

## التقارير المتكافئة

### Equivalent Statements

#### ١ - التكافؤ Equivalence

من دراستنا لجدول الحقيقة في الفصل الثاني لاحظنا أن التركيبات الممكنة في جدول الحقيقة لبعض التقارير المركبة يمكن أن تأخذ جميعها القيمة صواب T ، وكذلك لبعض التقارير المركبة، يمكن أن تأخذ جميعها القيمة خطأ F ، والتعاريف الآتية تميز بين مثل هذه الأنواع من التقارير.

تعريف ١ : يقال عن تقرير مركب انه صائب منطقيا (تحصيل حاصل أو حشو tautology) إذا كانت جميع قيم الحقيقة له صائبة، ويقال أنه خاطئ منطقيا (تناقض أو تعارض contradiction) إذا كانت جميع قيم الحقيقة له خاطئة.

والتقارير المركبة لا تنقسم إلى هذين النوعين فقط وإنما هناك تقارير ليست صائبة منطقيا وكذلك ليست خاطئة منطقيا وفي هذه الحالة فإن التركيبات الممكنة في جدول الحقيقة تحتوي على القيمة صواب T والقيمة خطأ F.

ملاحظة :

إذا كان التقرير المركب A تقرير صائب منطقيا فإن  $\sim A$  يكون خاطئ منطقيا  
وإذا كان التقرير المركب A تقرير خاطئ منطقيا فإن  $\sim A$  يكون صائب منطقيا.

مثال ١ : صنف التقارير الآتية من حيث كونها صائبة منطقيا أو خاطئة منطقيا

$$\sim \sim p , p \wedge \sim p , p \vee \sim p$$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للتقارير المعطاة

$p$	$\sim p$	$\sim\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	T	T	F
F	T	F	T	F

يتضح لنا من الجدول أن

- قيم الحقيقة التي يأخذها التقرير  $p \vee \sim p$  جميعها صائبة T وبالتالي فإن التقرير  $p \vee \sim p$  صائب منطقيا.
- قيم الحقيقة التي يأخذها التقرير  $p \wedge \sim p$  جميعها خاطئة F وبالتالي فإن التقرير  $p \wedge \sim p$  خاطئ منطقيا.
- قيم الحقيقة التي يأخذها التقرير  $\sim\sim p$  تحتوى على القيمة صواب T والقيمة خطأ F وبالتالي فإن التقرير  $\sim\sim p$  ليس صائب منطقيا وكذلك ليس خاطئ منطقيا.

مثال ٢ : أثبت أن التقرير  $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$  صائب منطقيا.

الحل : جدول الحقيقة للتقرير يكون كالاتى:

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	F	T	T

نلاحظ أن قيم الحقيقة التي يأخذها التقرير  $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$  جميعها صائبة T وبالتالي فإن التقرير يكون صائب منطقيا.

مثال ٣ : أثبت أن التقرير  $p \wedge \sim (p \vee q)$  خاطئ منطقيا.

الحل : جدول الحقيقة للتقرير يكون كالاتى :

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$p \wedge \sim (p \vee q)$
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

نلاحظ من الجدول أن قيم الحقيقة التى يأخذها التقرير  $p \wedge \sim (p \vee q)$  جميعها خاطئة F وبالتالي فإن التقرير يكون خاطئ منطقيا .

تعريف ٢ : يقال أن التقرير A يؤدي إلى التقرير B (وبمعنى آخر التقرير A تضمننا منطقيا للتقرير B) ونرمز لذلك بالرمز  $A \Rightarrow B$  إذا كان التقرير  $A \rightarrow B$  صائب منطقيا.

مثال ٤ : أثبت أن  $p \Rightarrow p \vee \sim p$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للتقرير  $p \rightarrow p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \rightarrow p \vee \sim p$
T	F	T	T
F	T	T	T

نلاحظ من الجدول أن التقرير  $p \rightarrow p \vee \sim p$  صائب منطقيا .  
وبالتالى من تعريف ( ٢ ) ينتج أن

$$p \Rightarrow p \vee \sim p$$

مثال ٥ : مهما يكن التقريران  $p$  ,  $q$  أثبت أن

1-  $p \Rightarrow p \vee q$

3-  $p \wedge q \Rightarrow q$

2-  $p \wedge q \Rightarrow p$

4-  $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للتقارير

$$p \rightarrow p \vee q, p \wedge q \rightarrow p, p \wedge q \rightarrow q, p \wedge q \rightarrow p \vee q$$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \vee q$	$p \wedge q \rightarrow p$	$p \wedge q \rightarrow q$	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

نلاحظ من الجدول أن جميعها صائب منطقيا وبالتالي ينتج المطلوب.

ملاحظات

( ١ ) - إذا كان  $A \Rightarrow B$  فإنه بالنظر الى جدول الحقيقة للتقرير  $A \rightarrow B$  نلاحظ الآتي:

١ - كلما كان التقرير  $A$  صائبا فإن التقرير  $B$  يكون صائبا أيضا .

ب - كلما كان التقرير  $B$  خاطئا فإن التقرير  $A$  يكون خاطئا أيضا .

ونعبر أحيانا عن الفقرتين (١)، (ب) بالقول:

إذا كانت المقدمة  $A$  صائبة ، فإن النتيجة  $B$  صائبة أيضا ،

وإذا كانت النتيجة  $B$  خاطئة ، فإن المقدمة  $A$  خاطئة أيضا .

( ٢ ) -  $A \Rightarrow B$  ليس له جدول حقيقة، لأن الرمز  $\Rightarrow$  لا يمثل أداة ربط بين التقريرين  $A, B$  وإنما  $A \Rightarrow B$  يعنى أن التقرير  $A \rightarrow B$  صائب منطقيا.

( ٣ ) - إذا كان  $A \Rightarrow B$  فإننا نعبّر عن ذلك بقولنا أن "  $A$  شرط كافي لـ  $B$  " وهذا يعنى أنه إذا كان التقرير  $A$  صائبا، فإنه يكفي ليكون التقرير  $B$  صائبا أيضا.

مثال ٦ : أثبت بطريقتين مختلفتين أن  $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ .

الحل : الطريقة الأولى : نعلم أنه عندما يكون التقرير  $x = 2$  صائبا فإنه يؤدي بالضرورة إلى أن التقرير  $x^2 = 4$  صائب، وأنه لا يمكن أن يكون  $x = 2$  بينما  $x^2 \neq 4$ ، وبالتالي فإن  $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$  تقرير صائب، أى إن  $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$  متحقق.

الطريقة الثانية : نعلم أنه عندما يكون التقرير  $x^2 = 4$  خاطئا، أى عندما يكون  $x^2 \neq 4$ ، فإن التقرير  $x = 2$  يكون خاطئا، أى إن  $x \neq 2$ ، وبالتالي فإن  $x^2 = 4 \rightarrow x = 2$  تقرير صائب، أى إن  $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$  متحقق.

تعريف ٣ : يقال أن التقرير  $A$  يؤدي إلى التقرير  $B$ ، وأن التقرير  $B$  يؤدي إلى التقرير  $A$  ونرمز لذلك بالرمز  $A \Leftrightarrow B$ ، إذا كان التقرير  $A \leftrightarrow B$  صائب منطقيا.

$A \Leftrightarrow B$  ليس له جدول حقيقة لأن الرمز  $\Leftrightarrow$  لا يمثل أداة ربط بين التقريرين  $A, B$  وإنما  $A \Leftrightarrow B$  يعنى أن التقرير  $A \leftrightarrow B$  صائب منطقيا، ونعبّر أحيانا عن الرمز  $\Leftrightarrow$  بقولنا

"الشرط اللازم والكافي" كما انه يعنى أيضا كلمة يكافئ.

تعريف ٤ : يقال عن تقريرين  $A, B$  إنهما متكافئان منطقيا أو اختصارا، متكافئان إذا كان لكل منهما نفس قيم الحقيقة بالجدول ويرمز لذلك  $A \equiv B$  (ويقرأ  $A$  يكافئ  $B$ ).

وأحيانا يستخدم الرمز  $\Leftrightarrow$  بدلا من الرمز  $\equiv$  للدلالة على تكافؤ تقريرين وبالتالي فإنه يمكن إثبات التكافؤ بين تقريرين  $A, B$  عن طريق تكوين جدول الحقيقة لكل من التقريرين وملاحظة التطابق بين قيم الحقيقة للتقريرين أو عن طريق إثبات أن  $A \Leftrightarrow B$  أى إثبات أن التقيرير  $A \leftrightarrow B$  صائب منطقيا.

مثال ٧ : جدول الحقيقة التالى يثبت أن التقريرين  $\sim p \vee q$  ,  $p \rightarrow q$  متكافئان منطقيا

$p$	$q$	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$\uparrow$                        $\uparrow$

حيث نلاحظ أن قيم الحقيقة في العمود الرابع المناظر للتقيرير  $p \rightarrow q$  هى نفسها قيم الحقيقة في العمود الخامس المناظر للتقيرير  $\sim p \vee q$  أى إن  $\sim p \vee q \equiv p \rightarrow q$ .

ويمكن إثبات التكافؤ بين التقريرين عن طريق إثبات أن

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

أى إثبات أن التقيرير  $\sim p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$  صائب منطقيا وهذا يتضح من الجدول الآتى:





مثال ٩ : استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير يكافئ التقرير  $p \wedge q$

الحل : التقرير المعطى من نوع الوصلة

الخطوة الأولى : نفي التقرير المعطى بالكامل فنحصل على  $\sim(p \wedge q)$

الخطوة الثانية : نفي التقارير المكونة لجزئي الوصل فنحصل على  $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الوصل  $\wedge$  إلى أداة الفصل  $\vee$  فنحصل على  $\sim(\sim p \vee \sim q)$

$$p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \quad \text{أذن}$$

مثال ١٠ : استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير يكافئ التقرير  $\sim(\sim p \vee q)$

الحل : التقرير المعطى من نوع النفي لفاصلة

الخطوة الأولى : نفي التقرير المعطى بالكامل فنحصل على  $\sim \sim(\sim p \vee q)$

وحيث أن  $\sim \sim A \equiv A$  فإن الناتج يمثل  $\sim p \vee q$

الخطوة الثانية : نفي التقارير المكونة لجزئي الفاصلة فنحصل على  $\sim \sim p \vee \sim q$

وحيث أن  $\sim \sim A \equiv A$  فإن الناتج يمثل  $p \vee \sim q$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الفصل  $\vee$  إلى أداة الوصل  $\wedge$  فنحصل على  $p \wedge \sim q$

$$\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q \quad \text{أذن}$$

مثال ١١ : استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير يكافئ التقرير

$$\sim(p \vee (q \rightarrow r))$$

الحل : التقرير المعطى من نوع النفي لفاصلة

الخطوة الأولى : نفي التقرير المعطى بالكامل فنحصل على

$$\sim \sim(p \vee (q \rightarrow r))$$

وحيث أن  $\sim \sim A \equiv A$  فإن الناتج يمثل  $p \vee (q \rightarrow r)$

الخطوة الثانية : نفي التقارير المكونة لجزئي الفاصلة فنحصل على  $\sim p \vee \sim (q \rightarrow r)$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الفصل  $\vee$  إلى أداة الوصل  $\wedge$  فنحصل على

$$\sim p \wedge \sim (q \rightarrow r)$$

$$\sim (p \vee (q \rightarrow r)) \equiv \sim p \wedge \sim (q \rightarrow r) \quad \text{أذن}$$

$$\text{وحيث أن} \quad \sim (q \rightarrow r) \equiv q \wedge \sim r$$

$$\sim (p \vee (q \rightarrow r)) \equiv \sim p \wedge (q \wedge \sim r)$$

مثال ١٢ : استخدم قانون دي مورجان لكتابة تقرير يكافئ التقرير

" ليس صحيحا أن الجو بارد والسماء غير مشرقة "

الحل : نفرض أن  $p$  : الجو بارد

$q$  : السماء مشرقة

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة  $(p \wedge \sim q)$  وهو من نوع النفي لواصلة

و بتطبيق قانون دي مورجان لإيجاد تقرير مكافئ

الخطوة الأولى : نفي التقرير المعطى بالكامل فنحصل على  $\sim \sim (p \wedge \sim q)$

وحيث أن  $\sim \sim A \equiv A$  فإن الناتج يمثل  $p \wedge \sim q$

الخطوة الثانية : نفي التقارير المكونة لجزئي الواصلة فنحصل على  $\sim p \wedge \sim \sim q$

وحيث أن  $\sim \sim A \equiv A$  فإن الناتج يمثل  $\sim p \wedge q$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الوصل  $\wedge$  إلى أداة الفصل  $\vee$  فنحصل على  $\sim p \vee q$

$$\sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q \quad \text{أذن}$$

أذن التقرير المعطى " ليس صحيحا أن الجو بارد والسماء غير مشرقة "

يمكن كتابته في الصورة المكافئة " الجو ليس بارد أو السماء مشرقة "

من الأمثلة المشهورة لقانون ديمورجان

$$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

مثال ١٣ : استخدم قانون ديمورجان لإثبات أن  $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

الحل : حيث أن  $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  أذن بتطبيق قانون ديمورجان

$$\begin{aligned} \sim (p \rightarrow q) &\equiv \sim (\sim p \vee q) \\ &\equiv \sim \sim p \wedge \sim q \\ &\equiv p \wedge \sim q \end{aligned}$$

مثال ١٤ : استخدم التكافؤ

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

في إعادة صياغة كل من التقارير الآتية :

- ١ - إذا كان اليوم هو الثلاثاء فإن غدا يكون الأربعاء .
- ٢ - إذا لم تسلك سلوكا حسنا فإننى سوف أعاقبك .

الحل :

١ - نفرض أن  $p$  : اليوم هو الثلاثاء

$q$  : غدا يكون الأربعاء

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة  $p \rightarrow q$  وهو من نوع الشرطية، وحيث أن

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

أذن التقرير المعطى

" إذا كان اليوم هو الثلاثاء فإن غدا يكون الأربعاء "

يمكن كتابته في الصورة المكافئة

" اليوم ليس الثلاثاء أو غدا يكون الأربعاء "

٢ - نفرض أن  $p$  : اسلك سلوكا حسنا

$q$  : سوف أعاقبك

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة  $p \rightarrow q$  وهو من نوع الشرطية، وحيث أن

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

أذن

$$\sim p \rightarrow q \equiv \sim \sim p \vee q \equiv p \vee q$$

أذن التقرير المعطى

" إذا لم تسلك سلوكا حسنا فإنني سوف أعاقبك "

يمكن كتابته في الصورة المكافئة

" اسلك سلوكا حسنا أو سأعاقبك "

مثال ١٥ : بسط كل من العبارات الآتية :

١ - ليس صحيحا أن الورد احمر تعنى أن البنفسج أزرق .

٢ - ليس من الحقيقى انه إذا كانت السماء لا تمطر فإن الشمس تكون مشرقة .

الحل :

١ - نفرض أن  $p$  : الورد احمر

$q$  : البنفسج أزرق

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة  $\sim (p \rightarrow q)$  وحيث أن

$$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن التقرير المعطى

" ليس صحيحا أن الورد احمر تعنى أن البنفسج أزرق "

يمكن كتابته فى الصورة البسيطة

" الورد احمر والبنفسج ليس أزرق "

٢ - نفرض أن  $p$  : السماء تمطر

$q$  : الشمس مشرقة

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة  $\sim(\sim p \rightarrow q)$  وحيث أن

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن

$$\sim(\sim p \rightarrow q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

أذن التقرير المعطى

" ليس من الحقيقى انه إذا كانت السماء لا تمطر فإن الشمس تكون مشرقة "

يمكن كتابته فى الصورة البسيطة

"السماء لا تمطر والشمس ليست مشرقة"

فى الجدول الآتى نعرض قائمة من التقارير المتكافئة منطقيا، تسمى جبر التقارير، ويمكن التحقق من صحتها باستخدام جداول الحقيقة.

التقارير المتكافئة منطقيا	القانون
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	قوانين اللائغو Idempotent Laws
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	قوانين الإبدال Commutative Laws

القانون	التقارير المتكافئة منطقيا
قوانين الدمج Associative Laws	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
قوانين التوزيع Distributive Laws	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
قوانين الوحدة Identity Laws	$p \vee f \equiv p$ , $p \wedge t \equiv p$ $p \vee t \equiv t$ , $p \wedge f \equiv f$ حيث $t$ ترمز إلى تقرير صائب منطقيا بينما $f$ ترمز إلى تقرير خاطئ منطقيا
قوانين المكمل Complement Laws	$p \vee \sim p \equiv t$ , $p \wedge \sim p \equiv f$ $\sim t \equiv f$ , $\sim f \equiv t$ $\sim \sim p \equiv p$
قوانين دي مورجان De Morgan's Laws	$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

وباستخدام قوانين جبر التقارير الواردة في الجدول السابق يمكن تبسيط التقارير وكذلك إثبتت تكافؤها دون الرجوع الى جداول الحقيقة كما هو موضح بالأمثلة الآتية :

مثال ١٦ : استخدم قوانين جبر التقارير في تبسيط كل من التقارير الآتية :

- 1-  $(p \vee q) \wedge \sim p$
- 2-  $p \vee (p \wedge q)$
- 3-  $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

الحل :

$$\begin{aligned}
 1 - (p \vee q) \wedge \sim p &\equiv \sim p \wedge (p \vee q) && \text{قانون الإبدال} \\
 &\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) && \text{قانون التوزيع} \\
 &\equiv f \vee (\sim p \wedge q) && \text{قانون المكمل} \\
 &\equiv \sim p \wedge q && \text{قانون الوحدة}
 \end{aligned}$$

أذن

$$(p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge q$$

$$\begin{aligned}
 2 - p \vee (p \wedge q) &\equiv (p \wedge t) \vee (p \wedge q) && \text{قانون الوحدة} \\
 &\equiv p \wedge (t \vee q) && \text{قانون التوزيع} \\
 &\equiv p \wedge t && \text{قانون الوحدة} \\
 &\equiv p && \text{قانون الوحدة}
 \end{aligned}$$

أذن

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$\begin{aligned}
 3 - \sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) && \text{قانون ديمورجان} \\
 &\equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q) && \text{قانون التوزيع} \\
 &\equiv \sim p \wedge t && \text{قانون المكمل} \\
 &\equiv \sim p && \text{قانون الوحدة}
 \end{aligned}$$

أذن

$$\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$$

### ٣ - تقارير شرطية أخرى More Conditional Statements

في دراستنا للرياضيات كثيرا ما يقابلنا قواعد و نظريات موضوعة في صورة تقارير شرطية، فمثلا النظرية.

" إذا تساوى ضلعان في مثلث فإن الزوايا المقابلة لهذه الأضلاع تتساوى "

موضوعة في صورة شرطية، وسوف نناقش الآن وبالتفصيل التقارير الشرطية بصورها المختلفة: نفرض أننا أعطينا تقريرين  $p$  ,  $q$  والسؤال الآن

"ما هي التقارير الشرطية التي يمكن تكوينها باستخدام التقارير  $p$  ,  $q$  ,  $\sim p$  ,  $\sim q$  ؟" والقائمة الآتية تحتوي على التقارير الشرطية الممكنة وأسماءها

$p \rightarrow q$		التقرير الشرطي
$q \rightarrow p$	Converse	عكس التقرير الشرطي
$\sim p \rightarrow \sim q$	Inverse	مقلوب التقرير الشرطي
$\sim q \rightarrow \sim p$	Contrapositive	مضاد التقرير الشرطي

تعريف ٥ : عكس التقرير الشرطي Converse

عكس التقرير الشرطي  $p \rightarrow q$  هو التقرير الشرطي  $q \rightarrow p$

ويجب ملاحظة أن نفي التقرير شيء وعكسه شيء آخر.

مثال ١٧ : في الجدول الآتي نوضح بعض التقارير الشرطية وعكس كل منها وكذلك نوضح قيم الحقيقة للتقرير وعكسه .

التقرير الشرطى		عكس التقرير الشرطى	
قيمة الحقيقة	$p \rightarrow q$	قيمة الحقيقة	$q \rightarrow p$
خطأ F	إذا كان المثلث متساوى الساقين فإنه يكون متساوى الأضلاع .	صواب T	إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الساقين .
صواب T	إذا تساوى ضلعان فى مثلث فبن الزوايا المقابلة لهذه الأضلاع تساوى.	صواب T	إذا تساوت زاويتان فى مثلث فإن الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا تساوى.
صواب T	إذا كان 5 عدد فردى فإن 5+5 يكون عدد فردى أيضا.	خطأ F	إذا كان 5 عدد فردى فإن 5+5 يكون عدد فردى أيضا .

من هذا المثال نلاحظ الحقيقة الآتية :

صحة التقرير الشرطى لا تؤدى بالضرورة الى صحة عكسه، فالتقرير الشرطى قد يكون صواب ورغم ذلك فإن عكسه يكون أما صواب وأما خطأ بينما إذا كان التقرير الشرطى خطأ فإن عكسه لا بد أن يكون صواب.

وفى الجدول الآتى نوضح قيم الحقيقة للتقرير  $p \rightarrow q$  وعكسه

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

ونلاحظ من الجدول أن التقرير  $p \rightarrow q$  لا يكافئ التقرير  $q \rightarrow p$  ، أى إن التقرير لا يكافئ عكسه.

تعريف ٦ : مقلوب التقرير الشرطى Inverse

مقلوب التقرير الشرطى  $p \rightarrow q$  هو التقرير الشرطى  $\sim p \rightarrow \sim q$

مثال ١٨ : فى الجدول الآتى نوضح بعض التقارير الشرطية و مقلوب كل منها وكذلك نوضح قيم الحقيقة للتقرير و مقلوبه.

مقلوب التقرير الشرطى		التقرير الشرطى	
قيمة الحقيقة	$\sim p \rightarrow \sim q$	قيمة الحقيقة	$p \rightarrow q$
صواب T	إذا كان المثلث غير متساوى الأضلاع فإنه يكون غير متساوى الزوايا .	صواب T	إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا .
خطأ F	إذا كان 3 عدد ليس زوجى فإن 3+3 يكون عدد ليس زوجى أيضا .	صواب T	إذا كان 3 عدد زوجى فإن 3+3 يكون عدد زوجى .
صواب T	إذا كان 5 عدد ليس فردى فإن 5+5 يكون عدد ليس فردى أيضا .	خطأ F	إذا كان 5 عدد فردى فإن 5+5 يكون عدد فردى .

والجدول الآتى نوضح فيه قيم الحقيقة للتقرير  $p \rightarrow q$  ومقلوبه

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow \sim q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T

ونلاحظ من الجدول أن التقرير  $p \rightarrow q$  لا يكافئ التقرير  $\sim p \rightarrow \sim q$  ، أى إن التقرير لا يكافئ مقلوبه .

تعريف ٧ : مضاد التقرير الشرطى  $p \rightarrow q$

مضاد التقرير الشرطى  $p \rightarrow q$  هو التقرير الشرطى  $\sim q \rightarrow \sim p$

أى إن مضاد التقرير الشرطى هو مقلوب عكس التقرير.

مثال ١٩ : فى الجدول الآتى نوضح بعض التقارير الشرطية و مضاد كل منها وكذلك نوضح قيم الحقيقة للتقرير ومضاده.

مضاد التقرير الشرطى		التقرير الشرطى	
قيمة الحقيقة	$\sim q \rightarrow \sim p$	قيمة الحقيقة	$p \rightarrow q$
صواب T	إذا كان المثلث غير متساوى الساقين فإنه يكون غير متساوى الأضلاع .	صواب T	إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الساقين .
صواب T	إذا كان 3+3 عدد ليس زوجى فإن 3 يكون عدد ليس زوجى أيضا .	صواب T	إذا كان 3 عدد زوجى فإن 3+3 يكون عدد زوجى .
صواب F	إذا كان 5+5 عدد ليس فردى فإن 5 يكون عدد ليس فردى .	خطأ F	إذا كان 5 عدد فردى فإن 5+5 يكون عدد فردى .



من الجدول نلاحظ ما يأتي :

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \quad - ١$$

$$q \rightarrow p \equiv \sim p \rightarrow \sim q \quad - ٢$$

٣ - نفى التقرير يختلف تماما عن عكس التقرير أو مقلوب التقرير أو مضاد التقرير.

مثال ٢٠ : نظرية فيثاغورث تنص على الآتي:

"في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين."

- ١ - اكتب عكس نظرية فيثاغورث .
- ٢ - اكتب مقلوب نظرية فيثاغورث .
- ٣ - اكتب مضاد نظرية فيثاغورث .

الحل : يمكن صياغة نظرية فيثاغورث على صورة الشرطية :

"إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين."

نفرض التقرير

$p$  : المثلث قائم الزاوية

$q$  : مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين

أذن نظرية فيثاغورث تكون على الصورة الرمزية  $p \rightarrow q$  .

١ - عكس نظرية فيثاغورث

حيث أن عكس التقرير الشرطي  $p \rightarrow q$  هو التقرير  $q \rightarrow p$  ، أذن عكس

نظرية فيثاغورث يكون

"إذا كان مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن

المثلث يكون قائم الزاوية."

٢ - مقلوب نظرية فيثاغورث

حيث أن مقلوب التقرير الشرطي  $P \rightarrow Q$  هو التقرير  $\sim P \rightarrow \sim Q$  ، أذن مقلوب نظرية فيثاغورث يكون

"إذا كان المثلث غير قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين."

٣ - مضاد نظرية فيثاغورث

حيث أن مضاد التقرير الشرطي  $P \rightarrow Q$  هو التقرير  $\sim Q \rightarrow \sim P$  ، أذن مضاد نظرية فيثاغورث يكون

"إذا كان مربع طول الوتر في مثلث لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين فإن المثلث لا يكون قائم الزاوية."

مثال ٢١ : اكتب عكس ومقلوب ومضاد التقرير الآتى:

"  $x$  عددا زوجيا شرط كالى لكى يكون  $x^2$  عددا زوجيا."

الحل :

التقرير يمكن كتابته فى الصورة

"إذا كان  $x$  عددا زوجيا فإن  $x^2$  عددا زوجيا."

نفرض التقارير

$p$  :  $x$  عددا زوجيا

$q$  :  $x^2$  عددا زوجيا

أذن التقرير يمكن كتابته على الصورة الرمزية  $p \rightarrow q$

عكس التقرير

حيث أن عكس التقرير الشرطى  $p \rightarrow q$  هو التقرير  $p \rightarrow q$ ، أذن عكس التقرير يكون

"إذا كان  $x^2$  عددا زوجيا فإن  $x$  عددا زوجيا."

مقلوب التقرير

حيث أن مقلوب التقرير الشرطى  $p \rightarrow q$  هو التقرير  $\sim p \rightarrow \sim q$ ، أذن مقلوب التقرير يكون

"إذا كان  $x$  عددا غير زوجيا فإن  $x^2$  عددا غير زوجيا."

مضاد التقرير

حيث أن مضاد التقرير الشرطى  $p \rightarrow q$  هو التقرير  $\sim q \rightarrow \sim p$ ، أذن مضاد التقرير يكون

" إذا كان  $x^2$  عددا غير زوجيا فإن  $x$  عددا غير زوجيا."

٤ - جبر الافتراضات

نعلم أن الافتراض يرمز له  $P(p, q, \dots)$  وهو كثيرة حدود بولية فى المتغيرات  $p, q, \dots$  وهذه المتغيرات تمثل تقارير غير محددة وبعبارة أخرى فإن الافتراض يمثل تقرير مركب ولذلك فإنه يمكننا إعادة صياغة التعاريف السابقة من هذا الفصل على الافتراض  $P(p, q, \dots)$ .

تعريف ٨ : الافتراض  $P(p, q, \dots)$  يقال أنه صائب منطقيا (تحصيل حاصل أو حشو tautology) إذا كان  $P(p_0, q_0, \dots)$  له قيمة الحقيقة صواب ويقال أنه خاطئ منطقيا (تناقض أو تعارض contradiction) إذا كان  $P(p_0, q_0, \dots)$  له قيمة الحقيقة خطأ لأى تقارير  $p_0, q_0, \dots$  تحمل مكان  $p, q, \dots$ .

مثال ٢٢: الافتراض  $P(p) = p \vee \sim p$  صائب منطقياً والافتراض  $Q(p) = p \wedge \sim p$  خاطئ منطقياً كما وضحنا في مثال (١).

مثال ٢٣: الافتراض  $P(p, q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$  صائب منطقياً والافتراض  $Q(p, q) = p \wedge \sim (p \vee q)$  خاطئ منطقياً كما وضحنا في مثال (٢)، (٣).

مثال ٢٤: ( قانون القياس المنطقي )

الافتراض  $P(p, q, r) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$  صائب منطقياً ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة الآتي :

p	q	r	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$										
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
1	2	3	1	4	2	7	2	5	3	8	1	6	3

ومن الجدول بالعمود في الخطوة 8 يتضح أن الافتراض  $P(p, q, r)$  صائب منطقياً.

من الأمثلة السابقة وحيث أن الافتراض الصائب منطقياً يكون دائماً صواب والافتراض الخاطئ منطقياً يكون دائماً خطأ فإننا نلاحظ أن نفي الافتراض الصائب منطقياً يكون افتراض خاطئ منطقياً والعكس صحيح.

ملاحظة :

إذا كان الافتراض  $P(p, q, \dots)$  صائب  
منطقيا فإن الافتراض  $\sim P(p, q, \dots)$  يكون  
خاطي منطقيا والعكس صحيح.

في مثال ( ٢٣ ) الافتراض

$$P(p, q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

صائب منطقيا وبالتالي فإن الافتراض  $\sim P(p, q)$  يكون خاطي منطقيا وبالمثل الافتراض

$$Q(p, q) = p \wedge \sim (p \vee q)$$

خاطي منطقيا وبالتالي فإن الافتراض  $\sim Q(p, q)$  يكون صائب منطقيا.

نظرية ١ : مفهوم الإحلال

- ١ - إذا كان الافتراض  $P(p, q, \dots)$  صائب منطقيا فإن  $P(p_0, q_0, \dots)$  يكون  
أيضا صائب منطقيا لأي تقارير  $p_0, q_0, \dots$  تحل مكان  $p, q, \dots$ .
- ٢ - إذا كان الافتراض  $P(p, q, \dots)$  خاطي منطقيا فإن  $P(p_0, q_0, \dots)$   
يكون أيضا خاطي منطقيا لأي تقارير  $p_0, q_0, \dots$  تحل مكان  $p, q, \dots$ .

مثال ٢٥ : كما وضحنا بمثال ( ٢٣ ) فإن الافتراض  $P(p, q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$   
صائب منطقيا والافتراض  $Q(p, q) = p \wedge \sim (p \vee q)$  خاطي منطقيا  
والآن نفرض التقارير

$$p_0 : \text{الجو بارد}$$

$$q_0 : \text{الشمس مشرقة}$$

أذن وفقا لمفهوم الإحلال فإن الافتراض  $P(p_0, q_0) = (p_0 \wedge q_0) \rightarrow (p_0 \leftrightarrow q_0)$   
يكون صائب منطقيا وبالمثل الافتراض  $Q(p_0, q_0) = p_0 \wedge \sim (p_0 \vee q_0)$  يكون  
خاطي منطقيا.

تعريف ٩ : يقال أن الافتراض  $P(p,q,\dots)$  يؤدي إلى الافتراض  $Q(p,q,\dots)$  (وبمعنى آخر الافتراض  $P(p,q,\dots)$  تضمننا منطقيًا للافتراض  $Q(p,q,\dots)$ ) ونرمز لذلك بالرمز  $P(p,q,\dots) \Rightarrow Q(p,q,\dots)$  إذا كان الافتراض  $P(p,q,\dots) \rightarrow Q(p,q,\dots)$  صائب منطقيًا.

مثال ٢٦ : للافتراضيين

$$P(p,q) = p \wedge q, \quad Q(p,q) = p \vee q$$

أثبت أن  $P(p,q) \Rightarrow Q(p,q)$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للافتراض  $P(p,q) \rightarrow Q(p,q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$P(p,q) \rightarrow Q(p,q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

ومن الجدول نلاحظ أن الافتراض  $P(p,q) \rightarrow Q(p,q)$  صائب منطقيًا، وبالتالي ينتج أن التضمين  $P(p,q) \Rightarrow Q(p,q)$  متحقق.

تعريف ١٠ : يقال أن الافتراض  $P(p,q,\dots)$  يؤدي إلى الافتراض  $Q(p,q,\dots)$  ، وان الافتراض  $Q(p,q,\dots)$  يؤدي إلى الافتراض  $P(p,q,\dots)$  ونرمز لذلك بالرمز  $P(p,q,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,\dots)$  إذا كان الافتراض  $P(p,q,\dots) \leftrightarrow Q(p,q,\dots)$  صائب منطقيًا.

تعريف ١١ : الافتراضيان  $P(p, q, \dots)$  ,  $Q(p, q, \dots)$  يسميان متكافئان منطقيا أو

اختصارا متكافئان إذا كان لكل منهما نفس قيم الحقيقة بالجدول ويرمز لذلك

$$P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$$

ويستخدم الرمز  $\Leftrightarrow$  أحيانا بدلا من الرمز  $\equiv$  للدلالة على تكافؤ الافتراضيان.

مثال ٢٧ : الافتراضيان

$$P(p, q) = p \leftrightarrow q$$

$$Q(p, q) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

متكافئان منطقيا ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة لكل افتراض

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$P(p, q)$	$Q(p, q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T



$$P(p, q) \equiv Q(p, q)$$

ومن الجدول يتضح أن

نظرية ٢ :  $P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$  إذا وفقط إذا كان الافتراض

$$P(p, q, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, \dots)$$

صائب منطقيا .

نظرية ٣ : العلاقة بين الافتراضيان  $P(p, q, \dots)$  ,  $Q(p, q, \dots)$  المعرفة بالصورة

$$P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$$

هي علاقة تكافؤ أي إنهما

١ - علاقة عاكسة :

لكل الافتراض  $P(p, q, \dots)$  فإن  $P(p, q, \dots) \equiv P(p, q, \dots)$

٢ - علاقة متماثلة :

إذا كان  $P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$  فإن

$$Q(p, q, \dots) \equiv P(p, q, \dots)$$

٣ - علاقة ناقلة :

إذا كان  $P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$

وكان  $Q(p, q, \dots) \equiv R(p, q, \dots)$

فإن  $P(p, q, \dots) \equiv R(p, q, \dots)$

مثال ٢٨ : الافتراضيان

$$P(p, q) = p \leftrightarrow q$$

$$Q(p, q) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

متكافئان منطقيًا ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة للافتراض

$$P(p, q) \leftrightarrow Q(p, q)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$P(p, q)$	$Q(p, q)$	$P(p, q) \leftrightarrow Q(p, q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

أذن الافتراض  $P(p, q) \leftrightarrow Q(p, q)$  صائب منطقيًا، أي إن

$$P(p, q) \equiv Q(p, q) \text{ وبالتالي ينتج أن } P(p, q) \leftrightarrow Q(p, q)$$

نظرية ٤ : إذا كان الافتراضيان  $P(p, q, \dots)$  ,  $Q(p, q, \dots)$  كل منهما صائب منطقيا أو كل منهما خاطئ منطقيا فإن

$$P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$$

مثال ٢٩ : الافتراضيان

$$P(p, q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

$$Q(p, q) = \sim p \vee (p \vee q)$$

كل منهما صائب منطقيا وبالتالي فإن  $P(p, q) \equiv Q(p, q)$

مثال ٣٠ : الافتراضيان

$$P(p, q) = (p \wedge q) \wedge \sim (p \leftrightarrow q)$$

$$Q(p, q) = p \wedge \sim (p \vee q)$$

كل منهما خاطئ منطقيا وبالتالي فإن  $P(p, q) \equiv Q(p, q)$

ووفقا لمفهوم الإحلال فإنه يمكن صياغة النظرية الآتية :

نظرية ٥ : إذا كان  $P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$  فإن  $P(p_0, q_0, \dots) \equiv Q(p_0, q_0, \dots)$

لأى تقارير  $p_0, q_0, \dots$  تحمل مكان  $p, q, \dots$

مثال ٣١ : الافتراضيان

$$P(p, q) = p \leftrightarrow q \quad , \quad Q(p, q) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

متكافئان منطقيا، أى إن  $P(p, q) \equiv Q(p, q)$  (من مثال (٢٨)). والآن نفرض التقارير

$p_0$  : الجو بارد

$q_0$  : الشمس مشرقة

أذن وفقا لمفهوم الإحلال فإن  $P(p_0, q_0) = Q(p_0, q_0)$

ووفقا لمفهوم الإحلال ونظرية ( ٥ ) فإنه يمكن أعاده صياغة قوانين جبر التقارير ليحل محلها قوانين جبر الافتراضات.

نظرية ٦ : لأي افتراضيان  $P(p,q, \dots)$  ,  $Q(p,q, \dots)$  فإن الشروط الثلاثة الآتية تكون متكافئة :

- ١ - الافتراض  $P(p,q, \dots) \rightarrow Q(p,q, \dots)$  صائب منطقيا .
- ٢ - الافتراض  $\sim P(p,q, \dots) \vee Q(p,q, \dots)$  صائب منطقيا .
- ٣ - الافتراض  $P(p,q, \dots) \wedge \sim Q(p,q, \dots)$  خاطئ منطقيا .

مثال ٣٢ : نفرض  $P(p, q) = p \wedge q$  ,  $Q(p, q) = p \leftrightarrow q$  وكما وضحنا بمثال ( ٢ ) فإن الافتراض  $P(p, q) \rightarrow Q(p, q)$  يكون صائب منطقيا ومن نظرية ( ٦ ) نستنتج أن الافتراض  $\sim (p \wedge q) \vee (p \leftrightarrow q)$  يكون صائب منطقيا وكذلك الافتراض  $(p \wedge q) \wedge \sim (p \leftrightarrow q)$  يكون خاطئ منطقيا.

ملاحظة :

يقال أن الافتراض  $P(p, q, \dots)$  يؤدي إلى الافتراض  $Q(p, q, \dots)$  (ويعنى آخر الافتراض  $P(p, q, \dots)$  تضمننا منطقيا للافتراض  $Q(p, q, \dots)$  ) ونرمز لذلك بالرمز  $P(p, q, \dots) \Rightarrow Q(p, q, \dots)$  إذا تحققت أحد شروط نظرية (٦).

مثال ٣٣ : أثبت أن  $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

الحل : باستخدام نظرية ( ٦ ) يمكن الإثبات بثلاث طرق

الطريقة الأولى: إثبات أن الافتراض  $p \wedge q \rightarrow p \vee q$  صائب منطقيا وهذا واضح من جدول الحقيقة الآتى:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

الطريقة الثانية: إثبات أن الافتراض  $\sim (p \wedge q) \vee (p \vee q)$  صائب منطقيا وهذا واضح من جدول الحقيقة الآتى:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim (p \wedge q) \vee (p \vee q)$
T	T	T	T	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T

الطريقة الثالثة: إثبات أن الافتراض  $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$  خاطئ منطقيا وهذا واضح من جدول الحقيقة الآتى:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim (p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	F	F	T	F

نظرية ٧ : العلاقة بين الافتراضيان  $P(p, q, \dots)$  ,  $Q(p, q, \dots)$  المعرفة بالصورة

$$P(p, q, \dots) \Rightarrow Q(p, q, \dots)$$

هي علاقة ترتيب جزئي أى إنها

١ - علاقة عاكسة :

لكل الافتراض  $P(p, q, \dots)$  فإن

$$P(p, q, \dots) \Rightarrow P(p, q, \dots)$$

٢ - علاقة غير متماثلة :

$$P(p, q, \dots) \Rightarrow Q(p, q, \dots)$$

إذا كان

$$Q(p, q, \dots) \Rightarrow P(p, q, \dots)$$

وكان

$$Q(p, q, \dots) \equiv P(p, q, \dots)$$

فإن

٣ - علاقة ناقلة :

$$P(p, q, \dots) \Rightarrow Q(p, q, \dots)$$

إذا كان

$$Q(p, q, \dots) \Rightarrow R(p, q, \dots)$$

وكان

$$P(p, q, \dots) \Rightarrow R(p, q, \dots)$$

فإن

نظرية ٨ : إذا كان  $P(p, q, \dots) \Rightarrow Q(p, q, \dots)$  فإن

$$P(p_0, q_0, \dots) \Rightarrow Q(p_0, q_0, \dots)$$

لأى تقارير  $p_0, q_0, \dots$  تحل مكان  $p, q, \dots$  .

البرهان : حيث أن  $P(p, q, \dots) \Rightarrow Q(p, q, \dots)$  أذن من التعريف ينتج أن الافتراض

$P(p, q, \dots) \rightarrow Q(p, q, \dots)$  يكون صائب منطقيا ومن مفهوم الإحلال

(نظرية ١) أذن الافتراض  $P(p_0, q_0, \dots) \rightarrow Q(p_0, q_0, \dots)$  يكون أيضا صائب منطقيا لآى تقارير  $p_0, q_0, \dots$  محل مكان  $p, q, \dots$  وبالتالي يتبع المطلوب

$$P(p_0, q_0, \dots) \Rightarrow Q(p_0, q_0, \dots)$$

مثال ٣٤ : فى مثال ( ٣٣ ) أثبتنا أن

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$$

والآن نفرض التقارير

مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين  $p_0$  :

مجموع عددين زوجيين يكون عدد زوجى  $q_0$  :

أذن من نظرية ( ٨ ) فإن

$$p_0 \wedge q_0 \Rightarrow p_0 \vee q_0$$

ملاحظة :

لآى افتراضيان  $P(p_0, q_0, \dots)$  ,  $Q(p_0, q_0, \dots)$  فإن

$$P(p_0, q_0, \dots) \wedge Q(p_0, q_0, \dots) \Rightarrow P(p_0, q_0, \dots) \vee Q(p_0, q_0, \dots)$$

مثال ٣٥ : أثبت أنه لآى افتراض  $P(p, q, \dots)$  فإن

$$p \Rightarrow p \vee P(p, q, \dots)$$

الحل : حيث أن  $p \Rightarrow p \vee q$  ( من مثال ( ٥ ) )

أذن من نظرية ( ٨ ) فإن الافتراض  $P(p, q, \dots)$  يمكن أن يحل مكان  $q$  .

أى إن

$$p \Rightarrow p \vee P(p, q, \dots)$$

## تمارين الفصل الثالث

١ - استخدم جداول الحقيقة في توضيح التقارير الصائبة منطقيا ( التحصيل الحاصل )  
والتقارير الخاطئة منطقيا ( التناقض ) في كل مما يأتي :

- |   |   |
|---|---|
| (1) - $p \wedge q \rightarrow q$                        | (6) - $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$         |
| (2) - $p \vee q \rightarrow q$                          | (7) - $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$            |
| (3) - $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow p \vee \sim q$ | (8) - $q \leftrightarrow \sim p \underline{\vee} q$ |
| (4) - $p \wedge q \leftrightarrow \sim p \wedge q$      | (9) - $p \underline{\vee} q \rightarrow \sim p$     |
| (5) - $\sim p \vee q \leftrightarrow p \rightarrow q$   | (10) - $p \wedge (q \vee r)$                        |

٢ - وضح التقارير الصائبة منطقيا فيما يأتي :

- |   |
|---|
| (1) - $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$  |
| (2) - $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$                                    |
| (3) - $(p \rightarrow q \wedge r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ |
| (4) - $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$      |
| (5) - $(\sim p \rightarrow \sim r) \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow q)$    |

٣ - حدد الصواب والخطأ في كل مما يأتي :

- |   |   |
|---|---|
| (1) - $p \Rightarrow p \wedge q$                        | (6) - $p \underline{\vee} q \Rightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \wedge q)$   |
| (2) - $p \Rightarrow p \vee q$                          | (7) - $p \underline{\vee} q \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$ |
| (3) - $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$      | (8) - $\sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$                            |
| (4) - $q \Rightarrow p \rightarrow q$                   | (9) - $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$                        |
| (5) - $p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p$ | (10) - $p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r$                        |

٤ - أثبت كل مما يأتى :

- (1) -  $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$
- (2) -  $\sim p \Rightarrow p \rightarrow q$
- (3) -  $q \Rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p$
- (4) -  $p \vee q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q$
- (5) -  $\sim(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
- (6) -  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$
- (7) -  $p \underline{\vee} q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$
- (8) -  $(p \rightarrow \sim q) \wedge (r \rightarrow q) \wedge r \Rightarrow \sim p$
- (9) -  $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
- (10) -  $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q$

٥ - باستخدام جداول الحقيقة أثبت كل مما يأتى :

- (1) -  $p \rightarrow \sim q \equiv q \rightarrow \sim p$
- (2) -  $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
- (3) -  $p \vee q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q$
- (4) -  $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$
- (5) -  $p \underline{\vee} q \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$   
 $\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
- (6) -  $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv q \leftrightarrow p$
- (7) -  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- (8) -  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- (9) -  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- (10) -  $p \rightarrow (\sim q \wedge r) \equiv \sim p \vee (\sim q \wedge r)$

٦ - استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير مكافئ في كل من التقارير الآتية :

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| (1) - $\sim p \wedge q$        | (6) - $\sim (\sim p \wedge \sim q)$                |
| (2) - $p \wedge \sim q$        | (7) - $(p \wedge q) \vee r$                        |
| (3) - $\sim (p \wedge q)$      | (8) - $\sim (r \vee p \leftrightarrow q) \wedge s$ |
| (4) - $\sim (\sim p \wedge q)$ | (9) - $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$           |
| (5) - $\sim p \rightarrow q$   | (10) - $(\sim p \vee q \rightarrow r) \wedge s$    |

٧ - استخدم قانون ديمورجان في أعاده صياغة كل من التقارير الآتية :

- ١ ( من الخطأ القول انه إذا كانت السماء لا تمطر فإن الشمس تكون مشرقة .
- ٢ ( المنطق الرياضى لغة علمية ولا غنى عنها في الرياضيات .
- ٣ ( من الخطأ أن نقول ما لا نعبه أو لا نعنى بما نقوله .
- ٤ ( المنطق الرياضى هو علم التفكير الدقيق ومن الخطأ أن نقول انه يوجد له قواعد غير واضحة أو لغته العلمية غير مفهومة .
- ٥ ( من الخطأ القول أن الشباب يجدون فرص عمل جديدة والصحراء من حولنا لا يتم تعميرها .
- ٦ ( ليس صحيحا أن اليوم أو غدا إجازة .
- ٧ ( إما الطائرة تأخرت عن الإقلاع أو ساعتي غير مضبوطة .
- ٨ ( هو غير سعيد لكن إذا اخلص في عمله فسوف يكون سعيد .
- ٩ ( هو سعيد لكن إذا لم يخلص في عمله فإنه لن يكون سعيد .
- ١٠ ( إما هو غير سعيد أو غير مخلص في عمله .

٨ - بسط كلا من التقارير الآتية :

- ١ ) من الخطأ القول أن الشمس ساطعة أو السماء لا تمطر بينما الريح عاصف.
- ٢ ) ليس صحيحا أن سطوع الشمس أو عدم وجود رياح عاصفة شرط كافى لعدم سقوط المطر.
- ٣ ) ليس صحيحا أن الشرط الضرورى لعدم سقوط المطر هو أن تكون الشمس مشرقة.
- ٤ ) ليس صحيحا أن عدم الإخلاص فى العمل يودى إلى السعادة أو النجاح فى الحياة.
- ٥ ) من الخطأ القول أن الشباب لا يجدون فرص عمل جديدة والصحراء من حولنا يتم تعميرها.
- ٦ ) ليس من الحقيقى أن الغربية عن الوطن غير صعبة إذا ما كانت الأسرة معى.
- ٧ ) من الخطأ القول أن اليوم يكون السبت شرط كافى لكى يكون غدا هو يوم الأحد.
- ٨ ) أن لا يكون غدا هو يوم الأحد شرط ضرورى لكى لا يكون اليوم هو يوم السبت.
- ٩ ) ليس من الحقيقى انه إذا كان  $x^2 \neq 4$  فإن  $x = 2$  أو  $x = -2$ .
- ١٠ ) من الخطأ أن نقول انه إذا كان العدد  $x$  غير زوجى فإنه يكون عدد أولى.

٩ - استخدم التكافؤ  $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  فى إعادة صياغة كل من التقارير الآتية :

- ١ ) إذا كان اليوم هو يوم الثلاثاء فإن غدا لن يكون يوم الأحد .
- ٢ ) إذا لم تلتزم بالنظام داخل قاعة الدراسة فإننى سوف أخرجك من القاعة .
- ٣ ) عدم المواظبة على حضور المحاضرات شرط كافى للحرمان من دخول الامتحان.
- ٤ ) الشرط الضرورى لكى يكون مخلص فى عمله هو أن يكون سعيد .
- ٥ ) إذا كان غير مخلص فى عمله فإنه لن يكون ناجح فى حياته .
- ٦ ) إذا كان الجو حار فإن الأمطار لن تسقط .
- ٧ ) السماء لن تمطر و الشمس لن تسطع إذا كانت الرياح غير عاصفة .
- ٨ ) إذا كانت الرياح عاصفة فإن السماء تمطر أو الشمس غير ساطعة .

- ٩ ( سطوع الشمس أو عدم وجود رياح عاصفة شرط كافى لسقوط المطر .
- ١٠ ( إذا لم تستحى فافعل ما تشاء .
- ١١ ( فى المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين .
- ١٢ ( إذا كان المثلث غير قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين .
- ١٣ ( إذا كان مربع طول الوتر فى مثلث لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين فإن المثلث لا يكون قائم الزاوية .
- ١٤ ( يقال أن الزاويتان متتامتان إذا كان مجموعهم يساوى ٩٠ درجة .
- ١٥ ( إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا .
- ١٦ ( إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتين فى القياس وكل زاويتين متناظرتين متساويتين فى القياس .
- ١٧ ( يتوازى المستقيمان إذا قطعهما مستقيم ثالث و كانت إمساً زاويتان متبادلتان متساويتان فى القياس أو زاويتان متناظرتان متساويتان فى القياس .
- ١٨ ( إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتين فى القياس .
- ١٩ (  $x$  عددا زوجيا شرط كافى لكى يكون  $x^2$  عددا زوجيا .
- ٢٠ ( إذا كان  $x$  عددا أوليا و أكبر من 3 فإنه لن يكون عددا زوجيا .
- ١٠ ( - استخدم قوانين جبر التقارير فى تبسيط كل من التقارير الآتية :

- 1 -  $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$
- 2 -  $p \wedge (\sim p \vee q)$
- 3 -  $\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q)$

- 4-  $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$   
 5-  $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$   
 6-  $((p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)) \vee (\sim p \wedge \sim q)$   
 7-  $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$   
 8-  $((p \wedge r) \vee (p \wedge \sim q)) \vee q$   
 9-  $(p \wedge (\sim q \vee r)) \vee q$   
 10-  $(p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (\sim q \wedge p))$

١١ - اكتب عكس ومقلوب ومضاد كلا من التقارير الآتية موضحا قيمة الحقيقة في كل حالة :

- ١ ( إذا كان  $x=4$  فإن  $x^3=64$  .  
 ٢ (  $a+c=b+c$  بشرط أن  $a=b$  .  
 ٣ ( إذا كان  $a < b$  فإن  $a+c < b+c$  .  
 ٤ ( إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتين .  
 ٥ ( إذا كان العدد  $x$  يقبل القسمة على 12 فإنه يقبل القسمة على 6 .  
 ٦ (  $x > 5$  شرط ضرورى لكي يكون  $x > 3$  .  
 ٧ (  $x > 5$  شرط كافي لكي يكون  $x > 3$  .  
 ٨ ( اتصال الدالة عند النقطة شرط كافي لكي تكون الدالة قابلة للتفاضل عند هذه النقطة.  
 ٩ ( الشرط الكافي لتفاضل الدالة عند نقطة هو أن تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة.  
 ١٠ ( الشرط الضرورى لتفاضل الدالة عند نقطة هو أن تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة .

١٢ - اكتب عكس ومقلوب ومضاد ونفى كلا من التقارير الآتية في ابسط صورة :

١ ( إذا كان اليوم هو يوم الثلاثاء فإن غدا لن يكون الخميس .

٢ ( اليوم ليس الأحد فقط إذا كان غدا ليس الاثنين .

٣ ( إذا لم تفهم التقارير المتكافئة جيدا فأنصحك بقراءتها بعناية من جديد .

٤ ( إذا كنت تعمل بإخلاص فإنك سوف تحقق النجاح .

٥ ( فاقد الشيء لا يعطيه .

١٣ - أثبت أنه لأي افتراض  $P(p, q, \dots)$  فإن

$$1) \quad p \Rightarrow p \wedge P(p, q, \dots)$$

$$2) \quad p \wedge P(p, q, \dots) \Rightarrow p$$

$$3) \quad p \wedge P(p, q, \dots) \Rightarrow p \vee P(p, q, \dots)$$

١٤ - إذا كان  $P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$  فأثبت أن  $P(p_0, q_0, \dots) \equiv Q(p_0, q_0, \dots)$

لأي تقارير  $p_0, q_0, \dots$  تحمل مكان  $p, q, \dots$  .

١٥ - للافتراضات

$$P(p, q, r) = p \rightarrow (\sim q \wedge r)$$

$$Q(p, q, r) = \sim(p \wedge q) \wedge (\sim q \vee r)$$

$$R(p, q, r) = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$S(p, q, r) = \sim p \vee (\sim q \vee r)$$

$$T(p, q, r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

وضح الصواب والخطأ في كل مما يأتي :

$$(1) - P(p, q, r) \equiv Q(p, q, r)$$

$$(2) - P(p, q, r) \Rightarrow Q(p, q, r)$$

$$(3) - R(p, q, r) \Rightarrow T(p, q, r)$$

$$(4) - R(p, q, r) \Leftrightarrow S(p, q, r)$$

$$(5) - S(p, q, r) \equiv T(p, q, r)$$