الباب الثالث

الشواش الناتج عن الانتظام

إن الشواش الذى نتحدث عنه الآن يختلف عن الشواش الذى كان القدماء يظنونه، وغير الذى نستخدمه فى حياتنا اليومية، ذلك النوع من الشواش عشوائى تماما وغير قابل للتنبؤ، لكن نوع الشواش الذى نتحدث عنه هنا هو محدد تماما (determinstic) ومنتظم بحيث تعتمد كل خطوة على سابقتها، وعبارة عن سلسلة متصلة من الأسباب والأحداث، وبالتالى يمكن التنبؤ بالنتائج على الأقل من ناحية المبدأ. سوف نعطى مثالا واقعيا وبسيطا وهو الانسياب الدوامى (الانسياب الاضطربى) (turbulence) حيث يتغير شكل الانسياب مع زيادة السرعة.

لنتصور نموذجا بسيطا، عبارة عن نهر ينساب به الماء. عندما توجد صخرة تبرز قمتها على سطح الماء نجد أن الماء ينساب حول هذه الصخرة فى تيارين منفصلين يتحدان مرة أخرى بعد الصخرة، وعندما تزداد سرعة الانسياب فإنه يمكن تمييز ثلاث مراحل: بازدياد السرعة تتكون دوامات خلف الصخرة وتظل فى مكانها بحيث إذا كان بالتيار قطع خشبية صغيرة فإنها سوف تدور وتدور لوقت طويل فى مكان الدوامات – هذا شيء قريب من «جاذب لورنتس» فى الفراغ الطورى، فى المرحلة الثانية عندما تزداد سرعة التيار أكثر ، تتكون الدوامات ولكنها لا تبقى فى مكانها وتتحرك مع التيار وتتكون غيرها بعد الصخرة وهكذا.

عند ازدياد الانسياب تصغر الدوامات وتتكون وتختفى وبسرعة، مما يجعل سطح الماء مضطربا باضطرابات غير منتظمة، ولكن إذا إزدادت السرعة أكثر وأكثر تختفى سمة الانتظام على الانسياب ويصبح شواشيا تماما.

وهكذا يمكن أن نشير إلى سمتين هامتين فى طريق التحول من الانتظام إلى الشواش، والتى يوضحها الانسياب الدوامى (turbulence) . إن هناك شيئا ما يتغير – وإن كان ذلك يبدو بديهيا لكن هذه مسألة مركزية بالنسبة للأمر كله. إن نظاما ما يمكن وصفه بطريقة بسيطة فى بعض الأحوال، يصبح معقدا جدا فى أحوال أخرى – فى هذ الحالة تكون الدوامات. شيء واحد يتغير وهو سرعة الانسياب، عند ازدياد هذا المتغير إلى قيمة حرجة، فهذا كافى لظهور الشواش – بمراقبة كيفية تفتت الدوامات خلف الصخرة خلال المرحلة الانتقالية بين الانتظام والشواش نجد أن شيئا ما طريفا يحدث. يحتاج هذا الاكتشاف إلى تركيز ذهنى عال دون أجهزة معقدة. لقد شد ليوناردو دافينشى الانتباه إلى هذا منذ خمسمائة عام. لقد قال إن الدوامات

التى تنفصل عن الصخرة لا تختفى ولكنها تتكسر بداخلها إلى دوامات أصغر والتى تتكسر بدورها إلى دوامات أصغر وأصغر، أى دوامات داخل دوامات، داخل دوامات أى أنها عملية تشعب (Bifurcation) .

هناك مثل آخر هو سقوط قطرات من الماء من فوهة صنبور إذا كان الصنبور مغلقا وفتح قليلا جداً سوف تشاهد قطرات الماء تتساقط من فوهة الصنبور والتى يمكن تمييز صوت اصطدامها بالحوض على شكل دقات متتالية (drip - drip) . فى هذه الحالة يقال إن زمن دورة النظام هو الوحدة (1) ، وإذا فتح الصنبور أكثر بقليل يتحول الصوت إلى دقتين (... rat - tat, rat - tat) ويقال فى هذه الحالة إن للنظام زمن دورة (2) ، ثم إذا فتحنا الصنبور أكثر قليلا سوف تحدث أشياء ظريفة ثم تتشوه تماما. بعد ذلك يمكن سماع أصوات ذات دورة رباعية أى - rat - a - tat) rat - a - tat - tat) وهكذا هذه الحالة يمكن تمييزها فى المختبر، حيث يمكن التحكم فى فتح الصنبور بدقة عالية – (لقد حاولت ذلك فى البيت وسمعت فعلا مثل هذه الدورة الرباعية ولكنى لست متأكدا أننى سمعتها لأنى أقنعت نفسى بأنها تحدث هكذا بالفعل). تسمى هذه العملية «مضاعفة الدورة» أى تزيد الدورة فى كل مرة إلى الضعف، ولكن لا يمكن أن يستمر كل هذا إلا مالا نهاية – بعد قليل ينتقل النظام إلى حالة الشواش ويصبح الصوت غير منتظم. إذا ازدادت فتحة الصنبور يسيل الماء على شكل انسياب منتظم ، وإذا زدنا الفتحة يتحول إلى الانسياب الدوّامى (turbulent) .

يمكن أن نعطى مثالا آخر من فرع مختلف من العلوم لنوضح كيف أن الشواش ظاهرة منتشرة فى كل أفرع العلم، لنفرض أن حشرة يموت كل الجيل كامل النمو فى الشتاء بعد أن يضع البيض الذى يفقس ليعطى جيلا جديدا فى الربيع التالى، لنبدأ بجيل يحوى العدد x من الحشرات، إن عدد الحشرات فى الجيل الجديد يعتمد على عدد البيض الذى يفقس (معدل الولادة) والذى يعتمد على عدد البيض الذى تم وضعه، وهكذا فى المتوسط إذا وضعت حشرة عدد (B) من البيض، سوف يكون عدد المواليد (BX) – بالطبع يستثنى من هذا تلك الحشرات التى ماتت نتيجة نقص الغذاء أو غير ذلك من العوامل وبالتالى لا تضع بيضا، يعتمد معدل الموت هذا على العدد الأصلى للحشرات وكلما زاد العدد يصبح من الصعب أن تجد كل الحشرات غذاء كافيا. يمكن أن نضع حدا أقصى لعدد الحشرات بأن نحسب عدد حشرات المن (aphid) فى شجرة ورد واحدة (rosebush) ونقسم عدد الحشرات الكلى على هذا العدد بحيث يقع العدد (x) بين الصفر والواحد. تسمى هذه العملية بعملية الأسواء – (renormalization) – ولكى نأخذ فى الاعتبار

معدل الوفيات المبكرة، نضرب العدد (BX) بمعامل هو (1−x) إذا كان عدد الحشرات فى البداية (population) قريبا من الصفر وليس بالضرورة صفرا، فإن كل حشرة سوف تحيا وتجد غذاء كافيا، وهكذا يكون معدل النمو هو BX ، ولكن إذا كان عدد الحشرات فى البداية كبيرا جدا تكون (x) قريبة من الوحدة و(1−x) قريبة من الصفر وتموت معظم الحشرات من الجوع أو تقع فريسة لأعدائها . بين هاتين الحالتين، يزيد عدد الحشرات أو ينقص من جيل للذى يليه. يعتمد ذلك على معدل المواليد (B) ، ويمكن أن نرى كيف سيتغير عدد الحشرات لقيم مختلفة لمعدل المواليد (B) إذا أجرينا حسابات تكرارية (iteration) للتعبير الرياضى:

$$x\ (\text{next}) = BX\ (1 - x)$$

حيث X (next) تعبر عن الجيل التالى، إذا بسطنا الطرف الأيمن فى هذا التعبير سوف نجد أن:

$$x\ (\text{next}) = BX - BX^2$$

ونلاحظ العلاقة اللاخطية فى هذه المعادلة، وسميت بالمعادلة اللوجستية (Logistic equation) .

كما نلاحظ وجود تغذية خلفية (feedback) من خلال الإشارة السالبة فى العلاقة نفسها.

إذا كانت قيمة (B) أقل من الوحدة فلن يكون هناك أى تكاثر؛ حيث يترك كل فرد أقل من وريث وبالتالى يؤدى هذا إلى فناء النوع مهما كانت قيمة (X) . إذا كانت قيمة (B) أكبر من الوحدة نحصل على نتائج ذات أهمية. منذ الخمسينيات فى القرن العشرين وعلماء التوازن البيئى (Ecology) يفعلون ذلك بالضبط، ولكن نظرا للإمكانات الحاسوبية المحدودة المتاحة لهم، ركزوا جهودهم على العلاقات بين مجموعات الكائنات وكيف يؤثر بعضها على البعض، كذلك فعل علماء الهيدرو- دناميكا، حيث ركزوا على الحالات التى تتكون فيها الدوامات (خلف الصخرة فى النهر) ثم تختفى تلك الدوامات، ولم يتطرقوا لمشكلة الاضطراب (Turbulence) .

إذا كانت قيمة (B) بين الواحد والثلاثة- يتكون جاذب لهذه العلاقة – عندئذ مهما كانت قيمة X بين الصفر والوحدة، سوف يستقر عدد الأفراد بعد مدة معينة عند عدد ثابت. تزداد هذه القيمة قليلا بازدياد (B) ، وإذا كانت قيمة B قريبة من 3 ولكن أقل منها، تؤول فيه X إلى 0.66 ، أى قرب ثلثى العدد الابتدائى، ربما يبدأ بعدد كبير ثم ينخفض ثم يتذبذب حول هذه القيمة، أو يبدأ بعدد صغير ويكرر نفس السلوك. إذا بدأنا بقيمة كبيرة للعدد (X) فسوف يأخذ الاستقرار وقتا أطول

وهكذا، ولكن طالما كانت فيه B أقل من ثلاثة فسوف تؤول قيم X فى النهاية إلى قيمة الجاذب. **لكن إذا وصلت قيمة B إلى (٣) – يحدث شيء مختلف تماما**.

عندما تتجاوز قيمة B العدد (٣) بقليل تتغير الصورة تماما عند إجراء حسابات تكرارية بعدد كبير من الخطوات، يتنقل عدد «الأفراد» بين رقمين متباعدين جيلا بعد جيل. لقد تشعب الجاذب إلى جاذبين وتضاعف زمن الدورة من (1) إلى (2). يمكن فهم ذلك بأنه إذا بدأنا بعدد كبير فإن نسبة عالية من هذا العدد تموت نتيجة الجوع؛ إذ لا تجد ما يكفيها من الغذاء، وبالتالى فينقص عدد الجيل التالى، وبالتالى يجد ما يكفيه من الطعام ويتكاثر بشكل كبير ويزداد عدد الجيل التالى وهكذا. إذا رسمنا الأرقام التى نحصل عليها نجد أن الشكل الناتج قريب من شوكة رنانة وضعت على جانب من جنبيها – أى واضح شكل التشعب الثنائى (Bifurcation) .

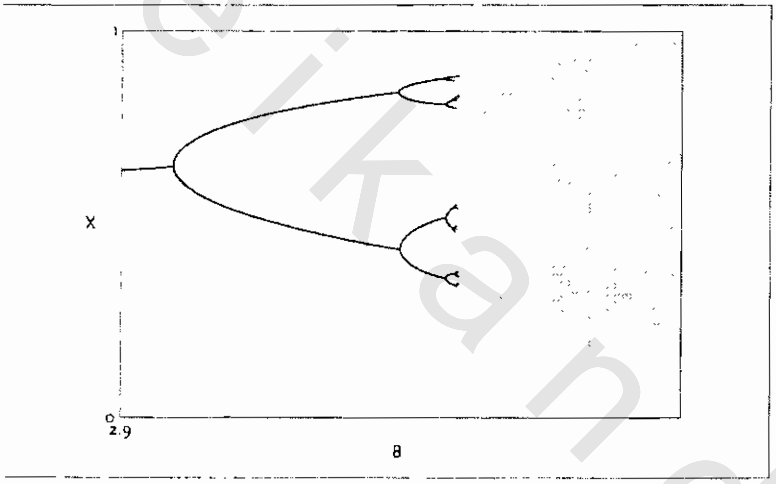
إن إجراء هذه الحسابات عملية مملة جدا، خاصة أنه بالقرب من B = 3 لابد من أخذ قيم متقاربة جدا لكل من X , B . كان روبرت ماى (Robert May) وهو من أصل أسترالى وبدأ فيزيائيا وتحول إلى علم التوازن البيئى (Ecology) ، وقد عمل فى جامعة برنستون فى سبعينيات القرن العشرين، كان ماى فى ذلك الوقت فى الثلاثينيات من عمره، وكان محظوظا فى تطبيق قوانين الرياضيات والفيزياء فى علوم الحياة، وأيضا فى استخدام الحاسبات فى ذلك الوقت ذات القدرة الكافية لإجراء كل هذه الحسابات فى وقت قصير نسبيا.

من المنطقى أن نرى ماذا يحدث عندما تتجاوز قيمة B العدد (3) . عندما تكون B = 3.4495 ينشط أحد فرعى الشوكة مرة أخرى إلى فرعين وتتذبذب النتائج بين أربع قيم مختلفة، أى زمن الدورة هو (٤) . عندما نأخذ B = 3.56 ، ينشطر كل من هذه الجاذبات مرة واحدة وهكذا. من الصعب على أى عالم فى علوم الحياة أن يستوعب معنى تذبذب عدد الأفراد بهذه الطريقة بين هذا العدد الهائل من القيم . من أعمال ماى أصبح واضحا أنه عندما تكون B = 3.56999 يصبح عدد الجاذبات لا نهائيا، أى أن أى دارس لتغيرات عدد الأفراد من جيل للذى يليه يرى بوضوح تام الشواش محددا وأصيلا (genuine) .

ولكن هناك الأكثر من هذا – بين كل القيم التى نحصل عليها عندما تكون B أكبر من 3.56999 نحصل على مناطق بها انتظام تام – أى كأنها نوافذ بين القيم الشواشة الملتبسة. عندما تكون B بين القيم 3.8 ، 3.9 نحصل على سلوك يناظر سلوك النظام عندما تكون B أقل من (3)، ولكن ما إن تزيد قيمة B قليلا عن 3.9 حتى تعود مرة أخرى للتشعب وتضاعف الدورة وهكذا. ورغم تناظر الأشكال إلا أنها تتم على مقياس رسم أصغر فأصغر، مثلها مثل العرائس الروسية(*) .

(*) العرائس الروسية هى عرائس مفرغة من الداخل متشابهة تماما وتتناقص فقط فى الحجم بحيث توضع كل فى الأخرى.

وهكذا نرى أنه فى وسط الشواش يوجد انتظام، وفى وسط الانتظام يوجد شواش. لقد انتبه ماى إلى أن النتائج التى حصل عليها لها انعكاسات خارج مجالى علوم الحياة والاتزان البيئى - ونشر هذه النتائج فى مجلة (Nature) فى عام ١٩٧٦. كان هذا الوقت بالضبط تتوافق فيه الأبحاث فى مجالات العلم المختلفة وظهور نظرية الشواش. وهكذا تبلور مفهوم الشواش وأخذ هذا الاسم الذى نسميه به الآن. عندما اكتشف إدوارد لورنتس الشواش فى ستينيات القرن العشرين كان يعمل فى مجال تنبؤات الطقس (علم الأرصاد) وكان البحث المنشور تحت عنوان "Deterministic Nonperiodic Flow" فى مجلة Journal of the Atmospheric Sciences فى عام ١٩٦٣م - هو نقطة الانطلاق لكل هذه الأعمال.



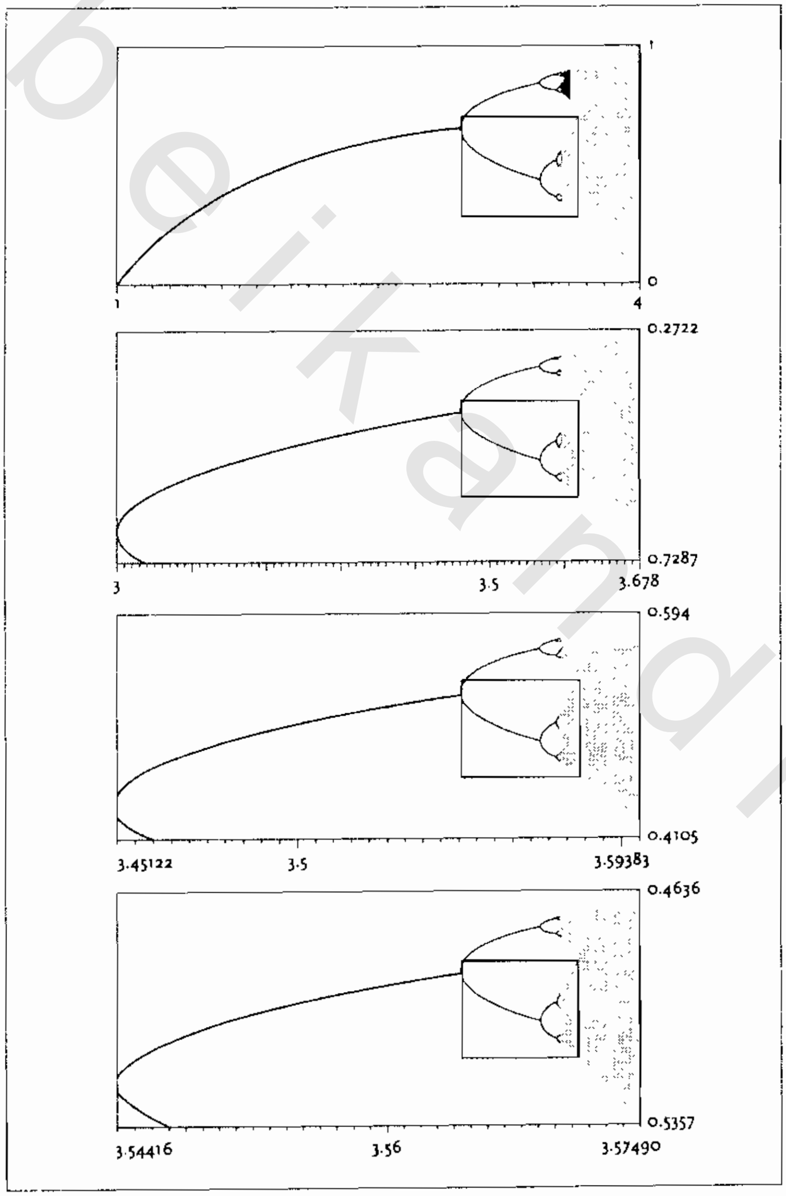
شكل (٣-١أ) أشكال فيجنباوم (Feigenbaum) والتى توضح تضاعف الدورة - الطريق إلى الشواش. تظهر الشرائح الرمادية المناطق الشواشية، والشرائح البيضاء تحوى مناطق استقرار - لاحظ أن كل هذا يمثل رسما تخطيطيا مبسطا جداً.

ولكن لا يقرأ الرياضياتيون ولا الفيزيائيون أو حتى البيولوجيون مجلات الأرصاد، والعكس صحيح. كان الكل يبحث عن الانتظام فى الشواش وليس كيف تحصل على الشواش من الانتظام.

بعد ذلك بعشر سنوات قام عالم الرياضيات جيمس يورك (المولود فى ١٩٤١م) والذى عمل فى معهد "Institute of Phyical Science and Technology" بجامعة ميريلاند "University of Maryland" - بمحاولة كسر الحواجز التى تفصل بين العلماء المشتغلين فى مجالات مختلفة، وقام أحد زملاء يورك وهو آلان فولر "Allan Fuller" فى قسم الأرصاد والذى قرأ عمل لورنتس بنسخ عدد من النسخ من بحث لورنتس ووزعها فى المعهد، واستوعب على الفور يورك أهمية التقنية الرياضية فى هذه المقالة، وأن هذا يمثل قاعدة لتطبيقات عديدة فى مجالات أخرى

obeikandl.com

من العلم وأساس لدراسة سلوك نظم فيزيائية حقيقية أخرى. لقد اعتاد علماء الرياضيات اللعب مع الأعداد وبنفس البرامج المشابهة لبرنامج لورنتس، ولكن لم يتنبه أحد قبل لورنتس للربط بين التمرين الرياضى والمسائل الفيزيائية الواقعية والحقيقية.

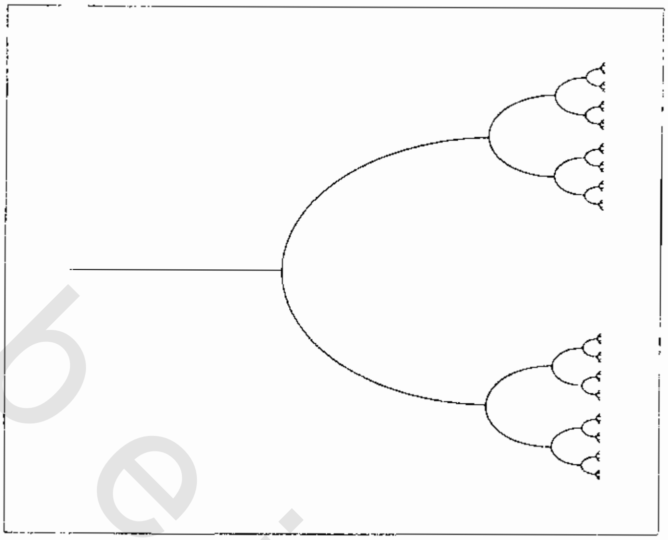


شكل (٣-١ب) السمة الأساسية لأشكال فيجنباوم أنها متشابهة. إذا تم تكبير أى جزء من الشكل بمقياس رسم مناسب، نحصل على شكل مناظر للشكل الأصلى.

كان يورك يعرف شخصا قام بهذا الربط. فى زيارة لحرم بيركلى Berkely جامعة كاليفورنيا "University of California" – ترك نسخة لستيفن سميل (Stephen Smale) والذى يعمل بالتوبولوجيا وحاز على جائزة نتيجة عمله فى مجال النظم الديناميكية. قام سميل بدوره بعمل نسخ من المقالة المذكورة ووزعها على أساتذة الرياضيات، لقد انكشف السر ولكن لم يتم سك اسم له – حدث هذا فى عام ١٩٧٥م عندما قام يورك ورفيقه تين ين لى "Tien Yen Li" بنشر مقالة بعنوان «الدورة (3) تعنى الشواش» "Period Three Implies Chaos" – تكمن فحوى المقالة فى أنه إذا وجد حل لنظام من المعادلات التفاضلية وهو حل وحيد بزمن دورة (٣) فإنه يوجد بالضرورة عدد لا نهائى من الحلول الدورية بأى زمن دورة ممكن، بالإضافة إلى عدد لا نهائى من الحلول غير الدورية. ليس هذا بالشواش الذى نعنيه الآن، ولكن حسب وصف لورنتس نفسه «إن هذا شواش محدود» نظرا لوجود هذا العدد من الحلول اللاشواشية الدورية. على الأرجح سوف تكون هذه المنظومة دورية، ولكن فى الحالة التى أسماها لورنتس «شواشى كامل» – سوف تقع المنظومة فى حالة شواشية (انظر شكلى ٣–١أ ، ٣–١ب) – تفوق المناطق الرمادية الشرائح البيضاء. مع هذا تعتبر مقالة يورك – تين ين لى القول الفصل فى ترسيخ مفهوم الشواش كما نعرفه فى الوقت الحاضر.

وهكذا فى النصف الثانى من السبعينيات فى القرن العشرين ظهرت كلمة تصف ما توصل إليه ماى فى أبحاثه، رغم أن العلاقة التى توصل إليها لا تصف بدقة سلوك منظومة بيولوجية بسيطة لنوع واحد من الكائنات الحية. بعد سنوات قليلة من «اختراق» ماى – أوضح ميشيل فيجنباوم "Mitchell Feigenbaum" فى معمل لوسى ألاموس الوطنى فى نيومكسيكو "Los Alamos National Labara-tory in New Mexico" – أن عمل ماى ذو تأثير كبير فى مجالات أخرى من العلوم وأوضح فيجنباوم أن تضاعف الدورة المؤدى إلى الشواش ليس سمة مرتبطة بالمعادلة اللوجستية فقط، وإنما هى أوسع من ذلك بكثير هى فى الواقع نتيجة التغذية الخلفية للمنظومة،سواء كانت هذه المنظومة هى قطيع من الحيوانات، أو دائرة كهربائية أو تفاعل كيميائى متذبذب، أو حتى دورة اقتصادية فى اقتصاد ما، فالمهم أن تراجع المنظومة نفسها. إذا تحقق هذا يكون هذا هو الطريق للشواش – وليس «تقريبا» ولكن «بالضبط». تمعن فيجنباوم فى الفترة التى تمر بين كل تضعف لزمن الدورة ووجد أن هذه الفترات تقصر كلما ازدادت فيه B فى الطريق إلى الشواش حسبما وجد ماى، ووجد فيجنباوم أن هذه النسبة ثابتة وتساوى 4.699 : 1 بصرف النظر ما إذا كنا نقارن الخطوة الأولى بالثانية، أو الثانية بالثالثة، أو الخطوة المائة بالتى تليها. وهكذا تم تسمية العدد 4.699 باسم عدد فيجنباوم(*) .

(*) عدد فيجنباوم مثله مثل العدد π غير كسرى ويكتب كالآتى: ..4.669206090.



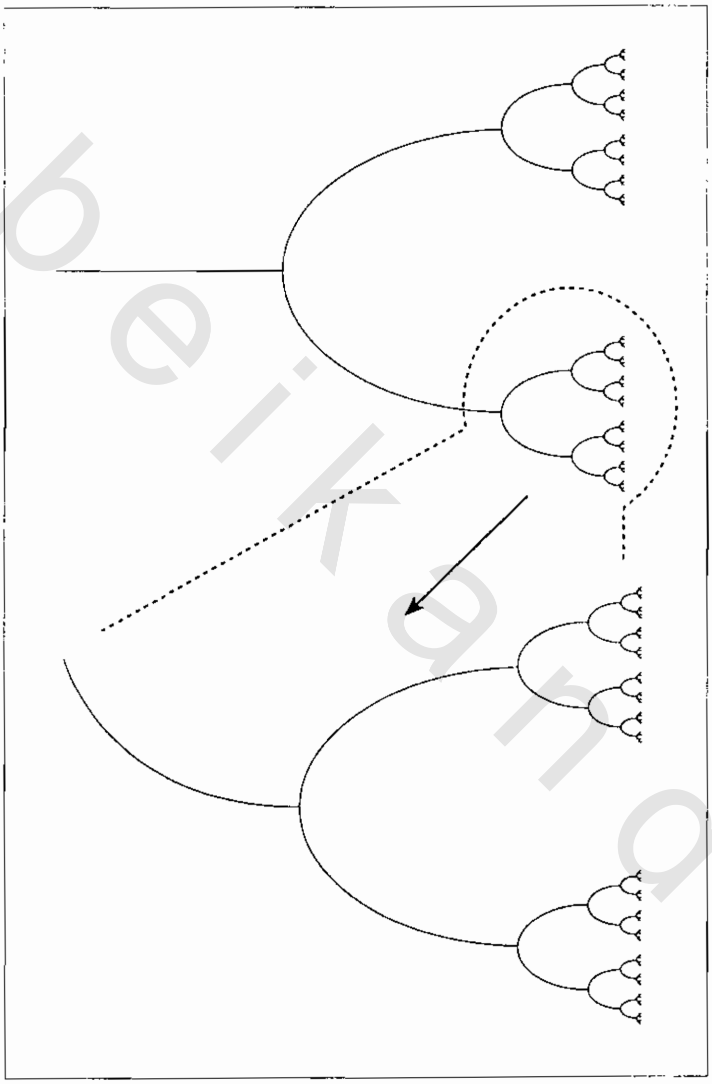
شكل (٣-٢أ) شكل مبسط للتشعب الوارد فى شكل فيجنباوم.

هناك أمثلة أخرى عديدة مفيدة توضح كيفية التحول من البساطة إلى الشواش. بالعودة إلى ظهور الانسياب الدوامى (turbulence) نجد أن التشعب يؤدى إلى ظهور عدد هائل من الدورات الدورية تضاف إحداها للأخرى (قام الفيزيائى الروسى ليف لانداو بإجراء هذا فى أربعينيات القرن العشرين). إن الدوامة البسيطة هى أنشوطة (Loop) حول جاذب بسيط (simple attractor) – أو الدورة الحدية (limit cycle) فى الخطوة التالية لنتصور نقطة فى الفراغ الطورى تدور على دائرة وبدوره يدور مركز هذه الدائرة على محيط دائرة، أكبر، فتكون النتيجة شكل طارة (torus) مثل الأنبوب الداخلى لعجلة الدراجة، أو طوق النجاة.

يكون المسار فى هذه الحالة مثل زنبرك أو كاللعبة المسماة (Slinky) طويت فى دائرة بشكل منتظم ومتوقع. من الناحية النمطية، إذا تفاعلت حركتان دوريتان فى الفراغ الطورى فإنهما ينغلقان داخل نظام ذى نبض متكرر. من الناحية الرياضية، يمكن وبشكل مباشر وصف السلوك التى يزداد تعقده فى الطريق إلى الاضطراب "turbulence" – عن طريق طارات (tori) ذوى أبعاد أعلى. إن الدورة الحدية هى جاذب ذو بعد واحد فى فراغ ذى بعدين، بحيث يكون سطح الطارة هو عبارة عن جاذب ذى بعدين فى فراغ طورى ذى ثلاثة أبعاد وهكذا.

ولكن الواقع لا يسلك مثل هذا السلوك – إن الاضطراب (turbulence) يحدث فى الخطوة التالية، حيث تتحول النقطة الممثلة لحالة النظام على سطح الطارة بشكل غير منتظم ولا تعود لأى وضع معين مرتين (لو فعلت ذلك أصبح النظام دوريا يكرر نفسه). بنفس الطريقة يكون سلوك مسألة «ثلاثة أجسام محدودة» التى ناقشناها سابقا. أسمى العالمان البلجيكى ديفيد رويل (David Ruelle) وزميله الهولندى

فلوريس تاكنس (Floris Takens) هذه الحالة بالجاذب الغريب (Strange Attractor) فى مقالة نشراها عام ١٩٧١م.



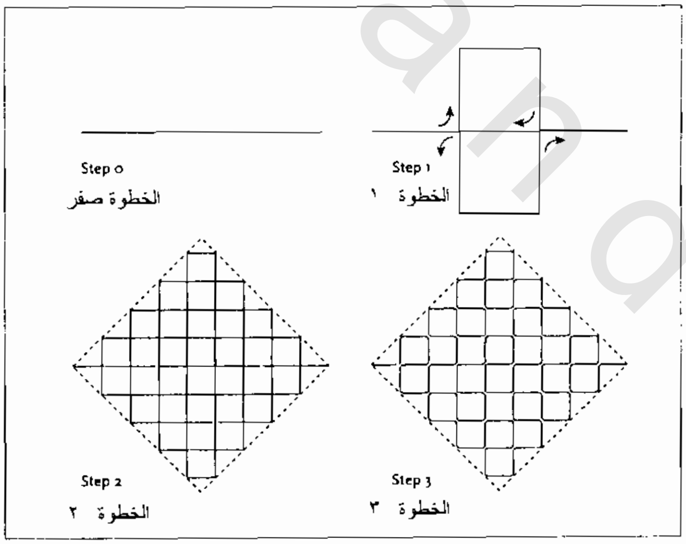
شكل (٣-٢ب) يوضح هذا الشكل فكرة التشابه الذاتى.

هنا بدأ إدخال مفهوم ما يسمى بالكسريات (Fractals) كما هو الحال بالنسبة للشواشى، وتلقت هذا الاسم فى عام ١٩٧٥م، وإن كانت تتردد فى العلم منذ مدة طويلة ودون الإحساس بقيمتها العالية.

إن ما نسميه الآن «بالكسريات» ظهرت لدهشة علماء الرياضيات أو حتى رعبهم قرب نهاية القرن التاسع عشر، فى ذلك الوقت كانت تعتبر انحرافات (Aberration) أو حتى أشكال وحشية مخيفة، حيث إنها لا تتوافق مع مجريات الأمور العادية فى الرياضيات.

obeikandl.com

فى عام ١٨٩٠م نشر عالم اسمه جوزيبى پيانو (Geuseppe Peano) بحثا عن كيفية رسم منحنى ليملأ صفحة كاملة، كما يبدو لغير علماء الرياضيات ليس فى ذلك شيء مخيف أو مرعب، إذا فكرت فى ذلك نجد أن أى منحنى ذى بعدين له طول وعرض ولكن المنحنى فى بعد واحد له طول ولكن ليس له عرض . بيّن پيانو أنه يمكن رسم مثل هذا المنحنى بحيث يتلوّى وينحنى دون أن يتقاطع مع نفسه، مع أنه يمر بكل نقاط المستوى. هكذا نرى أن منحنى أحادى البعد يملأ مستوى ثنائى البعد! كيف يكون هذا؟ لذا نقول بأن مستوى ثنائى البعد إذا كانت كل قطعة يمكن وضعها على منحنى أحادى البعد. أكثر من هذا ! إذا كان المستوى هو عبارة عن مربع فإن منحنى پيانو سوف يقتفى أثر مربعات أصغر مثل البلاطات، وداخل هذه المربعات الصغيرة سوف يقتفى أثر مربعات أصغر وهكذا... إن منحنى پيانو ذو طول لا نهائى ولكنه محتوى فى مربع مساحته محددة. هناك تناظر بين الاضطراب (turbulence) حيث تتجول نقطة على الطارة فى الفراغ الطورى إلى مالا نهاية – ولكن لم يكن كل ذلك معروفا فى التسعينيات من القرن التاسع عشر.

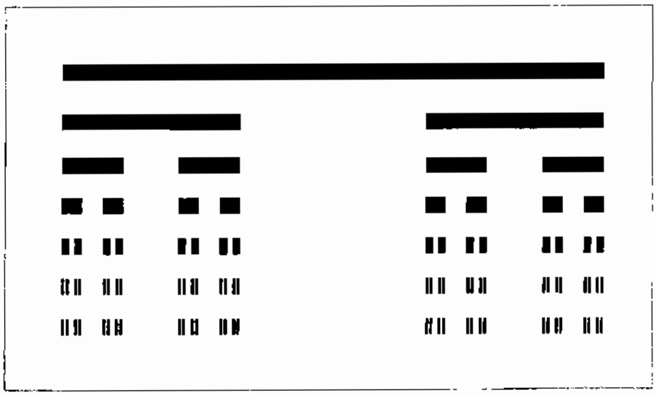


شكل (٣-٣) منحنى پيانو – خط يظن أنه مستوى، ينبغى أن ننظر إلى كل مربع فى الشكل على أنه ممتلئ، وكل مربع أصغر ممتلئ وهكذا إلى مالا نهاية.

فى السبعينيات من القرن العشرين قام بنوا ماندلبروت "Benoit Mandelbrot" الذى عمل فى شركة "IBM" فى مركز توماس ج. واتسون "Thomas J. Watson Research Center" فى يورك تاون هايتس (Yorktown Heights) لتطوير اللغة اللازمة لصياغة هذه الرؤى. ولد ماندلبروت فى وارسو ١٩٢٤م وكانت دراسته

فى الكهرباء، وهذا ما ساعده على أن يكون مؤسسا لفرع جديد من العلم. نزحت أسرته إلى فرنسا فى عام ١٩٣٦م حيث درس «بنوا» العلوم فى عام ١٩٤٤م. بعد تحرير فرنسا تنقل ماندلبروت بين أمريكا وفرنسا ثم استقر فى الولايات المتحدة فى عام ١٩٥٨م. توصل ماندلبروت إلى أن منحنى بيانو يمكن أن يحمل أُساً كسريا بين الواحد والاثنين. إن منحنى «بيانو» مازال منحنى فى بعد واحد، والمستوى مازال شكلا ذا بعدين، كان لابد من إدخال مفهوم الأس الكسرى مثلما يوجد عدد لانهائى من الأعداد اللاكسرية بين الأعداد الكسرية، يقول ماندلبروت «لقد سككت كلمة كسريات (Fractals) فى عام ١٩٧٥م من اللغة اللاتينية (fractus) والتى تعنى حجرا مكسورا وغير منتظم.

هناك ثلاث كسريات أخرى معروفة منذ عشرات السنين قبل ١٩٧٥م كان يُنظر لها على أنها أشياء متوحشة ولكنها جديرة بالدراسة. أول هذه الكسريات والتى كانت أول ما اكتُشفت هى «زمرة كانتور» والتى اكتشفها فى عام ١٨٨٣م. إن منحنى بيانو هو خط يريد أن يكون مستوى أما زمرة كانتور فهى خط أقل من خط. إذا أخذنا خطا ذا طول معين وقسمناه إلى ثلاثة أجزاء متساوية ومسحنا ثلث الخط الذى يقع فى المنتصف دون مسح النقطتين الداخلتين، حصلنا على خطين منفصلين - نكرر نفس الخطوة مع كل من الجزئين الباقيين وهكذا وهكذا. فى النهاية نحصل على زمرة من النقاط المنفصلة، كما يمثل «خيال الخط» كالابتسامة على وجه القطة فى قصة «أليس فى بلد العجائب»، من واضح الآن أن سمات زمرة كانتور متطابقة مع خواص الشواش حيث أن الأشكال متماثلة وبها تغذية خلفية.

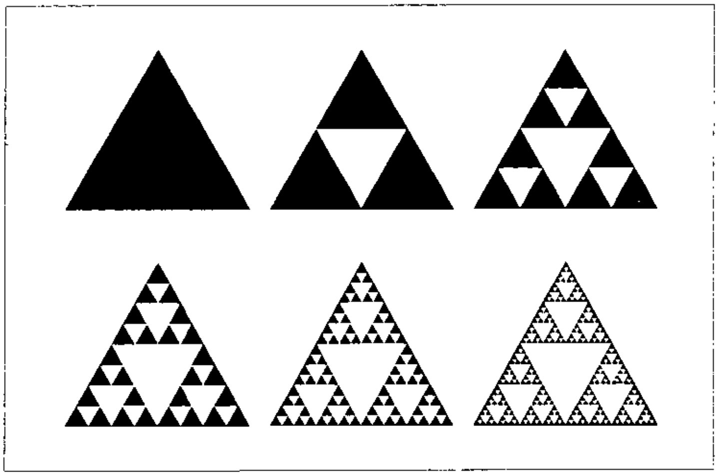


شكل (٣-٤) زمرة كانتور(*). عند مسح الثلث المتوسط من كل خط، تنتهى إلى غبار من النقاط مجموع أطوالها هو الصفر.

(*) لقد اكتشف عالم الرياضيات هنرى سميث (١٨٢٦ - ١٨٨٣م) هذه الزمرة فى عام ١٨٧٥م ولكن لم يكن كانتور على علم بذلك وهكذا تحمل هذه الزمرة اسم كانتور.

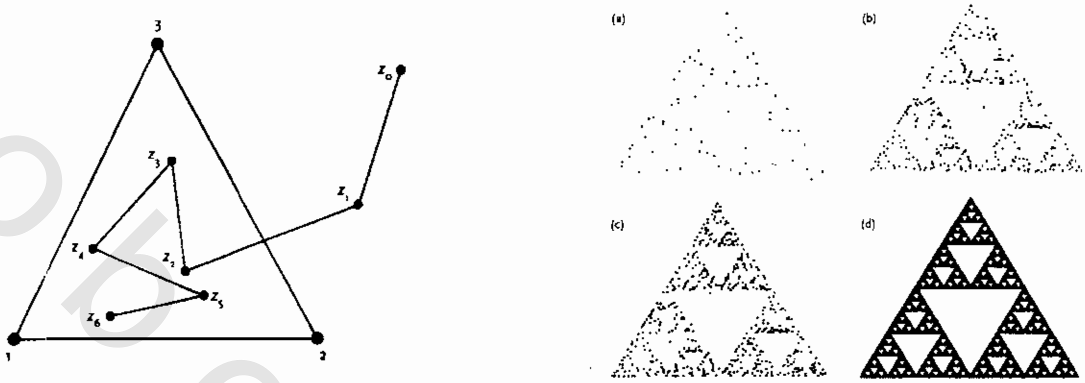
تكمن أهمية هذه الزمرة فى أنها كانت الدافع وراء عمل ماندلبروت الذى جلب له الشهرة. لقد كان ماندلبروت شخصا متعدد الاهتمامات من ترتيب الكلمات فى نص ما، إلى الظواهر التى تتغير مع الوقت والمكان وغيرها، ولكنه عندما أصبح يعمل كباحث فى شركة (IBM) ركز جهوده فى حل مشكلة حيوية خاصة بالضوضاء التى تحدث عند نقل المعلومات بين نظم الحاسبات فى وقت استخدام النظم النمذجية (Analog Systems) قبل التوصل إلى التقنيات الرقمية. كان يعترى المعلومات التى تنقل عبر الشبكات دفقات (bursts) من الضوضاء تشوه المعلومات عند نقلها. توصل ماندلبروت إلى حقيقة أنه إذا كان السبب فيزيائيا كسقوط فرع شجرة فوق الأسلاك تكون الضوضاء عشوائية حقا ولابد من إصلاح الخط برفع فرع الشجرة، أما إذا كانت الضوضاء متكررة وبشكل قريب من زمرة كانتور فلابد من إعادة إرسال المقاطع المشوهة لأن هذا من طبيعة نظام الاتصالات والشبكات ولا داعى لإضاعة الوقت والجهد والمال فى التخلص من هذه الضوضاء لأنها ملازمة للنظام ذاته. أثبت ماندلبروت أن الشواش والكسريات هما السبب فى كل هذا حتى قبل أن يتم سك هذين المسميين.

يمكن ملاحظة الصلة بين العمليات العشوائية، الشواش والكسريات فى شىء رياضى آخر «متوحش» من القرن العشرين – أشكال سيريينسكى (Sierpinski – Gaskets) وهو عالم رياضيات بولندى واسمه فاسلاف سيريينسكى (١٨٨٢ – ١٩٦٩م) وذلك فى عام ١٩١٦م. لرسم أشكال سيريينسكى لنأخذ مثلثا متساوى الأضلاع ونوصل نقاط منتصف كل ضلع وتوصل هذه النقاط، نحصل على مثلث أصغر، ثم نكرر هذا العمل مرات ومرات، نحصل على أشكال سيريينسكى. كما هو مبين فى شكل ٣–٥ .



شكل ٣–٥) أشكال سيريينسكى.

نلاحظ أن أشكال سيربينسكى متماثلة ذاتيا وهى كسرية أيضا ببعد بين 1 و 2 . سوف نشرح حالا كيفية حساب الأس الكسرى.



(ب) (أ)

شكل (٣-٦) رسم أشكال سيربينسكى باستخدام زهر النرد.

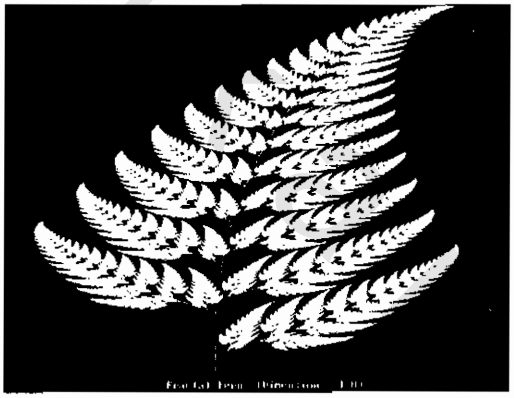
حيث إن زهر النرد مكعب ذو ستة أوجه فإننا نخفض المتغيرات إلى ثلاثة بأن نعتبر الوجه الذى يحمل العدد ١ مكافئا للوجه الذى يحمل العدد ٤ ، و ٢ يكافئ ٥ ، و ٣ يكافئ ٦ . نأخذ ورقة ونرسم عليها مثلثا متساوى الأضلاع، ونرقم رءوسه بالأعداد ١ ، ٢ ، ٣ كما هو مبين فى شكل ٣ - ٦أ ، ونبدأ بأى نقطة على الورقة ونقيس المسافة بين هذه النقطة ورأس المثلث رقم (١) ثم ننصّف هذه المسافة ونحدد هذه النقطة، لتكن (أ)، ثم نقيس المسافة بين النقطة (أ) ورأس المثلث (٢) وننصفها ونحدد نقطة المنتصف بالنقطة (ب)، ونكرر هذه العملية مرات ومرات، سوف نحصل فى النهاية على شكل سيربينسكى كما هو مبين فى شكل ٣ - ٦ ب

حيث إننا بدأنا من خارج شكل سيربينسكى فإننا نرى أن الشكل يمثل جاذبا لهذه العملية (جاذب غريب) بلغة رويل وتاكينز (Ruelle and Takens) . هذه اللعبة هى حالة بسيطة مما يسمى «بلعب العشوائية» والتى تعطى أشكالا بنفس القواعد البسيطة التى ذكرناها، ولكن هناك تحذيران: أولها: أن يلزم صبر فائق حتى نحصل على شكل مشابه لشكل سيربينسكى بعد مئات من الخطوات، التحذير الثانى: لا تستخدم الحاسب إلا إذا كنت مبرمجا محترفا حتى نطمئن لعشوائية الأعداد التى تستخدمها؛ لأن مولدات الأعداد العشوائية فى الحاسبات ليست عشوائية حقيقة.

جانب هام آخر وهو أنه عند إجراء تجارب عشوائية ورسم الأشكال الناتجة نحصل أحيانا على أشكال قريبة جدا من صور الكائنات الحية مثل السرخسيات والأشجار (شكل ٣-٧ معظم هذه الأمثلة يمكن الاطلاع عليها فى كتب: الشواش والكسريات "Chaos and Fractals" لمؤلفيه هاينز- أوتو بيتجن، هارتمرت يورجنز وديتمار ساوبى (Heinz-Otto Peitgen, Hartmut - Jurgens, and Dietmar Saupe) . لا ندعى بهذا أن الكائنات الحية تنمو بهذه الطريقة، ولكن يمكن

obeikandl.com

أن نقول إن النظم التى تبدو معقدة يمكن الحصول عليها بواسطة تطبيق وبشكل متكرر لقواعد بسيطة، إن المعلومات المحفوظة فى الدنا (DNA) فى كل خلية رغم ضخامتها، من الصعب تصور أنها تحوى كل المعلومات والخطوات اللازمة لنمو هذا الكائن منذ أن يكون جنينا إلى أن يكون كائنا كاملا. ولكن يمكن تصور أن هذا الدنا يحوى مجموعة بسيطة من القواعد التى تنمو حسبها الخلايا، حتى تصل إلى كونها كائنا كاملا. يمكن أيضاً أن نقول إن قواعد أعقد قليلا من هذه يمكن أن تؤدى إلى أشكال معقدة مثل أشكال السرخسيات، ولكن لابد أن يكون لهذه القواعد جاذب نحو هذه الأشكال وبالتالى تتكون الأشكال المشابهة للسرخيات وهكذا. لذا يمكن أن نقول إن زهر النرد لا يمكن أن يكون مبرمجا لكى يعطى أشكال سيرينسكى . إنها العشوائية ثم قواعد بسيطة تستخدم بشكل تكرارى – هذه هى العوامل التى تشكل عالمنا المعقد كما نراه.

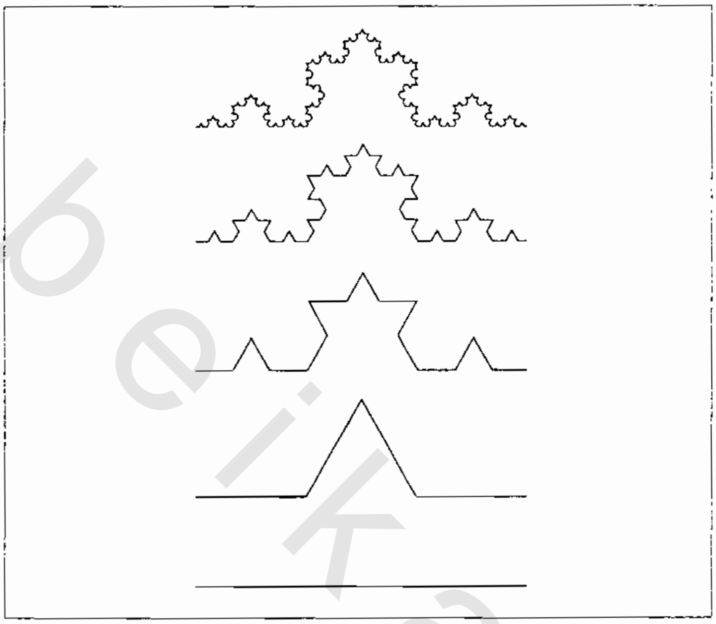


شكل (٣-٧) يمكن أن تعطى اللعبة العشوائية مع بعض التغييرات أشكالا شبيهة بأوراق السرخسيات.

هناك بعض الأمور المتعلقة بالكسريات والجاذبات وهى كيف يمكن قياس بعد الكسريات. يقودنا هذا إلى عرض أشكال أخرى متوحشة تسمى منحنى كوخ (Koch curve) – لقد ساعد هذا المنحنى أيضا ماندلبروت على دراسة الكسريات فى الستينيات من القرن العشرين. من الطريف أيضا أن نذكر أن كوخ قد قابل لويس فراى رتشاردسون. أهم سمة لمنحنى كوخ أنه لا يمكن رسم مماس له عند أى نقطة من نقطة؛ لأنه مكون وبشكل كامل من أركان (corners) .

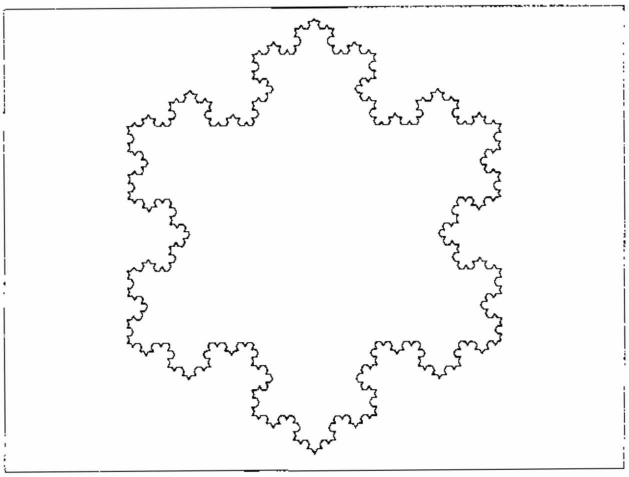
كوخ وهو عالم رياضيات سويدى واسمه هلجيه فون كوخ (Helge von Koch) (١٨٧٠ – ١٩٢٤م) توصل إلى هذا المنحنى الذى يحمل اسمه فى عام ١٩٠٤م . لنرى كيف يمكن رسم هذا المنحنى: لنبدأ بخط مستقيم، ونقسمه إلى ثلاثة أجزاء متساوية، لنرسم على الثلث المتوسط من الخط مثلثا متساوى الأضلاع،

بعدئذ نمسح الثلث المتوسط من الخط، ونكرر نفس الخطوة على كل أجزاء الخط وضلعى المثلث كما فى شكل ٣-٨ .



شكل (٣-٨) منحنى كوخ - إن شاطيء الجزر البريطانية أو النرويج يحمل السمات الكسرية مثل هذا المنحنى.

إذا أجرينا الخطوات السابقة علـى أضلاع مثلث متساوى الأضلاع، نحصل على نجمة داود كما فـى شكل ٣-٩ ، أو كما فـى نثرة الثلـج لكوخ (Koch snowflake) .



شكل ٣-٩) منحنى كوخ على شكل نثرة ثلج.

obeikandl.com

ولكن إذا كررنا هذه الخطوات التكرارية نحصل على ما يسمى بجزيرة كوخ.

ولكن هل جزيرة كوخ هى جزيرة فعلا أم أن هذا مجرد تشابه؟ هذا السؤال هو الذى أثار ماندلبروت لكى يدرس الكسريات(*) . يضاف إلى ذلك أن ماندلبروت قرأ مقالة غير مشهورة لرتشاردسون عن استغرابه عندما قرأ كيف تم قياس طول الحدود بين أسبانيا والبرتغال، وبين بلچيكا وهولندا، فقد لاحظ رتشاردسون اختلاف طول هذه الحدود بمقدار ٢٠٪ عن القيمة الواردة فى المصادر المختلفة. عندما يقاس طول هذه الحدود بواسطة أجهزة المساحة المعتادة، حيث تستخدم نقاط على بعد ١٠٠م بين كل نقطة وأخرى. ولكن يمكن أن يكون هناك عوائق طبيعية، ولكن ليس هذا مهماً الآن. بهذه الطريقة يمكن أن نحصل على رقم ما لطول هذه الحدود. إذا استخدمنا طريقة أخرى كأن يتحرك شخص مستخدما عدد الخطوط مع التزامه بالسير مع المنحنيات وصعود التلال والهبوط فى الوديان - عندئذ نحصل على رقم أكبر لطول هذه الحدود، وهكذا كما نرى، فكلما استخدمنا وحدة أصغر فى قياس طول الحدود حتى نصل إلى مستوى الذرات، فسوف نحصل فى كل مرة على رقم أكبر لطول هذه الحدود نفسها.

لقد توسع ماندلبروت فى هذا الموضوع ونشر مقالة بعنوان «ما هو طول شاطئ بريطانيا» فى مجلة العلم (Science) فى عام ١٩٦٧م. ميزة هذه الحدود أنها طبيعية تماما لأن الحدود بين الدول صنعها الانسان وحاول أن تتكون من خطوط مستقيمة، مثل الحدود بين الولايات فى الولايات المتحدة الأمريكية. الخلاصة التى توصل إليها ماندلبروت أن طول شاطئ بريطانيا يؤول إلى مالا نهاية. خلُص ماندلبروت أيضا إلى أن المنحنى الممثل لشاطئ بريطانيا هو منحنى بعده كسرى يقع بين العددين ١ ، ٢.

لنستعرض الآن كيفية تحديد الأس الكسرى لمنحنى أو شكل هندسى ما: إذا قسمنا خطا مستقيما إلى ثلاثة أجزاء وأخذنا مقياس رسم مساويا للعدد ٣، وطبقناه على ثلث الخط سوف نحصل على خط مستقيم جديد مطابق للخط المستقيم الأصلى. نرى من هنا أن التصغير بمعامل ٣ ، ثم أخذ مقياس رسم أيضا (٣) - وهكذا نحصل على ($3^1 = 3$) . لنأخذ مربعا ونقسم كل ضلع إلى ثلاثة أجزاء فنحصل على تسعة مربعات أصغر، وهكذا لابد أن نأخذ تُسع المربع الأصلى ومقياس رسم مساويا للعدد (3) بالنسبة لكل ضلع حتى نحصل على الشكل الأصلى - وهكذا نرى أن ($3^2 = 9$) أى أن المربع هو شكل هندسى بُعده (٢). إذا أخذنا

(*) كما ورد فى كتاب «الشواش» "Chaos" لمؤلفه جيمس جلايك "James Gleick" .

مكعباً وقسمنا كل ضلع إلى ثلاثة أجزاء متساوية نحصل على ٢٧ مكعبا صغيرا. وهكذا ترى أن المكعب شكلٌ بُعده 3 حيث أن $(27 = 3^3)$.

بالنسبة لمنحنى كوخ - فلابد أن نقسم الخط المستقيم إلى أربعة أجزاء ونستخدم مقياس رسم مساويا للعدد (3) ، إذن يكون بعد منحنى كوخ كالآتى:

من المعادلة البسيطة $(3n = 4)$ نجد أن قيمة $n = 1.2619$. وهكذا نرى أن منحنى كوخ هو شكل هندسى كسرى بُعده 1.2619 - نلاحظ أن القيمة 1.2619 توضح أنه أقرب إلى خط منه إلى سطح . مثلا أدت دراسة شاطئ بريطانيا إلى أنه شكل ذو بُعد يساوى 1.3(*) .

إن شهرة ماندلبروت أتت من اكتشافه للزمرة التى تحمل اسمه، والتى تنتج عن الحسابات التكرارية لتعبير رياضى بسيط، ولكنها تتميز بأنها تتعامل مع الأعداد المركبة، الأعداد المركبة هى تجريد رياضى يحتوى ما يسمى بجذر العدد السالب (-١) ، السمة الأساسية لهذه الأعداد أنها بالضرورة ثنائية الأبعاد. إن العدد المركب هو الحد الأدنى المطلوب لمعرفة وضع نقطة على مستوى، حيث إنه يحمل بعد النقطة عن كل من حدى المستوى (المحور x والمحور y). نحصل على زمرة ماندلبروت إذا أجرينا حسابات تكرارية مع التعبير الرياضى $(Z^2 + c)$ حيث Z - عدد مركب متغير، C - عدد مركب ثابت. عند إجراء هذه الحسابات التكرارية نحصل على نتائج، وعندما نرسم ما يسمى بالمستوى المركب نحصل على أشكال شديدة التعقيد، ربما أعقد أشكال قام الإنسان بدراستها، وهى ليست معقدة فقط، بل وجميلة جدا أيضا، لدرجة أنها أصبحت أيقونة فى الكثير من المعلقات (Posters) ذات الأحجام الكبيرة، ولكن كل ما يهمنا الآن هو أن هذه الأشكال المعقدة جدا نحصل عليها بقواعد بسيطة جدا.

السؤال المحورى الآن: كيف ينتج هذا التعقيد من هذه البساطة؟ هذا هو الرابط بين الشواش والكسريات، هنا نعود لصديقتنا القديمة « المعادلة اللوجستية» ونعبر عن تأثيراتها بلغة التوبولوجيا، مما يؤدى إلى المزيد من التعقيد والذى نوهنا عنها سابقا.

إن ما تفعله هذه المعادلة اللوجستية والحسابات التكرارية هو إسقاط زمرة من الأعداد على زمرة أخرى من الأعداد أيضا. إذا كانت هناك نقاط على سطح مستوٍ، أو على سطح كرة على أى سطح آخر، يمكن أن نغيرها نقطة بنقطة بنقاط أخرى فى مكان آخر على المستوى، رغم أننا معتادون على هذه العملية فإننا لانتفكر فيما

(*) هناك طرق مختلفة لحساب بُعد الأشكال الكسرية تؤدى إلى نتائج متقاربة وليست متطابقة ولكن هذا لا يدخل فى موضوعنا الأساسى.

يحدث بالفعل. هذه العملية تسمى «إسقاط» أو رسم الخرائط (Mapping) . إن خريطة مدينة توضح الطرق والشوارع والمبانى فى مدينة ما بشكل مصغر وبمقياس رسم بحيث يمكن رسمها على قطعة من الورق، ولكن الخريطة لاتعكس ولا يمكن أن تعكس كل تفاصيل المدينة التى تمثلها، أكثر من ذلك، يمكن أن تحوى الخريطة بعض التشوهات ولكنها تظل مفيدة. إن خريطة المترو فى مدينة لندن توضح كل المحطات وخطوط القطارات ولكنها ترسم بشكل يوضحها بصورة مبسطة.

فى هذه الحالة مقدار التشوه اختيارى، أما رسم خريطة للكرة الأرضية على مستوى لابد وبالضرورة أن تحوى تشوهات؛ لذلك تبدو أشكال القارات فى الطريقتين الميركا تورى (Mercator) وطريقة بيترز (Peters) مختلفة، وكلا الشكلين يختلفان عن الأشكال الحقيقية للقارات على الكرة الأرضية.

إن العملية التى تصفها المعادلة اللوجستية هى فى الواقع إسقاط، حيث نرى أن هذه المعادلة تؤثر على زمرة من الأعداد التى تمثل خطا مستقيما. إن هذه المعادلة اللوجستية تحول قيم x إلى قيم حسب العلاقة:

$$x\ (next) = B\ x\ (1 - x)$$

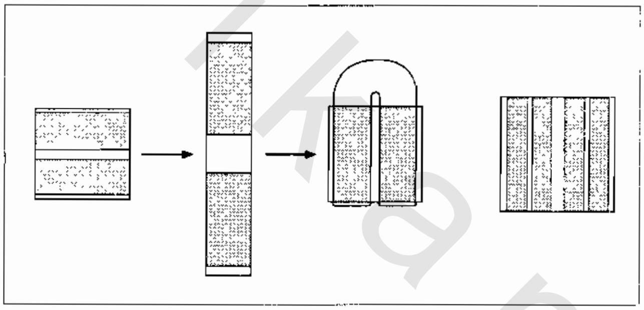
ونظرا لعملية الاستواء (renormalization) سوف تأخذ x قيما بين الصفر والواحد. للتبسيط سوف نأخذ $B = 3$. لنأخذ ماذا يحدث مع قيم x مع فاصل قدره 0.1 ، النقطة $X = 0$ سوف تقع على النقطة صفر. عند $x = 0.1$ نحصل على $x\ (next) = 0.27$ ، النقطة $x = 0.2$ تقع على النقطة $x\ (next) = 0.63$ ، النقطة 0.3 تقع على النقطة $x\ (next) = 0.63$ ، النقطة $x = 0.4$ على النقطة 0.72 ، النقطة $x = 0.5$ على النقطة 0.75 . نرى من هذا أن المسافة من الصفر وحتى 0.5 قد تمدد ليشمل خطا من الصفر حتى 0.75 . يوضح هذا خاصية أساسية لمفهوم المالانهاية، فهناك عدد لا نهائى من النقاط فى الخط المستقيم، هناك ارتباط (corrlation) ١ : ١ بين النقاط الواقعة على المستقيمين، رغم أن طول أحدهما يبلغ نصف طول الآخر.

فى النصف الآخر من المستقيم يحدث شيء عكسى، النقطة $x = 0.6$ تقع على النقطة 0.72، النقطة $x = 0.7$ تقع على النقطة 0.63 ، والنقة 0.8 تقع على النقطة 0.48 ، و 0.9 تقع على 0.27 . وحيث إنه بالنسبة للنقطة $x = 1$ نحصل على $x\ (next) = 3\ (1 - 1) = 0$ أى تقع على نقطة الصفر مرة أخرى. إذن النصف الثانى من المستقيم لم يتمدد فقط وإنما انطبق على النصف الأول لهذا الخط المستقيم. لقد حدث تحويل (transformation) توبولوجى للخط المستقيم مكون من تمدد وطىّ. والآن رغم أن الخط زاد طوله بمقدار النصف إلا أنه أصبح منطبقا على

ثلاث أرباع طوله الأصلى. إن العلاقة بين الجبر والتوبولوجيا هامة وعميقة. حين نرى أن علاقة بسيطة مثل $y = x^2$ يمكن أن تمثل بخط على الورقة أو مسار فى الفراغ على شكل قطع مكافىء. ولكن ما يهمنا هو الفراغ الطورى وليس الفراغ الحقيقى.

إذا نظرنا إلى الأمور من خلال المفردات الفيزيائية وليس المفردات الرياضية التجريدية فإن عملية التمدد والطى التى تنتج عن المعادلة اللوجستية تؤدى إلى شكل حدوة حصان إذا طبقت على شكل أسطوانى، ويسمى هذا التحويل بتحويل حدوة الحصان، كما فى شكل ٣ - ١٠.

ولكن لماذا نتوقف عند تحويل حدوة الحصان فقط؟ إن التكرارية تمكننا من الحصول على بنيات معقدة من قواعد بسيطة.



شكل (٣-١٠) حدوة الحصان لسمايل (Smale's horseshoe) **الناتجة عن تحويل الخبّاز** (Baker transformation) **. إن تكرار عملية الطى والتمدد يؤدى إلى وجود بنية متعددة الطبقات، بحث تكون الطبقات مرتبة بشكل يماثل النقاط فى زمرة كانتور.**

وهكذا يمكننا تحويل حدوة الحصان مرة أخرى، ثم نحول حدوة الحصان المحوّلة مرة أخرى وهكذا وهكذا، هذا شبيه بما يفعله الخباز يفرد العجين ثم يطويها ثم يفردها ويطويها مرات ومرات، لذا يسمى هذا التحويل بتحويل الخباز، لقد قام ستيفن سمايل بوضع الرياضيات اللازمة لوصف هذه التحويلات ثم تنبه إلى الشواش من خلال احتكاكه بروبرت يورك.

لنتصور أن الخط الأصلى هو جاذب فى الفراغ الطورى، ولنتصور ماذا يحدث له عند إجراء تحويل حدوة الحصان.

عند كل خطوة يتمدد طول الخط ولكنه عند طيه يشغل حيزا أقل فى الفراغ. فى الخطوة هذه يكون عندنا خطان أحدهما فوق الآخر وأنثناء واحد، وفى الخطوة التالية يكون هناك أربع خطوات (وثلاثة انثناءات)، أما فى الخطوة التالية فثمانية خطوط وسبعة انثناءات وهكذا... نرى أن عدد الطبقات يتضاعف وعدد الانثناءات

يساوى عدد الانثناءات السابقة مضاعفة ويضاف إليها الواحد. بهذا ننتهى إلى منحنى ملتوٍ بشدة، يحوى عددا لا نهائيا من الطبقات ولكنه لا يشغل أية مسافة، سواء أفقيا أو رأسيا. إذا أخذنا مقطعا عرضيا فى هذا المنحنى سنجد نقاطا موزعة بالضبط مثل نقاط زمرة كانتور، ولكن من أين أتت النقاط التى تقع أمام بعضها البعض؟ نظراً للعمليات المتكررة من التمدد والطى فإن أى نقطتين نهائيتين بدأتا قريبتين إحداهن من الأخرى على الخط الأصلى، يمكن أن ينتهيا بعيدتين إحداهن عن الأخرى، ويمكن أن تنتهى نقطتان كانتا على طرف الخط الأصلى تصبحان قريبتين جدا إحداهن من الأخرى. إذا كانت حالة النظام تمر على الخط الأصلى بشكل تدريجى فــى اتجاه معين، فإنها سوف تبدو وكأنها تقفز فى زمرة كانتور بشكل عشوائى. هذه هــى التوبولوجيا المرتبطة بظهور الشواش الناتــج عــن تضاعف الدورة (period doubling).

هذا الشكل المكون من عدد لا نهائى من الطبقات مثل الفطيرة متعددة الطبقات، ويحدث هذا أيضا فى جاذب لورنتس.

كما هو مبين فى شكل ٢-٣ فإن المنحنى المبين لجاذب لورنتس فى الفراغ الطورى يبدو أنه يتقاطع مع نفسه مرات عديدة - فى الواقع عددا لا نهائيا من المرات. لكن ما يحدث حقيقة هو أنه مع كل تقاطع «ينتقل» الجاذب إلى طبقة أخرى من الفراغ الطورى، أى ينتقل إلى مستوى آخر. يمكن أن نمثل ذلك لزيادة الإيضاح أن نتصور كتابا مكونا من أوراق سمكها متناهى الصغر والكتاب مفتوح من المنتصف، أحد فصى جاذب لورنتس يرسم فى الصفحة اليمنى والفص الآخر فى الصفحة اليسرى، وهناك فص أو سلسلة من الفصوص تتواجد فى كل صفحة، ففى كل مرة عندما ينتقل المسار ويمر عبر منتصف الكتاب فإنه ينتقل إلى الجانب الآخر وبالتالى ينتقل إلى صفحة مختلفة من الكتاب. إذن هناك عدد لا نهائى من نقاط التقاطع، ولكن المنحنى الذى يمثل الجاذب لا يتقاطع أبدا مع نفسه.

فى كلتا الحالتين - جاذب حدوة الحصان وجاذب لورنتس - يتواجد عدد لا نهائى من الطبقات من الفراغ الطورى فى حجم محدود من الفراغ الطورى نفسه. كلا الجاذبين كسرى البعد، كلاهما جاذبان غريبان . هذه هى فقط البداية. إذا أجرينا عمليات تمدد وطى مع جاذبات ليست فى البداية خطا مستقيما فى الفراغ الطورى (مثل الجاذب الذى يتجول على سطح طارة فى الفراغ الطورى)، ننتهى إلى أشكال متناهية التعقيد من الشواش الكسرى، ولكنه ما يزال مبنيا على زمرة من القواعد بسيطة.

أخيرا نملك كل المعلومات التى نحتاجها لكى نرى بأن البساطة الموضوعة فى

هذا العالم يمكن أن تؤدى إلى بنيات معقدة، وبذا يمكننا أن نبدأ فى التحرك بالتدريج على هذه الطبقات من التعقد إلى أن نصل إلى كيفية ظهور الحياة نفسها.

لنتذكر الطريقة التى حسبنا بها البعد الكسرى لمنحنى كوخ من خلال الأس الذى يظهر فى قانون مقياس الرسم. من كل هذا توصلنا إلى أن المكعب ذو ثلاثة أبعاد .. والكرة أيضا جسم ثلاثى الأبعاد.. فى منتصف ثمانينيات القرن الماضى وجد العلماء الذين يدرسون معدل التمثيل الغذائى للحيوانات ذات الأحجام المختلفة أنها تخضع لقانون أسى ولكن الأس لا يساوى الثلاثة . لقد قام هؤلاء العلماء بقياس معدلات التمثيل الغذائى للفئران، الكلاب، البشر والخيل. إن كتلة الحيوان تتناسب مع حجمه، وكان المتوقع أن يزداد معدل التمثيل الغذائى مع ازدياد الحجم أو الكتلة لكن لدهشة العلماء ازداد معدل التمثيل الغذائى بقانون أسى ولكن الأس لا يساوى الثلاثة، وإنما 2.25، أى أن معدل التمثيل الغذائى يتغير وكأن أجسام الحيوانات ليست أشكالا ثلاثية الأبعاد، وإنما ذات بعد يقع بين الاثنين والثلاثة – أى شكل كسرى – وهذا يعنى بالنسبة لعالم الرياضيات أن جسم الحيوان هو عبارة عن أسطح كسرية مطوية فى حجم محدود هو جسم الحيوان.

إذا أمعنّا النظر إلـى الأجسام بتفصيل أكبر، نجد أن العديد مـن سمات النظم الحية هى نظم كسرية. إن طريقة تشعب الشرايين والأوردة لابد وأن تكون بالضرورة كسرية حتى يمكن للدم أن يذهب إلى ويعود من أجزاء الجسم المختلفة دون أن تشغل هذه الأوردة والشرايين حيزا كبيرا من الجسم فلا يتبقى حيز لشىء آخر. واضح جدا كل هذا فى الكلى على سبيل المثال، حيث تتفرغ وتتشعب الشرايين والأوردة حتى يحدث تبادل كامل للسوائل. إن الكُلىَ حيز محدود جدا، وهى شكل ثلاثى الأبعـاد، ولكن الشرايين والأوردة بهـا تتّول إلى طول لا نهـائى من شكل كسرى حقيقى.

بالطبع ينهار التماثل فى الحالات المتطرفة – إن النظم بداخل الكلى لا تتفرع إلى مالا نهاية ، وإنما تتفرع عدة مرات، عدة مرات فقط – وإذا تحركنا فى الاتجاه المضاد فإن الكلى ليست محتواة فى «كلى فائقة» (super kidneys) وهكذا إلى الأبد – ولكن نجد أن كل نظام محتوى فى نفسه. ومع ذلك فإن التماثل بين العديد من النظم الحية والكسريات أكبر من أن يكون مجرد تماثل، فكل هذا يوضح كيف أن سطح الرئة، وهو سطح ثنائى الأبعاد له مساحة كبيرة بدرجة تكفى لتبادل الأكسجين وثانى أكسيد الكربون بكمية كافية لحفظ الكائن حيا – رغم أنها محصورة فى حيز صغيرة محدود. إن سمات شبه – الكسرية والتشابه الذاتى سمات منتشرة فى كل أجسام النظم الحية. لنتذكر أن مقدار الحامض النووى (DNA)

المطلوبة لحفظ شفرة تكوُّن هذه النظم هو فى الواقع بسيط، مقارنة بالكم اللازم اختزانه فى البصمة الوراثية الكاملة لتكون جهاز فرعى مثل الكلى. إن القواعد البسيطة التى تقف خلف تكون الكسريات التى تسمح للأشياء الحية ذات البنيان المعقدة بدرجة كافية لكى تكون قادرة على طرح أسئلة عن طبيعة العالم حولها حتى تتطور.

ما رأيناه فى كل ذلك أنك يمكن أن تجد فى نظم غير ذات معنى بالمرة مثل نقاط مياه تتساقط من صنبور بزمن دورة يساوى الوحدة. ويمكنك أيضا أن تجد نظما شواشية بها اضطرابات عشوائية، أى لا يوجد بها أى انتظام، والبنية كلها مدمرة. ولكن يوجد بين هذا وذاك بدءاً بالبداية المملة، يزداد التعقد بالتدريج حتى يحدث الشواش؛ لذا فإن الأمور ذات المعنى فى الكون تحدث عند نهاية الشواش - تحديدا قبيل انهيار الانتظام ، هنا نجد الصنابير (أو الشقوق التى تسرب ماء من خلالها) تسيل منها القطرات بمعدل غريب وساحر، ،دوّامات داخل دوّامات تدور مكونةً أشكالا رائعة، والتعقد غير العادى للكلى ، أو سطح تلافيف المخ المطوية طبقات فوق طبقات وهكذا.

حتى الآن استعرضنا الانتظام والشواش والآن نبدأ فى النظر إلى نهاية الشواش حيث يحيا التعقد.