الفصل

6

طرق البرهان

Methods of Proof

نعلم أن التقرير، سواء كان بسيطا أو مركبا، بأنه جملة خبرية ذات معنى تحمل خبرا ويمكن الحكم بأنها صائبة أو خاطئة، ولا تكون صائبة وخاطئة فى آن واحد. ولكى نتمكن من الحكم على تقرير ما بالصواب أو الخطأ فلابد أن نكون على علم تام بما نعنيه فى كل كلمة تدخل فى تركيب التقرير وهذا أمر فى غاية الأهمية فى جميع العلوم بل وفى جميع أمور الحياة وليس فى الرياضيات فقط. وتتنوع أساليب البرهان على صحة أو خطأ تقرير ما وفقا للتقرير نفسه، فمثلا التقرير "يتجمد الماء بالبرودة " صائب والبرهان على ذلك يتم بالتجربة والمشاهدة ومن هنا يظهر ما يسمى بالبرهان التجريبى والتقرير "المثلث المتساوى الأضلاع مجموع زواياه 180 درجة" هو تقرير صائب والبرهان على ذلك يتم قياسا للقاعدة التى تقول أن مجموع زوايا المثلث تساوى 180 درجة أى أننا حصلنا على نتيجة خاصة من حالة عامة ومن هنا يظهر ما يسمى بالبرهان القياسي، وهناك بعض التقارير التى نقبل صوابها دون تعليل لأنه لا يوجد ما يناقض صحتها ومثل هذه التقارير تسمى مسلمات **Axioms** فمثلا التقرير

" من نقطة خارج مستقيم معلوم يمر مستقيم واحد فقط يوازى المستقيم المعلوم "

صائب لأنه يمثل مسلمة. وفى الفصل الخامس تحدثنا عن الحجة أو الإثبات ووضحنا كيف نحدد إلزامية أو عدم إلزامية الحجة بطرق مختلفة وبمعنى آخر وضحنا كيف نحدد ما إذا كان الإثبات منطقى أو غير منطقى وفكرة الحجة يمكن تطويرها لتصبح برهان لقضية ويمكننا القول أن البرهان هو إثبات منطقى لقضية ما.

تعريف ١ : البرهان هو متتالية من التقارير $S_1 \; , \; S_2 \; , \; \ldots \; , \; S_n$ يستمد منها التقرير S أى أنه على شكل الحجة $S_1 , S_2 , \ldots , S_n \; \alpha \; S$ وبحيث أن كل S_i إما أن يكون مسلمة صحيحة أو تقرير صواب مثبت بشكل منطقى من التقارير السابقة له فى المتتالية وفى هذه الحالة فإن الاستنتاج S يسمى نظرية، وكذلك فإن كل S_i يمكن أن يسمى نظرية وبرهانها هو ما يسبق S_i فى المتتابعة من تقارير $S_1 \; , \; S_2 \; , \; \ldots \; , \; S_{i-1}$.

وفى مجال الرياضيات فإن العديد من التقارير الرياضية التى يطلب البرهان على صحتها تكون على صورة تقارير شرطية "إذا كان ... فإن ... " وان لم تكن كذلك، فإنه غالبا ما نستطيع تحويلها إلى تقارير شرطية، وسوف نتعرف الآن على بعض الأنواع الرئيسية من البرهان والتى تستخدم فى الرياضيات وسنوضح كلا منها بالأمثلة.

١ - البرهان المباشر Direct Proof

توجد بعض التقارير التى يتم برهنتها عن طريق الانتقال من المعطيات إلى المطلوب مباشرة بالاستعانة بالمنطق والمسلمات والتعاريف الرياضية، لذلك يسمى هذا الأسلوب بالبرهان المباشر، أى إن البرهان المباشر يعتمد على الحقيقة المنطقية "إذا كان... فإن ... " $P \to Q$ حيث نفترض أن المعطيات P صواب ثم نبرهن أن صواب المعطيات يؤدى إلى صواب المطلوب Q (أى نبرهن أن التضمين $P \Rightarrow Q$ متحقق) ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية:

مثال ١ : باستخدام البرهان المباشر اثبت صحة التضمين الآتى :

$$(\sim p \vee q) \wedge (r \to p) \wedge r \;\; \Rightarrow \;\; q$$

الحل :

المعطيات :	$(\sim p \vee q)$	صواب
	$r \to p$	صواب
	r	صواب

المطلوب : q صواب

حيث أن r صواب، $r \to p$ صواب (من المعطيات)

أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن p صواب

و من تعريف أداة النفى أذن $\sim p$ يكون خطأ

وحيث أن $(\sim p \vee q)$ صواب (من المعطيات)

أذن من تعريف أداة الفصل ينتج أن q صواب

أذن التضمين $(\sim p \vee q) \wedge (r \to p) \wedge r \Rightarrow q$ متحقق.

مثال ٢ : باستخدام البرهان المباشر اثبت صحة ما يأتى :

المعطيات : $p \ , \ q \ , \ p \vee q \to r$

المطلوب : r

الحل :

المعطيات جميعها صواب

حيث أن $p \ , \ q$ صواب (من المعطيات)

أذن من تعريف أداة الفصل ينتج أن $p \vee q$ صواب

وحيث أن $p \vee q \to r$ صواب (من المعطيات)، $p \vee q$ صواب

أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن r صواب .

مثال ٣ : باستخدام البرهان المباشر برهن على صحة الحجة الآتية :

إذا فهم الطالب الرياضيات فإنه سوف ينجح فى الامتحان بتفوق .

الطالب لم ينجح فى الامتحان بتفوق .

أذن الطالب لم يفهم الرياضيات .

الحل : نفرض التقارير

p : الطالب فهم الرياضيات

q : الطالب نجح فى الامتحان بتفوق

أذن المعطيات : $p \rightarrow q$ صواب

$\sim q$ صواب

المطلوب إثبات أن : $\sim p$ صواب

حيث أن $\sim q$ صواب (من المعطيات)

أذن من تعريف أداة النفى q يكون خطأ

وحيث أن $p \rightarrow q$ صواب (من المعطيات)، q خطأ

أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن p خطأ

و من تعريف أداة النفى أذن $\sim p$ يكون صواب .

مثال ٤ : باستخدام البرهان المباشر برهن على صحة الحجة الآتية :

سقوط المطر شرط ضرورى وكافى لتعمير الصحراء .

إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة .

المطر يسقط .

أذن الصحراء يتم تعميرها والشباب يجدون فرص عمل جديدة .

الحل : نفرض التقارير p : المطر يسقط

q : الصحراء يتم تعميرها

r : الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة

أذن المعطيات : $p \leftrightarrow q \ , \ q \rightarrow r \ , \ p$ صواب

المطلوب إثبات أن : $q \wedge r$ صواب

حيث أن $p \leftrightarrow q$ ، p صواب (من المعطيات). أذن من تعريف أداة الشرطية المزدوجة فإن q يكون صواب. وحيث أن $q \rightarrow r$ صواب (من المعطيات)، q صواب. أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن r صواب، ومن تعريف أداة الوصل أذن $q \wedge r$ يكون صواب.

أذن التضمين $(q \wedge r) \Leftarrow p \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)$ متحقق.

مثال ٥ : باستخدام البرهان المباشر برهن صحة التقرير

" إذا كان x عددا فرديا فإن x^2 عدد فردى "

الحل : نفرض التقرير p : " x عدد فردى "

والتقرير q : " x^2 عدد فردى "

أذن المعطيات هى أن p صائب والمطلوب إثبات أن q صائب ، أى إثبات صحة التضمين $p \Rightarrow q$.

حيث أن ، أى عدد فردى يمكن كتابته بالصورة $2n+1$ حيث n عدد صحيح

x عدد فردى $\Rightarrow \quad x = 2n+1$

$\Rightarrow \quad x^2 = (2n+1)^2$

$\Rightarrow \quad x^2 = 4n^2 + 4n + 1$

$\Rightarrow \quad x^2 = 2\left(2n^2 + 2n\right) + 1$

$\Rightarrow \quad x^2 = 2m + 1 \quad , \quad m = 2n^2 + 2n$

$\Rightarrow \quad x^2$ عدد فردى

أذن التضمين $p \Rightarrow q$ متحقق .

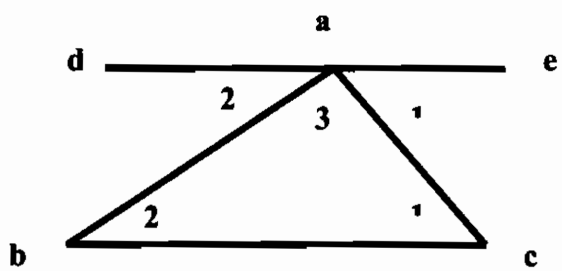
مثال ٦ : باستخدام البرهان المباشر برهن أن

"مجموع زوايا المثلث تساوى 180 درجة"

الحل :

المعطيات : abc مثلث

المطلوب إثبات أن : قياس$(\hat{a})$ + قياس $(\hat{b})$ + قياس $(\hat{c})$ = 180



نرسم المثلث abc ومن الرأس a نرسم المستقيم de موازى للقطعة المستقيمة bc حيث أن

قياس $(\hat{c})$ = قياس $(\hat{1})$ بالتبادل (لان de يوازى bc)

قياس $(\hat{b})$ = قياس $(\hat{2})$ بالتبادل (لان de يوازى bc)

وحيث أن

قياس $(\hat{1})$ + قياس $(\hat{2})$ + قياس $(\hat{3})$ = 180 (لان $d\hat{a}e$ زاوية مستقيمة)

اذن

قياس $(\hat{c})$ + قياس $(\hat{b})$ + قياس $(\hat{a})$ = 180

أى إن مجموع زوايا أى مثلث تساوى 180 درجة.

٢ - البرهان الغير مباشر Indirect Proof

نعلم أن $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ وبالتالى إذا كان التقرير $p \to q$ صائب منطقيا فإن التقرير المكافئ $\sim q \to \sim p$ يكون صائب منطقيا ومن ذلك نستنتج أنه إذا كان التضمين $p \Rightarrow q$ متحقق فإن التضمين $\sim q \Rightarrow \sim p$ يكون متحقق أيضا، وبالتالى يمكن استخدام التضمين $\sim q \Rightarrow \sim p$ بدلا من التضمين $p \Rightarrow q$ ولذلك تسمى هذه الطريقة بالبرهان الغير مباشر وهى تستخدم فى كثير من الأحيان فى الرياضيات لإثبات بعض القوانين والنظريات، ومن ذلك يمكننا القول أن البرهان المباشر ينطلق من القاعدة المنطقية $p \to q$ بينما البرهان الغير مباشر ينطلق من القاعدة المنطقية $\sim q \to \sim p$. أى إننا فى البرهان الغير مباشر نفرض أن نفى المطلوب هو الصواب، ثم نستخدم أسلوب البرهان المباشر فى إثبات أن نفى المعطيات يكون صواب.

مثال ٧ : باستخدام البرهان الغير مباشر اثبت صحة ما يأتى :

المعطيات : $p \ , \ q \ , \ p \vee q \rightarrow r$

المطلوب : r

الحل :باستخدام البرهان الغير مباشر نحاول إثبات أن $\sim r \Rightarrow \sim \left((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r) \right)$.

نفرض أن نفى المطلوب يكون صواب أى إن $\sim r$ صواب. أذن r يكون خطـأ أذن من تعريف أداة الشرطية $p \vee q \rightarrow r$ وحيث أن r خطأ فإنه ينتج حالتين:

الحالة الأولى : $p \vee q \rightarrow r$ خطأ وهذا يتحقق إذا كـان $p \vee q$ صواب، ومـن تعريف أداة الفصل فإنه توجد ثلاث احتمالات:

الاحتمال الأول : p صواب ، q صواب

الاحتمال الثانى : p صواب ، q خطـأ

الاحتمال الثالث : p خطـأ ، q صواب

وفى جميع هذه الاحتمالات ومن تعريف أداة الوصل فإن التقرير $(p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)$ يكون خطأ وبالتالى $\sim \left((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r) \right)$ يكون صواب. أذن فى هذه الحالة التضمين $\sim r \Rightarrow \sim \left((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r) \right)$ يكون متحقق.

الحالة الثانية : $p \vee q \rightarrow r$ صواب وهذا يتحقق إذا كان $p \vee q$ خطأ، ومن تعريف أداة الفصل فإن p خطـأ، q خطـأ وبالتـالى فـإن التقريـر $(p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)$ يكـــون خطـــأ أى إن $\sim \left((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r) \right)$ يكون صواب. أذن فى هذه الحالـة أيضا فإن التضمين $\sim r \Rightarrow \sim \left((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r) \right)$ يكـون متحقق.

مثال ٨ : باستخدام البرهان الغير مباشر برهن أن

"إذا كان x^2 عددا فرديا فإن x عدد فردى "

الحل : نفرض

التقرير p : " x^2 عدد فردى "

والتقرير q : " x عدد فردى "

المعطيات : التقرير p صائب

والمطلوب : إثبات أن التقرير q صائب

أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين $p \Rightarrow q$

وباستخدام البرهان الغير مباشر نحاول إثبات صحة التضمين $\sim q \Rightarrow \sim p$

وحيث أن

$\sim p$ هو التقرير " x^2 عدد غير فردى " أى إن " x^2 عدد زوجى "

$\sim q$ هو التقرير " x عدد غير فردى " أى إن " x عدد زوجى "

أذن وفقا لأسلوب البرهان الغير مباشر فإن المطلوب هو إثبات صحة التضمين

x^2 عدد زوجى $\Rightarrow$ x عدد زوجى

وحيث أن ، أى عدد زوجى يمكن كتابته بالصورة $2n$ حيث n عدد صحيح . أذن

x عدد زوجى $\Rightarrow x = 2n$

$$\Rightarrow x^2 = 4n^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2\left(2n^2\right)$$

$$\Rightarrow x^2 = 2m \quad , \quad m = 2n^2$$

$\Rightarrow$ x^2 عدد زوجى

أذن التضمين $\sim p \Rightarrow \sim q$ متحقق .

مثال ٩ : باستخدام البرهان الغير مباشر برهن أن

"إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا"

الحل : نفرض

التقرير p : " المثلث متساوى الأضلاع "

والتقرير q : " المثلث متساوى الزوايا "

المعطيات : التقرير p صائب

المطلوب : إثبات أن التقرير q صائب

أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين $p \Rightarrow q$

وباستخدام البرهان الغير مباشر نحاول إثبات صحة التضمين $\sim q \Rightarrow \sim p$

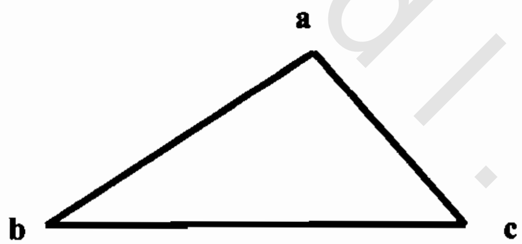
وحيث أن $\sim p$ هو التقرير " المثلث غير متساوى الأضلاع "

$\sim q$ هو التقرير " المثلث غير متساوى الزوايا "

أذن وفقا لأسلوب البرهان الغير مباشر فإن المطلوب هو إثبات صحة التضمين

المثلث غير متساوى الأضلاع $\Rightarrow$ المثلث غير متساوى الزوايا

نفرض المثلث abc غير متساوى الزوايا



أذن قياس $(\hat{a})$ $\neq$ قياس $(\hat{b})$ $\neq$ قياس $(\hat{c})$

$bc \neq ac$ $\Rightarrow$ قياس $(\hat{a})$ $\neq$ قياس $(\hat{b})$

$ac \neq ab$ $\Rightarrow$ قياس $(\hat{b})$ $\neq$ قياس $(\hat{c})$

أذن $ab \neq bc \neq ac$

أذن المثلث غير متساوى الأضلاع .

٣ - البرهان بالتناقض Proof by Contradiction

لإثبات صحة التقرير $p \to q$ فإننا أحيانا نلجأ إلى افتراض جدلى بأن التقرير $p \to q$ خاطئ وبالتالى فإن نفيه $\sim(p \to q)$ يكون صواب، وحيث أن

$$\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن من التكافؤ ينتج أن التقرير $p \wedge \sim q$ صواب ومن تعريف أداة الوصل فإن كل من $\sim q$, p يكون صواب، أى إن q يكون خطأ وهذا يقودنا إلى أسلوب البرهان بالتناقض حيث نبدأ البرهان بافتراض أن النتيجة المطلوبة q تكون تقرير خطأ وبالتالى يكون $\sim q$ صواب ثم نستخدم هذا الفرض والمعطيات فى إثبات أن ذلك يؤدى إلى الوقوع فى تناقض حيث نصل إلى تقرير ما يكون صائبا وخاطئا فى آن واحد وهذا مستحيل ويكون سبب هذا التناقض هو افتراضنا بأن نفى المطلوب صحيح، وبالتالى فإن المخرج الوحيد من هذا التناقض هو التسليم بأن $p \wedge \sim q$ تقرير خاطئ وبالتالى التقرير المكافئ له $\sim(p \to q)$ هو الآخر تقرير خاطئ وهذا يعنى أن $p \to q$ تقرير صائب، أى إن التضمين $p \Rightarrow q$ متحقق وبذلك يتم البرهان بأسلوب التناقض.

مثال ١٠ : باستخدام البرهان بالتناقض اثبت صحة ما يأتى:

المعطيات : $p \ , \ q \ , \ p \vee q \to r$

المطلوب : r

الحل :

المعطيات جميعها صواب

وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب يكون صواب، أى إن $\sim r$ صواب أذن r يكون خطأ.

وحيث أن $p \vee q \to r$ صواب (من المعطيات)

أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن $p \vee q$ خطأ

ومن تعريف أداة الفصل ينتج أن q , p خطأ وهذا يناقض المعطيات التى تقول أن q , p صواب وبالتالى الفرض يكون خطأ، أى إن r تقرير صواب.

مثال ١١ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

"إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا"

الحل : نفرض التقرير p : " المثلث متساوى الأضلاع "

والتقرير q : " المثلث متساوى الزوايا "

أذن المعطيات هى أن p صائب والمطلوب إثبات أن q صائب، أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين $p \Rightarrow q$ وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب هو الصواب أى نفرض أن $\sim q$ صواب، وحيث أن $\sim q$ هو التقرير "المثلث غير متساوى الزوايا" أذن فى المثلث abc

قياس $(\hat{a}) \neq$ قياس $(\hat{b})$ $\neq$ قياس $(\hat{c})$

$bc \neq ac \Rightarrow$ قياس $(\hat{a})$ $\neq$ قياس $(\hat{b})$

$ac \neq ab \Rightarrow$ قياس $(\hat{b})$ $\neq$ قياس $(\hat{c})$

أذن $ab \neq bc \neq ac$ وهذا تناقض مع المعطيات p التى تقول أن المثلث متساوى الأضلاع. أذن الفرض بأن المثلث غير متساوى الزوايا يكون خاطئ وبالتالى فإن الصواب هو أن المثلث متساوى الزوايا.

مثال ١٢ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

"إذا كان x^2 عددا فرديا فإن x عدد فردى"

الحل : نفرض التقرير p : " x^2 عدد فردى "

والتقرير q : " x عدد فردى "

أذن المعطيات هى أن p صائب والمطلوب إثبات أن q صائب، أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين $p \Rightarrow q$ وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب هو الصواب أى نفرض أن $\sim q$ صواب، وحيث أن $\sim q$ هو التقرير " x عدد غير فودى" أى إن x عدد زوجى، أذن

وفقا لأسلوب البرهان بالتناقض

$$x \text{ عدد زوجى} \Rightarrow x = 2n$$
$$\Rightarrow x^2 = 4n^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 2\left(2n^2\right)$$
$$\Rightarrow x^2 = 2m \qquad , \qquad m = 2n^2$$
$$\Rightarrow x^2 \text{ عدد زوجى}$$

أى أننا حصلنا على x^2 عدد زوجى وهذا يناقض المعطيات p التى تقول أن x^2 عدد فردى. أذن الفرض بأن x عدد غير فردى يكون فرض خاطئ وبالتالى فإن الصواب هو أن x عدد فردى.

مثال ١٣ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

"إذا كان حاصل ضرب عددين طبيعيين x , y عددا فرديا فإن كلا من x , y عدد فردى"

الحل : نفرض التقرير p : "حاصل ضرب عددين طبيعيين x , y يكون عددا فرديا"

والتقرير q : " x عدد فردى "

والتقرير r : " y عدد فردى "

أذن المعطيات : التقرير p صائب

المطلوب : إثبات أن كلا من q , r صائب (أى المطلوب إثبات أن التقرير $q \wedge r$ صائب)

أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين $p \Rightarrow q \wedge r$ وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب هو الصواب، أى نفرض أن $\sim(q \wedge r)$ صواب.

وحيث أن $\sim(q \wedge r) \equiv \sim q \vee \sim r$

أذن نفى التقرير "كلا من x , y عدد فردى" هو التقرير

" x عدد غير فردى أو y عدد غير فردى" وهذا يكافئ "x عدد زوجى أو y عدد زوجى"

وحيث أن حاصل ضرب عدد زوجى بآخر فردى أو زوجى يكون عدد زوجى. أذن التقرير p يكون خطأ وهذا يناقض المعطيات p التى تقول أن "حاصل ضرب العددين الطبيعين $x ,$ y عددا فرديا". أذن الفرض يكون خاطئ وبالتالى فإن الصواب هو أن كلا من x , y عدد فردى وهذا يثبت صحة التضمين $p \Rightarrow q \wedge r$.

مثال ١٤ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2} \qquad \forall\ x > 0$$

الحل : المعطيات : $x > 0$

المطلوب إثبات أن : $\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2}$

باستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب هو الصواب، أى نفرض أن $\frac{x}{x+1} \geq \frac{x+1}{x+2}$

وحيث أن $x > 0$ (من المعطيات). أذن

$$x\,(x+2) \geq (x+1)\,(x+1) \;\Rightarrow\; x^2 + 2x \geq x^2 + 2x + 1$$
$$\Rightarrow\; 0 \geq 1$$

أى أننا حصلنا على تناقض، أذن الفرض يكون خاطئ وبالتالى فإن الصواب هو أن $\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2}$.

٤ – البرهان بالمثال المعاكس Proof by Counter example

بعض التقارير الرياضية يكفى لتوضيح صوابها أو خطئها أن نعطى مثالا نؤيد به أجابتنا وهـذه الطريقة تسمى البرهان بالمثال المعاكس والمقصود بالمثال المعاكس هو مثال القصد منـه أبطـال ادعاء حول قضية معينة وقد يكون لدينا مثال أو اكثر لهدم القضية ولكن الحد الأدنى هو إعطاء مثال واحد، والمثال المعاكس لا يعطى برهانا للقضية ولكن يبطل إدعاء قضية معينة عن طريـق إعطاء تناقض يعاكس هذا الإدعاء .

ملاحظة :

إذا أردنا إثبات قضية ما فعلينا برهنتها فى جميع الحالات وليس بمثال خاص بينما إذا أردنا أن ننقضها أو نقيم الدليل على عـدم صحتها فيكفى إعطاء مثال معاكس واحد على الأقل .

فمثلا التقرير " $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$ حيث $x , y \neq 0$ أعداد حقيقية"

لا يمكن إثباته عن طريق اخذ مثال يحققه مثل $x = 1 , y = 1$ ولكن يمكن إقامة الدليل على عدم صحة هذا التقرير بأخذ المثال $x = 3 , y = 2$ لأن $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$ وهـذا يعتبـر مثـال معاكس يثبت أن التقرير المعطى خاطئ.

مثال ١٥ : ناقش صحة التقرير $\forall x \in R , |x| \neq 0$

الحل : بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال $x = 0$ ، وحيث أن $|0| = 0$

أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ١٦ : ناقش صحة التقرير $\forall\ x \in R \ , \ x^2 > x$

الحل : بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال $x = \frac{1}{2}$ ، وحيث أن $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$

أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ١٧ : ناقش صحة التقرير

$(x - y)^2 \neq x^2 + y^2$ حيث x , y عددين حقيقيين.

الحل :

بإعطاء مثال معاكس، نأخذ المثال $y = 2 \ , \ x = 3$

$$(x - y)^2 = (3 - 2)^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = 9 + 4 = 13$$

أذن $(x - y)^2 \neq x^2 + y^2$ تقرير صواب.

مثال ١٨ : أوجد مثال معاكس للتقرير $\forall\ x \in B \ , \ x + 5 > 15$

حيث $B = \{6 , 8 , 10 , 12 , 14\}$

الحل : بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال $x = 6$ ، وحيث أن $6 + 5 \leq 15$ أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ١٩ : ناقش صحة التقرير

"لآى عدد طبيعى n يكون $6n - 1$ عددا أوليا"

الحل :بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال $n = 6$ ، أذن

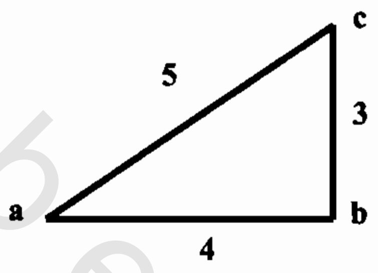
$$6n - 1 = 36 - 1 = 35$$

وحيث أن 35 عدد غير أولى. أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ٢٠ : ناقش صحة التقرير

"إذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يكون متساوى الأضلاع"

الحل :



بإعطاء مثال معاكس نفرض المثلث abc فيه

$ab = 4 \;,\; bc = 3 \;,\; ac = 5$

حيث أن

$$(ab)^2 + (bc)^2 = (ac)^2$$

أذن المثلث قائم الزاوية ولكنه غير متساوى الأضلاع

أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

٥ - البرهان بالاستقراء الرياضى (الاستنتاج الرياضى)

Proof by Mathematical Induction

البرهان بالاستقراء الرياضي يعتبر أسلوب قوى فى برهان الكثير من النظريـــات والمســائل فى الرياضيـات والتى تتعلق بأعداد صحيحة موجبة، فمثلا لإثبات صحة التقرير

$$P(n) \equiv 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1) \;,\; \forall \; n \in N$$

نلاحظ بالتجريب أن

$$P(1) \equiv 2 = 1(1+1) = 2$$
$$P(2) \equiv 2 + 4 = 2(2+1) = 6$$
$$P(3) \equiv 2 + 4 + 6 = 3(3+1) = 12$$
$$P(4) \equiv 2 + 4 + 6 + 8 = 4(4+1) = 20$$
$$P(5) \equiv 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 5(5+1) = 30$$

أذن التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ولبحث صحة التقرير فى حالة $n > 5$ فإن أسلوب التجريب الذى اتبعناه لن ينتهى كما أنه لا نستطيع أن ندعى بأن التقريــ

صواب لجميع قيم $n > 5$ لان هذا سيكون مجرد تخمين غير مقبول فى الرياضيات ولذلك لابد من البحث عن أسلوب آخر غير التجريب لإثبات مثل هذه المسائل الرياضية.

تعريف ٢ : إذا كانت $S \subset N$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية فإن S تسمى مجموعـــة استقرائية إذا تحقق

$$n \in S \quad \Rightarrow \quad n+1 \in S$$

مثال ٢١ : المجموعات الآتية تمثل مجموعات استقرائية

1- $A = \{1, 2, 3, \dots \}$
2- $B = \{6, 7, 8, \dots \}$
3- $C = \{n \in N \mid n \geq 9\}$
4- $D = \{n+1 \mid n \in N\}$

والمجموعات الآتية تمثل مجموعات غير استقرائية

5- $E = \{4, 6, 8, \dots \}$
6- $F = \{n \in N \mid 5 \leq n \leq 20000\}$
7- $G = \{n^2+1 \mid n \in N\}$
8- $S = \{k \in N \mid k \leq 2^{100}\}$

نظرية ١ : <u>مبدأ الاستقراء (الاستنتاج) الرياضي</u>

إذا كانت $S \subset N$ تحقق الشرطين التاليين

1)- $1 \in S$
2)- $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

فإن $S = N$.

البرهان : المعطيات هى $S \subset N$ تحقق الشرط $1 \in S$ وتحقق الشـرط $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$ والمطلوب إثبات أن $N = S$. نفرض أن المجموعة D هى مكملة المجموعة S بالنسبة إلى المجموعة الشاملة N ، أى إن $D = N - S$. أذن يوجد حالتان فقط

<u>الحالة الأولى:</u> $D = \Phi$ وفى هذه الحالة تكون النظرية صحيحة لأن $S = N \Rightarrow D = \Phi$

<u>الحالة الثانية</u> : $D \neq \Phi$ وهذا يعنى أن المجموعة S محتواه بالكامل داخل المجموعة N ، أى إن

$$\exists \ k \in N \ : \ k \notin S$$

والآن نحاول إثبات خطأ هذا الإدعاء. حيث أن $1 \in S$ (من المعطيات)

نفرض أن $m \neq 1$ هو أصغر عدد صحيح موجب ينتمى إلى المجموعة D، أى إن $m \notin S$ ، ومن تعريف الفرق بين مجموعتين فإن العدد الذى يسبق العدد m مباشرة ينتمى إلى S ، أى إن $m-1 \in S$ ولكن من الشرط الثانى من المعطيات نجد أن $m-1 \in S \Rightarrow m \in S$ وهذا يؤدى إلى تناقض حيث $m \notin S$ وفى نفس الوقت $m \in S$ ومن ذلك نستنتج أن الفرض $D \neq \Phi$ فرض خاطئ أى إن $D = \Phi$ وبالتالى $S = N$.

<u>ملاحظات :</u>

١ – لكى نثبت صحة التقرير $P(n)$ حيث $n \in N$ فإنه وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضى (نظرية (١)) فإنه لابد من التحقق من الشرطين الآتيين معا:

الشرط الأول : عند $n = 1$ فإن التقرير $P(1)$ صواب

الشرط الثانى : بفرض أن $P(n)$ صائب عند $n = k$ فإن ذلك يؤدى إلى أن التقرير $P(k+1)$ صائب أيضا، أى إن

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

٢ – إذا لم يتحقق أحد الشرطين فإن $P(n)$ تكون تقرير خاطئ.

٣ – إذا كان التقرير $P(n)$ صائب فى حالة $n = \ell$ (بدلا من $n = 1$) وكان الشرط الثانى متحقق فإن التقرير $P(n)$ يكون صائب لجميع قيم $n \geq \ell$.

مثال ٢٢ : استخدم البرهان بالاستقراء الرياضي فى إثبات صحة التقرير

$$P(n) \equiv 1+2+3+ \quad \dots \quad +n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in N$$

الحـــل :.

أولا : نثبت صحة التقرير فى حالة $n = 1$

بوضع $n = 1$ فإن

الطرف الأيسر من التقرير $P(n) = 1$

الطرف الأيمن من التقرير $P(n) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

أذن التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = 1$

ثانيا : نفرض صحة التقرير $P(n)$ فى حالة $n = k$

ونحاول إثبات صحته فى حالة $n = k + 1$

أى نفرض أن

$$1+2+3+ \quad \dots \quad +k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (1)$$

ونحاول إثبات أن

$$1+2+3+ \quad \dots \quad +k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

والآن بإضافة $(k+1)$ إلى طرفى المعادلة (١) نحصل على

$$1+2+3+ \quad \dots \quad +k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

أذن التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = k + 1$.

أذن وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضى فإن التقرير $P(n)$ صواب لكل $n \in N$.

مثال ٢٣ : باستخدام البرهان بالاستقراء الرياضى بين ما إذا كان التقرير الآتى صواب أم خطأ

$$P(n) \equiv 1+3+5+ \ \dots \ +(2n-1) = 3n-1 \qquad \forall \ n \in N$$

الحل :

أولا : نثبت صحة التقرير فى حالة $n = 1$

بوضع $n = 1$ فإن

الطرف الأيسر من التقرير $P(n) = 1$

الطرف الأيمن من التقرير $P(n) = 3-2 = 1$

أذن التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = 1$

ثانيا : نفرض صحة التقرير فى حالة $n = k$ ونحاول إثبات صحة التقرير فى حالة $n = k + 1$

أى نفرض أن

$$1+3+5+ \ \dots \ +(2k-1) = 3k-2 \qquad (1)$$

ونحاول إثبات أن

$$1+3+5+ \ \dots \ +(2k-1)+(2(k+1)-1) = 3(k+1)-2$$

والآن بإضافة $(2(k+1)-1)$ إلى طرفى المعادلة (١) نحصل على

$$\begin{aligned} 1+3+5+ \ \dots \ +(2k-1)+(2(k+1)-1) &= 3k-2+(2(k+1)-1) \\ &= 3k-2+2k+2-1 \\ &= 5k-1 \\ &\neq 3(k+1)-2 \end{aligned}$$

أذن التقرير $P(n)$ غير متحقق فى حالة $n = k + 1$ أى إن الشرط الثانى من الاستقراء الرياضى غير متحقق وبالتالى فإن التقرير $P(n)$ يكون خطأ.

مثال ٢٤ : استخدم البرهان بالاستقراء الرياضي فى إثبات صحة التقرير

$$1x2x3+2x3x4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad \forall n \in N$$

الحـــل :

أولا : نثبت صحة التقرير فى حالة $n=1$

بوضع $n=1$ فإن

الطرف الأيسر من التقرير $= 1x2x3 = 6$

الطرف الأيمن من التقرير $= \frac{1x2x3x4}{4} = 6$

أذن التقرير صواب فى حالة $n=1$

ثانيا : نفرض صحة التقرير فى حالة $n=k$ ونحاول إثبات صحته فى حالة $n=k+1$

أى نفرض أن

$$1x2x3+2x3x4+\ldots+k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \quad (1)$$

ونحاول إثبات أن

$$1x2x3+2x3x4+\ldots+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

والآن بإضافة $(k+1)(k+2)(k+3)$ إلى طرفى المعادلة (١) نحصل على

$$\begin{aligned}1x2x3+2x3x4+\ldots&+(k+1)(k+2)(k+3)\\ &=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)\\ &=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}\end{aligned}$$

أذن التقرير صواب فى حالة $n=k+1$.

أذن وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضى فإن التقرير صواب لكل $n \in N$.

مثال ٢٥ : برهن بالاستقراء الرياضي صحة التقرير

$$P(n) \equiv \quad 2^n \le n! \qquad \forall \quad n \ge 4$$

الحل :

أولا : نثبت صحة التقرير $P(n)$ في حالة $n = 4$

بوضع $n = 4$ فإن

الطرف الأيسر من التقرير $P(n) = 2^4 = 16$

الطرف الأيمن من التقرير $P(n) = 4! = 24$

أذن $4! \ge 2^4$ وبالتالى التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = 1$

ثانيا : نفرض صحة التقرير $P(n)$ فى حالة $n = k \ge 4$

ونحاول إثبات صحته فى حالة $n = k + 1$

أى نفرض أن $2^k \le k!$ ونحاول إثبات ان $2^{k+1} \le (k+1)!$ من خـــواص المتباينات

$$k \ge 4 \quad \Rightarrow \quad k+1 > 4 > 2 \quad \Rightarrow \quad 2 < k+1$$

والآن من الفرض

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \le 2(k!) \le (k+1)(k!) = (k+1)!$$

أذن التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = k + 1$.

أذن وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضى فإن التقرير $P(n)$ صواب لكل $n \ge 4$.

مثال ٢٦ : برهن بالاستقراء الرياضي صحة التقرير

"العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 لكل $n \in N$ "

الحل :

أولا : نثبت صحة التقرير فى حالة $n = 1$

بوضع $n = 1$ نلاحظ أن $3^1 - 1 = 2$ يقبل القسمة على 2 وبالتالى التقرير صــواب فى حالة $n = 1$.

ثانيا : نفرض صحة التقرير فى حالة $n = k$ ونحاول إثبات صحته فى حالة $n = k + 1$ أى نفرض أن العدد $3^k - 1$ يقبل القسمة على 2 ونحاول إثبـــات أن $3^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 2. ومن قابلية القسمة بالفرض فإنه يوجـــد عـــدد m بحيـــث أن $3^k - 1 = 2m$ وبضرب الطرفين فى 3. أذن

$$3^{k+1} - 3 = 6m \Rightarrow 3^{k+1} - 1 = 6m + 2 = 2(3m + 1) = 2\ell$$

حيث $\ell = 3m + 1$ وبالتالى ينتج أن التقرير صواب فى حالة $n = k + 1$ وبالتالى صواب لكل $n \in N$.

تمارين الفصل السادس

١ - اثبت صحة كل مما يأتي باستخدام

البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان بالتناقض :

١ -	المعطيات :	$p \;,\; q \;,\; p \wedge q \rightarrow r$
	المطلوب :	r
٢ -	المعطيات :	$\sim p \;,\; \sim q \;,\; q \vee r \rightarrow p$
	المطلوب :	$\sim r$
٣ -	المعطيات :	$p \rightarrow q \;,\; \sim r \rightarrow \sim q$
	المطلوب :	$\sim r \rightarrow \sim p$
٤ -	المعطيات :	$\sim p \veebar \sim q \;,\; q$
	المطلوب :	$\sim p$
٥ -	المعطيات :	$p \rightarrow q \;,\; \sim p \rightarrow r \;,\; r \rightarrow s \;,\; s$
	المطلوب :	$\sim q \rightarrow s$

٢ - اثبت صحة كلا من الحجج الآتية باستخدام

البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان بالتناقض:

1 - $(p \rightarrow \sim q), \sim p \;\; \alpha \;\; \sim q$

2 - $(p \leftrightarrow q), q \;\; \alpha \;\; p$

3 - $(p \rightarrow \sim q), (r \rightarrow q), r \;\; \alpha \;\; \sim p$

4 - $(p \rightarrow \sim q), (\sim r \rightarrow \sim q) \;\; \alpha \;\; (p \rightarrow \sim r)$

5 - $(p \rightarrow q), (r \rightarrow \sim q) \;\; \alpha \;\; (r \rightarrow \sim p)$

٣ – اثبت صحة كل مما يأتى باستخدام

البرهان المباشر – البرهان الغير مباشر – البرهان بالتناقض :

1 – $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$

2 – $(q \to p) \wedge \sim p \Rightarrow \sim q$

3 – $((p \vee q) \to (p \wedge q)) \wedge p \Rightarrow q$

4 – $(p \wedge q) \wedge (p \vee q \to r) \Rightarrow r$

5 – $(p \to q) \wedge (r \to q) \Rightarrow (p \vee r \to q)$

٤ – باستخدام البرهان المباشر أوجد الاستنتاج المناسب لكل من المقدمات المنطقيـــة التاليـــة، بحيث تكون الحجة ملزمة :

1 – $(p \to \sim q),\ q$

2 – $(p \leftrightarrow q),\ (r \to \sim p)$

3 – $(p \to \sim q),\ (\sim p \to r)$

4 – $(r \to p)(q \to \sim p),\ r$

5 – $(p \to q),\ (\sim r \to \sim q),\ (r \to \sim s)$

٥ – اثبت صحة كل مما يأتى باستخدام البرهان المباشر – البرهان الغير مباشر – البرهـــان بالتناقض :

١ – x عددا زوجيا شرط ضرورى لكى يكون x^2 عددا زوجيا .

٢ – إذا كان $x = 4$ فأن $x^2 = 16$.

٣ – إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا .

٤ – إذا كان x عددا زوجيا فإن $x + 1$ عدد فردى .

٥ – حاصل ضرب عددين زوجيين يكون عدد زوجي .

٦ – الزاوية المحيطية نصف الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس .

٧ – العمود النازل من مركز الدائرة على أى وتر فيها ينصفه .

٨ - الزاوية الخارجة لأى مثلث تساوى مجموع الزاويتين الداخليتين فى المثلث ماعدا المجاورة.

٩ - المعادلة $2x + 1 = 0$ ليس لها حل إذا كان x تنتمى فى مجموعة الأعداد الطبيعية.

١٠ - إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن $\frac{c + 4\,b}{d} = \frac{ad + 4\,b^2}{b\,d}$.

٦ - إذا كان b , a أعداد زوجية فباستخدام البرهان المباشر أثبت أن كل مما يأتى عدد زوجى:

$$a + b\ ,\ a\ b\ ,\ 2\,a + 3\,b\ ,\ a^2 + b^2\ ,\ (a+2)^2 + b^2$$

٧ - باستخدام البرهان بالتناقض أثبت كلا مما يأتى :

١ - العدد $\sqrt{2}$ عدد غير نسبى .

٢ - المستقيم الواصل بين منتصفين ضلعين فى المثلث يوازى الضلع الثالث ويساوى نصفه.

٣ - فى المثلث abc إذا كان $ab \neq a\,c$ فإن $\hat{b} \neq \hat{c}$.

٤ - حاصل ضرب عددين فردين هو عدد فردى.

٥ - مجموع عددين فردين هو عدد زوجى.

٨ - برهن على صحة كلا من الحجج الآتية باستخدام

البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان بالتناقض .

١ - سقوط المطر شرط كافى لنمو المزروعات . المزروعات لم تنمو . أذن المطر لم يسقط .
٢ - سقوط المطر شرط ضرورى وكافى لتعمير الصحراء . إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة .

	المطر يسقط والشباب يجدون فرص عمل جديدة . أذن الصحراء يتم تعميرها .
٣ –	إذا درس الطالب منهج الرياضيات بفهم فإنه سوف يجتاز الامتحان بتفوق . الطالب لم يجتاز الامتحان بتفوق . أذن الطالب لم يدرس منهج الرياضيات بفهم .
٤ –	إذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل فإنها تكون متصلة . الدالة f قابلة للتفاضل . أذن الدالة f متصلة .
٥ –	إذا كانت الدالة f غير متصلة فإنها تكون غير قابلة للتفاضل . الدالة f قابلة للتفاضل . أذن الدالة f متصلة .
٦ –	إذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل فإنها تكون متصلة . الدالة f غير متصلة . أذن الدالة f غير قابلة للتفاضل .
٧ –	تساوى أضلاع المثلث شرط ضرورى وكافٍ لتساوى زوايا المثلث . المثلث زوياه مختلفة . أذن المثلث أضلاعه مختلفة .

٩ – ناقش صحة كل من التقارير الآتية :

١ – إذا كان n عددا فرديا فإن $n+1$ عددا زوجيا.

٢ – إذا كان n عددا أوليا فإن 2^2+1 عددا أوليا.

٣ – كل الأعداد الفردية تكون أعداد أولية.

٤ – حاصل ضرب عددين فردين هو عدد غير زوجى.

٥ – مجموع عددين زوجين هو عدد فردى.

٦ - لكل عدد طبيعي n فإن العدد $n^2 + n + 41$ يكون عدد أولى.

٧ - $(x+1)^2 = x^2 + x + 1$ حيث x عدد حقيقى .

٨ - $(x+1)^2 \neq x^2 + x + 1$ حيث x عدد حقيقى.

٩ - $(x-y)^2 \neq x^2 - y^2$ حيث x, y عددين حقيقيين.

١٠ - $x - y = y - x$ حيث x, y عددين حقيقيين.

١١ - كل الأعداد الفردية تقبل القسمة على3 أو 5 .

١٢ - بعض الأعداد الأولية تكون اعداد زوجية .

١٣ - كل الأعداد الزوجية تكون اعداد غير أولية .

١٤ - يوجد عدد حقيقىx بحيث ان $\log(x) < 0$.

١٥ - لكل عدد حقيقى x فإن $|x| = -x$.

١٠ - نفرض المجموعة $B=\{2,4,6,8\}$. ناقش صحة كل من التقارير الآتية باستخدام المثال المعاكس:

1- $\forall\ x \in B \quad , \quad x - 4 > 0$

2- $\forall\ x \in B \quad , \quad x^2 < 2^x$

3- $\exists\ x \in B : x! = 6$

4- $\exists\ x \in B$: x عدد غير زوجى

5- $\forall\ x, y \in B \quad , \quad x + y \geq x^2 - y^2$

6- $\exists\ x \in B$: x عامل من عوامل العدد $3!$

١١ - نفرض أن $A=\{1,2,3,4,5\}$. ناقش صحة كل من التقارير الآتية باستخدام المثال المعاكس:

1 – $\forall\ x , y \in A \ , \ x^2 + y^2 > 5$

2 – $\exists\ x , y \in A \ , \ x + y < 6$

3 – $\exists\ y \in A : \forall\ x \in A \ , \ 3x + y > 12$

4 – $\forall\ x \in A \ , \exists\ y \in A : \ x + 2y < 10$

5 – $\forall\ x\ ,\ y \in A :\ x^2 - y \geq 1$

١٢ – ناقش صحة كل من التقارير الآتية باستخدام البرهان بالمثال المعاكس:

1) $(\forall\ n \in N)(n - 1 \geq 2)$

2) $\exists\, x \in R : x^2 - 9 = 0$

3) $(\forall\ n \in N)(n^2 < 2^n)$

4) $\exists\ n \in N :\ 50 \leq n^2 < 90$

5) $\forall\, x \in (0,1]\ ,\ x^2 < 1$

6) $\exists\, x \in (0,2] :\ x^2 < x$

7) $\exists\ n \in N :\ (n^2 - 14 > 0) \wedge (n^3 < 70)$

8) $\forall\ n \in N\ ,\ (n^2 \leq 20) \wedge (n^3 > 3)$

9) $\forall\ n \in \{1,2,3,4,5\},\ (n^2 \leq 21) \vee (n^3 > 130)$

10) $\forall\ n \in \{1,2,3,4,5\},\ n^2 \leq 10 \ \rightarrow\ n^3 < 30$

١٣ – استخدم البرهان بالاستقراء الرياضي فى إثبات صحة كل من التقارير الآتية :

1) $P(n) \equiv 1 + 4 + 7 + \ \dots\ + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2} \qquad \forall\ n \in N$

2) $P(n) \equiv 4 + 8 + 12 + \ \dots\ + 4n = 2n(n+1) \qquad \forall\ n \in N$

3) $P(n) \equiv 1^2 + 2^2 + \ \dots\ + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall\, n \in N$

4) $P(n) \equiv 1^3 + 2^3 + \ \dots\ + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \forall\, n \in N$

5) $P(n) \equiv \dfrac{1}{1x2} + \dfrac{1}{2x3} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{(n+1)} \qquad \forall\, n \in N$

١٤ - برهن بالاستقراء الرياضي صحة التقرير $\forall\ n \geq 3$ $P(n) \equiv 2^n > 2n+1$

١٥ - برهن بالاستقراء الرياضي صحة كل من التقارير الآتية :

١ - $n^3 - n + 3$ يقبل القسمة على 3 لكل $n \in N$.

٢ - $5^n - 2^n$ يقبل القسمة على 3 لكل $n \in N$

٣ - $3^n - 1$ عدد زوجي لكل عدد طبيعي $n \geq 3$.

٤ - $n^3 - n + 1 > n^2$ لكل عدد طبيعي $n > 1$.

٥ - $3^n + 2^n$ عدد فردي لكل عدد طبيعي $n \in N$.