الباب الرابع

الأعداد المركبة السحرية

٤-١ العدد السحرى (i)

لقد تم الانتقال من مجموعة الأعداد النسبية إلى مجموعة الأعداد غير النسبية وحصلنا على مجموعة الأعداد الحقيقية، كل ذلك بدأ بالبحث عن الجذر التربيعى للعدد (2).

وهكذا حُلت المشكلة. الآن نفعل نفس الشيء ولكن ما معنى أن نحاول إيجاد الجذر التربيعى لعدد سالب؟ لقد قام روفائيل بومبيللى (Raphael Bombelli) فى عام ١٥٧٢م وفى كتابه الجبر L'Algebra بعد أن قام فى عام ١٥٤٥م چيرولاموكاردانو (Gerolamo Cardano) بوضع أسس الأعداد المركبة فى كتابه (Ars Magna). كل ما نريده هو إدخال كمية جديدة وحيدة نرمز لها بالحرف «i» وتعرف على الشكل التالى:

$$i = \sqrt{-1}$$

أى جذر العدد السالب (1-) يتبع ذلك تكوين أعداد مركبة على الشكل التالى:

$$7 = a + ib$$

حيث a ، b عددان حقيقيان، ونجرى عمليات جمع وطرح وضرب وغيرها بسهولة، حيث نضع فى الاعتبار أن ($i^2 = -1$)، ونلخص هذه القواعد كالتالى:

الجمع: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$

الطرح: $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i\,(b - d)$

الضرب: $(a + ib) * (c + id) = ac - bd + i\,(ac + bd)$

أما القسمة فتكون:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

كما نرى فإن النتيجة هى أيضاً عدد مركب.

من الغريب أن كان تقبل الأعداد المركبة أصعب بكثير من قبول الانتقال من الأعداد النسبية إلى الأعداد الحقيقية، وظل الكثير من العلماء ينظرون لهذه المجموعة الجديدة بشك كبير ولا يحسون بفائدة ما من وراء ذلك. كان الشك نابعاً من عدم

إحساسهم بأن هذه الأعداد المركبة يمكن أن تكون ذات علاقة بالعالم الفيزيائى وليست مجرد ابتكار العقول الرياضية، وعلى مدى ٣٥٠ عاماً منذ أن قدم كاردانو وبومبيللى مفهوم الأعداد المركبة - ظلت أهميتها غير واضحة لمعظم العلماء فى الأفرع المختلفة.

٤ - ٢ : حل المعادلات باستخدام الأعداد المركبة

بعض الصفات السحرية لهذه الأعداد المركبة تكمن فى وجود جذر لكل الأعداد، فمثلاً $\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$ ويمكن لجذر أى عدد مركب (a+ib) على الشكل التالى:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

يمكن أيضاً أن نحسب أى جذر مكعب أو ذى مرتبة أعلى بنفس السهولة وحتى الجذر من الرتبة (i) - بالطبع عدا الصفر.

الجانب السحرى الآخر نراه فى كون متعددة الحدود مثل:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n = 0,$$

لها n حل دون أى استثناء (حيث (a_n) أعداد مركبة وليست صفرية).

من الأعمال الهامة التى قام بها كاردانو استمرارا لأعمال فونتانا (Nicolo Fontana) وسيبونى فيرو (Scipione del Ferro) وضع حل للمعادلة من الرتبة الثالثة:

$$x^3 = 3px + 2q$$

على الشكل التالى:

$$x = (q + w)^{\frac{1}{3}} + (q-w)^{\frac{1}{3}},$$

$$w = (q^2 - p^3)^{\frac{1}{2}}$$

هذه المسألة لا تشكل أية مشكلة إذا كانت

$$q^2 \geq p^3$$

ولها حل واحد حقيقى. ولكن إذا كانت

$$q^2 < p^3,$$

وتسمى هذه الحالة «غير القابلة للاختزال»، ورغم وجود ثلاثة حلول حقيقية، إلا أنه لابد من اللجوء لحل يحوى أعداداً مركبة ولكنها تختزل وتبقى الحلول الحقيقية.

٤ - ٣ تقارب (Convergence)

المتسلسلات الأسية:

حتى الآن لم نلمس بعد الجوانب السحرية لجبر الأعداد المركبة. لنبدأ فى ذلك. تكتب المسلسلات الأسية على الشكل التالى:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$$

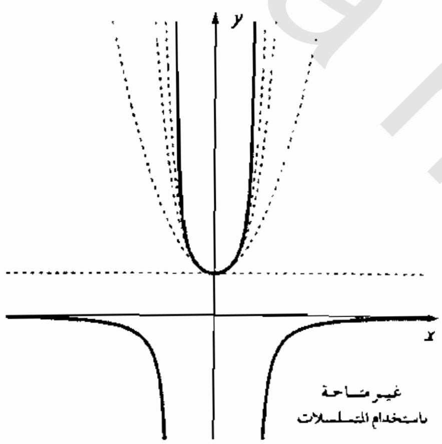
حيث أن هذه المتسلسلة تحوى عدداً لا نهائياً من الحدود فإنها يمكن ألا تتقارب (أى يصبح مجموع الحدود نهائياً) وفى هذه الحالة تسمى متسلسلة غير متقاربة. هذا يحدث عندما تكون ($x \geq 1$) ولكن إذا كانت ($x < 1$) تتقارب.

مجموع مثل هذه المتسلسلة هو:

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ... = (1- x^2)^{-1}$$

عندما تكون $x = \frac{1}{2}$ نحصل على مجموع هذه المتسلسلة وهو $\frac{4}{3}$.

عندما تكون $x = 2$ نحصل على مجموع قدره ($-\frac{1}{3}$)



غير متاحة
باستخدام المتسلسلات

شكل (٤-١): يبين هذا الشكل قيم المجموع الجزئى لهذه المتسلسلة $1, 1 + x^2, 1 + x^2 + x^4, 1 + x^2 + x^4 + x^6 ....$ **(الخطوط المنقطة) لقيمة** $(1-x^2)^{-1}$ **تبين تقارب هذه المتسلسلة عندما تكون** $|x|<1$ **وغير متقاربة عندما تكون** $|x|>1$.

ولكن عندما تكون $x = 2$ ، نحصل على إجابة غريبة:

$$(1 - 4)^{-1} = - \frac{1}{3}$$

لقد تعرض عالم فذ مثل ليونارد أويلر (Leonard Euler) لبعض السخرية لتمسكه بمثل هذه النتائج التى كانت تبدو سخيفة وغير منطقية. كان هذا طبيعيا حيث لم تكن تبلورت بعد فكرة تقارب المتسلسلات على يد كل من أوجستين كوشى (Augustin Cauchy) وغيره فى نهاية القرن الثامن عشر وبداية القرن التاسع عشر.

نفس الشيء يحدث عندما ننظر إلى المعادلة

$$x^2 + 1 = 0$$

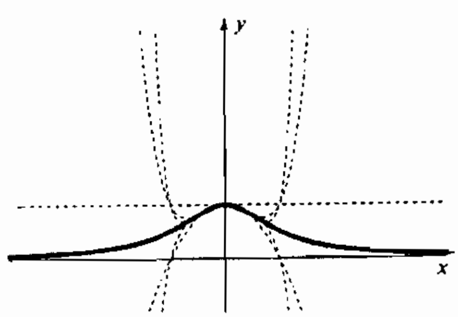
وأنه فى الإطار المعتاد - لا يوجد حل لهذه المعادلة. كذلك المعادلة $x^2 = 2$ تعود بنا إلى الجذر التربيعى للعدد (2) - وهنا تكمن قوة اللجوء إلى الأعداد المركبة. دون الدخول فى تفاصيل فإنه فى فيزياء الكم الحديثة أمكن استخدام المتسلسلات غير المتقاربة بنجاح كبير وأصبحت النظرة لهذا النوع من المتسلسلات مختلفة، خاصة وأن النتائج التى تستقى من هذه الحسابات تتوافق مع نتائج التجارب الفيزيائية وأصبح لها معنى واضح وهام فى تطور فيزياء الكم فى النصف الثانى من القرن العشرين.

لننتقل إلى دراسة متسلسلة أخرى قريبة من التى درسناها توًا ألا وهى:

$$(1 + x^2)^{-1}$$

وهذه أفضل من المتسلسلة الأولى لأنها استمرارية وملساء (smooth) ومحدودة أى:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \ \dots = (1 + x^2)^{-1},$$



شكل (٤-٢): المجموع الجزئى للمتسلسلة المذكورة هو $1,\ 1 - x^2,\ 1 - x^2 + x^4,\ 1 - x^2 + x^4 - x^6$ **وهكذا تتقارب عندما تكون** $|x|<1$ **وتتباعد عندما تكون** $|x|>1$ **كما هو مبين بالشكل.**

لنقارن الحالات الثلاث عندما تكون $x = 1$ ، $x=2$ و $x = \frac{1}{2}$ نحصل على الآتى .

$$x = 1 : \quad 1, 0, 1, 0, 1, ...$$

$$x = 2 : \quad 1, -3, 13, -51, 205, -819, ...$$

$$x = \frac{1}{2} : \quad 1, \frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{51}{64}, \frac{205}{256}, \frac{819}{1024}, ...$$

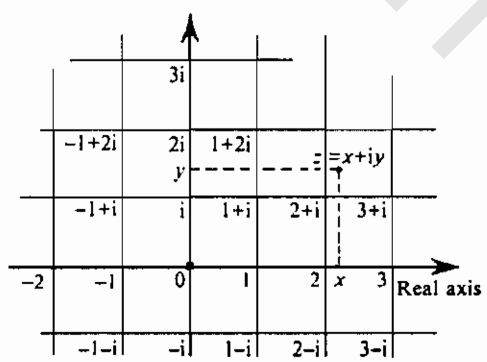
ورغم أن المتسلسلة الأولى لا تتباعد إلا أنها تتكرر، أما الأخيرة فتتقارب إذ تصغر الحدود تباعا.

يكمن حل هذه المعضلة فى البحث عن القيم المركبة لهذه الدالة وعدم الاقتصار على القيم الحقيقية.

٤ - ٤ : مستوى كاسبار فيسيل (Caspar Wessel) المركب:

لكى نصل إلى معرفة ما يحدث هنا لابد وأن نلجأ إلى ما يسمى بالتمثيل الهندسى للأعداد المركبة فى المستوى الإقليدى.

فى شكل (٤-٣) يوضح الرسم كيفية تمثيل الأعداد المركبة فى المستوى المركب.



شكل (٤-٣) : المستوى المركب يمثل المحور x- الجزء الحقيقى والمحور y- الجزء التخيلى.

حيث يكون محور السينات (x) ممثلا للجزء الحقيقى ومحور الصادات (y) ممثلا للجزء التخيلى. يمثل كل عدد بإحداثيات (x, y) كما هو مبين بالشكل.

نعود الآن للدالتين السابقتين $(1- x^2)^{-1}$ ، $(1+ x^2)^{-1}$ لتمثيلها فى المستوى المركب، لنكتب الدالتين كالآتى: $(1- z^2)^{-1}$ ، $(1+ z^2)^{-1}$.

واضح الآن أن الدالة $(1- x^2)^{-1}$ انفرادية (singular) (أى تــــــؤول

إلـــى ما لا نهاية) عند النقطتين $x = -1$ ، $x = +1$ أما الدالة $(1+x^2)^{-1}$ فلا تعانى من هذه المشكلة كما رأينا فى شكل (٤ – ٢). لكن الدالة $(1+z^2)$ سوف تعانى نفس المشكلة عند النقطتين $z = \pm i$ حيث ستكون انفرادية ولكن بالنسبة لمحور y (المحور التخيلى).

ولكن ما علاقة كل هذا بالتقارب أو عدمه؟

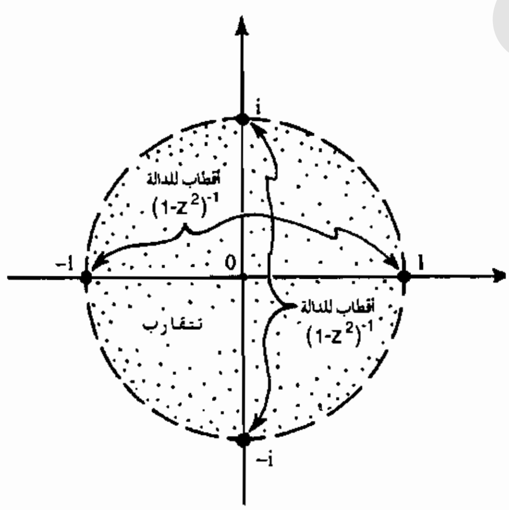
الإجابة صادمة – العلاقة وثيقة بل ووثيقة جداً.

بالنسبة للصورة العامة للمتسلسلة الأسية على الشكل التالى:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

توجد دائرة فى المستوى المركب إذا وقعت z داخلها تتقارب المتسلسلة، وإذا وقعت خارجها فإن المتسلسلة لا تتقارب. ولكن ماذا إذا وقعت النقطة على محيط هذه الدائرة ؟ هذه قضية معقدة لن نتعرض لها الآن وإن كانت تمس صلب الموضوع الذى نحن بصدده. الأهم الآن هو كيف نرسم هذه الدائرة ؟ نرسم هذه الدائرة بحيث يكون نصف قطرها أقل من نقاط الانفراد وقريباً منها بمسافة متناهية الصغر.

فى الحالة التى نعالجها بالنسبة للدالتين $(1-z^2)^{-1}$ ، $(1+z^2)^{-1}$ تكون مثل هذه الانفرادية بسيطة وتسمى نقاط الانفراد بالأقطاب (poles).



شكل (٤–٤): دائرة التقارب للدالتين $(1-x^2)^{-1}$، $(1+x^2)^{-1}$ حيث تمثل النقاط +1 ، -1 ، +i ، -i الأقطاب لهاتين الدالتين، واضح أن نصف قطر الدائرة هو الوحدة.

وهكذا نرى كم تزودنا استخدامات الصيغة المركبة للمتسلسلات الأسية بمعلومات هامة عن سلوك مثل هذه الدوال لا تتوفر عندما ننظر لها كمتسلسلات من متغير حقيقى فقط.

٤-٥: كيفية بناء مجموعة ماندلبروت (Mandelbrot)

لننهى هذا الباب لننظر مرة أخرى إلى قضية التقارب واللاتقارب. لنأخذ مثلاً غير عادى وهو مجموعة ماندلبروت المبينة فى شكل (١-٢). هذه المجموعة ما هى إلا مجموعة جزئية من مستوى ڤيسيل المركب. كل ما نفعله هو تكرار جملة رياضية:

$$z \to z^2 + c$$

حيث c- عدد مركب ما. لنبدأ بالقيمة z=0، بعد ذلك نكرر (iterate) مرات ومرات ونرصد سلوك النقطة z فى المستوى المركب بحيث إذا تباعدت إلى ما لا نهاية فلونها اللون الأبيض – أما إذا وقعت فى منطقة محدودة ليكن لونها الأسود. عندئذ تكون المنطقة السوداء هى مجموعة ماندلبروت.

لنعط بعض التفاصيل فى هذه العملية – وكيف يتم التكرار وعما يسفر؟

لنأخذ z وننتقل إلى $z^2 + c$ ، ثم $(z^2 + c)^2 + c$ ثم $((z^2 + c)^2 + c)^2 + c$

وهكذا نحصل على المتوالية:

$$0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c, \ldots$$

يعالج الحاسب المتوالية ويظهرها على الشاشة بشكل حسابى دون اللجوء إلى المستوى المركب وخلافه.

من المهم أن نذكر أنه مع بساطة العرض، هناك العديد من الطرق لجعل هذه المتوالية محدودة، ورغم تعقد الشكل الذى تظهر به مجموعة ماندلبروت، إلا أنه من السهل فهم مبدأ تنفيذها وبساطة القاعدة نفسها ولكن كل هذا يخرج عن نطاق هذا العرض. من يريد أن يستزيد فى هذا الموضوع يمكنه الرجوع إلى بعض المراجع.

Peitgen and saupe (1988), Peitgen and Reichter (1986) Doundy and Hubbard (1985)