

الفصل



المقاييس (الأسوار)

Quantifiers

١ - الدوال الافتراضية (دوال التقارير)

نعلم أن التقرير هو جملة خبرية ذات معنى تحمل خبراً ويمكن الحكم بأنها إما صائبة وإما خاطئة ولا تكون صائبة وخاطئة في آن واحد، وتوجد بعض الجمل التي تحتوي على رموز تسمى متغيرات، وهذه المتغيرات تأخذ قيمة معينة ومثل هذه الجمل تسمى بالجمل المفتوحة ولتوضيح ذلك نفرض الجملة

" $x > 6$ حيث x عدد ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية $\{1, 2, 3, \dots\}$ "

هذه الجملة لا تمثل تقرير لأنها تحمل الصواب أو الخطأ وذلك تبعاً لقيمة المتغير x التي يتم التعويض بها في الجملة، فمثلاً إذا وضعنا $x = 8$ فإن الجملة تصبح " $8 > 6$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة صواب أما إذا وضعنا $x = 4$ فإن الجملة تصبح " $4 > 6$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة خطأ. وكمثال آخر نفرض الجملة

" $x + y > 5$ حيث x, y أعداد تنتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية "

هذه الجملة أيضاً لا تمثل تقرير لأنها تحمل الصواب أو الخطأ وذلك تبعاً لقيمة المتغيرات x, y التي يتم التعويض بها في الجملة، فمثلاً إذا وضعنا $y = 4, x = 2$ فإن الجملة تصبح " $2 + 4 > 5$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة صواب أما إذا وضعنا $y = 3, x = 1$ فإن الجملة تصبح " $1 + 3 > 5$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة خطأ.

تعريف ١ : الجملة المفتوحة هي جملة تحتوي على متغير أو أكثر وهذه الجملة تتحول إلى تقرير عند إعطاء المتغير أو المتغيرات قيمة معينة، ومجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير أو المتغيرات تسمى مجموعة التعويض والجملة المفتوحة تسمى دالة افتراضية.

تعريف ٢: نفرض أن المجموعة A معطاة ضمناً (مجموعة التعويض)، الدالة الافتراضية أو ببساطة الجملة المفتوحة للمجموعة A يرمز لها $p(x)$ وهي تحقق الخاصية "لكل $a \in A$ فإن $p(a)$ تكون تقرير صواب أو خطأ" أى إن

" $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A إذا كان لأى عنصر $a \in A$

يحل محل المتغير x فى $p(x)$ فإن $p(a)$ تصبح تقرير."

مثال ١: نفرض مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ ونفرض أن $p(x)$ ترمز إلى الجملة " $x + 3 > 8$ "

أذن $p(x)$ تمثل دالة افتراضية فى N ونلاحظ أن

$p(1)$ هو التقرير " $1 + 3 > 8$ " وهو تقرير خاطئ

بينما

$p(6)$ هو التقرير " $6 + 3 > 8$ " وهو تقرير صائب.

مثال ٢: نفرض مجموعة الأعداد المركبة $C = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

ونفرض أن $p(x)$ ترمز إلى الجملة " $x + 3 > 8$ "

أذن $p(x)$ لا تمثل دالة افتراضية فى C لان العلاقة $>$ غير معرفة على مجموعة الأعداد المركبة .

تعريف ٣: إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A أذن مجموعة العناصر $a \in A$ التى يكون عندها التقرير $p(a)$ صواب تسمى مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ ويرمز لها T_p ، أى إن

$$T_p = \{ a \mid a \in A, p(a) \text{ صواب} \}$$

أو اختصارا يكتب

$$T_p = \{ a \mid p(a) \}$$

مثال ٣ : نفرض أن $p(x)$ هي الدالة الافتراضية " $x + 3 > 8$ " المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N . أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هي

$$\begin{aligned} T_p &= \{ a \mid a \in N, a + 3 > 8 \} \\ &= \{ 6, 7, 8, \dots \} \subset N \end{aligned}$$

مثال ٤ : نفرض أن $p(x)$ هي الدالة الافتراضية " $x + 3 > 2$ " المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N . أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هي

$$T_p = \{ a \mid a \in N, a + 3 > 2 \} = N$$

مثال ٥ : نفرض أن $p(x)$ هي الدالة الافتراضية " $x + 3 < 2$ " المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N . أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هي

$$\begin{aligned} T_p &= \{ a \mid a \in N, a + 3 < 2 \} \\ &= \Phi \end{aligned}$$

أى إن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هي المجموعة الخالية.

مثال ٦ : نفرض أن $p(x)$ هي الدالة الافتراضية " $x^2 + 2 > 5$ " المعرفة على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$. أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هي

$$\begin{aligned} T_p &= \{ a \mid a \in (-1, 1), a^2 + 2 > 5 \} \\ &= \Phi \end{aligned}$$

أى إن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هي المجموعة الخالية.

نلاحظ من الأمثلة ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ أنه إذا كانت $p(x)$ دالة المتراضية معرفة على المجموعة A فإن $p(a)$ يمكن أن تكون صواب لبعض $a \in A$ أو صواب لكل $a \in A$ أو ليست صواب لكل $a \in A$ ، أى إن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ على المجموعة A يمكن أن تكون

$$T_p = \Phi \quad \text{أو} \quad T_p = A \quad \text{أو} \quad T_p \subset A$$

٢ - تقارير تحتوى على مقاييس (الأسوار Quantifiers)

في حديثنا اليومى كثيرا ما يصدر عنا بعض العبارات التى تشتمل على الكلمات (كل - جميع - بعض - يوجد بعض - ...) وكأمثلة على ذلك العبارات الآتية :

- كل الطلاب حضروا الامتحان .
- جميع طلاب قسم الرياضيات يدرسون المنطق الرياضى .
- بعض الأعداد الصحيحة يكون سالب .
- يوجد بعض الطلاب راسبون .
- لكل مجتهد نصيب .

ومثل هذه الكلمات تسمى مقاييس (أسوار) ، والكلمات (كل - جميع) تعتبر بمثابة تسوير كلى للعبارة، بمعنى أننا نقوم بتشيد سورا كاملا حول العبارة بحيث لا يفلت منها أى عنصر، فعندما نقول

" كل الطلاب حضروا الامتحان "

فمعنى ذلك أن كلمة كل قد شيدت سورا كاملا حول العبارة (الطلاب حضروا الامتحان) أى لم يتغيب أحد على الإطلاق وذلك بسبب قوة كلمة كل، وعندما نقول جميع الأعداد

الطبيعية موجبة فمعنى ذلك انه لا يوجد أى عدد طبيعي مهما كان غير موجب والسبب أن كلمة جميع هي بمثابة تسوير كلى للعبارة. إما الكلمات (بعض - يوجد بعض) فتعتبر بمثابة تسوير جزئى حول العبارة يحمى جزء واحد فقط من العبارة بينما بقية الأجزاء غير محمية. فعندما نقول

" بعض الأعداد الصحيحة يكون سالب "

فمعنى ذلك أن السور تم تشيده حول الأعداد السالبة فقط وهذه العبارة تعنى أن هناك أعداد صحيحة تكون غير سالبة.

ويستخدم الرمز $\forall$ للتعبير عن كلمة (كل - جميع) أو ما شابه ذلك فى المعنى ويستخدم الرمز $\exists$ للتعبير عن كلمة (يوجد - يوجد بعض) أو ما شابه ذلك فى المعنى.

تعريف ٤ : المقياس الشامل Universal Quantifier

إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A أذن التقرير

" لكل عنصر x فى المجموعة A فإن $p(x)$ تقرير صواب "

أو بالاختصار التقرير

" لكل x فإن $p(x)$ "

يمكن التعبير عنه بالصورة

$$(\forall x \in A) (p(x))$$

أو بالصورة المختصرة

$$\forall x, p(x)$$

والرمز $\forall$ والذي يقرأ "لكل" أو "لجميع" يسمى مقياس شامل.

ملاحظات :

١ - إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A وكان مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هي نفسها المجموعة A ، أى إن $T_p = A$ فإن التقرير " $\forall x, p(x)$ " يكون صواب.

٢ - إذا كان $T_p \neq A$ فإن التقرير " $\forall x, p(x)$ " يكون خطأ.

٣ - الدالة الافتراضية $p(x)$ في حد ذاتها هي جملة مفتوحة ولذلك ليس لها قيمة حقيقة لكن عند كتابة المقياس $\forall$ أمام $p(x)$ فإن " $\forall x, p(x)$ " تصبح تقرير وبالتالي له قيمة حقيقة.

مثال ٧ : نفرض أن $p(x)$ هي الدالة الافتراضية " x حضر الامتحان" وان S ترمز إلى مجموعة الطلاب في مدرسة ما، أذن التقرير
"كل الطلاب حضروا الامتحان"

يمكن أن يكتب بالصورة

$$\forall x, p(x) \quad \text{أو اختصاراً} \quad (\forall x \in S) (p(x))$$

مثال ٨ : أوجد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية :

1) - $(\forall n \in \mathbb{N}) (n + 3 > 2)$

2) - $(\forall n \in \mathbb{N}) (n + 3 > 6)$

الحل :

١ - التقرير $(\forall n \in \mathbb{N}) (n + 3 > 2)$ صواب لأن

$$\{ n \mid n + 3 > 2 \} = \{ 1, 2, 3, \dots \} = \mathbb{N}$$

$$(2) - \text{التقرير } (\forall n \in \mathbb{N}) (n + 3 > 6) \text{ خطأ لأن} \\ \{ n \mid n + 3 > 6 \} = \{ 4, 5, 6, \dots \} \neq \mathbb{N}$$

مثال ٩ : يمكن استخدام المقياس الشامل $\forall$ لتعريف تقاطع عائلة من المجموعات $\{ A_i \}_{i \in J}$ ، حيث J تمثل مجموعة من الأعداد الطبيعية (منتهية أو غير منتهية)، كالآتي

$$\bigcap_{i \in J} A_i = \{ x \mid \forall i \in J, x \in A_i \}$$

تعريف ٥ : مقياس الوجود Existential Quantifier

إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A أذن التقرير "يوجد عنصر x في المجموعة A بحيث أن $p(x)$ تقرير صواب" أو بالاختصار

"يوجد بعض x بحيث أن $p(x)$ "

يمكن التعبير عنه بالصورة

$$(\exists x \in A) (p(x))$$

أو بالصورة المختصرة

$$\exists x : p(x)$$

الرمز $\exists$ والذي يقرأ يوجد أو يوجد بعض أو لواحد على الأقل يسمى مقياس وجود والرمز ":" يستخدم عادة ليعبر عن "بحيث أن".

ملاحظات :

١ - إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A وكان مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ غير خالية،

أى إن $T_p \neq \Phi$ فإن التقرير " $\exists x : p(x)$ " يكون صواب.

٢ - إذا كان $T_p = \Phi$ فإن التقرير " $\exists x : p(x)$ " يكون خطأ.

٣ - الدالة الافتراضية $p(x)$ فى حد ذاتها هى جملة مفتوحة ولذلك ليس لها قيمة صواب لكن عند كتابة المقياس $\exists$ أمام $p(x)$ فإن " $\exists x : p(x)$ " تصبح تقرير وبالتالي له قيمة صواب.

مثال ١٠ : أوجد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية :

$$1) - (\exists n \in \mathbb{N}) (n+3 < 8)$$

$$2) - (\exists n \in \mathbb{N}) (n+3 < 2)$$

الحل :

$$1) - \text{التقرير } (\exists n \in \mathbb{N}) (n+3 < 8) \text{ صواب لأن } \{ n \in \mathbb{N} \mid n+3 < 8 \} = \{ 1, 2, 3, 4 \} \neq \Phi$$

$$2) - \text{التقرير } (\exists n \in \mathbb{N}) (n+3 < 2) \text{ خطأ لأن } \{ n \in \mathbb{N} \mid n+3 < 2 \} = \Phi$$

مثال ١١ : يمكن استخدام مقياس الوجود $\exists$ لتعريف اتحاد عائلة المجموعات $\{ A_i \}_{i \in J}$ ، حيث J تمثل مجموعة من الأعداد الطبيعية (منتهية أو غير منتهية)، كالاتى

$$\bigcup_{i \in J} A_i = \{ x \mid \exists i \in J : x \in A_i \}$$

مثال ١٢ : اختر صحة التقرير

" يوجد عدد طبيعى n بحيث أن $20 < n^2 < 60$ "

الحل : يمكن كتابة التقرير بالصورة

$$\exists n \in \mathbb{N} : 20 < n^2 < 60$$

وحيث أن

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 20 < n^2 < 60\} = \{5, 6, 7\} \neq \Phi$$

أذن التقرير يكون صواب .

مثال ١٣ : حدد نوع المقياس (شامل - وجود) في كلا من التقارير الآتية ثم اعد صياغة التقرير في صورة رمزية:

- (١) بعض الطلاب يحبون دراسة المنطق .
- (٢) كل المثلثات متساوية الأضلاع .
- (٣) جميع الأعداد الطبيعية موجبة .
- (٤) يوجد عدد حقيقي x يحقق المعادلة $x^2 - 5 = 0$.
- (٥) يوجد بعض الأعداد الطبيعية مربعها يساوي 16 .
- (٦) يوجد حل للمعادلة $x^2 + 4 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة .
- (٧) القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي تكون غير سالبة .
- (٨) كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين 0, 1 مربعها يكون اقل من 1 .

الحل : في الجدول الآتي نحدد نوع المقياس ونضع التقارير والمناظر لها باستخدام الرموز :

التقرير في صيغة جملة إنشائية	المقياس	التقرير باستخدام الرموز
(١) بعض الطلاب يحبون دراسة المنطق.	وجود	x يحب دراسة المنطق $\exists x \in S$ حيث S مجموعة الطلاب.
(٢) كل المثلثات متساوية الأضلاع.	شامل	x مثلث متساوي الأضلاع $\forall x \in T$ حيث T مجموعة المثلثات.
(٣) جميع الأعداد الطبيعية موجبة.	شامل	$\forall x \in \mathbb{N}, x > 0$

التقرير في صيغة جملة إنشائية	المقياس	التقرير باستخدام الرموز
(٤) يوجد عدد حقيقي x يحقق المعادلة $x^2 - 5 = 0$.	وجود	$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 5 = 0$
(٥) يوجد بعض الأعداد الطبيعية مربعها يساوي 16.	وجود	$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 16$
(٦) يوجد حل للمعادلة $x^2 + 4 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة.	وجود	$\exists x \in \mathbb{C} : x^2 + 4 = 0$
(٧) القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي تكون غير سالبة.	شامل	$\forall x \in \mathbb{R} , x \geq 0$
(٨) كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين 0 و 1 مربعها يكون أقل من 1.	شامل	$\forall x \in (0,1) , x^2 < 1$

مثال ١٤ : حول الجمل الآتية من صيغة الرموز إلى جمل إنشائية

- 1- $\forall x \in \mathbb{N} , x + 3 > 5$
- 2- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3x$
- 3- $\exists x \in S$: (مجموعة الطلاب بالفصل) x طالب غير مجتهد
- 4- $\forall x \in \mathbb{R} , x \geq 0$
- 5- $\exists x \in T$: (مجموعة الثلاثات) x مثلث متساوي الأضلاع

الحل :

١ - لكل عدد طبيعي x فإن $x + 3 > 5$.

٢ - يوجد عدد حقيقي x بحيث يحقق المعادلة $x^2 = 3x$.

٣ - بعض طلاب الفصل غير مجتهدون.

٤ - كل الأعداد الحقيقية غير سالبة.

٥ - يوجد بعض المثلثات المتساوية الأضلاع.

مثال ١٥ : بفرض أن مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية.

1- $\forall x, |x| = x$

3- $\exists x : x^2 = 3x$

2- $\forall x, x + 2 > x$

4- $\exists x : x + 1 \leq x$

الحل :

١ - خطأ : نلاحظ انه إذا كان x عدد سالب فإن $|x| \neq x$.

٢ - صواب : لأنه لكل عدد حقيقى x يوجد حل للمتبينة $x + 2 > x$.

٣ - صواب : لأنه بوضع $x = 3$ تتحقق المعادلة $x^2 = 3x$.

٤ - خطأ : لأنه لا يوجد حل للمتبينة $x + 1 \leq x$.

مثال ١٦ : بفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية:

1- $\exists x \in A : x + 2 = 9$

3- $\forall x \in A, x + 2 \leq 6$

2- $\forall x \in A, x + 2 < 9$

4- $\exists x \in A : 2x + 1 < 6$

الحل :

١ - خطأ : لأنه لا يوجد عدد في المجموعة A يحقق المعادلة $x + 2 = 9$.

٢ - صواب : لان كل عدد في المجموعة A يحقق المتبينة $x + 2 < 9$.

٣ - خطأ : لان $x = 5$ لا تحقق المتبينة $x + 2 \leq 6$.

٤ - صواب : لأنه بوضع $x = 1$ أو $x = 2$ تتحقق المتبينة $2x + 1 < 6$.

مثال ١٧ : حدد قيمة الحقيقة في كل من التقارير الآتية :

1) $\exists n \in \{1, 2, 3, 4\} : (n^2 \leq 8) \vee (n^3 > 30)$

2) $\forall n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, n^2 \leq 10 \rightarrow n^3 < 25$

الحل :

١) بأخذ $n = 1$ أو $n = 2$ نجد أن

$$n^2 \leq 8 \quad \text{صواب}$$

$$n^3 > 30 \quad \text{خطأ}$$

ومن تعريف أداة الفصل، أذن في هذه الحالة $(n^2 \leq 8) \vee (n^3 > 30)$ يكون

صواب وبالتالي التقرير المعطى يكون صواب ونلاحظ أيضا انه إذا أخذنا $n = 4$ فإن

$$n^2 \leq 8 \quad \text{خطأ}$$

$$n^3 > 30 \quad \text{صواب}$$

أذن في هذه الحالة أيضا $(n^2 \leq 8) \vee (n^3 > 30)$ يكون صواب وبالتالي التقرير

المعطى يكون صواب.

٢) لمعرفة قيمة الحقيقة للتقرير

$$\forall n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad n^2 \leq 10 \rightarrow n^3 < 25$$

نبحث في جميع قيم n المختلفة ونستخدم تعريف أداة الشرطية كما موضح بالجدول

الآتي:

n	$n^2 \leq 10$	$n^3 < 25$	$n^2 \leq 10 \rightarrow n^3 < 25$
1	صواب $1 \leq 10$	صواب $1 < 25$	صواب
2	صواب $4 \leq 10$	صواب $8 < 25$	صواب
3	صواب $9 \leq 10$	خطأ $27 < 25$	خطأ
4	خطأ $16 \leq 10$	خطأ $64 < 25$	صواب
5	خطأ $25 \leq 10$	خطأ $125 < 25$	صواب

ويتضح من الجدول أن التقرير لا يتحقق في حالة $n = 3$ ، أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

٣ - نفى التقارير التى تحتوى على مقاييس

توجد بعض الأخطاء الشائعة عند نفى التقارير التى تحتوى على مقاييس ولتوضيح ذلك نفرض التقرير

" كل الطلاب حضروا الامتحان "

نلاحظ انه من الأخطاء الشائعة أن نفى هذا التقرير بقولنا "كل الطلاب لم يحضروا الامتحان" لان أحدهم ليس نفى للآخر، ولتوضيح ذلك نفترض أن بعض الطلاب حضروا وبعضهم غلب عن الامتحان حينئذ سيكون التقرير الأول خاطئ، وكذلك التقرير الثانى خاطئ وهذا يمثل تعارض حيث أننا نعلم أن قيمة الحقيقة لنفى التقرير تكون عكس قيمة الحقيقة للتقرير، ولكن من الواضح أننا نستطيع الحكم على خطأ التقرير "كل الطلاب حضروا الامتحان" إذا كان يوجد طالب واحد على الأقل لم يحضر الامتحان وعلى ذلك فإن نفى هذا التقرير يكون

"ليس من الحقيقى أن كل الطلاب حضروا الامتحان"

وهذا يعنى

" يوجد على الأقل طالب واحد لم يحضر الامتحان "

وحيث أن كلمة "بعض" تعنى "واحد على الأقل" فإن نفى التقرير يمكن ان يصاغ كما يلى:

" بعض الطلاب لم يحضروا الامتحان "

وبفرض أن A ترمز إلى مجموعة الطلاب، والدالة الافتراضية $p(x)$ ترمز إلى "x طالب حضر الامتحان" فإنه يمكننا صياغة القاعدة الآتية:

$$\sim (\forall x \in A, p(x)) \equiv \exists x \in A : \sim p(x)$$

أى إن

نفى التقرير $p(x)$ ، $\forall x$ والذي يحتوى على المقياس الشامل يتم فى الخطوات الآتية :

١ - تحويل المقياس الشامل $\forall$ إلى مقياس الوجود $\exists$

٢ - تحويل علامة الفاصلة " ، " إلى علامة حيث أن " : "

٣ - تحويل $p(x)$ إلى صيغة النفى $\sim p(x)$

وللتعرف على كيفية نفى تقرير يحتوى على مقياس الوجود $\exists$ نفرض التقرير

" بعض طلاب الفصل راسبون "

من الواضح أننا نستطيع الحكم على خطأ هذا التقرير إذا كان لا يوجد أى طالب راسب

وعلى ذلك فإن نفى هذا التقرير يكون

" ليس من الحقيقى أن بعض طلاب الفصل راسبون "

وهذا يعنى

" لا يوجد بالفصل أى طالب راسب "

أذن نفى التقرير يمكن ان يصاغ كما يلى :

" كل طلاب الفصل غير راسبون "

وبفرض أن A ترمز إلى مجموعة الطلاب، والدالة الافتراضية $p(x)$ ترمز إلى " x طالب

راسب " فإنه يمكننا صياغة القاعدة الآتية:

$$\sim (\exists x \in A : p(x)) \equiv \forall x \in A , \sim p(x)$$

أى إن

نفى التقرير $\exists x : p(x)$ والذي يحتوى على مقياس الوجود يتم فى الخطوات الآتية:

١ - تحويل مقياس الوجود $\exists$ إلى المقياس الشامل $\forall$

٢ - تحويل علامة حيث أن " : " إلى علامة الفاصلة " ، " ،

٣ - تحويل $p(x)$ إلى صيغة النفى $\sim p(x)$

نظرية (ديمورجان):

$$\sim (\forall x \in A, p(x)) \equiv \exists x \in A : \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x \in A : p(x)) \equiv \forall x \in A, \sim p(x)$$

مثال ١٨ : أوجد نفي كل من التقارير الآتية :

- ١ - جميع الرجال شجعان .
- ٢ - كل الأعداد الفردية أعداد أولية .
- ٣ - بعض الطلاب لم يكملوا واجباتهم .
- ٤ - يوجد بعض الطلبة غير مجتهدين .
- ٥ - لكل عدد طبيعى n فإن $n + 3 < 7$.

الحل :

بتطبيق قوانين ديمورجان

- ١ - التقرير — : " جميع الرجال شجعان " يحتوى على مقياس شامل
نفي التقرير يكون : " ليس من الحقيقى ان جميع الرجال شجعان "
 $\equiv$ " يوجد على الأقل أحد الرجال ليس شجاع "
 $\equiv$ " يوجد بعض الرجال ليسوا شجعانا "

- ٢ - التقرير — : " كل الأعداد الفردية أعداد أولية " يحتوى على مقياس شامل
نفي التقرير يكون : " ليس من الحقيقى ان كل الأعداد الفردية أعداد أولية "
 $\equiv$ " يوجد على الأقل عدد فردى وليس أولى "
 $\equiv$ " يوجد بعض الأعداد الفردية ليست أولية "

٣ - التقرير : " بعض الطلاب لم يكملوا واجباتهم " يحتوى على مقياس وجود
نفى التقرير يكون : " ليس من الحقيقى ان بعض الطلاب لم يكملوا واجباتهم "
≡ " كل الطلاب اكملوا واجباتهم "

٤ - التقرير : " يوجد بعض الطلبة غير مجتهدين " يحتوى على مقياس وجود
نفى التقرير يكون : " كل الطلاب مجتهدون "

٥ - التقرير : " لكل عدد طبيعى n فإن $n + 3 < 7$ " يحتوى على مقياس شامل
نفى التقرير يكون : " يوجد عدد طبيعى n بحيث ان $n + 3 < 7$ غير متحققة "
≡ " يوجد على الأقل عدد طبيعى n بحيث ان $n + 3 \geq 7$ "

مثال ١٩ : بفرض أن مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة التعويض ، أوجد نفى كل من
التقارير الآتية :

$$1. \quad \forall x, |x| = x$$

$$3. \quad \exists x : x^2 = 3x$$

$$2. \quad \forall x, x + 2 > x$$

$$4. \quad \exists x : x + 1 \leq x$$

الحل : بتطبيق قوانين دي مورجان

$$1. \quad \sim (\forall x, |x| = x) \equiv \exists x : \sim (|x| = x) \\ \equiv \exists x : |x| \neq x$$

$$2. \quad \sim (\forall x, x + 2 > x) \equiv \exists x : \sim (x + 2 > x) \\ \equiv \exists x : x + 2 \leq x$$

$$3. \quad \sim (\exists x : x^2 = 3x) \equiv \forall x, \sim (x^2 = 3x) \\ \equiv \forall x : x^2 \neq 3x$$

$$4. \quad \sim (\exists x : x + 1 \leq 1) \equiv \forall x, \sim (x + 1 \leq 1) \\ \equiv \forall x : x + 1 > 1$$

ملاحظة : بفرض أن $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A فإن $\sim p(x)$ تكون أيضا دالة افتراضية ويمكن الحصول عليها بكتابة " ليس من الحقيقى أن $p(x)$ " وتكون مجموعة الصواب للدالة $\sim p(x)$ هي مكملة مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ في المجموعة الشاملة A ، فإذا كانت $p(a)$ صواب فإن $\sim p(a)$ تكون خطأ والعكس صحيح. وفي الفصل الثانى استخدمنا الرمز $\sim$ كأداة من أدوات الربط للتقارير، وهنا تستخدم كعملية من عمليات الدوال الافتراضية ، وبالمثل يمكن استخدام أداة الوصل $\wedge$ وأداة الفصل $\vee$ كعمليات على الدوال الافتراضية ، وبفرض أن $p(x), q(x)$ دوال افتراضية فإن

$$p(x) \wedge q(x) \text{ تقرأ " } p(x) \text{ و } q(x) \text{ "}$$

$$p(x) \vee q(x) \text{ تقرأ " } p(x) \text{ أو } q(x) \text{ "}$$

ويمكن تطبيق قوانين جبر التقارير على الدوال الافتراضية فمثلا

$$\sim (p(x) \wedge q(x)) \equiv \sim p(x) \vee \sim q(x)$$

$$\sim (p(x) \vee q(x)) \equiv \sim p(x) \wedge \sim q(x)$$

$$\sim (p(x) \rightarrow q(x)) \equiv p(x) \wedge \sim q(x)$$

مثال ٢٠ : أوجد فى أبسط صورة نفى التقرير

" الآن وقت الصباح وكل الناس استيقظوا "

الحل : التقرير من نوع الوصلة .

نفرض

التقرير p : " الآن وقت الصباح "

التقرير q : " كل الناس استيقظوا " وهذا التقرير يحتوى على مقياس شامل

وباستخدام قانون دي مورجان

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

وحيث أن $p \sim$: " الآن ليس وقت الصباح "

$q \sim$: " بعض الناس لم يستيقظوا "

أذن نفى التقرير المعطى يكون

" الآن ليس وقت الصباح أو ليس صحيحا أن كل الناس استيقظوا "

وهذا يكافئ

" الآن ليس وقت الصباح أو بعض الناس لم يستيقظوا "

مثال ٢١ : أوجد في أبسط صورة نفى التقرير

" بعض المدارس مغلق اليوم أو كل الطلاب حاضرون "

الحل : التقرير من نوع الفاصلة .

نفرض

التقرير p : " بعض المدارس مغلق اليوم " وهذا التقرير يحتوى على مقياس وجود

التقرير q : " كل الطلاب حاضرون " وهذا التقرير يحتوى على مقياس شامل

وباستخدام قانون ديمورجان

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

أذن نفى التقرير يكون

" ليس صحيحا أن بعض المدارس مغلق اليوم وليس صحيحا أن كل الطلاب حاضرون "

وهذا يكافئ

" كل المدارس مفتوحة اليوم وبعض الطلاب غائبون "

مثال ٢٢ : أوجد في أبسط صورة نفى كل من التقارير الآتية :

١ - إذا كان الجو حار فإن بعض المزروعات لا تنمو .

٢ - الشرط الكافي لتلاشى كل السحب اليوم هو سقوط بعض الأمطار .

الحل :

١ - التقرير من نوع الشرطية .

نفرض

التقرير p : " الجو حار "

التقرير q : " بعض المزروعات لا تنمو " وهذا التقرير يحتوى على مقياس وجود

أذن التقرير يكون على الصورة $p \rightarrow q$ وحيث إن

$$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن نفي التقرير يكون

" الجو حار وليس صحيحا أن بعض المزروعات لا تنمو "

وهذا يكافئ

" الجو حار وكل المزروعات تنمو "

٢ - التقرير من نوع الشرطية .

نفرض

التقرير p : " كل السحب تتلاشى اليوم " وهذا التقرير يحتوى على مقياس شامل

التقرير q : " بعض الأمطار تسقط " وهذا التقرير يحتوى على مقياس وجود

أذن التقرير يكون على الصورة $q \rightarrow p$ وحيث إن

$$\sim (q \rightarrow p) \equiv q \wedge \sim p$$

أذن نفي التقرير يكون

"بعض الأمطار تسقط وليس صحيحا أن كل السحب تتلاشى اليوم"

وهذا يكافئ

"بعض الأمطار تسقط وبعض السحب لن تتلاشى اليوم"

مثال ٢٣ : أوجد في أبسط صورة نفى كل من التقارير الآتية :

$$1. (\forall x, p(x)) \wedge (\exists y : q(y))$$

$$2. (\exists x : p(x)) \vee (\forall y, q(y))$$

$$3. (\exists x : p(x)) \rightarrow (\forall y, q(y))$$

$$4. \forall x, \exists y : p(x) \vee q(y)$$

$$5. \exists y : \exists x : p(x) \wedge \sim q(y)$$

الحل :

$$\begin{aligned} ١ - \text{حيث أن} \quad \sim (p \wedge q) &\equiv \sim p \vee \sim q \quad \text{أذن} \\ \sim ((\forall x, p(x)) \wedge (\exists y : q(y))) &\equiv \sim (\forall x, p(x)) \vee \sim (\exists y : q(y)) \\ &\equiv (\exists x : \sim p(x)) \vee (\forall y, \sim q(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٢ - \text{حيث أن} \quad \sim (p \vee q) &\equiv \sim p \wedge \sim q \quad \text{أذن} \\ \sim ((\exists x : p(x)) \vee (\forall y, q(y))) &\equiv \sim (\exists x : p(x)) \wedge \sim (\forall y, q(y)) \\ &\equiv (\forall x, \sim p(x)) \wedge (\exists y : \sim q(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٣ - \text{حيث أن} \quad \sim (p \rightarrow q) &\equiv p \wedge \sim q \quad \text{أذن} \\ \sim ((\exists x : p(x)) \rightarrow (\forall y, q(y))) &\equiv (\exists x : p(x)) \wedge \sim (\forall y, q(y)) \\ &\equiv (\exists x : p(x)) \wedge (\exists y : \sim q(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٤ - \quad \sim (\forall x, \exists y : p(x) \vee q(y)) &\equiv \exists x : \sim (\exists y : p(x) \vee q(y)) \\ &\equiv \exists x : \forall y, \sim (p(x) \vee q(y)) \\ &\equiv \exists x : \forall y, \sim p(x) \wedge \sim q(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٥ - \quad \sim (\exists y : \exists x : p(x) \wedge \sim q(y)) &\equiv \forall y, \sim (\exists x : p(x) \wedge \sim q(y)) \\ &\equiv \forall y, \forall x, \sim (p(x) \wedge \sim q(y)) \\ &\equiv \forall y, \forall x, \sim p(x) \vee q(y) \end{aligned}$$

من نظرية ديمورجان

$$\sim (\forall x, p(x)) \equiv \exists x : \sim p(x)$$

أذن لإثبات أن التقرير $\forall x, p(x)$ خطأ نحاول إثبات أن التقرير $\exists x : \sim p(x)$ صواب أى نحاول إثبات أنه يوجد على الأقل عنصر x_0 يحقق أن $\sim p(x_0)$ صواب وبالتالي $p(x_0)$ خطأ، مثل هذا العنصر x_0 يسمى مثالا عكسيا Counter Example للتقرير $\forall x, p(x)$ وهذه تمثل طريقة من طرق البرهان، وسوف نتناولها بالتفصيل في الفصل السادس.

مثال ٢٤ : نفرض التقرير $\forall x, |x| \neq 0$ حيث مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

هذا التقرير خطأ لأن العدد 0 يعتبر مثالا عكسيا حيث $|0| \neq 0$ يمثل تقرير خطأ.

مثال ٢٥ : نفرض المجموعة $B = \{2, 3, \dots, 9\}$. أعطى مثالا عكسيا أن أمكن لكل من التقارير الآتية :

- 1- $\forall x \in B, x + 4 \leq 10$
- 2- $\forall x \in B, x^2 > 2$
- 3- $\forall x \in B, 6x + 4 < x^2$
- 4- $\forall x \in B, x$ عدد أولي
- 5- $\forall x \in B, x$ عدد زوجي

الحل :

١ - إذا كان $x_0 \in \{7, 8, 9\}$ فإن المتباينة $x_0 + 4 \leq 10$ تكون غير متحققة، أذن كمثال عكسي نأخذ $x_0 = 7$ أو $x_0 = 8$ أو $x_0 = 9$.

٢ - التقرير $\forall x \in B, x^2 > 2$ صواب. أذن لا يوجد مثال عكسي.

- ٣ - إذا كان $x_0 \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ فإن المتباينة $6x_0 + 4 < x_0^2$ تكون غير متحققة. أذن كمثال عكسي نأخذ $x_0 = 2$.
- ٤ - إذا كان $x_0 \in \{4, 6, 8, 9\}$ فإن التقرير " $\forall x \in B$, x عدد أولي" يكون خطأ. أذن كمثال عكسي نأخذ $x_0 = 4$.
- ٥ - إذا كان $x_0 \in \{3, 5, 7, 9\}$ فإن التقرير " $\forall x \in B$, x عدد زوجي" يكون خطأ. أذن كمثال عكسي نأخذ $x_0 = 3$.

٤ - الدوال الافتراضية في أكثر من متغير

نفرض المجموعتان A_1 , A_2 . الدالة الافتراضية (في متغيرين) لمجموعة حاصل الضرب الديكارتي $A_1 \times A_2$ هي جملة مفتوحة يرمز لها $p(x, y)$ وتحقق الخاصية "لكل $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ فإن $p(a_1, a_2)$ يكون تقرير له قيمة حقيقة صواب أو خطأ".

مثال ٢٦ :

- ١ - نفرض أن A_1 مجموعة من الأولاد وأن A_2 مجموعة من البنات. أذن " x أخ y " تمثل دالة افتراضية للمجموعة $A_1 \times A_2$.
- ٢ - نفرض N مجموعة الأعداد الطبيعية. أذن " $2x + y < 6$ " تمثل دالة افتراضية في متغيرين $p(x, y)$ للمجموعة $N \times N$. ولإيجاد مجموعة الصواب للدالة $p(x, y)$ نلاحظ أن المتباينة $2x + y < 6$ تكون صواب في الحالات الآتية:

$$\begin{array}{ll} x = 1 & , \quad y = 1 \\ x = 1 & , \quad y = 2 \\ x = 2 & , \quad y = 1 \end{array}$$

أذن مجموعة الصواب تكون

$$T_p = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

وبوجه عام :

للمجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$ فإن الدالة الافتراضية (في n من المتغيرات) للمجموعة $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ يرمز لها $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ وتحقق الخاصية

"لكل $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ فإن $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ يكون تقرير له قيمة حقيقة صواب أو خطأ"

مثال ٢٧ : نفرض N مجموعة الأعداد الطبيعية. أذن " $x + 2y + 3z < 9$ " تمثل دالة افتراضية في ثلاث متغيرات $p(x, y, z)$ للمجموعة $N \times N \times N$. ولإيجاد مجموعة الصواب للدالة $p(x, y, z)$ نلاحظ أن المتباينة $x + 2y + 3z < 9$ تكون صواب في الحالات الآتية:

$$\begin{array}{lll} x = 1 & , & y = 1 & , & z = 1 \\ x = 1 & , & y = 2 & , & z = 1 \\ x = 2 & , & y = 1 & , & z = 1 \\ x = 3 & , & y = 1 & , & z = 1 \end{array}$$

أذن مجموعة الصواب تكون

$$T_p = \{ (1, 1, 1), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1) \}$$

ملاحظة :

الدالة الافتراضية المسبوقة بمقياس (شامل أو وجود) لكل متغير فيها تكون تقرير له قيمة حقيقة.

فمثلاً إذا كان $p(x, y)$ دالة افتراضية في $A_1 \times A_2$ فإن

$$\forall x, \exists y : p(x, y)$$

يقراً

"لكل $x \in A_1$ يوجد $y \in A_2$ بحيث أن $p(x, y)$ صواب"

ويمثل تقرير له قيمة حقيقة، بينما إذا كان $p(x, y)$ مسبوقاً بمقياس لتغير واحد فإنها تكون دالة افتراضية للمتغير الآخر، فمثلاً

$$\exists y : p(x, y)$$

تمثل دالة افتراضية للمتغير y . وبطبيق نظرية دي مورجان يمكن نفى تقارير تحتوى على مقاييس متعددة.

مثال ٢٨ : نفرض

$$\{ \text{احمد ، حسن ، محمود} \} = A_1$$

$$\{ \text{سعاد ، مريم} \} = A_2$$

ونفرض الدالة الافتراضية $p(x, y)$ للمجموعة $A_1 \times A_2$ هي "x أخ y". أذن التقرير

$$\forall x \in A_1, \exists y \in A_2 : p(x, y)$$

يقراً

"لكل $x \in A_1$ يوجد $y \in A_2$ بحيث أن x أخ y"

أى إن لكل عنصر في A_1 يوجد أخ إما لسعاد أو مريم ونفى هذا التقرير يكون كالاتى :

$$\begin{aligned} \sim (\forall x, \exists y : p(x, y)) &\equiv \exists x : \sim (\exists y : p(x, y)) \\ &\equiv \exists x : \forall y, \sim p(x, y) \end{aligned}$$

أى إن نفى التقرير يكون "يوجد على الأقل رجل ليس أخ لأى من النساء"

مثال ٢٩ : نفرض أن $\{1, 2, 3\}$ هى مجموعة التعويض. حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية:

- 1 - $\exists x : \forall y, x^2 < y + 1$
- 2 - $\forall x, \exists y : x^2 + y^2 < 12$
- 3 - $\forall x, \forall y, x^2 + y^2 < 12$
- 4 - $\exists x : \forall y, \exists z : x^2 + y^2 < 2z^2$
- 5 - $\exists x : \exists y : \forall z, x^2 + y^2 < 2z^2$

الحل :

- ١ - صواب : بأخذ $x_0 = 1$ فإن المتباينة $1 < y + 1$ متحققة لجميع قيم $y \in \{1, 2, 3\}$.
- ٢ - صواب : لكل $\{1, 2, 3\}$ x_0 بأخذ $y = 1$ فإن المتباينة $x_0^2 + 1 < 12$ تكون متحققة.
- ٣ - خطأ : بأخذ $y_0 = 2, x_0 = 3$ فإن $x_0^2 + y_0^2 = 9 + 4 = 13$ أى إن المتباينة $x_0^2 + 1 < 12$ تكون غير متحققة.
- ٤ - صواب : بأخذ $x_0 = 1$ فإن المتباينة $1 + y^2 < 2z^2$ تكون متحققة لجميع قيم $y, z \in \{1, 2, 3\}$.
- ٥ - خطأ : بأخذ $z_0 = 1$ فإنه لا يوجد x_0 أو y_0 فى المجموعة $\{1, 2, 3\}$ بحيث يحقق المتباينة $x^2 + y^2 < 2$.

مثال ٣٠ : نفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. فى كل مما يأتى وضع ما إذا كانت الجملة تمثل تقرير أو دالة افتراضية وإذا كانت الجملة تمثل تقرير أوجد قيمة

الحقيقة وإذا كانت تمثل دالة افتراضية أوجد مجموعة الصواب:

- 1 - $\forall x \in A, \exists y \in A : x + y < 8$
- 2 - $\forall y \in A, x + y < 8$
- 3 - $\forall x \in A, \forall y \in A, x + y < 8$
- 4 - $\exists x \in A : x + y < 8$
- 5 - $\exists x \in A : \forall y \in A, x + y > 5$

الحل :

١ - دالة افتراضية في متغيرين مسبقة بمقياسين. أذن هي تمثل تقرير، ولإيجاد قيمة الحقيقة نلاحظ انه لكل $x \in A$ يوجد $y \in A$ (مثلا $y = 1$) بحيث أن $x + 1 < 8$ متحققة وبالتالي قيمة الحقيقة للتقرير هي صواب .

٢ - دالة افتراضية في متغيرين مسبقة بمقياس واحد فقط للمتغير y . أذن هي تمثل دالة افتراضية للمتغير الآخر x ، ولإيجاد مجموعة الصواب نلاحظ ان لكل $y \in A$ فإن $x_0 + y < 8$ فقط إذا كان $x_0 = 1$ وبالتالي فإن مجموعة الصواب تكون $\{1\}$.

٣ - دالة افتراضية في متغيرين مسبقة بمقياسين. أذن هي تمثل تقرير، ولإيجاد قيمة الحقيقة نلاحظ انه بأخذ $y_0 = 5$ ، $x_0 = 6$ فإن $x_0 + y_0 = 6 + 5 = 11$ أى إن المتباينة $x_0 + y_0 < 8$ غير متحققة وبالتالي قيمة الحقيقة للتقرير هي خطأ.

٤ - دالة افتراضية في متغيرين مسبقة بمقياس واحد فقط للمتغير x . أذن هي تمثل دالة افتراضية للمتغير الآخر y ، ولإيجاد مجموعة الصواب نلاحظ انه بأخذ $x_0 = 1$ فإن المتباينة $1 + y < 8$ تتحقق لكل $y \in A$ وبالتالي فإن مجموعة الصواب تكون هي المجموعة A نفسها.

٥ - دالة افتراضية في متغيرين مسبقة بمقياسين . أذن هي تمثل تقرير ، ولإيجاد قيمة الحقيقة نلاحظ انه يوجد $x \in A$ (مثلا $x = 6$) بحيث أن لكل $y \in A$ يتحقق ان $6 + y > 5$ وبالتالي قيمة الحقيقة للتقرير هي صواب.

مثال ٣١ : أوجد نفى كل من التقارير الآتية :

$$1 - \exists x : \forall y , p(x, y)$$

$$2 - \forall x , \forall y , p(x, y)$$

$$3 - \exists y : \exists x : \forall z , p(x, y, z)$$

$$4 - \exists x : \forall y, (p(x, y) \rightarrow q(x, y))$$

$$5 - \exists z : \forall x, \exists y : (p(x, y, z) \vee q(x, y, z))$$

الحل :

$$1 - \sim (\exists x : \forall y, p(x, y)) \equiv \forall x, \sim (\forall y, p(x, y)) \\ \equiv \forall x, \exists y : \sim p(x, y)$$

$$2 - \sim (\forall x, \forall y, p(x, y)) \equiv \exists x : \sim (\forall y, p(x, y)) \\ \equiv \exists x : \exists y : \sim p(x, y)$$

$$3 - \sim (\exists y : \exists x : \forall z, p(x, y, z)) \equiv \forall y, \sim (\exists x : \forall z, p(x, y, z)) \\ \equiv \forall y, \forall x, \sim (\forall z, p(x, y, z)) \\ \equiv \forall y, \forall x, \exists z : \sim p(x, y, z)$$

$$4 - \sim (\exists x : \forall y, (p(x, y) \rightarrow q(x, y))) \equiv \forall x, \sim (\forall y, (p(x, y) \rightarrow q(x, y))) \\ \equiv \forall x, \exists y : \sim (p(x, y) \rightarrow q(x, y)) \\ \equiv \forall x, \exists y : p(x, y) \wedge \sim q(x, y)$$

$$5 - \sim (\exists z : \forall x, \exists y : (p(x, y, z) \vee q(x, y, z))) \\ \equiv \forall z, \exists x : \forall y, \sim (p(x, y, z) \vee q(x, y, z)) \\ \equiv \forall z, \exists x : \forall y, \sim p(x, y, z) \wedge \sim q(x, y, z)$$

مثال ٣٢ : أوجد نفي التقرير " $\forall n, n \geq 4 \rightarrow 2^n \leq n!$ "

الحل : نفرض التقرير " $n \geq 4$ " : p

التقرير " $2^n \leq n!$ " : q

أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $\forall n, p \rightarrow q$ وحيث أن

$$\sim (\forall n, p \rightarrow q) \equiv \exists n : \sim (p \rightarrow q) \\ \equiv \exists n : (p \wedge \sim q)$$

أذن نفي التقرير يكون " $\exists n : n \geq 4 \wedge 2^n > n!$ "

مثال ٣٣ : أوجد نفي التقرير

" إذا كان $x \leq x^t$ لكل $t \in (0, 1)$ فإن $x \leq 1$."

الحل : نفرض

التقرير p : " $t \in (0, 1)$ لكل $x \leq x^t$ "

التقرير q : " $x \leq 1$ "

أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $p \rightarrow q$

وحيث أن

$$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$\equiv \left(\forall t \in (0, 1), x \leq x^t \right) \wedge (x > 1)$$

أذن نفي التقرير يكون

" $x > 1$ وأيضا $x \leq x^t$ لكل $t \in (0, 1)$."

مثال ٣٤ : أوجد نفي التقرير

"إذا كانت المتابعة $\{a_n\}$ تقاربية للعدد ℓ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد

طبيعي n_0 بحيث أن $n \geq n_0 \rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$ "

الحل : نفرض

التقرير p : "المتابعة $\{a_n\}$ تقاربية للعدد ℓ "

التقرير q : " $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n \geq n_0 \rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$ "

أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $p \rightarrow q$

وحيث أن

$$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$\sim q \equiv \sim \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n \geq n_0 \rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon \right)$$

$$\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0, \sim \left(n \geq n_0 \rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon \right)$$

$$\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0, \left(n \geq n_0 \wedge |a_n - \ell| \geq \varepsilon \right)$$

أذن نفى التقرير يكون

" المتابعة $\{a_n\}$ تقاربية للعدد l ويوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن لكل n_0 فإن $n \geq n_0$ وأيضا $|a_n - l| \geq \varepsilon$ "

مثال ٣٥ : أوجد نفى التقرير

" إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ "

الحل : نفرض

التقرير p : " الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ "
التقرير q : " $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ "
أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $p \rightarrow q$

وحيث أن

$$\begin{aligned} \sim (p \rightarrow q) &\equiv p \wedge \sim q, \\ \sim q &\equiv \sim (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \\ &\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \sim (|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \\ &\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, (|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

أذن نفى التقرير المعطى يكون

" الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ ويوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن لكل $\delta > 0$ فإن $|x - x_0| < \delta$ وأيضا $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ "

مثال ٣٦ : أوجد نفى التقرير

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, (n > n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \sim (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, (n > n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon)) \\ &\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0, \exists n, \sim (n > n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon) \\ &\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0, \exists n, (n > n_0 \wedge |a_n| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

تمارين الفصل الرابع

١ - نفرض أن $p(x)$ ترمز إلى الجملة " $x^2 + 3 > 7$ ". حدد ما إذا كانت $p(x)$ تمثل دالة افتراضية لكل من المجموعات الآتية وإذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية أوجد مجموعة الصواب:

- ١ (مجموعة الأعداد الطبيعية N .
- ٢ (مجموعة الأعداد الصحيحة I .
- ٣ (مجموعة الأعداد الحقيقية R .
- ٤ (مجموعة الأعداد المركبة C .
- ٥ (المجموعة A حيث $A = \{0, 1\}$.
- ٦ (المجموعة A حيث $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- ٧ (المجموعة A حيث $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
- ٨ (الفترة المفتوحة $(1, 4)$.
- ٩ (الفترة المغلقة $[a, b]$ حيث $0 < a < b < 1$.
- ١٠ (الفترة المغلقة $[a, b]$ حيث $-3 < a < b < 3$.

٢ - أوجد قيمة الحقيقة لكل من التمارين الآتية ثم عبر عن كل منها في صورة إنشائية :

- 1) $(\forall n \in N)(n + 1 \geq 2)$
- 2) $\exists x \in R : x^2 + 1 = 0$
- 3) $(\forall n \in I)(n^2 - 1 > 0)$
- 4) $\exists n \in N : 50 \leq n^2 < 100$
- 5) $\forall x \in (0, 1], x^2 < 1$

- 6) $\forall x \in (0,1] , x^2 \leq 1$
- 7) $\exists n \in \mathbb{N} : (n^2 - 30 > 0) \wedge (n^4 < 60)$
- 8) $\exists n \in \mathbb{N} : (n^2 \leq 20) \wedge (n > 3)$
- 9) $\forall n \in \{1,2,3,4,5\} , (n^2 \leq 21) \vee (n^3 > 60)$
- 10) $\forall n \in \{1,2,3,4,5\} , n^2 \leq 10 \rightarrow n^3 < 30$

٣ - فى كل من التقارير الآتية حدد نوع المقياس (شامل - وجود) وأوجد نفى التقرير ثم اعد صياغة التقرير ونفيه فى صورة رمزية :

- ١ (لكل مجتهد نصيب .
- ٢ (يوجد بعض الطلاب لا يستخدمون الكمبيوتر .
- ٣ (جميع مقررات الرياضيات شاقة ويمكن فهمها بسهولة .
- ٤ (كل الأعداد الفردية تقبل القسمة على 3 أو 5 .
- ٥ (بعض الأعداد الأولية تكون أعداد زوجية .
- ٦ (يوجد حل للمعادلة $x^2 + 1 = 0$ فى مجموعة الأعداد المركبة .
- ٧ (من نقطة خارج مستقيم معلوم يوجد مستقيم يمر بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم .
- ٨ (كل زاويتان متتامتان مجموعها يساوى قائمة .
- ٩ (منصفات زوايا المثلث تتقاطع جميعها فى نقطة واحدة .
- ١٠ (الدالة الأسية e^x دالة موجبة لجميع قيم x الحقيقية .

٤ - بفرض أن مجموعة التعويض هى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، حدد قيمة الحقيقة فى كل من التقارير الآتية :

- 1 - $\forall x , |x| = |-x|$
- 2 - $\forall x , x - 2 > 0$
- 3 - $\exists x : \log(x) < 0$
- 4 - $\exists x : \log(x) = e^x$

- 5- $\exists x : x^2 = x$
 6- $\exists x : x^2 + 6 < 0$
 7- $\exists x : x + 1 \geq 0$
 8- $\forall x , e^x > 0$
 9- $\exists x : e^x \leq 0$
 10- $\forall x , x > 7 \rightarrow x > 2$

وبفرض أن مجموعة التعويض هي الفترة المغلقة $A = [-1, 1]$ ، حدد قيمة الحقيقة في كل من التقارير المعطاة.

٥ - أوجد نفى كل من التقارير الآتية :

- (١) جميع الطلاب مجتهدون ولكل مجتهد نصيب .
 (٢) كل الطلاب يستخدمون الكمبيوتر ولكن بعضهم لا يصممون برامج بلغات الكمبيوتر.
 (٣) الشرط الضروري لتلاشي كل السحب اليوم هو سقوط بعض الأمطار .
 (٤) الأعداد الأولية جميعها أعداد فردية إذا كان العدد 2 عدد غير أولي .
 (٥) جميع الأعداد الأولية إما تقبل القسمة على الواحد الصحيح أو على نفسها .

٦ - أوجد في أبسط صورة نفى كل من التقارير الآتية :

- 1- $(\forall x , p(x)) \wedge (\forall y , \sim q(y))$
 2- $(\exists x : p(x)) \vee (\exists y : q(y))$
 3- $(\forall x , p(x)) \rightarrow (\exists y : q(y))$
 4- $\forall x , \exists y : \sim p(x) \vee q(y)$
 5- $\exists y : \forall x , \sim (p(x) \wedge \sim q(y))$

٧ - نفرض المجموعة $B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$. أعطى مثالا عكسيا أن أمكن لكل من التقارير الآتية :

1 - $\forall x \in B, x - 4 > 0$

2 - $\forall x \in B, x^2 \leq 2^x$

3 - $\forall x \in B, 5x + 1 \geq x^2$

4 - $\forall x \in B, x$ عامل من عوامل العدد 16

5 - $\forall x \in B, x$ عدد زوجى

٨ - نفرض أن $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ هى مجموعة التعويض. حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية:

1 - $\exists x : \forall y, x + 1 < y$

2 - $\forall x, \exists y : x^2 + y < 18$

3 - $\forall x, \forall y, x^2 + y^2 \geq 3$

4 - $\exists x : \forall y, \forall z, x^2 + y^2 \leq 3z^2$

5 - $\forall x : \exists y : \forall z, x^2 + y^2 > 2z^2$

٩ - نفرض أن $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$. فى كل مما يأتى وضع ما إذا كانت الجملة تمثل تقرير أو دالة الفراضية وإذا كانت الجملة تمثل تقرير أوجد قيمة الحقيقة وإذا كلنت تمثل دالة الفراضية أوجد مجموعة الصواب:

1 - $\forall x \in A, \exists y \in A : x + 2y < 10$

2 - $\exists y \in A : 3x + y < 7$

3 - $\exists x \in A : \forall y \in A, x + y < 6$

4 - $\forall x \in A : x^2 - y \geq 0$

5 - $\exists x \in A : \forall y \in A, x^2 + y^2 > 5$

١٠ - أوجد نفى كل من التقارير الآتية :

- 1- $\exists x : \forall y, \sim p(x, y)$
- 2- $\forall x, \exists y : p(x, y) \vee q(x, y)$
- 3- $\forall y, \exists x : \forall z, p(x, y, z)$
- 4- $\forall x, \forall y, (p(x, y) \rightarrow q(x, y))$
- 5- $\exists z : \forall x, \exists y : (\sim p(x, y, z) \wedge q(x, y, z))$
- 6- $(\exists x : \forall y, \sim p(x, y)) \wedge (\forall x, \forall y, q(x, y))$
- 7- $(\forall x, \exists y : p(x, y)) \rightarrow (\forall x, \exists y : q(x, y))$
- 8- $(\forall x, \exists y : p(x, y)) \vee (\exists x : \exists y : p(x, y) \rightarrow q(x, y))$
- 9- $(\forall x, \exists y : p(x, y)) \rightarrow (\exists x : \forall y, p(x, y) \rightarrow q(x, y))$
- 10- $(\exists x : \exists y, p(x, y)) \vee (\forall x, \forall y, p(x, y) \wedge q(x, y))$

١١ - استخدم قانون دي مورجان لإيجاد تقرير مكافئ في كل من التقارير الآتية :

- 1- $(\forall x, p(x)) \wedge (\forall y, \sim q(y))$
- 2- $(\exists x : p(x)) \vee (\exists y : q(y))$
- 3- $(\exists x, \sim p(x)) \wedge (\forall x, \sim q(x))$
- 4- $(\exists x : \sim p(x)) \rightarrow (\forall x, q(x))$
- 5- $(\forall x, p(x)) \rightarrow (\exists x : q(x))$
- 6- $(\exists x : \forall y, \sim p(x, y)) \wedge (\forall x, \forall y, q(x, y))$
- 7- $\sim ((\exists x : \forall y, p(x, y)) \rightarrow (\forall x, \exists y : \sim q(x, y)))$
- 8- $(\forall x, \exists y : p(x, y)) \vee (\exists x : \exists y : p(x, y) \rightarrow q(x, y))$
- 9- $(\forall x, \forall y, p(x, y)) \rightarrow (\exists x : \forall y, \sim p(x, y) \rightarrow q(x, y))$
- 10- $(\forall x, \exists y, p(x, y)) \wedge (\forall x, \forall y, p(x, y) \vee \sim q(x, y))$

١٢ - أوجد نفى وعكس ومقلوب ومضاد كل من التقارير الآتية :

١ (الدالة $f(x)$ تكون دالة تصاعدية إذا كان لكل x, y حيث $x \leq y$ فإن $f(x) \leq f(y)$.

٢ (إذا قطع مستقيم مستقيمان متوازيان فإن كل زاويتان متبادلتان متساويتان فى القياس وكل زاويتان متناظرتان متساويتان فى القياس.