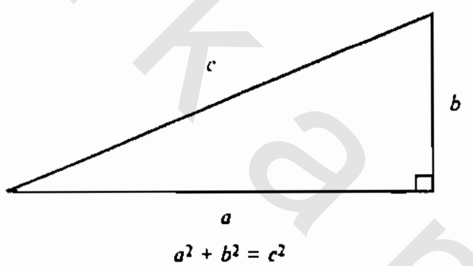
الباب الثانى

نظريات قديمة وسؤال حديث

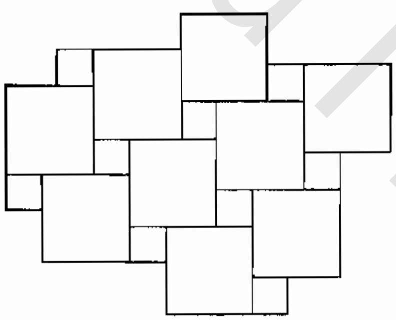
٢ - ١ نظرية فيثاغورث

لنبدأ بالهندسة – ما هى أنواع الهندسة التى توصل إليها علماء الرياضيات؟ لنعد إلى نظرية فيثاغورث والنظرية الشهيرة التى تحمل اسمه والتى تنص على أنه فى المثلث قائم الزاوية – مربع الوتر يساوى مجموع مربعى طول الضلعين الآخرين، شكل (٢–١). ولكن كيف يمكن إثبات هذه النظرية؟ لنورد إثباتين يتميزان بالشفافية والسهولة وإن كان لكل منهما منطقه المختلف.

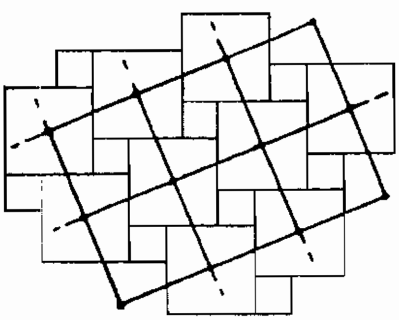
بالنسبة للطريقة الأولى لننظر إلى شكل (٢–٢).



شكل (٢–١): إن مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى الضلعين a ، b.

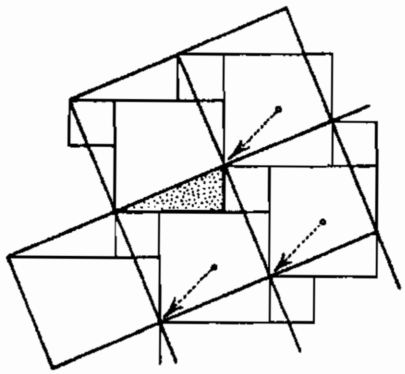


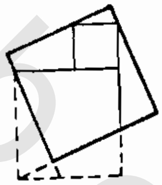
شكل (٢–٢): ملء فراغ الصفحة بمربعات صغيرة وكبيرة.



شكل (٢–٣): تكوّن مراكز المربعات الكبيرة شبيكة من المربعات المائلة.

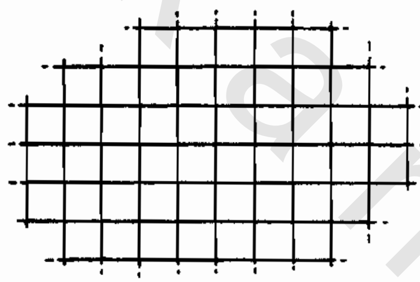
من الواضح أن مساحة المربعات الكبيرة المائلة تساوى مجموع مساحات المربعات الصغيرة. نرى هذا بوضوح أكبر فى شكلى (٢–٤) (٢–٥) حيث تتم إزاحة المربعات المائلة بحركة انتقالية بحتة (دون أى دوران).





شكل (٢-٤) : من الواضح أن الشكل يحقق نظرية فيثاغورث.

شكل (٢-٥) : يمكن لأى نقطة بداية أن تقسم المربعات المائلة بحيث تتحقق نظرية فيثاغورث.

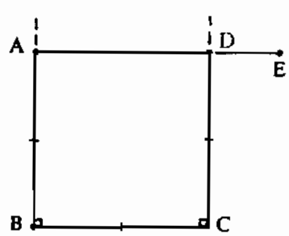


شكل (٢-٦) : شبيكة المربعات الصغيرة المتساوية - كيف يمكن أن نعرف أنها موجودة؟

يؤكد شكل (٢-٦) وجود شبيكة من مربعات متساوية المساحة ولكن هذا يُخفى عدة فرضيات كما سنرى. لنسأل : ما هو المربع؟ طبعاً هو شكل هندسى مستوى له أربعة أضلاع وهو متساوى الأضلاع وكل زواياه قائمة.

ولكن ما هى الزاوية القائمة؟ الإجابة هى أنه عندما يتقاطع خطان مستقيمان وكانت الزوايا الأربع الناتجة متساوية كانت كل منها قائمة.

شكل (٢-٧) : يمكن رسم مربع بأن تكون الزاويتان ABC وBCD قائمتين، AB=BC =CD هل يتبع ذلك أن DA يساوى الأضلاع الثلاثة الأخرى وأن الزاويتين الأخريين قائمتان؟

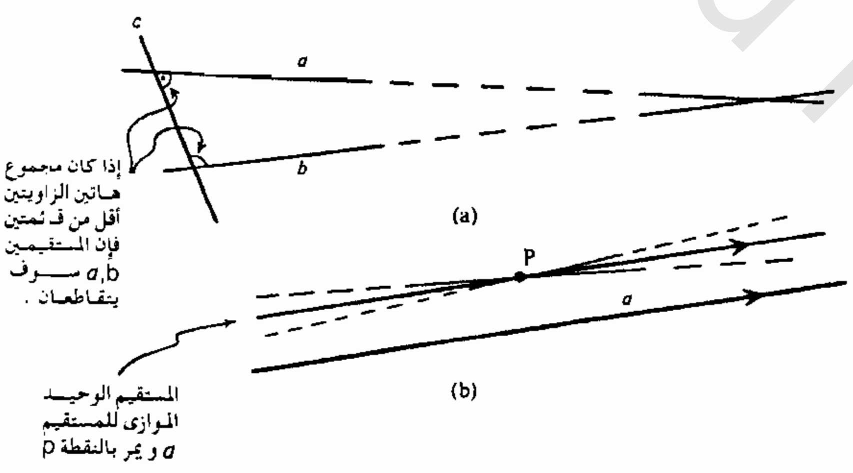


يمكن أن نعتمد فى إثباتنا هذا أنه عندما يقطع خط مستقيم مستقيمين متوازيين فإن الزوايا المتناظرة متساوية، ولكن هنا أيضاً تكمن قضية أخرى.

٢ - ٢ مسلمات إقليدس

لقد كان إقليدس حذرا فى صياغة الهندسة التى تحمل اسمه وبدأ بوضع مفاهيم البديهيات وهى النقطة والخط المستقيم ثم انتقل إلى وضع المسلمات الخمس الشهيرة والتى تمثل حجر الأساس للهندسة كلها. تتعلق المسلمة الأولى بالخط المستقيم أو قطعة الخط المستقيم والذى يصل بين نقطتين، وأنه يمكن أن يمتد إلى ما لا نهاية وهذه هى البديهية الثانية. أما البديهية الثالثة فتتعلق بوجود الدائرة والتى يمكن رسمها حول مركز عند أى نقطة وبأى نصف قطر. البديهية الرابعة تحدد ماهية الزاوية القائمة، وأن كل الزوايا القائمة متساوية. ربما يبدو ذلك غريباً الآن ولكن فى زمن إقليدس كان الاهتمام منصبا على التأكد من تطابق الأشكال الهندسية عند إزاحتها فى حركة انتقالية، كما أن البديهية الرابعة تؤكد تجانس الفراغ أى تساوى خواصه عند أى نقطة به.

ولكن ما هى طبيعة المسلمة الخامسة لإقليدس ؟ استعانةً بالشكل (٢–٨) فإن منطوق المسلمة الخامسة عن المستقيمات المتوازية كالتالى: «إذا قطع مستقيم (c) المستقيمين a ، b ، وكان مجموع الزاويتين الداخليتين α ، β أقل من زاويتين قائمتين فإن المستقمين a ، b سوف يتقاطعان على امتدادهما. وضع «بلاينير» (Playfair) مسلمة شبيهة تماماً كالتالى: لكل مستقيم يمكن أن نرسم من نقطة لا تقع عليه مستقيماً وحيداً آخر يوازيه.

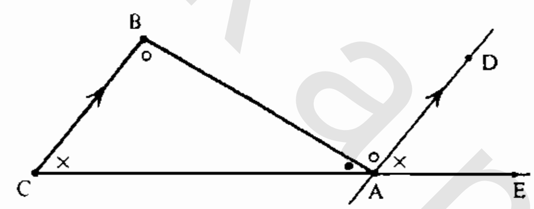


شكل (٢ – ٨) : خطان متوازيان حسب إقليدس وبلايفير

بناء على مسلمة التوازى يمكن الآن الانتقال إلى كيفية بناء مربع يأخذ ثلاث قطع مستقيمة متساوية وزاويتين قائمتين فيكون الضلع الرابع مساويا للثلاثة الأولى والزوايتان الأخريان قائمتين. ولكن هل لابد من كل هذا حتى نصرح بأنه يمكن رسم شكل بسيط كالمربع وبديهية مثل هذه؟ نعم هذا ضرورى وإن كان يبدو بديهيا – ولكننا سنستند إلى هذه الطريقة فى رسم أشكال أخرى فى الهندسة غير الإقليدية.

٢ - ٣ : إثبات نظرية فيثاغورث بطريقة المساحات المتشابهة

فى شكل (٢–١٠) نرى مثلثا قائم الزاوية وأُسقط عمود من الرأس القائمة على الوتر لينقسم المثلث إلى مثلثين أصغر قائمى الزاوية أيضاً. من الواضح أن مساحة المثلث الأكبر يساوى مجموع مساحتى المثلثين الأصغرين ومنها تتبع صحة نظرية فيثاغورث. كذلك من شكل (٢ – ١٠) يمكن إثبات أن مجموع الزوايا الداخلية للمثلث هو (2π).

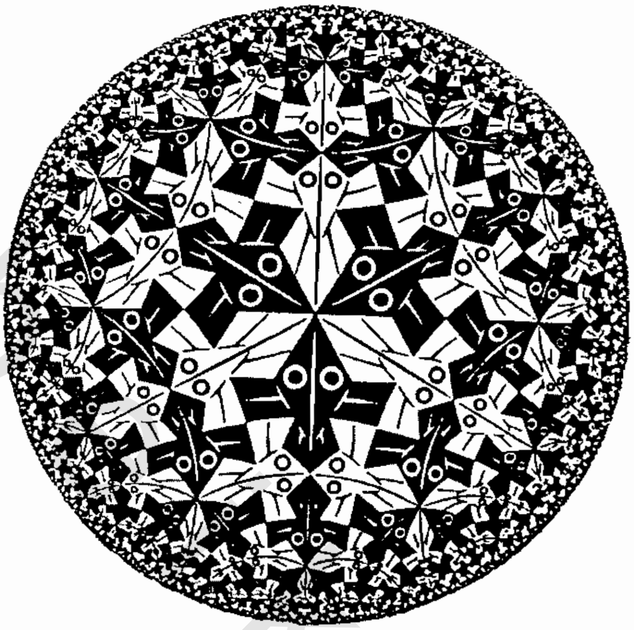


شكل (٢–١٠): مجموع الزوايا الداخلية للمثلث هو (2π).
برسم خط مواز للضلع CB وتساوى الزوايا المتناظرة يسهل إثبات أن مجموع الزوايا الداخلية للمثلث هو (2π).

٢ - ٤ : الهندسة قطع الزائدية (Hyperbolic) صورة تطابقية:

لننظر إلى شكل (٢–١١). إنها صورة للوحة خشبية قام بها الفنان م. س. إيشر (M. C. Escher) وأسماها «الدائرة الحدية». إنها تعطينا تمثيلاً دقيقاً لما يسمى بالهندسة قطع الزائدية (وأحياناً تسمى هندسة لاباتشيفسكى) (Labachevsky). فى هذه الهندسة تفشل مسلمة التوازى، وكذلك نظرية فيثاغورث ومجموع زوايا المثلث الداخلية لا يساوى (2π). وعموماً لا يوجد لأى شكل ذى مساحة معينة شكل آخر يختلف عنه مساحةً ويشابهه.

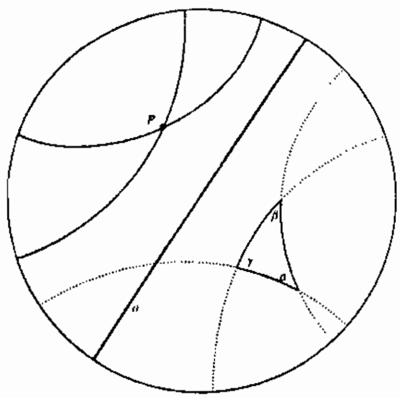
لقد قام إيشر بضغط الكون كله فى دائرة إقليدية تمثل هذه الدائرة المالانهاية لهذا العالم قطع الزائدى. كما نرى فى شكل إيشر فإن الأسماك تتزاحم كلما قربنا من الدائرة الحدية، ولكن هذا خداع بصر! لو كنا مكان هذه الأسماك لما شعرنا بأى ضيق؛ لأن الفراغ كله سوف يبدو بنفس الاتساع، وإن كان يبدو لنا من وجهة نظرنا وحسب الهندسة الإقليدية أن الأسماك تصغر كلما اقتربت من الدائرة الحدية.



شكل (٢-١١) : لوحة «إيشر» التى تبين العالم قطع الزائدى

ولكن كيف يمكن بناء مثل هذا العالم قطع الزائدى؟

كل النقاط داخل هذه الدائرة تمثل العالم قطع الزائدى، كذلك تظهر الخطوط المستقيمة قطعاً من الدوائر الإقليدية والتى تقطع الدائرة الحدية متعامدة عليها. هذا هو سبب التسمية بالصورة التطابقية حيث يتم تصور التقاطع بين هذه المنحنيات هو نفسه تصور التقاطع فى الهندسة الإقليدية؛ لذا يسمى نموذج إيشر المبين بالنموذج «التطابقى»، وأحياناً يسمى بقرص بوانكاريه (Poincaré): من هنا واضح أن مجموع الزوايا الداخلية للمثلث فى مثل هذه الهندسة قطع الزائدية أقل من (2π).



شكل (٢-١٢) : نفس لوحة إيشر ولكن فى الهندسة قطع الزائدية، حيث تفشل مسلمة التوازى، ومجموع زوايا المثلث الداخلية أقل من (2π).

ربما بدا ذلك مقلقا أن مجموع زوايا المثلث الداخلية أقل من (2π) – وكم هو مجموعها؟ لقد توصل هنريش لامبيرت (Heinrich Lambert) إلى العلاقة التالية:

$$\pi - (\propto + \beta \ + \gamma) = C\ \Delta$$

والتى تنص على أن مجموع الزوايا الداخلية للمثلث فى الهندسة القطع زائدية تتناسب مع مساحة المثلث. لا توجد مثل هذه العلاقة البسيطة فى الهندسة الإقليدية.

لننتقل الآن إلى تعريف «المسافة» بين نقطتين فى الهندسة قطع الزائدية.

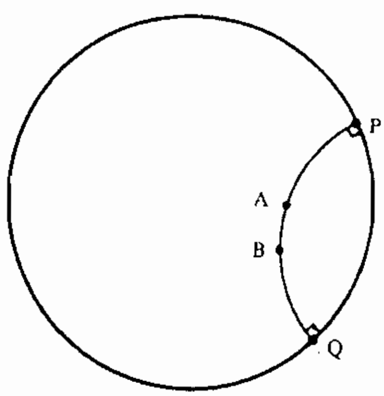
من شكل (٢-١٣) نورد العلاقة التالية التى تحدد المسافة بين النقطتين A, B كالتالى:

$$\log \ \frac{QA}{QB} \cdot \frac{PB}{PA} \ .$$

حيث P ، Q نقطتا التقاطع مع الدائرة الحدية.

حيث المسافات هى مسافات إقليدية.

إذا أردنا إدخال الثابت «C» فى تعريف لامبرت فسوف نضرب العلاقة السابقة فى $C^{\frac{-1}{2}}$ ويسمى «شبيه نصف القطر» فى الهندسة قطع الزائدية لأسباب سوف نراها فيما بعد.



شكل (٢-١٣) المسافة بين النقطتين A ، B حسب الهندسة قطـــع الزائدية هي :

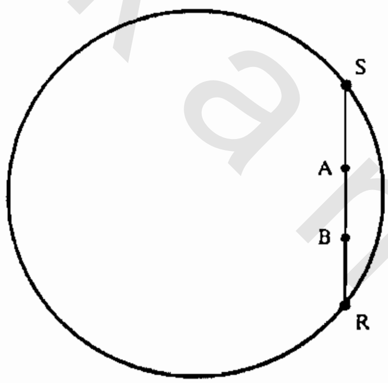
$$(\log \ \frac{QA}{QB} \cdot \frac{PB}{PA} \ )$$

حيث QA .... هى مسافات إقليدية

مما سبق نرى أن الهندسة قطع الزائدية لا تختلف عن الهندسة الإقليدية عدا مسلمة التوازى. حسب قواعد الهندسة قطع الزائدية عن التطابق نجد أن كل الأسماك البيضاء والسوداء فى شكل إيشر متطابقة – وإن كانت تبدو حسب هندسة إقليدس غير ذلك.

٢ - ٥ : الصور الأخرى لتمثيل الهندسة قطع الزائدية:

ثمة صورة أخرى لتمثيل الهندسة قطع الزائدية بالاستعانة بالهندسة الإقليدية ولكن بطريقة إسقاطية (projective) – فى هذه الطريقة تتمثل الخطوط المستقيمة فى الهندسة قطع الزائدية بخطوط مستقيمة إقليدية. فى هذه الحالة التى تبدو أبسط ولكن الزوايا فى هذه الحالة تختلف عن الزوايا الإقليدية. كما هو مبين فى شكل (٢–١٤) نرى أن المسافة بين النقطتين A ، B هى:



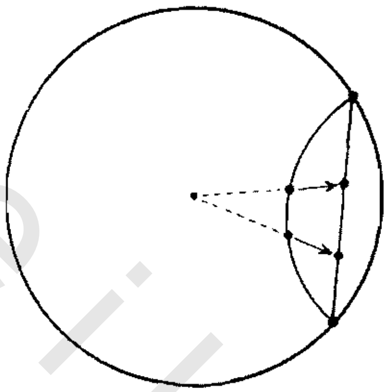
شكل (٢ – ١٤) : المسافة بين نقطتين فى الهندسة القطع زائدية ولكن فى التمثيل الإسقاطى.

$$\frac{1}{2}\ \log_e \frac{RA\ .\ SB}{RB\ .\ SA}$$

فى شكل (٢ – ١٥) – نرى كيف يمكن الربط بين التمثيليين التطابقى والإسقاطى للهندسة القطع زائدية، بالتمدد بمعامل يساوى

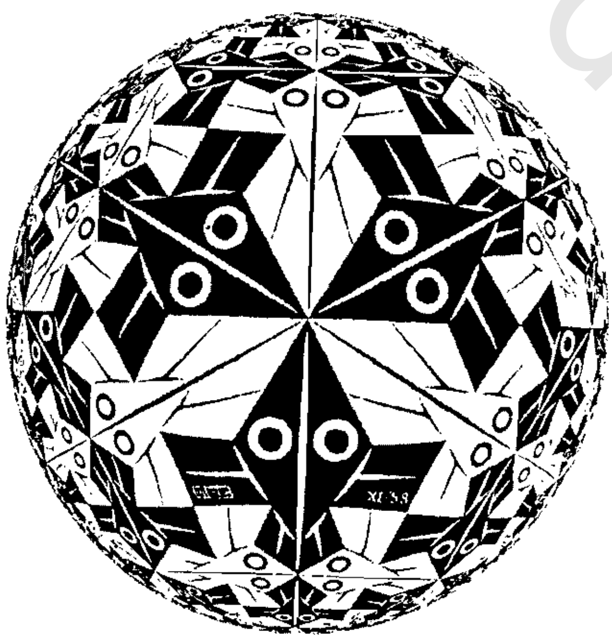
$$\frac{2R^2}{R^2 + r_c^2}$$

حيث: R– قطر الدائرة الحدية، r_c – المسافة الإقليدية من النقطة المعنية فى التمثيل التطابقى.

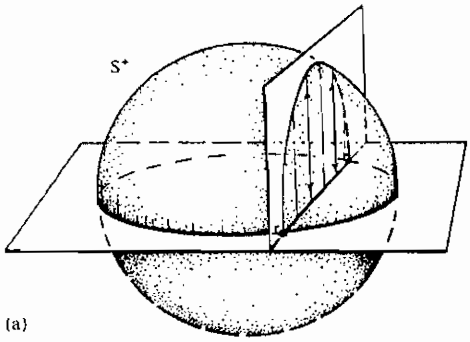


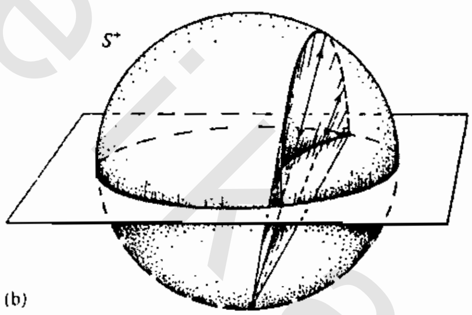
شكل (٢ – ١٥): الانتقال من التمثيل التطابقى إلى التمثيل الإسقاطى.

ابتكر العالم الإيطالى يوجينيو بلترامى (١٨٣٥–١٩٠٠م) – (Eugenio Beltrami) طريقة مباشرة للانتقال من التمثيل التطابقى إلى التمثيل الإسقاطى.



شكل (٢ – ١٦): لوحة إيشر بعد انتقاله من التمثيل التطابقى إلى التمثيل الإسقاطى.





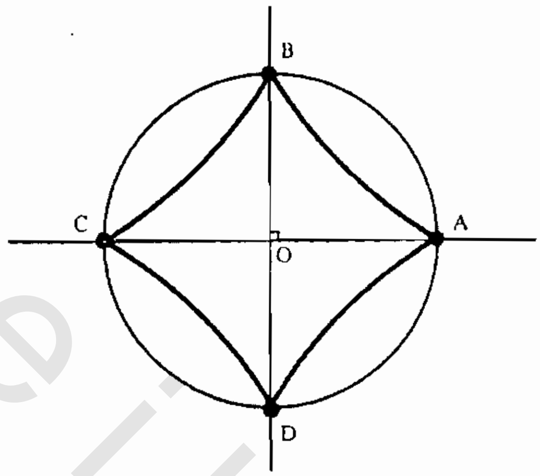
شكل (٢ – ١٧) : هندسة بلترامى تبين التمثيلات الثلاث للهندسة قطع الزائدية.

كما نرى فى شكل (أ) التمثيل نصف الكروى (أى التمثيل التطابقى على نصف الكرة العلوى S^+ ، حيث يسقط رأسياً على القرص الاستوائى (ب) التمثيل نصف الكروى حيث يسقط بشكل مجسم من القطب الجنوبى حتى التمثيل التطابقى على القرص الاستوائى.

إن وجود عدة طرق لتمثيل الهندسة قطع الزائدية لا يعنى سوى أنها تمثيلات إقليدية لهذه الهندسة ولا تعنى الهندسة ذاتها . كلها طرق لشرح الهندسة قطع الزائدية بطريقة مفهومة لمن تعود على الهندسة الإقليدية، أما هذه الهندسة قطع الزائدية فهى هندسة قائمة بذاتها ولها مكان فى عالم أفلاطون خاص بها. لو افترضنا أن مخلوقا حساسا ولد وعاش فى عالم هندسى قطع زائدى لكانت الحياة بالنسبة له طبيعية، ولنظر إلى هندسة إقليدس كهندسة غريبة يلزم دراستها للتوصل إلى قواعدها.

سوف نعرض تمثيلاً آخر للهندسة قطع الزائدية يسمى بهندسة مينكوفسكى (Minkowsky) وهى الوعاء الرياضى للنظرية النسبية الخاصة.

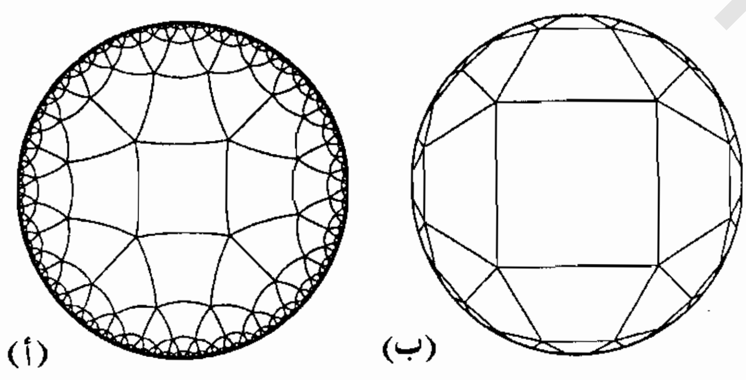
لنعد إلى السؤال عن وجود مربعات فى الهندسة قطع الزائدية. فى شكل (٢–١٨) نرى دائرة وخطين مستقيمين يتقاطعان مع الدائرة فى النقاط A, B, C, D .



شكل (٢-١٨) المربع فى الهندسة قطع الزائدية.

كما نرى فإن المربع قطع الزائدى له أربع زوايا داخلية ليست قائمة وإنما أقل من ($\frac{\pi}{2}$) ولكن الأضلاع متساوية والزوايا متساوية.

فى شكل (٢-١٩) نرى شكلين أ، ب يبينان التمثيلين التطابقى والإسقاطى للمربعات فى الهندسة القطع زائدية.



شكل (٢ - ١٩) : شبيكة من المربعات فى الهندسة قطع الزائدية حيث تلتقى خمسة مربعات فى نقطة واحدة والزاوية هى $\frac{2\pi}{5}$ أو 72°

(أ) التمثيل التطابقى (ب) التمثيل الإسقاطى.

٢ - ٦ : لمحة تاريخية عن الهندسة قطع الزائدية:

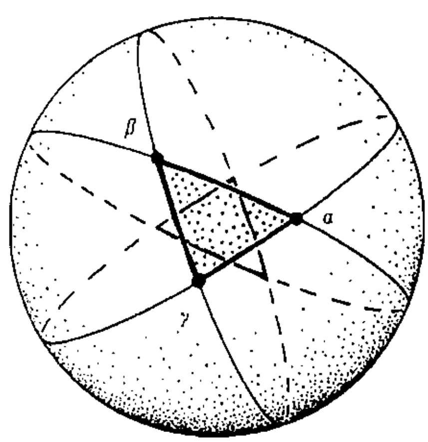
منذ أن نشرت أعمال إقليدس (٣٠٠ قبل الميلاد) قام العديد من الرياضياتيين بمحاولة إثبات المسلمة الخامسة لإقليدس بناء على المسلمات والبديهيات الأبسط. فقط فى عام ١٧٣٣م قام چيرولامو ساتشيرى Girolamo Saccheri -- قام بمحاولة غير ناجحة لإثبات المسلمة الخامسة، ولكنه فى نفس الوقت وضع بذرة مبدأ عام فى الرياضيات ذا أهمية قصوى حتى الآن ألا وهو الإثبات الرياضى بدءاً من الافتراض بأن المراد إثباته هو صحيح، وبحيث يؤدى هذا الافتراض إلى نتيجة تناقض بديهية محققة صحتها. هكذا مع فشل ساتشيرى فى إثبات صحة المسلمة الخامسة، لكن كسبت الرياضيات مبدأ عاماً فى منتهى الأهمية أفاد الرياضيات بكل أقسامها وأبوابها ومواضيعها، وربما كان أول من وضع أساس هذه الطريقة الأفلاطونيون.

أثناء محاولاته لإثبات المسلمة الخامسة لإقليدس عن التوازى، توصل ساتشيرى لعدة نظريات كانت تبدو غريبة جداً فى حينها، ولكن وضح بعد ذلك أنها بدايات الهندسة قطع الزائدية وتوصل إلى العلاقة السابقة ذكرها عن مساحة المثلث فى الهندسة قطع الزئدية، وغيرها الكثير من النظريات المتعلقة بهذه الهندسة.

أهم جانب فى أعمال لامبرت أنه أثبت إمكانية بناء هندسة كاملة على كرة ذات نصف قطر تخيلى أى يكون مربع نصف القطر هذا عدداً سالباً وهذا ما يسمى الآن بنصف قطر انحناء جاوس. لقد توصل توماس هاريوت فى عام ١٦٠٣م (١٥٦٠-١٦٢١م) إلى علاقة تصف مساحة المثلث الكروى (أى على سطح كرة) من علاقة لامبرت حسب العلاقة التالية: (شكل ٢ - ٢٠).

$$C = -\frac{1}{R^2}$$

إذا أردنا الانتقال من الهندسة الكروية إلى الهندسة قطع الزائدية لابد أن نضع إشارة سالبة للثابت على أن يصبح نصف القطر تخيليا.

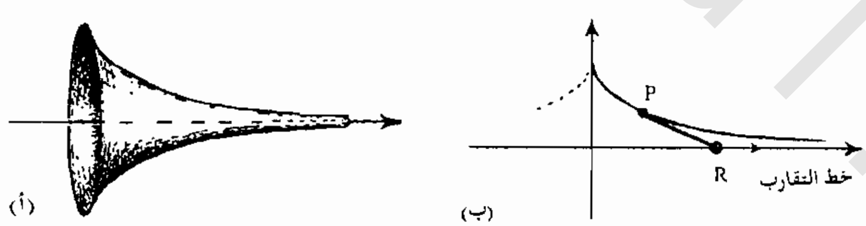


شكل (٢-٢٠) : علاقة هاريوت الخاصة لمساحة المثلث على سطح كرة.

ينسب فضل وضع هندسة لا إقليدية متكاملة لفريدريش جاوس (Fredrich Gauss) بعد خمسين عاماً من أعمال لامبرت، ولكن كان جاوس شخصاً حريصاً جداً فلم ينشر أيًّا من هذه الأعمال حتى قام العالم المجرى يانوش بولياى (Janos Bolyai) فى عام ١٨٢٩م وآخرون على رأسهم العالم الروسى نيكولاى إيفانوڤيتش لاباتشيفسكى (Nicolai Evanoich lobachevsky) فى حوالى عام ١٨٢٦م بوضع الصورة النهائية للهندسة قطع الزائدية، ولذا تسمى هذه الهندسة بهندسة لاباتشيفسكى. قام بوانكاريه فى عام ١٨٨٢م بإعادة اكتشاف أعمال بلترامى وأضاف التطبيقات الهامة لهذه التمثيلات خاصة التمثيل الانطباقى. يضاف إلى ذلك أن التمثيل الإسقاطى يسمى بتمثيل كلاين « Klein».

فى العديد من الحالات تنسب الإنجازات الرياضية إلى أسماء غير مكتشفيها، وإن كان فى العديد من الحالات لا يعلم من نسبت إليهم هذه الأعمال بالاكتشافات السابقة.

لقد توصل بلترامى إلى تمثيل مختلف تماماً للهندسة قطع الزائدية على ما يسمى بالكرة الزائفة (Pseudo - sphere) نحصل على هذا الشكل بتدوير منحنى يسمى بمنحنى الجسر (tractrix) الذى توصل إليه إسحاق نيوتن فى عام ١٦٧٦م حول ما يسمى بالخط التقاربى كما هو مبين فى شكل (٢١-٢).



شكل (٢ - ٢١): (أ) الكرة الزائفة (ب) عند تحريك قضيب قصير على طول الخط التقاربى عند النقطة R، وتدويره حول الخط التقاربى من النقطة p نحصل على هذه الكرة الزائفة.

فى عام ١٨٣٩م، توصل فرديناند مايندنج (Ferdinand Minding) إلى أن هذه الكرة الزائفة تحوى هندسة داخلية سالبة، واستخدم بلترامى هذه الحقيقة فى بناء تمثيل للهندسة قطع الزائدية، ولكن وجد أن هذا التمثيل محدود جداً.

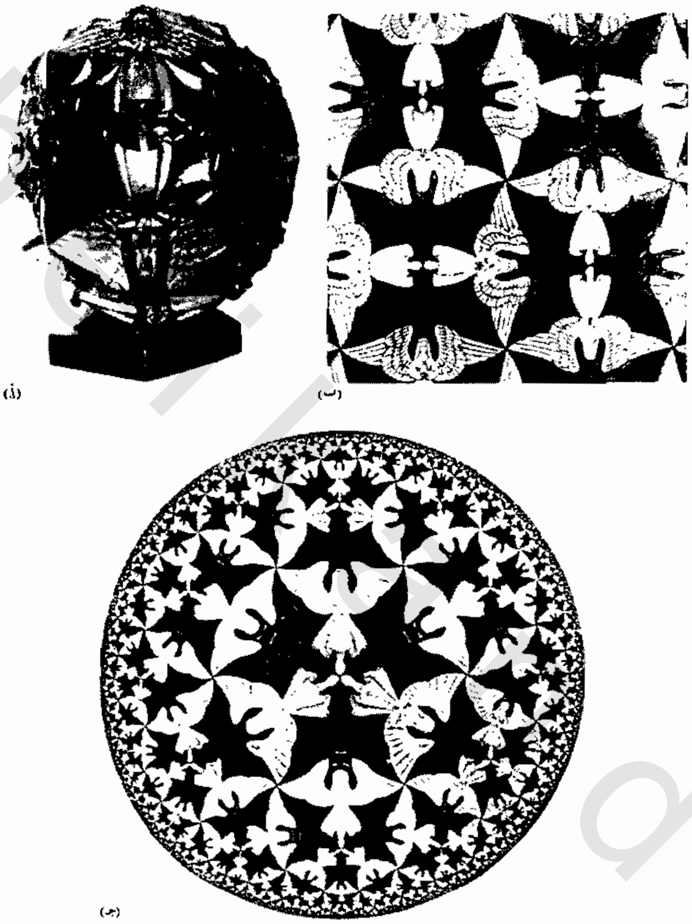
٢٢ - ٧ : العلاقة بالفراغ الفيزيائى

الهندسة قطع الزائدية تعمل بشكل جيد تماماً فى الفراغ متعدد الأبعاد، فمثلاً فى الفراغ الثلاثى نستبدل الدائرة الحدية بكرة حدية، وكذلك التمثيل التطابقى، ناهيك عن هذا، فإن الهندسة الإقليدية ما تزال صحيحة فى حدود المسافات الصغيرة. ولكن السؤال : هل الكون فراغ إقليدى أم فراغ قطع زائدى.

من المشاهدات ونتائج الرصد التى يقوم بها الفلكيون نرى أن الهندسة الإقليدية لا تصلح لوصف الكون الذى نعيش فيه ، وإنما أقرب للوصف بالهندسة قطع الزائدية مع بعض التذبذبات المحلية والتى تفضى فى النهاية إلى كون متجانس عموماً ولكن لابد من أن نضع فى الاعتبار أنه ليس إقليديا، وقد ثبت ذلك من النظرية النسبية الخاصة وكذلك وبشكل لا يدعو للشك فى النظرية النسبية العامة. لقد جرت محاولات لوصف الكون بهندسة قطع ناقصية (Elliptic) ولكنها لم تكن ناجحة فى شكل (٢-٢٢) نرى ثلاث صور للوحة إيشر.

ولكن ماذا عن نظرية فيثاغورث فى هذه الهندسة قطع الزائدية؟ إنها بالقطع غير صحيحة فى إطار هذه الهندسة، ولكن حيث إن كل هندسة إقليدس هى تقارب الهندسة قطع الزائدية، فإن نظرية فيثاغورث أيضاً صحيحة على المسافات الصغيرة حيثما تكون هندسة إقليدس صحيحة.

حتى مع الهندسة الريمانية (Riemannian) وهى التعميم الأكبر للهندسة قطع الزائدية، تظل نظرية فيثاغورث صحيحة عندما يكون الحيز صغيراً، بل وتستخدم للحكم على صحة الهندسة نفسها عندما تؤول المسافات إلى الصفر.



شكل (٢-٢٢) : لوحة إيشر فى ثلاث هندسات - (أ) قطع الناقصية (ب) الإقليدية (جـ) قطع الزائدية.