الفصل

7

الجبر البوولى

Boolean Algebra

١ – جبر بـــوول

المجموعات والافتراضات لها نفس الخواص وتحقق قوانين متماثلة وهذه القوانين تم اســـتخدامها لتعريف نظام رياضى يسمى الجبر البوولى نسبة إلى العالم الرياضى جـــورج بـــوول George Boole، و الجبر البوولى هو أحد أشكال المنطق الرمزى والذى يبين كيفية عمل أدوات الربط المنطقية.

تعريف ١ : جبر بوول هو مجموعةB غير خالية وعملية جمع يرمز لها + وعملية ضرب يرمـــز لها * بحيث تتحقق الشروط الآتية :

B_0 : قانون الانغلاق Closure law

لكل $a , b \in B$ فإن $a * b \in B \quad , \quad a + b \in B$

B_1 : قانون الإبدال Commutative law

لكل $a , b \in B$ فإن

$$a * b = b * a \quad , \quad a + b = b + a$$

B_2 : قانون التجميع Associative law

لكل $a , b , c \in B$ فإن

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad , \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

B_3 : قانون التوزيع **Distributive law**

لكل $a , b , c \in B$ فإن

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$
$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

B_4 : قانون الوحدة **Identity law**

المجموعة B تحتوى على العنصر المحايد الجمعى ويرمز له بالرمز O وتحتوى على العنصر المحايد للضرب ويرمز له بالرمز U بحيث أن لكل $a \in B$ فإن

$$a + O = a \quad , \quad a * U = a$$

B_5 : قانون المكملة **Complement law**

لكل $a \in B$ يوجد $a' \in B$ يسمى مكملة a بحيث أن

$$a + a' = U \quad , \quad a * a' = O$$

ونظام جبر بوول يرمز له بالثلاثية $(B , + , *)$.

ونلاحظ من قانون التوزيع B_3 أن المتطابقة الأولى

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

لا تمثل متطابقة فى الجبر العادى بينما المتطابقة الثانية

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

تمثل متطابقة فى الجبر العادى. وعملية المكملة لها الأسبقية على عملية الضرب وكذلك عملية الضرب لها الأسبقية على عملية الجمع فمثلا

$a + b * c$ تعنى $a + (b * c)$ وليس $(a + b) * c$

$a * b'$ تعنى $a * (b')$ وليس $(a * b)'$

وفى كثير من الأحيان يمكن الاستغناء عن الرمز * ونستخدم التجاور بدلا من ذلك، فمثلا

قانون الإبدال $a * b = b * a$

يمكن التعبير عنه بالصورة $a b = b a$

وقانون التوزيع B_3 يمكن التعبير عنه بالصورة

$$a + (b\,c) = (a+b)(a+c)$$
$$a(b+c) = a\,b + a\,c$$

مثال ١ : نفرض $B = \{0, 1\}$ وعمليتى الجمع والضرب معرفتان بالنسبة إلى B بالجدولين الآتيين

*	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	1

اثبت أن النظام $(B, +, *)$ يكون جبر بوول.

الحــل :

B_0 : قانون الانغلاق متحقق لان جميع العناصر داخل كل جدول تنتمى فى المجموعة B ، أى إن لكل $a, b \in B$ فإن $a * b \in B \quad , \quad a + b \in B$

B_1 : قانون الإبدال متحقق بالنسبة لعمليتى الجمع والضرب وهذا واضح من التماثل فى كل جدول، أى إن لكل $a, b \in B$ فإن

$$a + b = b + a \quad , \quad a * b = b * a$$

B_2 : قانون التجميع متحقق على الأعداد.

B_3 : قانون التوزيع متحقق على الأعداد.

B_4 : قانون الوحدة متحقق ومن الجدولين واضح أن

العنصر المحايد الجمعى O بالنسبة لعملية الجمع هو 0

العنصر المحايد الضربى U بالنسبة لعملية الضرب هو 1

B_5 : قانون المكملة متحقق وفى الجدول الآتى نوضح انه لكل $a \in B$ يوجد المكملة $a' \in B$ بحيث أن $a * a' = O \quad , \quad a + a' = U$

$a \in B$	$a' \in B$	$a + a'$	$a * a'$
0	1	1	0
1	0	1	0

أذن النظام $(B, +, *)$ يكون جبر بوول .

مثال ٢ :نفرض المجموعة الشاملة $A = \{a, b\}$ والمجموعة $B = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, A\}$.
أثبت أن النظام $(B, \cup, \cap)$ يكون جبر بوول حيث عمليتى الجمع والضرب هما الاتحاد والتقاطع فى المجموعات.

الحل : نكون جدول عملية الاتحاد وجدول عملية التقاطع

$\cap$	Φ	$\{a\}$	$\{b\}$	A
ϕ	Φ	Φ	Φ	Φ
$\{a\}$	Φ	$\{a\}$	Φ	$\{a\}$
$\{b\}$	Φ	Φ	$\{b\}$	$\{b\}$
A	Φ	$\{a\}$	$\{b\}$	A

جدول عملية التقاطع $\cap$

$\cup$	Φ	$\{a\}$	$\{b\}$	A
Φ	Φ	$\{a\}$	$\{b\}$	A
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	A	A
$\{b\}$	$\{b\}$	A	$\{b\}$	A
A	A	A	A	A

جدول عملية الاتحاد $\cup$

B_0 : قانون الانغلاق متحقق لان جميع العناصر داخل كل جدول تنتمى فى المجموعة B.

B_1 : قانون الإبدال متحقق على المجموعات، حيث أنه لأى مجموعتين X, Y يتحقق أن

$$X \cup Y = Y \cup X \quad , \quad X \cap Y = Y \cap X$$

وهذا واضح من التماثل فى كل جدول.

B_2 : قانون التجميع متحقق على المجموعات، حيث أنه لأى مجموعات X, Y, Z يتحقق أن

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cap Z$$
$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$$

B_3 : قانون التوزيع متحقق على المجموعات، حيث أنه لأى مجموعـــات X , Y , Z يتحقق أن

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

B_4 : قانون الوحدة متحقق ومن الجدولين واضح أن العنصر المحايد الجمعى O بالنســـبة لعملية الاتحاد هو Φ والعنصر المحايد الضربى U بالنسبة لعملية التقاطع هو A .

B_5 : قانون المكملة متحقق وفى الجدول الآتى نوضـــح انـــه لكـــل $X \in B$ يوجـــد المكملة $X' \in B$ بحيث أن

$$X \cup X' = U = A \quad , \quad X \cap X' = O = \Phi$$

$X \in B$	$X' \in B$	$X \cup X'$	$X \cap X'$
Φ	A	A	Φ
$\{a\}$	$\{b\}$	A	Φ
$\{b\}$	$\{a\}$	A	Φ
A	Φ	A	Φ

أذن النظام $(B , \cup , \cap)$ يكون جبر بوول.

مثال ٣ : نفرض أن B مجموعة من الافتراضات التى تتولد من التقارير $p , q , \ldots$. النظام $(B , \vee , \wedge)$ يكون جبر بوول حيث $\wedge$, $\vee$ هى أدوات الربط المنطقية (أداة الوصل وأداة الفصل).

الحـــل :

B_0 : قانون الانغلاق متحقق حيث أن B تتولد من التقارير $p , q , \ldots$ ولكل تقـــرير

$$p \; , \; q \in B$$

فإن $p \wedge q \in B \quad , \quad p \vee q \in B$

B_1 : قانون الإبدال متحقق على الافتراضات ، حيث أنه لأى $p\ ,\ q \in B$ فإن

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

B_2 : قانون التجميع متحقق على الافتراضات، حيث أنه لأى $p\ ,\ q\ ,\ r \in B$ فإن

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$
$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

B_3 : قانون التوزيع متحقق على الافتراضات، حيث أنه لأى $p\ ,\ q\ ,\ r \in B$ فإن

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

B_4 : قانون الوحدة متحقق و العنصر المحايد الجمعى O بالنسبة لأداة الوصل $\vee$ هـو تقرير f خاطئ منطقيا فى مجموعة الافتراضات B ويحقق

$$p \vee f \equiv p \quad \text{لأى} \quad p \in B$$

والعنصر المحايد الضربي U بالنسبة لأداة الفصل $\wedge$ هو تقرير t صائب منطقيـــا فى مجموعة الافتراضات B ويحقق

$$p \wedge t \equiv p \quad \text{لأى} \quad p \in B\ .$$

B_5 : قانون المكملة متحقق لأنه لكل $p \in B$ يوجد $\sim p \in B$ بحيث أن

$$p \vee \sim p \equiv t \qquad , \qquad p \wedge \sim p \equiv f$$

أى أن النفى يمثل المكملة . أذن النظام $(B, \vee, \wedge)$ يكون جبر بوول.

مثال ٤ : نفرض المجموعة $X_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ وهى مجموعة قواسم العدد 30 ونعرف عملية جمع $\oplus$ وعملية ضرب $\otimes$ على المجموعة X_{30} كالآتى:

المضاف المشترك الأصغر للعددين $a \oplus b = LCM(a, b)$

القاسم المشترك الأعلى للعددين $a \otimes b = GCD(a, b)$

أثبت أن النظام $(X_{30}, \oplus, \otimes)$ يكون جبر بوول.

الحـــل :

B_0 : قانون الانغلاق متحقق، حيث أنه لأى $a , b \in X_{30}$ فإن

$$a \oplus b \in X_{30} \quad , \quad a \otimes b \in X_{30}$$

B_1 : قانون الإبدال متحقق، حيث أنه لأى $a , b \in X_{30}$ فإن

$$a \oplus b = LCM(a , b) = LCM(b , a) = b \oplus a$$
$$a \otimes b = GCD(a , b) = GCD(b , a) = b \otimes a$$

B_2 : قانون التجميع متحقق، حيث أنه لأى $a , b , c \in X_{30}$ فإن

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \quad ,$$
$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$$

B_3 : قانون التوزيع متحقق ، حيث أنه لأى $a , b , c \in X_{30}$ فإن

$$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$$
$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

B_4 : قانون الوحدة متحقق ، حيث أنه لأى $a \in X_{30}$ فإن

$$a \oplus 1 = LCM(a , 1) = a \quad , \quad a \otimes 30 = GCD(a , 30) = a$$

أذن العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع $\oplus$ هو العدد 1 والعنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب $\otimes$ هو العدد 30 (والعددين $1 , 30 \in X_{30}$).

B_5 : قانون المكملة متحقق لأنه لكل $a \in X_{30}$ يوجد $a' = \frac{30}{a} \in X_{30}$ بحيث أن

$$a \oplus a' = LCM\left(a , \frac{30}{a}\right) = 30 \quad , \quad a \otimes a' = GCD\left(a , \frac{30}{a}\right) = 1$$

أذن النظام $(X_{30} , \oplus , \otimes)$ يكون جبر بوول .

٢ – نظريات أساسية

تعريف٢ : مفهوم الثنائية فى جبر بوول **Duality in a Boolean Algebra**

ثنائيـــة أى عبارة فى جبر بوول $(B, +, *)$ هى العبارة الناتجة من تبديـــل عمليتى الجمع + والضرب * كلا مكان الآخر فى العبارة الأصليـــة وتبديـــل عنصرى الوحدة الجمعى O والضربى U كلا مكان الآخر فى العبارة الأصلية.

مثال ٥ : أوجد ثنائية العبارة $(a + U) * (b + O) = b$

الحــل : بتطبيق مفهوم الثنائية فى جبر بوول فإن ثنائية العبارة المعطاة تكون

$$(a * O) + (b * U) = b$$

نظرية ١ : ثنائية أى نظرية فى جبر بوول هى أيضا نظرية فى جبر بوول، بمعنى أن ثنائيـــة أى شرط من شروط جبر بوول هى أيضا شرط من شروط جبر بوول.

نفرض أن $(B, +, *)$ جبر بوول ونفرض أن $a \in B$ ، فيما يأتى نعرض بعض النظريات الأساسية.

نظرية ٢: عناصر الوحدة تكون وحيدة . أى إن

(١)– إذا كان O_1 , O_2 هى عناصر محايدة لعملية الجمع فإن $O_1 = O_2$

(٢)– إذا كان U_1 , U_2 هى عناصر محايدة لعملية الضرب فإن $U_1 = U_2$

البرهان :إثبات (١) : نفرض أن O_1 , O_2 هى عناصر محايدة لعملية الجمع

السبب	العبارة
من الفرض (O_2 محايد جمعى)	$O_1 = O_1 + O_2$
قانون الإبدال B_1	$= O_2 + O_1$
من الفرض (O_1 محايد جمعى)	$= O_2$

أذن المحايد الجمعى يكون وحيد .

إثبات (٢) : نفرض أن U_1 , U_2 هى عناصر محايدة لعملية الضرب

من الفرض (U_2 محايد ضربى)	$U_1 = U_1 * U_2$
قانون الإبدال B_1	$= U_2 * U_1$
من الفرض (U_1 محايد ضربى)	$= U_2$

أذن المحايد الضربى يكون وحيد .

نظرية ٣ : (قانون التماثل القوى)

(i) – $a + a = a$ (ii) – $a * a = a$

البرهان : إثبات (i)

قانون الوحدة B_4	$a + a = (a + a) * U$
قانون المكملة B_5	$= (a + a) * (a + a')$
قانون التوزيع B_3	$= a + (a * a')$
قانون المكملة B_5	$= a + O$
قانون الوحدة B_4	$= a$

إثبات (ii)

قانون الوحدة B_4	$a * a = (a * a) + O$
قانون المكملة B_5	$= (a * a) + (a * a')$
قانون التوزيع B_3	$= a * (a + a')$
قانون المكملة B_5	$= a * U$
قانون الوحدة B_4	$= a$

ويمكن إثبات (ii) بطريقة أخرى كالآتى : وفقا لمفهوم الثنائية فإن ثنائية $a + a = a$ تكون $a * a = a$ وحيث أننا أثبتنا فى (i) أن $a + a = a$ صواب أذن $a * a = a$ تكون صواب أيضا .

نظرية ٤ :

$$(i) - \quad a + U = U \qquad\qquad (ii) - \quad a * O = O$$

البرهان : إثبات (i)

قانون المكملة B_5	$a + U = a + (a + a')$
قانون التجميع B_2	$= (a + a) + a'$
قانون التماثل القوى(نظرية (٣))	$= a + a'$
قانون المكملة B_5	$= U$

إثبات (ii)

وفقا لمفهوم الثنائية فإن ثنائية العبارة $a + U = U$ تكون $a * O = O$ وحيث أننا أثبتنا فى (i) أن العبارة $a + U = U$ صواب أذن العبارة $a * O = O$ تكون صـــواب أيضا .

نظرية ٥ : (قانون الالتفاف) $\quad a'' = a$

البرهان : من قانون المكملة B_5 نعلم انه لكل $a \in B$ يوجد $a' \in B$ بحيث أن

$$a + a' = U \quad , \quad a * a' = O$$

وحيث أن $a' \in B$ أذن يوجد $a'' \in B$ بحيث أن

$$a' + a'' = U \quad , \quad a' * a'' = O \qquad (1)$$

والآن لإثبات أن $a'' = a$

قانون الوحدة B_4	$a = a + O$
من المعادلة (١)	$= a + (a' * a'')$
قانون التوزيع B_3	$= (a + a') * (a + a'')$
قانون المكملة B_5	$= U * (a + a'')$
من المعادلة (١)	$= (a' + a'') * (a + a'')$
قانون الإبدال B_1	$= (a'' + a') * (a'' + a)$
قانون التوزيع B_3	$= a'' + (a' * a)$

قانون الإبدال B_1	$= a'' + (a * a')$
قانون المكملة B_5	$= a'' + O$
قانون الوحدة B_4	$= a''$

نظرية ٦ : عناصر الوحدة تكون مكملات لبعضها البعض أى إن

$$O' = U \qquad (i)$$
$$U' = O \qquad (ii)$$

البرهان : إثبات (i)

قانون الوحدة B_4	$O' = O' + O$
قانون الإبدال B_1	$= O + O'$
قانون المكملة B_5	$= U$

إثبات (ii)

وفقا لمفهوم الثنائية فإن ثنائية العبارة $O' = U$ تكون $U' = O$ وحيث أننا أثبتنا فى (i) أن العبارة $O' = U$ صواب أذن العبارة $U' = O$ تكون صواب أيضا.

نظرية ٧ : قانون ديمورجان

$$(a+b)' = a' * b' \qquad (i)-$$
$$(a*b)' = a' + b' \qquad (ii)-$$

البرهان : إثبات (i) لإثبات أن $(a+b)' = a' * b'$ نحاول إثبات

$$(a+b) + (a' * b') = U \qquad (1)$$
$$(a+b) * (a' * b') = O \qquad (2)$$

<u>أولا : إثبات (1)</u>

$$(a+b)+(a' * b')$$

$= ((a+b)+a')*((a+b)+b')$ قانون التوزيع B_3

$= ((b+a)+a')*((a+b)+b')$ قانون الإبدال B_1

$= (b+(a+a'))*(a+(b+b'))$ قانون التجميع B_2

$= (b+U)*(a+U)$ قانون المكملة B_5

$= U*U$ من نظرية (٤)

$= U$ قانون التماثل القوى(نظرية (٣))

<u>ثانيا : إثبات (2)</u>

$$(a+b)*(a' * b')$$

$= (a' * b') * (a+b)$ قانون الإبدال B_1

$= ((a' * b')*a) + ((a' * b')*b)$ قانون التوزيع B_3

$= ((b' * a')*a) + ((a' * b')*b)$ قانون الإبدال B_1

$= (b' * (a' * a)) + (a' * (b' * b))$ قانون التجميع B_2

$= (b' * (a * a')) + (a' * (b * b'))$ قانون الإبدال B_1

$= (b' * O) + (a' * O)$ قانون المكملة B_5

$= O+O$ من نظرية (٤)

$= O$ قانون التماثل القوى (نظرية (٣)

إثبات (ii)

وفقا لمفهوم الثنائية فإن ثنائية العبارة $(a+b)' = a' * b'$ تكون $(a*b)' = a' + b'$
وبالتالى ينتج من (i) أن العبارة $(a*b)' = a' + b'$ تكون متحققة أيضا.

نظرية ٨ : المكملة تكون وحيدة.

البرهان : نفرض أن a'_2 , a'_1 مكملتين للعنصر a. أذن المطلوب إثبات أن $a'_1 = a'_2$

ومن قانون المكملة B_5 وحيث أن a'_2 , a'_1 مكملتين للعنصر a. أذن

$$a + a'_1 = U \quad , \quad a * a'_1 = O \qquad (1)$$

$$a + a'_2 = U \quad , \quad a * a'_2 = O \qquad (2)$$

والآن لإثبات أن $a'_1 = a'_2$

قانون الوحدة B_4	$a'_1 = a'_1 + O$
الفرض فى معادلة (٢)	$= a'_1 + (a * a'_2)$
قانون التوزيع B_3	$= (a'_1 + a) * (a'_1 + a'_2)$
قانون الإبدال B_1	$= (a + a'_1) * (a'_1 + a'_2)$
الفرض فى معادلة (١)	$= U * (a'_1 + a'_2)$
الفرض فى معادلة (٢)	$= (a + a'_2) * (a'_1 + a'_2)$
قانون الإبدال B_1	$= (a'_2 + a) * (a'_2 + a'_1)$
قانون التوزيع B_3	$= a'_2 + (a * a'_1)$
الفرض فى معادلة (١)	$= a'_2 + O$
قانون الوحدة B_4	$= a'_2$

نظرية ٩ : (قانون الامتصاص)

$$(i) - \qquad a + (a * b) = a$$

$$(ii) - \qquad a * (a + b) = a$$

البرهان : إثبات (i)

قانون الوحدة B_4	$a + (a * b) = (a * U) + (a * b)$
قانون التوزيع B_3	$= a * (U + b)$
قانون الإبدال B_1	$= a * (b + U)$
من نظرية (٤)	$= a * U$
قانون الوحدة B_4	$= a$

إثبات (ii)

وفقا لمفهوم الثنائية فإن ثنائية العبارة $a + (a * b) = a$ تكون $a * (a + b) = a$

وبالتالى ينتج من (i) أن العبارة $a * (a + b) = a$ تكون متحققة أيضا.

نظرية ١٠ : نفرض أن $(B, +, *)$ جبر بــــوول وان $a, b \in B$. أذن الشـــروط الآتية متكافئة

$$(1) \qquad a * b' = O$$

$$(2) \qquad a + b = b$$

$$(3) \qquad a' + b = U$$

$$(4) \qquad a * b = a$$

البرهان : الإثبات يتم فى الخطوات الآتية :

(i) – $(1) \Rightarrow (2)$

(ii) – $(2) \Rightarrow (3)$

(iii) – $(3) \Rightarrow (4)$

(iv) – $(4) \Rightarrow (1)$

إثبات (i) $\big((1) \Rightarrow (2) \big)$

نفرض أن $a * b' = O$

السبب	العبارة
قانون الوحدة B_4	$a + b = (a + b) * U$
قانون المكملة B_5	$= (a + b) * (b + b')$
قانون الإبدال B_1	$= (b + a) * (b + b')$
قانون التوزيع B_3	$= b + (a * b')$
من الفرض	$= b + O$
قانون الوحدة B_4	$= b$

إثبات (ii) $\left((2) \Rightarrow (3) \right)$

نفرض أن $a + b = b$

من الفرض (2) $a' + b = a' + (a+b)$

قانون التجميع B_2 $= (a'+a) + b$

قانون الإبدال B_1 $= (a+a') + b$

قانون المكملة B_5 $= U + b$

قانون الإبدال B_1 $= b + U$

من نظرية (٤) $= U$

إثبات (iii) $\left((3) \Rightarrow (4) \right)$

نفرض أن $a' + b = U$

قانون الوحدة B_4 $a * b = (a*b) + O$

قانون المكملة B_5 $= (a*b) + (a*a')$

قانون التوزيع B_3 $= a * (b+a')$

قانون الإبدال B_1 $= a * (a'+b)$

من الفرض (٣) $= a * U$

قانون الوحدة B_4 $= b$

إثبات (iv) $\left((4) \Rightarrow (1) \right)$

نفرض أن $a * b = a$

قانون الوحدة B_4 $a * b' = (a * b') + O$

قانون المكملة B_5 $= (a*b') + (a*a')$

قانون التوزيع B_3 $= a * (b'+a')$

قانون الإبدال B_1 $= a * (a'+b')$

من نظرية ديمورجان $= a * (a*b)'$

من الفرض (4) $= a * a'$

قانون المكملة B_5 $= O$

تعريف ٣ : نفرض أن $(B, +, *)$ جبر بوول وان $a, b \in B$. أذن يطلق على a أنها تسبق b ويرمز لذلك بالرمز $a \underset{\sim}{<} b$ إذا كانت إحدى خواص النظرية (١٠) متحققة.

مثال ٦ : نفرض جبر بوول $(B, \cup, \cap)$ حيث B عائلة من المجموعات ونفرض $X, Y \in B$. أذن X تسبق Y $(X \underset{\sim}{<} Y)$ تعني أن $(X \subset Y)$ وبالتالى النظرية (١٠) تنص على انه إذا كانت $X \subset Y$ فإن الشروط الآتية تكون متحققة:

$(1) \quad X \cap Y' = \Phi \qquad (3) \quad X' \cup Y = U$

$(2) \quad X \cup Y = Y \qquad (4) \quad X \cap Y = X$

مثال ٧ : نفرض جبر بوول $(B, \vee, \wedge)$ حيث B مجموعة من الافتراضات ونفرض $p, q \in B$ أذن p تسبق q $(p \underset{\sim}{<} q)$ تعنى أن $(p \Rightarrow q)$ وبالتالى النظرية (١٠) تنص على انه إذا كان $p \Rightarrow q$ فإن الشروط الآتية تكون متحققة:

$(1) \quad p \wedge \sim q$ افتراض خاطئ منطقيا (تناقض)

$(2) \quad p \vee q \equiv q$

$(3) \quad \sim p \vee q$ افتراض صائب منطقيا (تحصيل حاصل)

$(4) \quad p \; \mathrm{I} \; q \equiv p$

نظرية ١١ : نفرض أن $(B, +, *)$ جبر بوول. العلاقة $\underset{\sim}{<}$ هى علاقة ترتيب جزئى فى B ، أى إن

$(i) \quad a \underset{\sim}{<} a \quad \forall \; a \in B$ ($\underset{\sim}{<}$ علاقة عاكسة)

$(ii) \quad (a \underset{\sim}{<} b) \wedge (b \underset{\sim}{<} a) \Rightarrow a = b$ ($\underset{\sim}{<}$ علاقة غير متماثلة)

$(iii) \quad (a \underset{\sim}{<} b) \wedge (b \underset{\sim}{<} c) \Rightarrow a \underset{\sim}{<} c$ ($\underset{\sim}{<}$ علاقة ناقلة)

البرهان : نفرض $a , b , c \in B$.

من التعريف حيث أن $a \lesssim b$ تعنى أن إحدى خواص النظرية (١٠) متحققـــة.

أذن من الخاصية الثانية بالنظرية ينتج أن

$$a \lesssim b \quad \leftrightarrow \quad a + b = b \qquad (1)$$

$$b \lesssim a \quad \leftrightarrow \quad b + a = a \qquad (2)$$

$$b \lesssim c \quad \leftrightarrow \quad b + c = c \qquad (3)$$

(i) إثبات $\lesssim$ علاقة عاكسة

من قانون التماثل القوى (نظرية (٣)) نعلم أن $a + a = a$ وباستخدام معادلـــة (1) ينتج أن $a \lesssim a$. أذن العلاقة $\lesssim$ علاقة عاكسة.

(ii) إثبات $\lesssim$ علاقة غير متماثلة

نفرض أن $b \lesssim a \quad , \quad a \lesssim b$

من تعريف $b \lesssim a$ فى معادلة (2) $\qquad a = b + a$

قانون الإبدال B_1 $\qquad = a + b$

من تعريف $a \lesssim b$ فى معادلة (2) $\qquad = b$

أذن ينتج أن $b = a$ وبالتالى $\lesssim$ علاقة غير متماثلة.

(iii) إثبات $\lesssim$ علاقة ناقلة

نفرض أن $b \lesssim c \quad , \quad a \lesssim b$

من تعريف $b \lesssim c$ فى معادلة (3) $\qquad a + c = a + (b + c)$

قانون التجميع B_2 $\qquad = (a + b) + c$

من تعريف $a \lesssim b$ فى معادلة (2) $\qquad = b + c$

من تعريف $b \lesssim c$ فى معادلة (3) $\qquad = c$

اذن ينتج أن $a + c = c$ وبالتالى $a \lesssim c$.

أذن $\lesssim$ علاقة ناقلة .

مثال ٨ : أثبت أن ثنائية $a \lesssim b$ تكون $b \lesssim a$. أى انه فى جبر بوول فإن ثنائيـــة علاقـــة تؤدى إلى علاقة عكسية فى الترتيب الجزئى.

الحل : من التعريف حيث أن $a \lesssim b$ تعنى أن إحدى خواص النظرية (١٠) متحققة. أذن من الخاصية الثانية بالنظرية ينتج أن

$$a \lesssim b \quad \leftrightarrow \quad a + b = b$$

أى إن ثنائية $a \lesssim b$ هى نفسها ثنائية $a + b = b$. وحيث أن ثنائيـــة $a + b = b$ تكون $a * b = b$ ومن قانون الإبدال B_1 تصبح $b * a = b$ وهذه تكافئ $b \lesssim a$ من الخاصية الثانية بالنظرية (١٠)، أذن ثنائية $a \lesssim b$ تكون $b \lesssim a$.

مثال ٩ : نفرض أن $(B, +, *)$ جبر بوول وان $a, b \in B$. أثبت أن

$$a \lesssim a + b \qquad , \qquad b \lesssim a + b$$

الحل : من الخاصية الثانية بالنظرية (١٠)، لإثبات أن $a \lesssim a + b$ نحاول إثبات أن

$$a + (a + b) = a + b$$

قانون التجميع B_2 $\qquad a + (a + b) = (a + a) + b$

قانون التماثل القوى (نظرية (٣)) $\qquad = a + b$

وبالتالى ينتج المطلوب $a \lesssim a + b$.

وبالمثل لإثبات أن $b \lesssim a + b$ نحاول إثبات أن

$$b + (a + b) = a + b$$

قانون الإبدال B_1	$b + (a + b) = (a + b) + b$
قانون التجميع B_2	$= a + (b + b)$
قانون التماثل القوى (نظرية (٣))	$= a + b$

وبالتالى ينتج المطلوب $b \leq a + b$

مثال ١٠ : نفرض أن $(B, +, *)$ جبر بوول وان $a \in B$. أثبت أن

$$O \leq a \leq U$$

الحـــل :

قانون الوحدة B_4	$a = a + O$
قانون الإبدال B_1	$= O + a$

أذن من الخاصية الثانية بالنظرية (١٠) ينتج أن $O \leq a$

ومن نظريـــة (٤) نعلـــم أن $a + U = U$ وبالتـــالى ينتـــج أن $a \leq U$ ، اى أن

$O \leq a \leq U$.

تمارين الفصل السابع

١ – نفرض المجموعة الشاملة $A = \{ a , b , c \}$ والمجموعة $B = p(A)$ مجموعة القوة.
أثبت أن النظام (B , Y , I) يكون جبر بوول حيث عمليتى الجمع والضرب هما الاتحاد والتقاطع فى المجموعات .

٢ – نفرض المجموعة X_{70} وهى مجموعة قواسم العدد 70 ونعرف عملية جمع $\oplus$ وعملية ضرب $\otimes$ على المجموعة X_{70} كالآتى:

المضاف المشترك الأصغر للعدديين $a \oplus b = LCM (a , b)$
القاسم المشترك الأعلى للعدديين $a \otimes b = GCD (a , b)$

أثبت أن النظام $(X_{70} , \oplus , \otimes)$ يكون جبر بوول ثم أحسب قيمة كل من

1) - $2 * (5' + 7)'$
2) - $(35 + 14') * (O' + U)$
3) - $(10 + O)' + (O' * 70)'$

٣ – نفرض جبر بوول لقواسم العدد 110 $(X_{110} , \oplus , \otimes)$ حيث عمليتى الجمع $\oplus$ والضرب $\otimes$ معرفة فى تمرين (٢). أحسب قيمة كل من

1) - $22 * (11' + 2)$
2) - $(55 + 10') + 2 + U'$
3) - $(10 + O)' + (O' * 5)'$

٤ – نفرض جبر بوول $(B , + , *)$ ، حيث $B = \{ 0 , 1 \}$ وعمليتى الجمع والضرب معرفتان بالنسبة إلى B بالجدولين الآتيين

*	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	1

أحسب قيمة كل من

1) - $1 * (0 + 1)'$

2) - $(1 + 1) * (O' + O)$

3) - $(1' + O)' + (O' * 1)'$

٥ – باستخدام جبر بوول أثبت كل من العبارات الآتية ثم أوجد ثنائية كل منها

(1) - $\left(b + U \right) * \left(a + O \right) = a$

(2) - $\left(a + b \right) * \left(b + c \right) = ac + b$

(3) - $a (a' + b) = a b$

(4) - $a + \left(b * d \right) = \left(a + b \right) * \left(a + d \right)$

(5) - $a * \left(f + c \right) = \left(a * f \right) + \left(a * c \right)$

(6) - $(a+b) (a' b') = O$

(7) - $a+b + a' b' = U$

(8) - $(a+b)' = a' b'$

(9) - $a * O + a * U = a$

(10) - $a + a' b = a + b$

٦ – باستخدام جبر بوول أثبت أن $b' + a' = \left(a * b \right)'$.

٧ – نفرض جبر بوول $\left(B , \cup , \cap \right)$ حيث B عائلة من المجموعات ونفرض $X , Y \in B$. العلاقة X تسبق Y $(X \underset{\sim}{<} Y)$ تعنى أن $\left(X \subset Y \right)$.

أثبت انه إذا كانت $X \subset Y$ فإن الشروط الآتية تكون متحققة:

(1) $X \cap Y' = \Phi$

(2) $X \cup Y = Y$

(3) $X' \cup Y = U$

(4) $X \cap Y = X$