الباب السابع

التحليــل الرياضــى

٧-١ الملسائية (smoothness) المركبــة والـدوال تامــة الشكل (holomorphic)

رغم أننا لم نتعرض لكل جوانب التفاضل لكن هنا سوف نعرض لكيفية اشتقاق الدوال المركبة استعانة بعلاقات كوش – ريمان والتى توضح كيفية اشتقاق الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية للمتغير z . سوف يؤدى ذلك إلى ما يسمى بالتكامل الكونتورى(*) (contour integral) – وهكذا إذا استطعنا الحصول على المشتقة الأولى تأتى المشتقات التالية كلها تباعا وبدون مقابل.

نستخدم هذه العلاقة فى إيجاد قيم المعاملات الخاصة بمتسلسلة تايلور (Taylor) للدالة f(z) – والتى لابد وأن نبين أنها تؤول إلى الدالة f(z) داخل دائرة فى المستوى المركب بحيث تكون معرفة وقابلة للاشتقاق داخل هذه الدائرة. فى هذه الحالة تسمى الدالة بالدالة التحليلية بالضرورة. يتبع ذلك أنه ليست هناك مشكلة فى لصق دوال -C^{∞} مثل الدالة h(x) التى وردت سابقاً. بالتالى فإن الملسائية المركبة – والتى انتبه لأهميتها كوشى فى عام ١٨٢١م أى بعد ٣٨ عاماً من وفاة أويلر، – تفيد فى الحكم على مدى إمكانية فك الدالة فى متسلسلة أسية. ثمة ميزة أخرى فى التحليل المركب هو مثلا فى حالة الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ يمكن حذف النقطة $z = 0$ وتصبح بذلك الدالة رائعة وقطعة واحدة. لا يتسنى ذلك فى التحليل الرياضى الحقيقى بأى شكل من الأشكال.

مثل هذه الدوال الملساء فى المستوى المركب أى (تحليلية مركبة) – تسمى بالدوال تامة الشكل (holomorphic). تلعب هذه الدوال دوراً أساسياً فى كل التطبيقات الفيزيائية – التمثيل التطابقى لأسطح ريمان، متسلسلات فورييه (Fourier) المهمة لنظرية الاهتزازات، والنظرية الكمية للمجالات، ونظرية المفتولات (Twister theory) – وكذلك نظرية الأوتار (String Theory) .

٧ - ٢ التكامل الكونتورى:

لابد أن نرسى أسس التكامل الكونتورى حيث إنه يخدم بعد ذلك كل ما كنا نود توضيحه فى الفقرة السابقة. لنكتب التعبير الرياضى التالى:

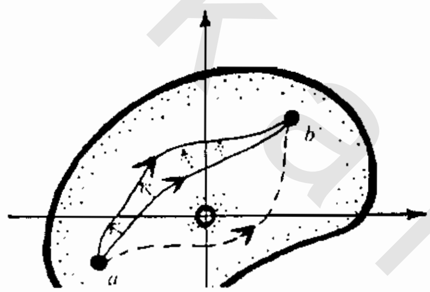
$$\int_a^b f(z)\, dz = g(b) - g(a)$$

حيث : $g'(z) = f(z)$

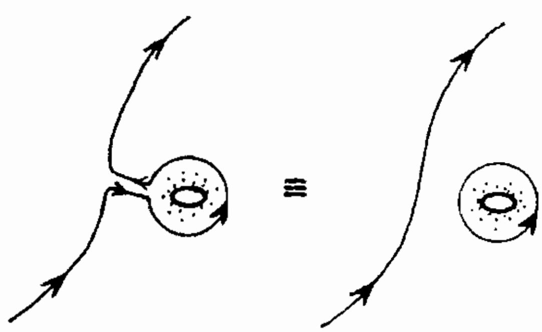
(*) خط المناسيب contour .

من الواضح أنه فى التحليل الحقيقى هناك مسار واحد لمثل هذا التكامل – أما بالنسبة للمستوى المركب فهناك عدة مسارات يمكن اتباعها للانتقال من النقطة (a) إلى نقطة (b) – ولكن هنا لابد وأن نذكر أن قيمة التكامل لن تتغير طالما يمكن أن نحصل على هذه المسارات بتشويه (deformation) شكل المسارات الأخرى بالشد أو بالضغط لكى نعود إلى المسار الأصلى (شكل ٧–١).

بهذا الخصوص لابد وأن نفرق بين نوعين من التشويه : التشويه التشابهى (homologous) والتشويه الهوموتوبى (homotopic). فى النوع الأول تقوم بعض أجزاء المسار بإلغاء الأجزاء الأخرى حيث إن المسار فى الأجزاء الأولى فى اتجاه ما، وفى الأجزاء الأخرى فى الاتجاه المعاكس، ولكن فى التشويه الهوموتوبى لا يحدث هذا.



شكل (٧–١) : التكامل لدالة تامة الشكل يعطى نتيجة واحدة لمسارات مختلفة من النقطة (a) إلى النقطة (b) طالما كانا داخل نفس النطاق للدالة f(z).

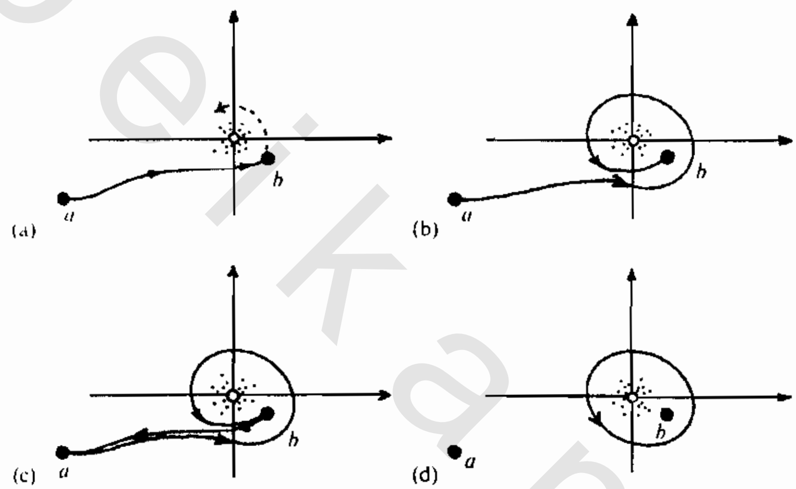


شكل (٧–٢) : يوضح الشكل كيف أنه بالنسبة للمسارات المتشابهة (homologous) تلغى بعض الأجزاء أجزاء أخرى وإن كان ينتج عن ذلك بعض الأنشوطات (loops) المنفصلة بعضها عن البعض.

لقد حصلنا على العلاقة بين الدالة $\frac{1}{x}$ واللوغاريتم فى التحليل الحقيقى – لنكتب نفس العلاقة بالنسبة للدوال المركبة كالتالى:

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \log b - \log a$$

ولكن لنتذكر أننا سوف نحصل على قيم مختلفة لهذا التكامل ولكن يمكننا الانتقال بسهولة من أحد الإجابات للأخرى كما هو مبين فى شكل (٧–٣).



شكل (٧–٣): (أ) عند أخذ التكامل للدالة (z^{-1}) من النقطة a وحتى النقطة b نرى مسارات مختلفة (ب) لنحفظ a ثابتة وندع b تدور حول نقطة الأصل. يزيد ذلك من قيمة التكامل بمقدار $2\pi i$ (جـ) لنعد مرة أخرى إلى النقطة a (د) عندما ينعدم جزء من المسار نعود مرة أخرى إلى $\oint z^{-1}\, dz = 2\pi i$

وهكذا نكتب التكامل على شكل تكامل كونتورى كالتالى:

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

عند كتابة مثل هذا التعبير الرياضى لابد وأن نكون واعين لنقطة أنه يلزم تحديد أى المسارات نسلك وما هو نوع المسار من الناحية الهومولوجية (homology). لو كان المسار متضاعفاً حصلنا على قيمة التكامل ($4\pi i$)، وإذا كان المسار فى الاتجاه المعاكس (أى مع عقارب الساعة) كانت النتيجة ($-2\pi i$)

٧ - ٣: المتسلسلات الأسية والملسائية المركبة:

إن العلاقة السابقة هى حالة خاصة من علاقة كوشى الشهيرة

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z}\, dz = f(0).$$

فى هذه العلاقة تكون الدالة $f(z)$ دالة تامة الشكل عند نقطة الأصل (أى أنها

ملساء مركبة فى نطاق حول نقطة الأصل) - والمسار هو مسار مغلق حول نقطة الأصل مع حذف نقطة الأصل نفسها.

بالنسبة لعلاقة كوشى للأسس الأكبر نحصل على

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = f^{(n)}(0)$$

لنتحفظ الآن قبل أن نسرع فى الحكم على مدى إمكانية وجود متسلسلة أسية للدالة ووجود المشتقة النونية لها.

ولكن لنستخدم هذه العلاقة لتعيين المشتقة النونية لهذه الدالة عند نقطة الأصل، وذلك باستخدام متسلسلة مالكورين $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ لحساب المعاملات الخاصة بالمتسلسلة الأسية:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots,$$

وببعض المجهود يمكن إثبات أن مجموع هذه المتسلسلة يؤول إلى الدالة $f(z)$ فى نطاق ما حول نقطة الأصل. يعنى هذا وجود المشتقة النونية وبالتالى فإن الدالة تحليلية عند نقطة الأصل.

لا يتعلق كل ذلك بنقطة الأصل فقط، ولكن ومرة أخرى يمكن فك الدالة فى متسلسلة أسية لتايلور حول نقطة غير نقطة الأصل وبالتالى نحصل على علاقة كوشى عند نقطة p كالتالى:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-p)} = f(p)$$

وكذلك المشتقة النونية على الصورة التالية:

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}\, dz = f^{(n)}(p)$$

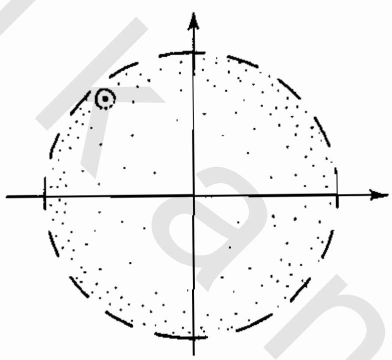
حيث يحيط المسار بنقطة p. وهكذا نرى أن الملسائية المركبة تعنى أن الدالة تحليلية وكذلك تامة الشكل فى كل نقطة من النطاق.

هكذا يمكن أن نحس بمدى أهمية مثل هذه التكاملات التى تعطى نتائج مبهرة وتوضح الجوانب السحرية للتحليل المركب المهم أن نذكر هنا أن دور هذه الدوال المركبة لا يقتصر على هذا الموضوع فقط وإنما يمتد إلى الكثير من أفرع الفيزياء والرياضيات.

٧ - ٤ : الاستمرارية التحليلية:

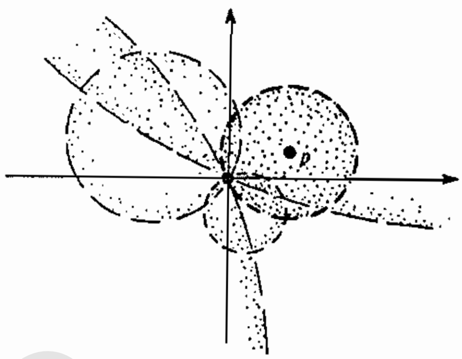
مما سبق يمكن أن نفصح عن نتيجة ذات مغزى وهو أن الملسائية المركبة تعنى وجود متسلسلة أسية فى هذا النطاق. يعنى الرياضياتيون بالنطاق هنا نطاقا «مفتوحا».

(open region). بلغة الرياضيات الصارمة نقول إنه إذا كانت نقطة ما مثل a داخل نطاق ما – يعنى ذلك وجود دائرة مهما صغرت حول النقطة (a) تدخل أيضاً فى النطاق. ولكن «القرص المغلق» هو مجموعة النقاط التى تقع داخل الدائرة التى يكون نصف قطرها إما أقل أو يساوى الوحدة. هذا ليس نطاقا مفتوحا حيث إن محيط الدائرة تم دمجه فى النطاق، ولأن أى نقطة على هذا المحيط لا يمكن رسم دائرة حول النقطة بحيث تكون الدائرة كلها مهما صغرت داخل دائرة الوحدة. فى شكل (٧–٤) رسم تخطيطى للنطاقين المفتوح والمغلق على شكل قرص.

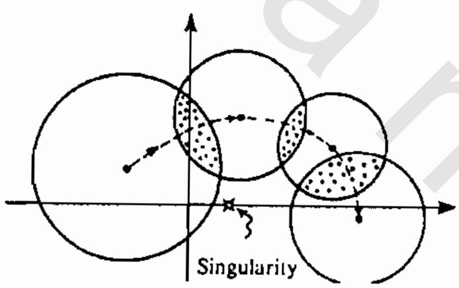


شكل (٧ – ٤) : القرص الوحدة المفتوح – $|x| < 1$ أما القرص المغلق فيعنى $|x| \leq 1$ لأنه يتضمن نقاط المحيط.

لنأخذ الآن النطاق المفتوح D لدالة تامة الشكل f (z)، بحيث تكون الدالة ملساء – مركبة عند أى نقطة فى النطاق، وبالتالى عند أى نقطة p داخل هذا النطاق توجد متسلسلة أسية تؤول لهذه الدالة فى نطاق مناسب حول p. كم هو اتساع هذا النطاق لأنه يمكن ألا تؤول هذه المتسلسلة إلى الدالة f(z) فى كل النطاق D. نذكر دائرة التقارب التى تحدثنا عنها سابقاً، ولا تتقارب هذه المتسلسلة الأسية عند نقاط خارج النطاق D. لنفرض أن الدالة f(z) لها نقطة انفرادية (singularity) عند نقطة ما q ولكن الدالة ما زالت ملساء – مركبة. (مثلا الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ لها انفرادية عند نقطة الأصل). بالطبع لا يمكن أن تمتد دائرة التقارب لتحوى النقطة q. ولذلك يمكن أن يكون للدالة عدة دوائر تقارب كما هو مبين فى شكل (٧–٥).



شكل (٧-٥) : للدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ نطاق التقارب هو المستوى المركب بكامله عدا نقطة الأصل وهى تحذف من المستوى.



شكل (٧ - ٦) : يمكن أن تكون الدالة تامة الشكل تحليلية ومستمرة حول نقاط يوجد بها مفكوك على صورة متسلسلات أسية. يتم ذلك عن طريق مسار متصل عندما تكون دوائر التقارب متقاطعة.

يقودنا كل هذا إلى مسألة كيفية مد استمرارية الدالة تحليليا (Analytic conttinuation). لنتساءل إذا كانت الدالة تحليلية فى النطاق D – هل يمكن مد هذا النطاق ليصبح D` وتظل الدالة تامة الشكل؟ فى حالات عديدة هذا ممكن – فى فقرة ٤-٤ تعاملنا مع المتسلسلة:

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + ...$$

لهذه المتسلسلة دائرة وحدة تتقارب فيها، ولكنها تمتد طبيعياً إلى الدالة $(1+z^2)^{-1}$ وهى دالة تامة الشكل على كل المستوى المركب عدا النقطتين +i ، -i

محذوفتين. وبالتالى يمكن أن تمتد الدالة تحليليا إلى مناطق غير التى تكون الدالة تلقائياً تحليلية فيها.

وهكـذا نرى من شكل (٧ – ٦) كيفية مـد تحليلية الدالة باختيار المسار الصحيح.

بالنسبة لدوال المتغير الحقيقى يصعب جعل الدالة تمتد إلى مناطق أخرى ولكن كما رأينا فإن الدوال المركبة وإن كانت تحوى بعض الصلابة إلا أنه يمكن التغلب جزئياً على هذه المشكلة.

حتى نوضح هذه المسألة – لنأخذ الدالة (الصديق القديم) $f(z) = \log z$. نعلم مسبقاً أنه لا يمكن وضع هذه الدالة على شكل متسلسلة أسية عند نقطة الأصل لأن هذه النقطة انفرادية. ولكن يمكننا فك هذه الدالة على شكل متسلسلة قوى عند النقطة $z = 1$، أى:

$$\log z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \frac{1}{4}(z-1)^4 + \ldots..$$

إن دائرة الوحدة للتقارب لهذه الدالة هى دائرة مركزها عند النقطة $z = 1$. إذا أردنا أن نمد تحليلية هذه الدالة فلنتصور كما هو مبين فى شكل (٧–٧) أن نحدد مسارا فى اتجاه عكس عقارب الساعة ويحيط بنقطة الأصل. يمكن فى هذه الحالة وضع متسلسلات أسية عند النقاط $1, \omega, \omega^2$ وعودة إلى 1، وهكذا نأخذ مساراً مغلقاً يحيط بنقطة الأصل. يمكن أن يكون هذا المسار على شكل مثلث متساوى الأضلاع. كان من الممكن أخذ المسار $(1, i, -1, -i, 1)$ – ولكنه أقل جدوى. بالنسبة للدالة اللوغاريتيمة إجراء هذا المسار يضيف للدالة قيمة ثابتة $2\pi 1$ – ولكن للدوال الأخرى يحتاج الأمر إلى جهد أكبر لفهم وتحليل ما يحدث للدالة.

ليست المتسلسلات الأسية الاختيار الوحيد لكل هذا العمل – هناك أيضاً متسلسلة ديريخليه (Dirichlet) – من أهمها ما يسمى دالة زيتا (أويلر – ريمان) والتى تعرف كالتالى:

$$\zeta = 1^{-z} + 2^{-z} + 3^{-z} + 4^{-z} + 5^{-z} + \ldots$$

والتى تتقارب إلى دالة تعرف بدالة زيتا (ζ) وهى دالة تامة الشكل. مد تحليلية هذه الدالة يجعلها ذات قيمة واحدة (single valued) على كل المستوى المركب عدا النقطة $z = 1$ فهى تحذف. ربما كان من أهم المسائل الرياضية التى لم تحل حتى الآن هو «فرضية ريمان» الخاصة بأصفار (جذور) هذه الدالة. من السهل إيضاح أن هذه الدالة صفرية للقيم التالية $z = -2, -4, -6 \ldots$ وهذه كلها أصفار

حقيقية. يقطع ريمان بأن كل الأصفار المتبقية تقع على الخط $Re(z) = \frac{1}{2}$ ما لم تكن z عدداً زوجياً سالباً. رغم تحقق كل الحسابات العددية إلا أنه لم تثبت صحة هذا القطع من جانب ريمان ببرهان رياضى هذه الدالة مهمة فى نظرية الأعداد الأولية (prime numbers).