الأعداد المركبة تمثل ببراسا (paradigm) يحوى ليس فقط كيفية انكشاف وعينا التأملى، وإنما يحوى أيضا كيف نرى الأشياء ونرصدها.