٤ الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

Probability and probability distributions

١- تعريف الاحتمال

٢- قواعد الاحتمال

٣- الاحتمال الشرطى

٤- الاحتمالات اللاحقة

٥- التوزيعات الاحتمالية

٦- مقدمة عن التباديل والتوافيق

٧- توزيع "ذو الحدين"

٨- توزيع بواسون

٩- التوزيع الطبيعى

١٠- التوزيع الطبيعى القياسى

١١- توزيع المتوسطات

١٢- تقريب توزيع "ذو الحدين" بالتوزيع الطبيعى

من منا لا يستخدم كلمة احتمال probability فى حياته اليومية ولكن قد تكون فى عبارات مختلفة فيقال إن هذين الزوجين قد ينجبان ذكراً أو أن هذا الطالب يكاد يكون من المؤكد نجاحه فى مادة ما أو أن هذا الطفل الصغير قد يصير طويلاً وغير ذلك كثير. وهذه العبارات إما مؤكدة الحدوث أو مؤكدة فى عدم حدوثها أو تقع بين هاتين الفئتين. وتقوم نظرية الاحتمالات probability theory بترجمة هذه العبارات الوصفية إلى قياسات كمية حيث إنها الأكثر دقة، فيقال مثلاً إن احتمال الحصول على ذكر يساوى النصف أى 50% واحتمال أن هذا الطالب المؤكد نجاحه هو الواحد الصحيح أو 100% ... وهكذا. ويطلق على إنجاب ذكر أو نجاح الطالب فى مادة ما أو أن يكون الطفل طويلاً "حدث" event وفى مثل هذه الحالة يسمى حدث بسيط simple event، وقد يكون الحدث مركباً compound event كما فى حالة إلقاء حجرى نرد مرة واحدة فإن احتمال الحصول على الوجه العلوى 6 للحجرين هو احتمال الحصول على حدث مركب. وللحصول على نسبة حدوث هذا الحدث أو أى حدث فقد تجرى تجربة experiment والتى قد تشتمل على عدة محاولات trials وعندما تجرى محاولة يتحصل على عدد مختلف من الحالات الممكن ظهورها وتسمى كل الحالات المختلفة الممكن حدوثها (جميع النواتج الممكنة) all possible outcomes. فمثلاً عند إلقاء حجر النرد فإن أى رقم من الأرقام التالية يظهر على وجهه العلوى: 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 وتمثل هذه الأحداث كل النواتج الممكن ظهورها. ويعبر عن كل الأحداث الممكنة بفراغ العينة sample space وقد يمثل بمحور واحد one dimensional space كما هو الحال عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة حيث سيكون هناك محور واحد عليه الأرقام من 1 إلى 6، وقد يمثل فراغ العينة بمحورين two dimensional space كما فى حالة إلقاء حجرى نرد مرة واحدة فالمحور السينى مثلاً يمثل حجر النرد الأول والمحور الصادى يمثل الحجر الثانى وقد يمثل فراغ العينة بأكثر من محورين.

وقد بدأت دراسة الاحتمالات من عدة مئات من السنين وكان هناك اهتمام بها وخاصة في الألعاب الميسرية التى تتوقف على الصدفة chance. وتلعب الاحتمالات دوراً مهماً فى الإحصاء وفى اختبارات الفروض الإحصائية tests of hypotheses وفى التقديرات estimations وغيرها الكثير.

٤-١ تعريف الاحتمال

هناك نوعان من التعريفات أحدهما هو التعريف الكلاسيكى والآخر هو التعريف التجريبى.

٤-١-١التعريف الكلاسيكى Classical definition

وفيه يعرف احتمال حدوث حدث ما وليكن هذا الحدث E مثلاً بأنه النسبة بين عدد مرات ظهور هذا الحدث المرغوب فيه desired event (n) إلى عدد كل النواتج الممكنة (m)، ويعبر عن ذلك كما يلى:

$$Pr(E) = \frac{n}{m} \qquad (١-٤)$$

ومن هذا التعريف فإن أقل قيمة للاحتمال هى الصفر عندما يكون عدد مرات ظهور الحدث المرغوب فيه مساوياً للصفر وأعلى قيمة للاحتمال هى الواحد الصحيح عندما يكون عدد مرات ظهور الحدث المرغوب فيه (n) مساوياً لعدد كل النواتج الممكنة (m).

مثال ٤-١

ما هو احتمال الحصول على صورة (H) عند رمى قطعة نقود مرة واحدة ؟

وللحصول على قيمة هذا الاحتمال فإن عدد مرات ظهور الحدث المرغوب فيه هو 1 والعدد الكلى للحالات الممكن حدوثها هو 2 وعلى ذلك فإن احتمال الحصول على صورة يساوى ½ ، مع ملاحظة أن قطعة النقود هذه يجب أن تكون غير متحيزة fair، بمعنى عند رمى هذه القطعة فإنها تستقر إما على الصورة أو على الكتابة بنفس درجة التوقع.

ويجب ملاحظة أنه عند استخدام هذا التعريف الكلاسيكى للاحتمال فإنه يشترط أن تكون الأحداث متنافية mutually exclusive، أى حدوث أى منها يمنع حدوث الأخرى وأن يكون لكل حدث نفس الفرصة فى الظهور equally likely.

مثال ٤-٢

ما هو احتمال الحصول على ولد Jack عند سحب ورقة من أوراق اللعب (الكوتشينة) ؟

عدد الأوراق التى عليها Jack = 4

العدد الكلى للأوراق = 52 و هذا يمثل كل الأحداث الممكنة

إذا احتمال الحصول على Jack $4 \div 52 = 0.0769$

مثال ٤-٣

فى المثال ٤-١ ما هو احتمال الحصول على كتابة (T) ؟

عدد مرات الحصول على كتابة عند رمى قطعة واحدة من النقود $=1$ والعدد الكلى الممكن حدوثه هو 2 أى أن:

$$m=2 \text{ ، } \tilde{n}=1$$

إذا احتمال الحصول على كتابة: $1 \div 2 = 0.5$

يتضح مما سبق عدة حقائق حول الاحتمالات:

١- إذا أجريت محاولة لها k من الحالات الممكنة والمتساوية فى إمكانية حدوثها فإن احتمال الحصول على أى منها هو:

$$\Pr(E_i)=\frac{1}{k}, i=1,2,...,k \qquad (٤-٢)$$

كما ظهر ذلك فى الأمثلة ٤-١، ٤-٣.

٢- احتمال حدوث حدث ما E_i أكبر من أو يساوى الصفر وأقل من أو يساوى الواحد الصحيح أى أن:

$$0 \le \Pr(E_i) \le 1 \qquad (٤-٣)$$

٣- مجموع الاحتمالات لكل الأحداث الممكنة يساوى الواحد الصحيح:

$$\sum_i \Pr(E_i)=1 \qquad (٤-٤)$$

فحاصل جمع احتمال الحصول على صورة واحتمال الحصول على كتابة عند رمى قطعة من النقود يساوى الواحد الصحيح وعند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال الحصول على أى رقم يساوى $\frac{1}{6}$ ومجموع الاحتمالات لكل الأحداث الممكنة هو الواحد الصحيح أيضاً ... وهكذا.

٤- احتمال عدم الحصول على حدث ما وليكن $E_i=k$ يساوى الواحد الصحيح مطروحاً منه احتمال الحصول على هذا الحدث أى أن:

$$\Pr(E_i \ne k)=1-\Pr(E_i=k) \qquad (٤-٥)$$

مثال ٤-٤

عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة ما هو احتمال عدم الحصول على الرقم 6 ؟

احتمال الحصول على الرقم 6 $\frac{1}{6}=0.166$

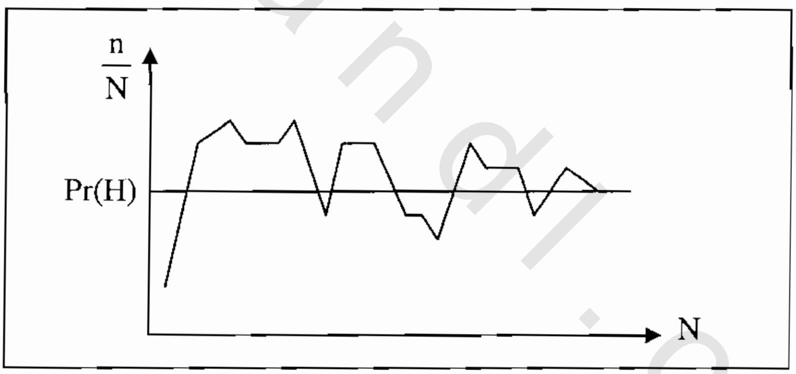
واحتمال عدم الحصول على الرقم 6 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}=0.834$

٤-١-٢ التعريف التجريبى Experimental or empirical definition

إذا أجريت تجربة من عدة محاولات فى كل محاولة يرمى مثلاً عدد من قطع النقود N، ظهرت الصورة (H) فى n منها فإنه عندما تؤول N إلى ∞ (ما لانهاية) فإن النسبة $\frac{n}{N}$ تعبر عن قيمة الاحتمال أى أن:

$$Pr(H)=\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N} \qquad (٤-٦)$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانيا بالشكل ٤-١ إذا كان المحور السينى يمثل N والمحور الصادى يمثل النسبة $\frac{n}{N}$.



شكل ٤-١ التمثيل البيانى للتعريف التجريبى للاحتمال

ومن هذا التعريف التجريبى للاحتمال يتضح أنه كلما زادت N كلما أمكن الحصول على قيمة دقيقة للاحتمال بعيداً عن تأثير الصدفة chance التى قد تلعب دوراً كبيراً إذا كانت N صغيرة.

مثال ٤-٥

إذا كان عدد العجول الذكور المولودة 4900 علماً بأن العدد الكلى 10000 عجل من الذكور والإناث. فما احتمال الحصول على عجل ذكر ؟

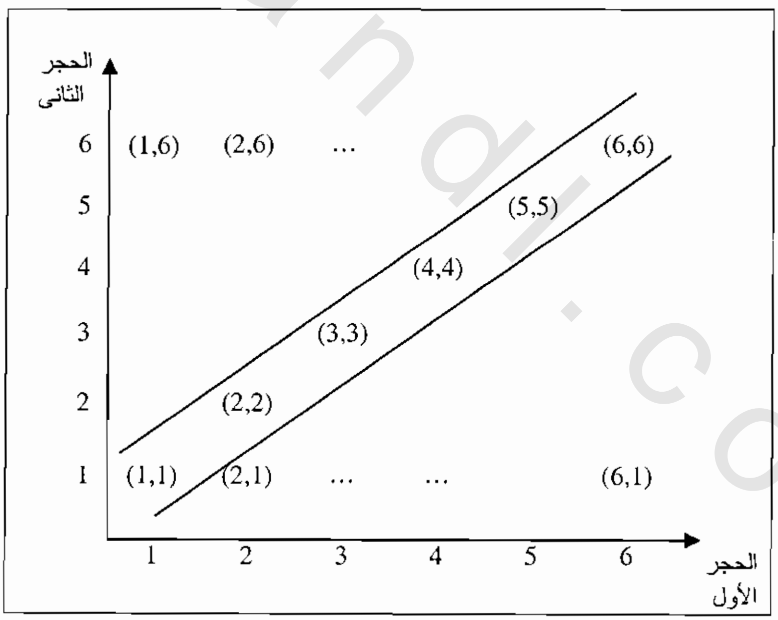
احتمال الحصول على عجل ذكر $\frac{4900}{10000}=\frac{49}{100}=0.49$

وأبسط طريقة للحصول على قيمة الاحتمال لحدوث حدث ما وليكن E_i هو كتابة كل الحالات المختلفة الممكن ظهورها ثم تحصر عدد الحالات التى يظهر فيها الحدث المرغوب E_i وباستخدام تعريف الاحتمال الكلاسيكى السابق الإشارة إليه يمكن حساب قيمة الاحتمال المراد تقديره.

مثال ٤-٦

عند إلقاء حجرى نرد ما احتمال الحصول على الوجهين متشابهين؟

افترض أن الإحداث السينى يمثل الحجر الأول والإحداث الصادى يمثل الحجر الثانى حيث تكون كل النقط الممكن ظهورها 36 وعدد المرات التى يظهر فيها الوجهان متشابهين 6 مرات وعليه فإن احتمال الحصول على الوجهين متشابهين هو: $\frac{1}{6}=\frac{6}{36}$ كما هو واضح من شكل ٤-٢



شكل ٤-٢ النقط الممكن ظهورها عند إلقاء حجرى نرد مرة واحدة

ولكن حساب الاحتمال بتلك الطريقة قد يحتاج إلى جهد ووقت لحصر كل الحالات المختلفة الممكن حدوثها ولذا تستخدم قواعد الاحتمالات التى وضعت لتوفر الوقت والجهد.

٤-٢ قواعد الاحتمال Rules of probability

٤-٢-١ قاعدة الجمع Addition rule

إذا ألقى حجرا نرد غير متحيزين مرة واحدة. فما احتمال الحصول على وجهين متشابهين (هو نفس المثال ٤-٦)؟ ويمكن التعبير عن ذلك كالآتي:

ما قيمة احتمال الحصول على: (1, 1) أو (2, 2) أو (3, 3) أو (4, 4) أو (5, 5) أو (6, 6) ؟

لاحظ أنه إذا أُلقى حجرى نرد فإن الحصول على (1,1) على كلا الوجهين للحجرين يمنع ظهور الحالات الأخرى الممكنة. والحصول على (2,2) يعنى أيضا عدم ظهور الحالات الأخرى، وهكذا فإن ظهور أى حدث يمنع ظهور الأحداث الأخرى. ويعبر عن تلك الخاصية بأنها أحداث متنافية mutually exclusive ويكون احتمال الحصول على هذه الأحداث المتنافية والتى لها نفس الفرصة فى الظهور هو مجموع احتمالات كل منها ويعبر عن ذلك كما يلى:

$$\Pr[(1,1) \text{ or } (2,2) \cdots \text{ or } (6,6)] = \Pr(1,1) + \Pr(2,2) + \cdots + \Pr(6,6)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

وهى نفس النتيجة السابق الحصول عليها فى مثال ٤-٦. ويمكن تعميم هذه القاعدة لأى من الأحداث المتنافية أى:

$$\Pr(E_1 \text{ or } E_2 \cdots \text{ or } E_k) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2) + \cdots + \Pr(E_k) \qquad (٤-٧)$$

أما إذا كانت الأحداث غير متنافية (وهذا شرط أساسى يلزم توفره) فإن النتيجة سوف تختلف وسوف تكون الإجابة خطأ، والمثال التالى يبين ذلك:

مثال ٤-٧

ما احتمال الحصول على وجهين متشابهين أو أن يكون مجموع الوجهين هو 2 عند إلقاء حجرى نرد مرة واحدة ؟

عند النظر للرسم البيانى (شكل٤-٢) فى المثال ٤-٦ وحصر عدد النقط التى تمثل الحصول على الوجهين متشابهين (6 نقاط) أو أن يكون مجموع الوجهين هو 2 (نقطة واحدة) وعليه فإن الاحتمال عبارة عن: $\frac{7}{36}=\frac{1}{36}+\frac{6}{36}$ وهى قيمة غير مضبوطة للاحتمال. وللحصول على القيمة المضبوطة تستخدم العلاقة التالية:

$$\Pr(A \text{ or } B) = \Pr(A) - \Pr(B) - \Pr(AB) \qquad (٤-٨)$$

وتعبر $\Pr(AB)$ عن الاحتمال المشترك joint probability وهو احتمال الحصول على الحدث A والحدث B معاً أى نسبة عدد المرات التى يظهر فيها الحدث A والحدث B معاً إلى العدد الكلى الممكن حدوثه. وقد يعبر عن المعادلة (٤-٨) كما يلى:

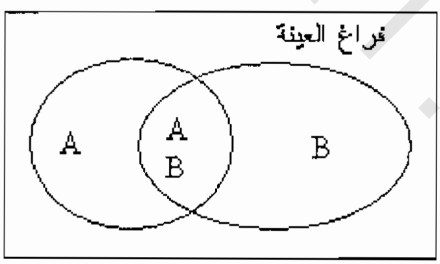
$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) - \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \qquad (٤-٩)$$

حيث تمثل $\cup$ اتحاد union بينما تمثل $\cap$ تقاطع intersection.

وتكون الإجابة الصحيحة للمثال ٤-٧ كالتالى:

$$\frac{6}{36}+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$$

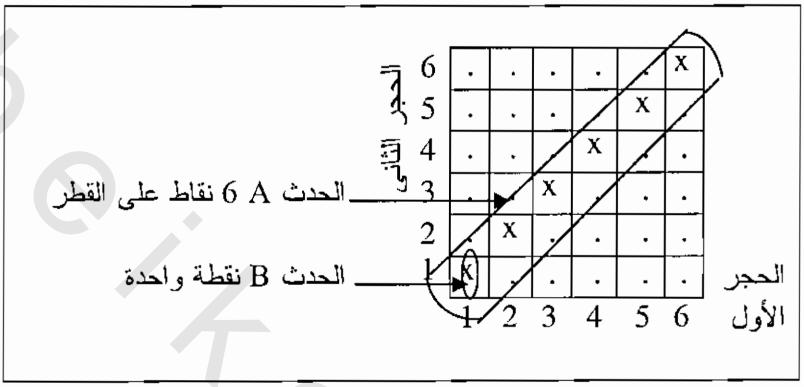
ويمكن التعبير عن المعادلة (٤-٩) بالشكل ٤-٣ المعروف باسم Venn diagram



شكل ٤-٣ تخطيط (شكل) فن Venn diagram

حيث إن احتمال الحصول على الحدث A أو الحدث B هو احتمال الحصول على الحدث A مضافاً إليه احتمال الحصول على الحدث B مطروحاً منه احتمال الحصول على كليهما معاً.

ولتوضيح هذا الشكل فإنه فى المثال ٤–٧ يمكن التعبير عن كل النقط الممكنة وعددها 36 بفراغ العينة sample space ويعبر عن عدد النقط التى يظهر فيها الوجهان متشابهين بالحدث A وهى 6 نقاط وعدد النقط التى فيها مجموع الوجهين يساوى 2 بالحدث B وعددها نقطة واحدة ويمكن بيان ذلك بالشكل ٤–٤ التالى:



شكل ٤–٤ عدد النقاط التى يمثلها الحدث A وعدد النقاط التى يمثلها الحدث B

وفى هذه الحالة فإن احتمال الحصول على الحدث B هو نفسه احتمال الحصول على الحدثين A، B معاً.

٤–٢–٢ قاعدة الضرب Multiplication rule

عند إجراء عدد من المحاولات المستقلة independent trials فإن احتمال الحصول على حدثين مستقلين معاً هو حاصل ضرب احتمال الحصول على الحدث الأول فى احتمال الحصول على الحدث الثانى أى:

$$\Pr(E_1 \text{ and } E_2) = \Pr(E_1)\cdot\Pr(E_2) \qquad (٤-١٠)$$

و للتعميم فإن:

$$\Pr(E_1 \text{ and } E_2 \text{ and} \ldots E_k) = \Pr(E_1)\cdot\Pr(E_2)\cdot\ldots\cdot\Pr(E_k) \qquad (٤-١١)$$

حيث إن الأحداث من E_1 إلى E_k أحداث مستقلة independent events وتعرف بأنها الأحداث التى إذا حدث أى منها لا يؤثر على ظهور الأحداث الأخرى.

ويلاحظ هنا استخدام كلمة and وهى تعنى مع فى حين أنه فى حالة الأحداث المتنافية استعملت كلمة or وتعنى أو.

مثال ٤-٨

عند إلقاء حجرى نرد معاً، ما احتمال الحصول على رقم 6 على الوجهين؟

حيث إن ظهور رقم 6 على وجه حجر النرد الأول مستقل ولا يمنع ظهور الرقم 6 أيضاً على وجه حجر النرد الثانى أى أنهما حدثان مستقلان فإن:

احتمال الحصول على $(6,6)$ عند رمى حجرى النرد معاً: $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

وهى نفس قيمة الاحتمال لو استخدمت الطريقة المبسطة السابق الإشارة إليها كما فى المثال ٤-٦ حيث إن عدد النقط التى فيها الوجهين $(6,6)$ هو واحد والعدد الكلى 36 وبالتالى فهى تعطى نفس النتيجة.

مثال ٤-٩

فى دراسة الوراثة فى النباتات، عند تزاوج الفرد الخليط وتركيبه الوراثى Aa مع نفسه (التلقيح الذاتى)، ما احتمال الحصول على فرد تركيبه AA؟

الحل:

الفرد Aa يعطى نوعين من الجاميطات هما A، a وبالتالى فإن

احتمال الحصول على جاميطة A = 0.5

احتمال الحصول على جاميطة a = 0.5

وحيث إن الفرد AA ينتج عندما يحصل على A من الأب وأيضا يحصل على A من الأم، وحيث إن حصوله على أى منهما مستقل ولا يؤثر فى احتمال حصوله على الجاميطة الأخرى فإن احتمال الحصول على فرد تركيبه AA $0.25 = (0.5)(0.5)$

مثال ٤-١٠

فى مثال ٤-٩ ما هو احتمال الحصول على فرد تركيبه الوراثى Aa؟

الحل:

استخدام قاعدتى الضرب والجمع معاً يعطى قيمة هذا الاحتمال. فالفرد الذى تركيبه Aa قد ينتج من جاميطة A من الأب وجاميطة a من الأم أو قد ينتج من اتحاد جاميطة A من الأم مع جاميطة a من الأب. لاحظ أن الاحتمالين متنافيان وعليه

فإن احتمال الحصول على هذا الفرد هو: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

مثال ٤-١١

فى المثال ٤-٩، إذا كان الجين A سائداً على a ويتسبب فى طول الأفراد فما احتمال الحصول على فرد طويل إذا كان كل من AA ، Aa أفراداً طويلة بينما aa أفراداً قصيرة ؟

الحل:

الفرد الطويل إما أن يكون تركيبه الوراثى AA أو تركيبه Aa وكما سبق احتمال الحصول على التركيب الوراثى Aa هو ½ واحتمال الحصول على AA هو ¼، وعلى ذلك فإن احتمال الحصول على فرد طويل $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة بالطريقة المبسطة التالية:

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">جاميطات الأب</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>A</td><td>a</td></tr>
<tr><td rowspan="2">جاميطات الأم</td><td>A</td><td>AA
طويل</td><td>Aa
طويل</td></tr>
<tr><td>a</td><td>Aa
طويل</td><td>aa
قصير</td></tr>
</table>

ومنها يتضح وجود 3 طويل وواحد قصير وعليه فإن احتمال الحصول على فرد طويل = ¾.

مثال ٤-١٢

عند تزاوج فردين تركيبهما الوراثى BB، bb فما احتمال:

١ - الحصول على فرد تركيبه BB؟

٢ - الحصول على فرد تركيبه Bb؟

احتمال الحصول على فرد تركيبه BB يساوى احتمال أن يحصل هذا الفرد على B من كل من الأم والأب ، وحيث إنه يمكن أن يحصل على B من الأب BB فإنه يلزم أن يحصل على B (الجاميطة الأخرى) من الأب الآخر وهذا مستحيل لأن الفرد الآخر bb ولا يعطى إلا نوعاً واحداً من الجاميطات وهو b وعليه فإن:

احتمال الحصول على فرد تركيبه BB هو $0 = (1)(0)$، ويطلق على هذا الحدث حدثاً مستحيلا impossible event.

أما احتمال الحصول على فرد تركيبه Bb:

$$Pr(Bb) = Pr(B \text{ from one parent}) \cdot Pr(b \text{ from the other parent}) = (1)(1) = 1$$

ويطلق على هذا الحدث حدثاً مؤكداً sure event.

صندوق ٤-١

قانون جمع الاحتمالات:

إذا كان هناك حدثان متنافيان فإن احتمال حدوث أحدهما أو الآخر هو حاصل جمع احتمالهما منفردا

$$Pr(E_1 \text{ or } E_2) = Pr(E_1) + Pr(E_2)$$

قانون ضرب الاحتمالات:

إذا كان هناك حدثان مستقلان فإن احتمال حدوث الأول و الثانى هو حاصل ضرب احتمالهما منفردا

$$Pr(E_1 \text{ and } E_2) = Pr(E_1) \cdot Pr(E_2)$$

٤-٣ الاحتمال الشرطى Conditional probability

إذا كانت هناك محاولتان غير مستقلتين non-independent أى متتابعتين فإن احتمال حدوث الحدث E_1 فى أول محاولة والحدث E_2 فى ثانى محاولة معاً هو:

$$Pr(E_1E_2) = Pr(E_1) \cdot Pr(E_2 / E_1) \qquad (٤-١٢)$$

الحد الثانى من الطرف الأيمن يطلق عليه الاحتمال الشرطى:

$$Pr(E_2 / E_1) = Pr(E_2 \text{ given that } E_1 \text{ has happened})$$

أى احتمال حدوث الحدث E_2 علما بأن الحدث E_1 قد حدث.

ومن العلاقة (٤-١٢) يمكن استنتاج أن:

$$Pr(E_2 / E_1) = Pr(E_2 E_1) / Pr(E_1) \qquad (٤-١٣)$$

وأيضاً:

$$Pr(E_1 / E_2) = Pr(E_2 E_1) / Pr(E_2) \qquad (٤-١٤)$$

مع توفر شرط أن $Pr(E_1)$ وأيضاً $Pr(E_2)$ لا تساويان الصفر.

فإذا كان $Pr(E_1 / E_2) = Pr(E_1)$ فهذا معناه أن الحدثين E_1 ، E_2 مستقلان.

مثال ٤-١٣

صندوق به 5 كرات حمراء، 10 كرات بيضاء. إذا سحب كرتان، ما احتمال الحصول على الأولى بيضاء (W) والكرة الثانية حمراء (R) ؟ علماً بأن الكرة التى تسحب لا ترد مرة أخرى إلى الصندوق without replacement ؟.

احتمال الحصول على الكرة الأولى بيضاء $Pr(W) = \frac{10}{15}$

احتمال الحصول على الكرة الثانية حمراء لو كانت الكرة الأولى بيضاء $Pr(R/W) = \frac{5}{14}$.

إذاً احتمال الحصول على الكرة الأول بيضاء والثانية حمراء هو:

$$Pr(WR) = Pr(W)\,Pr(R / W) = \frac{10}{15} x \frac{5}{14} = \frac{5}{21}$$

٤-٤ الاحتمالات اللاحقة (صيغة بيز)

Aposteriori probability (Bayes' formula)

كان الحديث فيما سبق عن الاحتمالات المسبقة apriori probability والتى كانت تعنى على سبيل المثال أنه إذا سحبت كرة من صندوق به كرات حمراء وأخرى بيضاء فالمطلوب هو معرفة احتمال أن تكون الكرة حمراء (مثلاً). أما فى حالة الاحتمالات اللاحقة للحدث aposteriori probability فهى تعنى أنه إذا سحبت كرة وكانت فعلا حمراء وكان هناك عدد من الصناديق بكل منها كرات حمراء وبيضاء فما هو الصندوق الأكثر احتمالاً فى أن تكون الكرة قد سحبت منه ؟ ولإيجاد قيمة ذلك

الاحتمال تستخدم صيغة بيز Bayes' formula، ولمزيد من الدراسة يمكن الرجوع إلى واحد أو أكثر من المراجع المدونة فى نهاية هذا الكتاب.

مثال ٤-١٤

إذا كان يوجد صندوقان الأول به 5 كرات حمراء، 4 كرات بيضاء، والثانى به 12 كرة حمراء وكرة واحدة بيضاء، علماً بأن احتمال السحب من الصندوق الأول يساوى احتمال السحب من الصندوق الثانى وسحبت كرة واحدة وكانت حمراء فما احتمال أن تكون الكرة الحمراء مسحوبة من الصندوق الأول ؟

فى هذه الحالة تستخدم Bayes' formula حيث:

$$\Pr(B_i/E) = \frac{\Pr(B_i)\ \ \Pr(E/B_i)}{\sum \Pr(B_i)\ \ \Pr(E/B_i)} \qquad (٤-١٥)$$

حيث:

$\Pr(B_i/E)$ تعنى احتمال السحب من الصندوق B_i علماً بأن الكرة التى سحبت كانت حمراء E فى هذا المثال.

$\Pr(B_i)$ تعنى احتمال السحب من الصندوق B_i

$\Pr(E/B_i)$ تعنى احتمال سحب كرة حمراء E علماً بأن الصندوق B_i هو الذى سحبت منه الكرة.

وعلى ذلك:

احتمال سحب كرة حمراء من الصندوق الأول $\Pr(E/B_1) = \frac{5}{9}$

احتمال سحب كرة حمراء من الصندوق الثانى $\Pr(E/B_2) = \frac{12}{13}$

احتمال أن يكون السحب من الصندوق الأول = احتمال أن يكون السحب من الصندوق الثانى

$$\Pr(B_1) = \Pr(B_2) = \frac{1}{2}$$

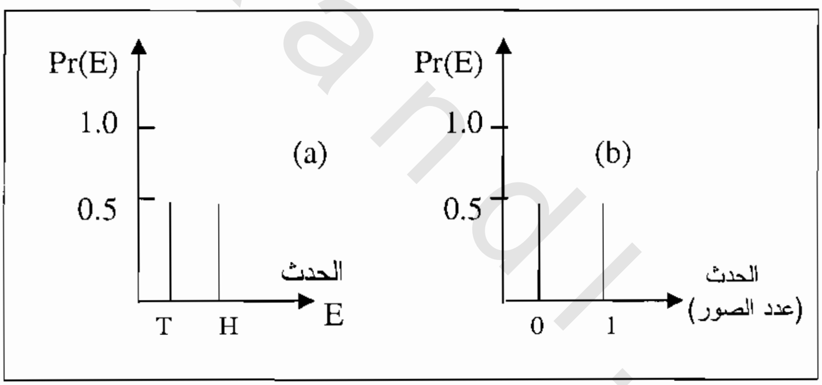
ومن العلاقة (٤-١٥) فإن احتمال أن تكون الكرة الحمراء قد سحبت من الصندوق الأول هو:

$$\Pr(B_1/E) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}}{\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{12}{13}} = \frac{65}{173}$$

واحتمال أن تكون الكرة الحمراء قد سحبت من الصندوق الثانى = $\frac{108}{173}$

٤-٥ التوزيعات الاحتمالية Probability distributions

عند رمى قطعة نقود غير متحيزة fair يوجد احتمالان: احتمال الحصول على صورة $\Pr(H)$ أواحتمال الحصول على كتابة $\Pr(T)$ وكل منهما يساوى النصف. والاحتمالات المختلفة للأحداث الممكن حدوثها موضحة بشكل ٤-٥.



شكل ٤-٥ احتمالات الأحداث التى يمكن حدوثها عند رمى قطعة نقود

ويطلق على احتمالات كل الأحداث الممكنة بالتوزيع الاحتمالى. ويمكن أن يعبر عن التوزيع الاحتمالى عن طريق تكوين متغير جديد dummy variable يمثل عدد حالات النجاح مثلاً ولتكن عدد الصور التى تظهر فى كل ناتج من كل النواتج الممكنة، ففى مثل هذه الحالة فإن عدد الصور قد تكون مساوية للصفر باحتمال ½ أو مساوية للواحد الصحيح باحتمال قدره ½ أيضاً. ويمكن تمثيل ذلك بما يلى:

الاحتمال	عدد مرات ظهور صورة	النواتج
½	1	H
½	0	T

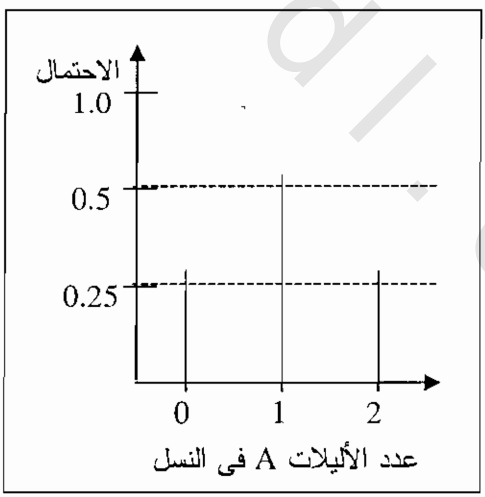
بمعنى أن

$$Pr(X = x_i) = \frac{1}{2} \text{ , } x_i = 0,1$$

أى احتمال أن المتغير X يأخذ قيمة معينة ولتكن x_i يساوى النصف. وأيضاً فى حالة تزاوج Aa مع نفسه فإن احتمالات كل النواتج الممكنة للحدث تكون ما يسمى بالتوزيع الاحتمالى والذى يكون كالتالى:

$$Pr(X = x_i) = \frac{1}{4} \quad \text{for } x_i = 0,\ 2$$
$$= \frac{1}{2} \quad \text{for } x_i = 1$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانيا بالشكل ٤-٦ كالتالى:



شكل ٤-٦ التوزيع الاحتمالى للنسل الناتج من تزاوج Aa مع نفسه

وفى مثل تلك الحالات يعبر عن $Pr(X = x_i)$ بدالة كثافة الاحتمال أو الدالة الاحتمالية probability or density function.

أما إذا كان المطلوب معرفة احتمال الحصول على فرد يحتوى على أليل a على الأكثر فإن ذلك يمكن أن يعبر عنه بالآتى:

$$F(X) = \Pr(X \le x_i) \quad , x_i \le 1$$

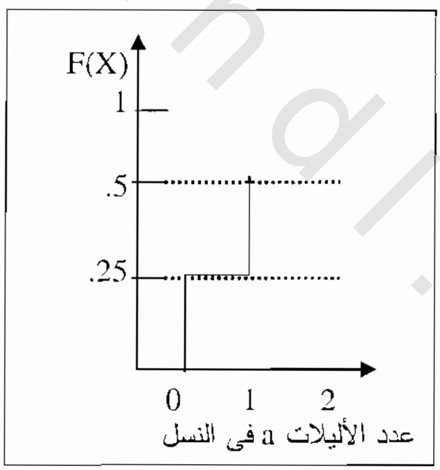
و حيث إن x_i إما أن تساوى الصفر أو الواحد فى هذه الحالة فإن:

$$F(X) = \Pr(x_i = 0) + \Pr(x_i = 1) = \sum \Pr(x_i)$$

وتسمى هذه الدالة بالدالة التجميعية cumulative distribution function وهى تمثل احتمال الحصول على aa أو Aa حيث إن بكل منها الأليل a وفى هذه الحالة فإن:

$$F(X) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانيا بالشكل ٤-٧



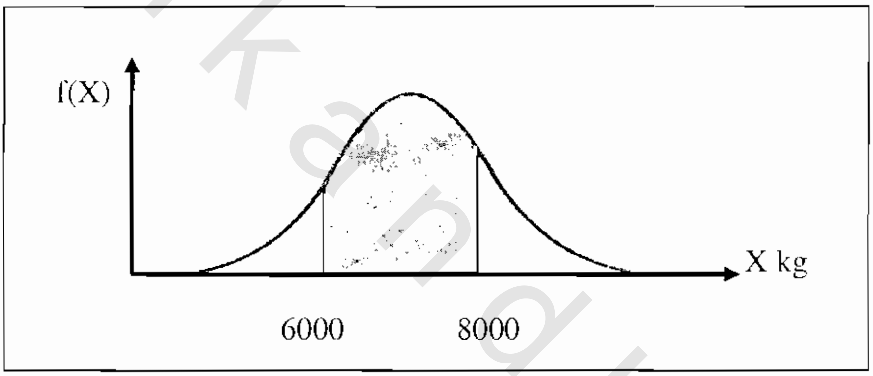
شكل ٤-٧ الدالة التجميعية للحصول على فرد يحتوى على a على الأكثر

والصورة العامة للدالة التجميعية للمتغيرات المتقطعة هى:

$$F(X) = \Pr(X \le x_i)$$
$$= \sum_{x_i} \Pr(X = x_i)$$

وأقصى قيمة يمكن أن تأخذها الدالة التجميعية هى الواحد الصحيح وأقل قيمة هى الصفر.

والتوزيع الاحتمالى قد يكون لمتغير متقطع discrete variable كما هو الحال فى الأمثلة السابقة وكما فى حالة قطعة النقود وأوراق اللعب والتلقيح الذاتى للفرد Aa. وقد يكون التوزيع الاحتمالى لمتغير متصل (مستمر) continuous variable ومن أمثلة المتغيرات المستمرة القياسات الكمية. ومن أمثلة تلك القياسات: وزن الأفراد، الطول، مستوى هرمون معين فى الدم وكمية اللبن التى تعطيها البقرة. فاحتمال أن تعطى بقرة ما بين 6000 إلى 8000 كج من اللبن فى الموسم هو المساحة المظللة بالنسبة للمساحة الكلية تحت المنحنى (شكل ٤-٨) ويمكن الحصول عليها بحساب التكامل.



شكل ٤-٨ التوزيع الاحتمالى لمتغير متصل (كمية اللبن بالكيلوجرام)

فإذا كانت دالة هذا التوزيع هى $f(x)$ فإن الاحتمال يكون:

$$\int_{6000}^{8000} f(x)\,dx$$

أما الصورة العامة للدالة التجميعية فى التوزيعات المستمرة فهى:

$$\int_{-\infty}^{X} f(x)\,dx$$

لاحظ إن احتمال الحصول على نقطة محددة بالضبط فى التوزيعات المستمرة يساوى صفراً (احتمال الحصول على بقرة تعطى 3000 كج لبن بالضبط يساوى صفر حيث إن $\int_{3000}^{3000} f(x)\,dx = 0$). بينما هذا الاحتمال فى التوزيعات المتقطعة قد يساوى الصفر وقد يكون أكبر من الصفر ويعتبر هذا فرقاً أساسيا بين التوزيعات المتقطعة والتوزيعات المستمرة.

ويقع تحت هذين القسمين من التوزيعات عدد كبير من التوزيعات الهامة. وسوف تقتصر الدراسة الحالية على توزيع "ذو الحدين" و "بواسون" كأمثلة عن التوزيعات المتقطعة والتوزيع الطبيعى من التوزيعات المستمرة.

٤–٦ مقدمة عن التباديل Permutations والتوافيق Combinations

٤–٦–١ التباديل

التباديل تعرف بأنها عدد الطرق التى يمكن أن يقع بها حدث ما مع مراعاة الترتيب، فإذا كان هناك مجموعة مكونة من 3 أفراد هم C , B , A ويراد اختيار اثنين منهم أحدهما رئيس والآخر نائب للرئيس فإن هذين الفردين قد يكونان بست طرق:

AB , BA , AC , CA , BC , CB

مع ملاحظة أن AB ليست هى BA ففى الأولى A أولاً بينما B ثانياً بينما فى BA فإن B أولاً، A ثانياً ويعبر عن ذلك بما يلى:

تباديل n من الأشياء مأخوذة r فى كل مرة هو:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (٤–١٦)$$

وهذه المعادلة يمكن فكها كالتالى:

$$P(n,r) = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)\,(n-r)(n-r-1)\,\cdots 3x2x1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3x2x1}$$
$$= n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

وعلى ذلك فإن عدد الطرق التى يمكن أن ترتب بها 3 أفراد مأخوذة 2 فى كل مرة هو:

$$P(3,2)=\frac{3!}{(3-2)!}$$

لاحظ أن:

$n!$ يطلق عليها مفكوك n وهو عبارة عن

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! \\ &= n(n-1)(n-2)! \\ &= n(n-1)(n-2)...3x2x1 \end{aligned}$$

فمثلا $5!=5x4!=5x4x3x2x1=120$

ومفكوك الصفر يساوى الواحد أى $0!=1$

وفيما يلى بعض القواعد الجبرية الخاصة بالتباديل:

قاعدة ١:

إذا كانت A تحدث فى m من المرات، B تحدث فى n من المرات وكان كل من A، B مستقلين فإن عدد الطرق التى يمكن أن يحدث بها A، B معاً هو حاصل ضرب m فى n.

قاعدة ٢:

إذا كانت A ممكن أن تحدث فى m من المرات، B يمكن أن تحدث فى n من المرات وكان A , B حدثين متنافيين فإن A أو B ممكن حدوثهما فى $m+n$ من المرات.

قاعدة ٣:

فى حالة المجموعات التى يكون داخلها تشابه تستخدم المعادلة:

$$P(n,n_1,n_2,\cdots,n_k)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} \qquad (١٧-٤)$$

مثال ٤-١٥

عند إلقاء حجرى نرد، ما عدد طرق التى يمكن أن يحدث بها الحدثان معاً؟

عدد طرق $36=(6)(6)$ (قاعدة ١)

مثال ٤-١٦

عند رمى حجر نرد، ما عدد الطرق التى يمكن الحصول منها على 1 أو 6؟

عدد الطرق $1+1=2$ (قاعدة ٢).

مثال ٤-١٧

ما عدد التباديل فى الأحرف التى يمكن أخذها من كلمة STATISTICS (10 أحرف) ؟

فى كلمة STATISTICS يوجد الأحرف التالية:

$$3S=n_1,\ 3T=n_2,\ 2I=n_3,\ 1A=n_4,\ 1C=n_5$$

وبالتالى

$$n=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=10$$

وبتطبيق القاعدة ٣ فإن

$$P(10,3,3,2,1,1)=\frac{10!}{3!3!2!1!1!}=50400$$

٤-٦-٢ التوافيق

تعرف التوافيق على أنها عدد الطرق التى يمكن بها تكوين مجموعة حجمها r من n من الأفراد دون مراعاة الترتيب ويعبر عنها:

$$nCr \text{ or } C_r^n \text{ or } C(n,r) \text{ or } \binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad (٤-١٨)$$

مثال ٤-١٨

إذا كان هناك مجموعة من 3 أفراد ويراد تكوين لجنة من فردين بغض النظر عن ترتيبهما، فما عدد الطرق الممكنة ؟.

عدد الطرق الممكنة للحصول على لجنة مكونة من فردين من 3 أفراد هو 3 حيث إن:

$$C_2^3=\frac{3!}{(3-2)!\,2!}=3$$

فإذا كانت الأفراد هى A B C فإن اللجنة قد تكون AB أو AC أو BC ويلاحظ من المعادلة (٤-١٨) أن:

$$C_r^n = P(n,r)/r!$$

ومن أهم القواعد عند دراسة التوافيق لاستخدامها فى الاحتمالات أن

$$C_r^n = C_{n-r}^n \qquad (١٩-٤)$$

وعلى ذلك فإن: C_3^5 هى نفسها C_2^5 حيث إن: $C_3^5 = 10 = C_{5-3}^5 = C_2^5$

وهناك علاقة بين التباديل والتوافيق و نظرية الاحتمالات، فقد سبق تعريف احتمال حدث ما بأنه عدد مرات ظهور هذا الحدث على عدد المرات الممكنة، والتباديل والتوافيق يسهلان الحصول على ذلك. والآن افترض وجود كيس به 4 كرات حمراء (R)، 3 كرات بيضاء (W)، وسحبت 3 كرات بدون إحلال، فما احتمال الحصول على الكرات الثلاث حمراء ؟ ولإيجاد مثل هذا الاحتمال باستخدام القواعد السابق ذكرها عن الاحتمالات فإن احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء والثالثة حمراء هو باستخدام العلاقة (٤-١٢) بعد تعميمها هو:

$$Pr(3R) = \frac{4}{7} x \frac{3}{6} x \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة لو استخدمت التوافيق، فإن عدد الطرق التى يمكن الحصول بها على أى 3 كرات من بين 7 هو $C_3^7 = \frac{7!}{4!\,3!}$، وعدد الطرق التى يمكن الحصول بها على 3 كرات حمراء من بين 4 كرات حمراء هو $C_3^4 = \frac{4!}{3!\,1!}$، وباستخدام العلاقة (٤-١) فإن احتمال الحصول على 3 كرات حمراء عند سحب ٣ كرات هو: $Pr(3R) = \frac{C_3^4}{C_3^7} = \frac{4}{35}$ أى أن التوافيق تستخدم فى حساب عدد الطرق التى يمكن أن يحدث بهم حدث ما وعدد الطرق الكلية والتى منها يمكن حساب قيمة الاحتمال.

٤-٧ توزيع "ذو الحدين" Binomial Distribution

من التوزيعات المتقطعة discrete distribution والتى تختص بالمتغيرات المتقطعة discrete variables. وكما هو واضح من اسم التوزيع فإن المتغير قد يأخذ

أحد حالتين إما حالة نجاح فى حالة وقوعه أو حالة فشل فى حالة عدم وقوعه. فإذا وجد متغير، X مثلاً، وكان له الدالة الاحتمالية:

$$Pr(X = r; n, p) = C_r^n p^r q^{n-r} \;,\; r = 0, 1, 2, \cdots, n \qquad (٤-٢٠)$$

فإن هذا المتغير يتبع توزيع "ذو الحدين" بالمعلمين n، p.

٤-٧-١ مفكوك "ذو الحدين" Binomial expansion

$(a+b)^n$ يتبع القاعدة التالية:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n!}{(n-1)!1!}a^{n-1}b + \frac{n!}{(n-2)!2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n!}{1!(n-1)!}ab^{n-1} + b^n \qquad (٤-٢١)$$

إذا كانت $n = 1$ فإن المفكوك يساوى $a + b$

و إذا كانت $n = 2$ فإنه يصبح $a^2 + 2ab + b^2$

و إذا كانت $n = 3$ فإنه يصبح $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

و إذا كانت $n = 4$ فإنه يصبح $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

وهكذا. ويمكن الحصول على معاملات coefficients حدود "ذو الحدين" وهى كما فى حالة $n = 1$ مثلاً 1,1، وفى حالة $n = 2$ هى 1,2,1، وفى حالة $n = 3$ تكون 1,3,3,1 ويمكن استخدام قاعدة باسكال Pascal rule للحصول على تلك المعاملات كما يلى:

n											
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1
6											

... وهكذا ...

وعلى ذلك فإذا كان هناك عدد n من المحاولات كل محاولة إما حالة نجاح (باحتمال p) أو حالة فشل (باحتمال q) فإن توزيع "ذو الحدين" يمكن الحصول عليه من مفكوك "ذو الحدين" أى:

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + ... + npq^{n-1} + q^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_r^n p^{n-r} q^r = \sum_{r=0}^{n} C_r^n p^r q^{n-r} \qquad (٢٢-٤)$$

ويطلق على القيمة $C_r^n p^{n-r} q^r$ الحد العام للتوزيع ويعرف بأنه الدالة الاحتمالية للتوزيع ومنه يمكن حساب احتمال الحصول على $n-r$ حالة نجاح فى عينة حجمها n أو عند إجراء n من المحاولات المتكررة مع ملاحظة:

١ – مجموع احتمالى النجاح والفشل يساوى الواحد الصحيح أى $p+q=1$.

٢ – إذا كانت n هى عدد المحاولات المتكررة أو حجم العينة فإن عدد الحدود يساوى $n+1$.

٣ – مجموع أسى q، p فى أى حد من الحدود يساوى n .

٤ – الحدود متنافية بمعنى أن حدوث أى منها يمنع الباقى من الحدوث.

٥ – مجموع الاحتمالات لكل الحدود يساوى الواحد الصحيح.

٦ – يلاحظ أن p وهى احتمال الحصول على حالة نجاح ثابتة لا تتغير من محاولة إلى أخرى وبالتالى q، وهى احتمال الفشل، لا تتغير.

مثال ٤-١٩

عند رمى قطعة من النقود مرة واحدة فإن الحالات التى يمكن أن تظهر هى صورة H أو كتابة T واحتمال كل منها عبارة عن:

$$Pr(H) = Pr(T) = 1/2$$

وهذا هو مفكوك "ذو الحدين" عندما تكون $n=1$ حيث $(p+q)^1 = p+q$

النواتج	عدد الطرق	عدد مرات ظهور صورة	عدد مرات ظهور كتابة	الاحتمال
H	1	1	0	½
T	1	0	1	½

وعند رمى قطعتين من النقود مرة واحدة أو رمى قطعة واحدة من النقود مرتين فإن:

النواتج	عدد الطرق	عدد مرات ظهور صورة	عدد مرات ظهور كتابة	الاحتمال
HH	1	2	0	Pr(2H) = ¼
HT TH	2	1	1	Pr(HT) = ½
TT	1	0	2	Pr(2T) = ¼

وهذا هو مفكوك "ذو الحدين" عندما تكون $n = 2$ هو

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

وعند رمى ٣ قطع من النقود مرة واحدة أو رمى قطعة من النقود ثلاث مرات فإن:

النواتج	عدد الطرق	عدد مرات ظهور صورة	عدد مرات ظهور كتابة	الاحتمال
HHH	1	3	0	$Pr(3H) = 1/8$
HHT HTH THH	3	2	1	$Pr(2H, 1T) = 3/8$
HTT THT TTH	3	1	2	$Pr(1H, 2T) = 3/8$
TTT	1	0	3	$Pr(3T) = 1/8$

مثال ٤-٢٠

إذا سحبت عينة من 5 نباتات وكان احتمال الحصول على نبات طويل = $\frac{3}{4}$

و احتمال الحصول على نبات قصير = $\frac{1}{4}$، احسب الاحتمالات الآتية:

١- كل النباتات طويلة.

٢- ٣ نباتات طويلة.

٣- الحصول على كلتا الصفتين فى العينة.

حيث إن الحدثين احتمالهما $p=\frac{3}{4}$، $q=\frac{1}{4}$ لصفتى الطول والقصر، على الترتيب ويتبعان توزيع "ذو الحدين" بحجم عينة $n = 5$، فإن:

١ - احتمال كل النباتات طويلة:

$$C_5^5 p^5 q^{5-5} = p^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0.2373$$

٢ - احتمال ٣ نباتات طويلة:

$$C_3^5 p^3 q^5 = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 = (10)\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0.2637$$

٣ - احتمال الحصول على كلتا الصفتين فى العينة: وهذه تشمل الحدود التى تظهر فيها كلا الصفتين (صفة الطول وصفة القصر) وهى كل الحدود فى مفكوك "ذو الحدين" فيما عدا الحدين الأول والأخير أى:

$$= C_1^5 pq^4 + C_2^5 p^2 q^3 + C_3^5 p^3 q^2 + C_4^5 p^4 q$$

$$= (5)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^4 + (10)\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + (10)\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (5)\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right) = 0.9998$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة إذا علم أن مجموع الاحتمالات = 1 وبالتالى فإن احتمال الحصول على كلا الصفتين هو:

$$1 - p^5 - q^5 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 - \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0.9998$$

٤-٧-٢ متوسط وتباين "ذو الحدين"

تظهر معادلة (٤-٢٢) مفكوك "ذو الحدين" ومنها فإن الحد الأول هو احتمال الحصول على n حالة نجاح وصفر حالة فشل، والحد الثانى هو احتمال الحصول على $(n-1)$ حالة نجاح وحالة فشل واحدة، والحد الأخير هو احتمال الحصول على صفر حالة نجاح، n حالة فشل. وبالتالى فإن متوسط هذا التوزيع يمكن حسابه كما يلى:

X	f	fX
n	p^n	np^n
$n-1$	$np^{(n-1)}q$	$n(n-1)p^{(n-1)}q$
$n-2$	$\frac{n(n-1)}{2!}p^{(n-2)}q^2$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2!}p^{(n-2)}q^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$npq^{(n-1)}$	$npq^{(n-1)}$
0	q^n	0
إجمالى	**1**	$np^n + n(n-1)p^{(n-1)}q + \ldots + npq^{(n-1)} + 0$

وحيث إن: $\overline{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \sum fX$ (لاحظ أن $\sum f = 1$) وبالتالى:

$$\overline{X} = np^n + n(n-1)p^{(n-1)}q + \cdots + npq^{(n-1)}$$
$$= np\left[p^{(n-1)} + (n-1)p^{(n-2)}q + \cdots + q^{(n-1)}\right]$$

بوضع $m = (n-1)$ فإن:

$$\overline{X} = np\left[p^m + mp^{m-1}q + \cdots + q^m\right]$$
$$= np(p+q)^m$$

وبما أن $(p+q)=1$ فيصبح المتوسط:

$$\overline{X} = np \qquad (٤-٢٣)$$

وهو يمثل متوسط عدد الأفراد الحاملة للصفة والتى تمثل p احتمال حدوثها (الطول مثلاً). وبنفس المفهوم فإن متوسط عدد الأفراد الحاملة للصفة الأخرى هو nq.

ويمكن إثبات أن التباين:

$$\sigma^2 = npq \qquad (٤-٢٤)$$

ويتوقف متوسط "ذو الحدين" على حجم العينة واحتمال الحصول على حالة النجاح (مثلاً) فيزداد بزيادتها أو بزيادة أحدهما. أما التباين فيتوقف على حجم العينة وقيمة pq التى تكون أكبر ما يمكن عندما تكون $p = q = \frac{1}{2}$.

وعند الرغبة فى التعبير عن هذه القيم فى صورة نسب وليست وحدات فيكون المتوسط p, q والتباين $\frac{pq}{n}$.

مثال ٤-٢١

احسب المتوسط والتباين للمثال ٤-٢٠

متوسط عدد الأفراد الحاملة لصفة الطول: $np = 5x\frac{3}{4} = 3.75$

متوسط عدد الأفراد الحاملة لصفة القصر: $nq = 5x\frac{1}{4} = 1.25$

التباين : $npq = 5x\frac{3}{4}x\frac{1}{4} = 0.9375$

٤–٨ توزيع بواسون Poisson distribution

يعتبر هذا التوزيع من التوزيعات التى تختص بالمتغيرات المتقطعة نادرة الحدوث وعندما تحدث يمكن أن تحدث n من المرات، مثال ذلك عدد الميكروبات فى لتر من ماء نقى أو فى طبق من أطباق بترى أو عدد الأشخاص المرضى بمرض نادر الحدوث أو اضمحلال أثر مادة مشعة بمرور الوقت. كما يستخدم توزيع بواسون فى نظرية الصفوف، حيث أنه من المعروف أن "الوصول لطلب الخدمة" يتبع هذا التوزيع، مثال ذلك عدد الأشخاص الواردين إلى متجر معين لشراء سلعة مثلاً فى وقت معين.

وتوزيع بواسون هو نهاية limit توزيع "ذو الحدين" عندما p تؤول إلى الصفر $(p \to 0)$ وعندما n تؤول إلى ما لا نهاية $(n \to \infty)$ وعلى ذلك فإن $\mu = np$ يكون مقداراً ثابتاً تقريباً ويكون: $\sigma^2 = np(1-p) = np$ حيث إن p صغيرة جداً أى أن المتوسط لهذا التوزيع يكون مساويا لتباينه. ويتبين أن احتمال الحصول على r حالة نجاح يؤول إلى:

$$\Pr(r) = \frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!} \quad r = 0,1,\cdots \qquad (٤-٢٥)$$

وهى صورة مبسطة لحساب احتمال الحصول على r حالة نجاح حيث: $e = 2.7183$ و μ هى متوسط عدد مرات النجاح r فى العينة محسوباً من العشيرة.

وجدول ٤–١ يبين احتمال الحصول على r من النجاحات محسوباً بتوزيع بواسون عندما تكون $\mu = 1$ مقارنةً بتوزيع "ذو الحدين" عندما تكون $n = 100$ ، $p = 0.01$ ، وعندما تكون $n = 25$ ، $p = 0.04$ ومتوسط توزيع "ذو الحدين" فى كلتا الحالتين يساوى الواحد الصحيح أيضاً. ويلاحظ من هذا الجدول أن توزيع بواسون يكون أكثر مطابقة لتوزيع "ذو الحدين" عندما يكون حجم العينة كبيراً.

مثال ٤–٢٢

إذا كان متوسط عدد العينات من مرض نادر الحدوث هو 25 لكل 10000 فرد فما احتمال الحصول على صفر حالة وفاة فى عينة من 100 فرد؟ وما احتمال الحصول على 3 حالات وفاة ؟

متوسط العينة $\mu = np = \frac{25}{10000} x 100 = 0.25$

احتمال الحصول على صفر حالة وفاة:

$$Pr(r=0)=\frac{e^{-\mu}\mu^{0}}{r!}=e^{-\mu}=e^{-0.25}=0.779$$

احتمال الحصول على 3 حالة وفاة:

$$Pr(r=3)=\frac{e^{-\mu}\mu^{3}}{r!}=\frac{2.718^{-.25}}{3x2x1}x0.25^{3}=0.002$$

جدول ٤-١ مقارنة بين توزيع بواسون وتوزيع "ذو الحدين"

احتمال الحصول على r من النجاحات محسوبا بــ			
r	توزيع بواسون	توزيع "ذو الحدين"	
		p = 0.01, n = 100	**p = 0.04, n = 25**
0	0.3679	0.3660	0.3604
1	0.3679	0.3697	0.3754
2	0.1839	0.1849	0.1877
3	0.0613	0.0610	0.0600
4	0.0153	0.0149	0.0137
5	0.0031	0.0029	0.0024
6	0.0005	0.0005	0.0003
≥7	0.0001	0.0001	0.0000
Total	**1.0000**	**1.0000**	**0.9999**

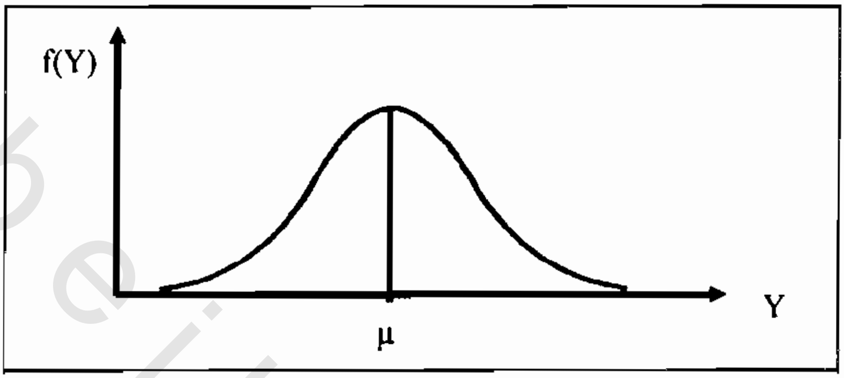
المصدر: Snedecor and Cochran (1987)

٤-٩ التوزيع الطبيعي Normal distribution

من أهم التوزيعات الخاصة بالصفات ذات التوزيع المستمر continuous وهو أكثرها شيوعاً ويتبعه العديد من الصفات البيولوجية (الكمية).

والتوزيع الطبيعي يتحدد بمعلمين هما المتوسط μ والانحراف المعيارى σ. وتتحدد قيم المتغير نظرياً فى المدى من $-\infty$ إلى $+\infty$.

ودالة التوزيع الطبيعى تأخذ الشكل الناقوسى وقد يطلق عليه المنحنى الطبيعى للأخطاء normal curve of error وقد يطلق عليه أيضا Gussian or Laplacian curve نسبة إلى مكتشفيه، ولو أن De Moivre اكتشفه أيضاً فى نفس الوقت. الشكل ٤-٩ يوضح المنحنى الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى σ.



شكل ٤-٩ التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى σ

ومعادلة المنحنى الطبيعى الذى متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ هى $f(Y)$ والتى تمثل التكرار النسبى relative frequency أو الارتفاع height على المحور الصادى المقابل لقيم Y هى:

$$f(Y,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (٢٦-٤)$$

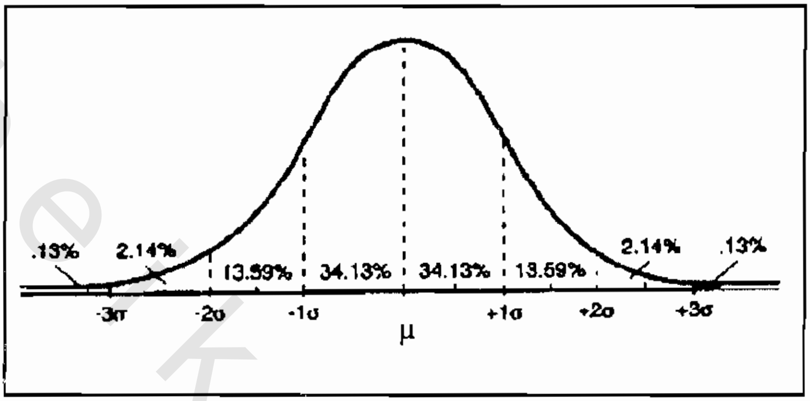
حيث: $\pi = 3.1416$ (وهى القيمة "ط" فى العربية)، $e = 2.7183$، $-\infty \le Y \le +\infty$

ومن أهم خصائص التوزيع الطبيعى أنه متماثل حول نقطة المنتصف μ وأن النقطتين $\mu \pm \sigma$ تحصران فيما بينهما حوالى 68% من المساحة تحت المنحنى أى $\frac{2}{3}$ مساحة هذا التوزيع تقريباً وأيضاً النقطتين $\mu \pm 2\sigma$ تحصران فيما بينهما حوالى 95% من المساحة، بينما $\mu \pm 3\sigma$ فإنهما يحصران 99.7% من المساحة. الشكل ٤-١٠ يظهر قيم المساحات المختلفة.

ويرجع الاهتمام بالتوزيع الطبيعى إلى عدة أسباب:

١- يسهل تحويل أى توزيع طبيعى مهما كان متوسطه وانحرافه المعيارى إلى توزيع طبيعى قياسى standardized normal distribution والذى وضعت

له جداول (جدول ٣ ملحق أ) يمكن منها حساب القيم المختلفة للاحتمالات فى أقل وقت وبأقل جهد ودون الحاجة إلى استخدام حساب التكامل.



شكل ٤-١٠ العلاقة بين المساحة تحت المنحنى الطبيعى وكل من المتوسط والانحراف المعيارى.

٢- كثير من المتغيرات الكمية كالأطوال والأوزان (مثلاً) تتخذ فى توزيعها عادة شكل التوزيع الطبيعى.

٣- وحتى لو كانت هذه البيانات لا تتوزع طبيعياً فإنه يمكن أحياناً بواسطة التحويرات المختلفة transformations لمقاييس هذه البيانات أن تتوزع طبيعياً كأن يأخذ الجذر التربيعى مثلاً $\sqrt{X}$ أو لوغاريتم القيم $\log X$.

٤- بعض التوزيعات الأخرى تقترب فى توزيعها من التوزيع الطبيعى تحت ظروف معينة كأن يزداد حجم العينة n مثلاً كما فى توزيع "ذو الحدين" وخاصة عندما تقترب p من النصف.

٥- لأى توزيع متغير X تباينه محدد finite فإن توزيع متوسطات العينات المسحوبة من عشيرة هذا المتغير تقترب فى توزيعها من التوزيع الطبيعى وتزداد قرباً كلما زاد حجم العينة n، وتعرف هذه الخاصية بنظرية الحد المركزى central limit theorem ويكون تباين التوزيع الطبيعى للمتوسطات هو σ^2/n ومتوسطه μ أيضاً. ولهذا القانون أهمية خاصة فى الاختبارات الإحصائية للمقارنة بين متوسطات العينات.

٤-١٠ التوزيع الطبيعى القياسى Standard normal distribution

يحدد شكل أى توزيع طبيعى معلمان هما المتوسط والانحراف المعيارى للقيم، وعلى ذلك فقد يوجد عدد لانهائى من التوزيعات.

والتوزيع الطبيعى القياسى هو التوزيع الطبيعى الذى متوسطه يساوى الصفر وتباينه يساوى الواحد الصحيح واصطلح على ذلك بكتابة $N \sim (0,1)$. وأنشئت جداول يمكن منها حساب المساحات المحصورة بين المتوسط وقيمة معينة منه (جدول ٣ ملحق أ) ومن ذلك يسهل الحصول على قيم الاحتمالات المختلفة. ويمكن تحويل أى توزيع طبيعي مهما كان متوسطه وانحرافه المعياري إلى التوزيع الطبيعى القياسى باستخدام العلاقة التالية:

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma} \qquad (٤-٢٧)$$

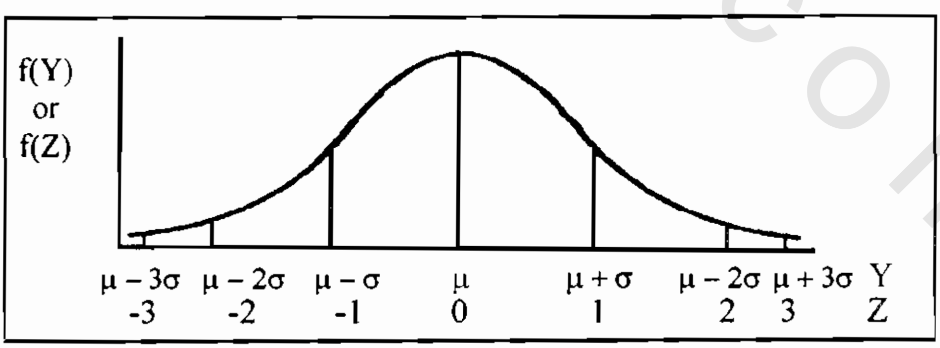
ومنها:

$$Y = \mu + Z\sigma \qquad (٤-٢٨)$$

فإذا كانت Y تتوزع بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن Z تتوزع بمتوسط يساوى الصفر وانحراف معيارى يساوى الواحد الصحيح وتكون دالة هذا التوزيع:

$$f(Z, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \qquad (٤-٢٩)$$

أى أن القيم Z هى عبارة عن انحرافات المتغير الأساسى Y عن متوسطها مقدرة بوحدات الانحراف القياسى للمتغير الأساسى. والشكل ٤-١١ يبين العلاقة بين المنحنى الطبيعى والمنحنى الطبيعى القياسى



شكل ٤-١١ العلاقة بين المنحنى الطبيعي والمنحنى الطبيعى القياسى

مثال ٤-٢٣

إذا كانت صفة إنتاج اللبن فى أبقار قطيع ما تتوزع طبيعيا بمتوسط 3000 kg لبن فى الموسم وانحراف معيارى 250 kg احسب ما يلى:

١ - احتمال الحصول على بقرة إنتاجها من اللبن 3050 kg بالضبط.

٢- احتمال الحصول على بقرة إنتاجها يتراوح بين 2700, 3500 kg لبن فى الموسم.

٣- احتمال الحصول على بقرة إنتاجها على الأقل 2500 kg لبن فى الموسم.

٤- احتمال الحصول على بقرة إنتاجها على الأكثر 2500 kg لبن فى الموسم.

٥- إذا استبعد أقل 10% من الأبقار، ما هى حدود الإنتاج التى تحصر أقل 10% من الأبقار.

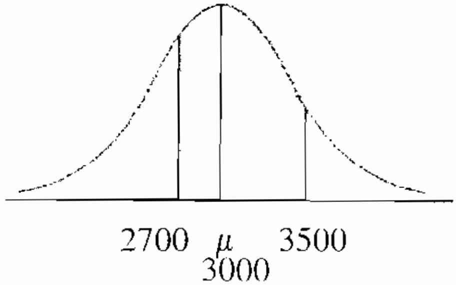
٦- ما حدود الإنتاج التى تحصر أعلى 15% من الأبقار.

٧- إذا كان فى قطيع ما عدد 1000 بقرة فما عدد الأبقار التى يتراوح إنتاجها بين 2700, 3500 kg لبن فى الموسم.

لحساب مثل تلك الاحتمالات فى حالة التوزيع الطبيعى يجدر بادئ ذى بدء رسم شكل تخطيطى للتوزيع مع بيان المطلوب ليسهل الحساب.

١- احتمال الحصول على بقرة إنتاجها من اللبن 3050 kg بالضبط يساوى الصفر وهى تمثل المساحة المنحصرة فوق القيمة 3050 kg والممثلة بنقطة على المنحى ليس لها أبعاد حيث إن صفة إنتاج اللبن فى هذه الحالة تتوزع توزيعاً مستمراً.

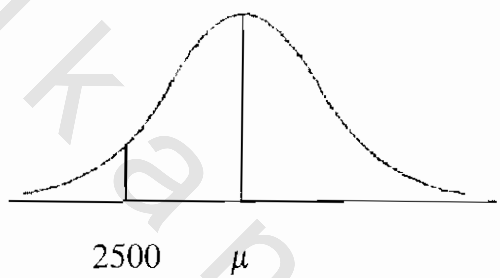
٢- احتمال الحصول على بقرة إنتاجها يتراوح بين 2700, 3500 kg لبن فى الموسم:



$$\Pr(2700 \le X \le 3500) = \Pr\left(\frac{2700-3000}{250} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{3500-3000}{250}\right)$$
$$= \Pr(-1.2 \le Z \le 0) + \Pr(0 \le Z \le 2)$$
$$= 0.3849 + 0.4772 = 0.8621$$

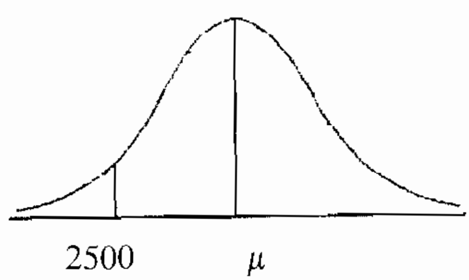
بما أن التوزيع متماثل فإن قيمة الاحتمال ما بين (الصفر، 1.2-) هى نفسها قيمة الاحتمال ما بين (الصفر، 1.2) جدول ٣ ملحق أ.

٣- احتمال الحصول على بقرة إنتاجها على الأقل 2500 kg لبن فى الموسم:



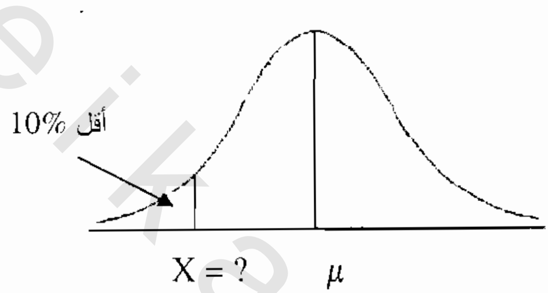
$$\Pr(X \ge 2500) = \Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{2500-3000}{250}\right)$$
$$= \Pr(Z \ge -2) = 0.5 + \Pr(0 \le Z \le 2)$$
$$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

٣- احتمال الحصول على بقرة إنتاجها على الأكثر 2500 kg لبن فى الموسم:



$$\Pr(X \le 2500) = \Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{2500-3000}{250}\right)$$
$$= \Pr(Z \le -2)$$
$$= 1 - \Pr(Z \ge -2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

٥- حدود الإنتاج التى تحصر أقل 10% من الأبقار:



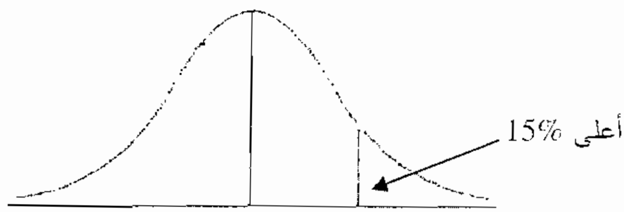
إذا كانت أقل 10% من الأبقار تمثل 10% من المساحة تحت المنحنى (على يسار المتوسط) فإن باقي المساحة تمثل 90% وبالتالى يتم البحث فى جدول ٣ ملحق أ عن قيمة Z التى تقابل مساحة قدرها $0.9 - 0.5 = 0.4$ والتى تساوى $Z = 1.281$، هذه القيمة تم الحصول عليها بالاستكمال interpolation.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$-1.281 = \frac{X-3000}{250}$$
$$X = 2680 \text{ kg}$$

إذاً حدود الإنتاج التى تحصر أقل 10% من الأبقار هى كل قيمة أقل من 2680 kg

٦- حدود الإنتاج التى تحصر أعلى 15% من الأبقار:

أعلى 15% من الأبقار تمثل 15% من المساحة تحت المنحنى (على يمين المتوسط) وبالتالى فإن باقى المساحة تمثل 85%، يتم البحث فى جدول ٣ لملحق أ عن قيمة Z التى تقابل مساحة قدرها $0.85 - 0.5 = 0.35$ وهى $Z = 1.0365$



$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$1.0365 = \frac{X - 3000}{250}$$

$$X = 3259 \text{ kg}$$

إذاً حدود الإنتاج التى تحصر أعلى 15% من الأبقار هى كل قيمة أعلى من 3259 kg

٧ – عدد الأبقار التى يتراوح إنتاجها بين 2700, 3500 kg لبن فى الموسم إذا كان العدد الكلى للأبقار 1000 بقرة:

سبق حساب احتمال الحصول على بقرة يتراوح إنتاجها بين 2700 ، 3500 kg وكان $Pr(2700 \le X \le 3500) = 0.8621$

إذا عدد الأبقار $1000 \times 0.8621 = 862$

صندوق ٤-١

توزيع "ذو الحدين":

$$Pr(X = r; n, p) = C_r^n p^r q^{n-r} \quad , \quad r = 0, 1, 2, ..., n$$

المتوسط = np ، التباين = npq

توزيع بواسون:

$$Pr(r) = \frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!}$$

المتوسط = التباين

التوزيع الطبيعى:

$$f(Y, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث μ هي المتوسط، σ هى الانحراف المعيارى

التوزيع الطبيعى القياسى:

إذا كانت Y تتوزع طبيعيا بمتوسط μ وتباين σ^2 فإن Z تتوزع طبيعيا بمتوسط صفر وتباين يساوى الواحد الصحيح حيث إن

$$Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$$

٤-١١ توزيع المتوسطات Distribution of means

إذا سحبت عينة sample من عشيرة بإحدى طرق المعاينة sampling methods وقدر لها المتوسط الحسابى وليكن $\overline{X}$ وكرر سحب العينات وفى كل مرة يحسب المتوسط منها فإنه يتكون عشيرة من المتوسطات متوسطها μ وتباينها σ^2/n. وحتى يمكن حساب قيم الاحتمالات المختلفة فإنه يمكن تحويل هذا التوزيع مهما كان متوسطه وتباينه إلى التوزيع الطبيعى القياسى بالعلاقة التالية:

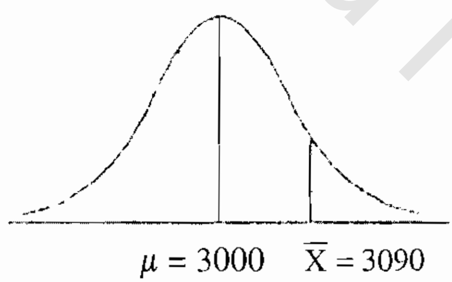
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} \qquad (٤-٣٠)$$

حيث: $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ وتسمى $\sigma_{\overline{X}}$ الخطأ القياسى standard error.

مثال ٤-٢٤

فى مثال ٤-٢٣ إذا سحبت عينة عددها 25 بقرة. أحسب احتمال أن يزيد متوسطها عن 3090 kg لبن فى الموسم ؟

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{250}{\sqrt{25}} = 50$ kg وباستخدام معادلة (٤-٣٠) فإن:



$$\Pr(\overline{X} \geq 3090) = \Pr\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} \geq \frac{3090 - 3000}{50}\right)$$

$= \Pr(Z \geq 1.8)$

$= 0.5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.0359$

٤-١٢ تقريب توزيع "ذو الحدين" بالتوزيع الطبيعى

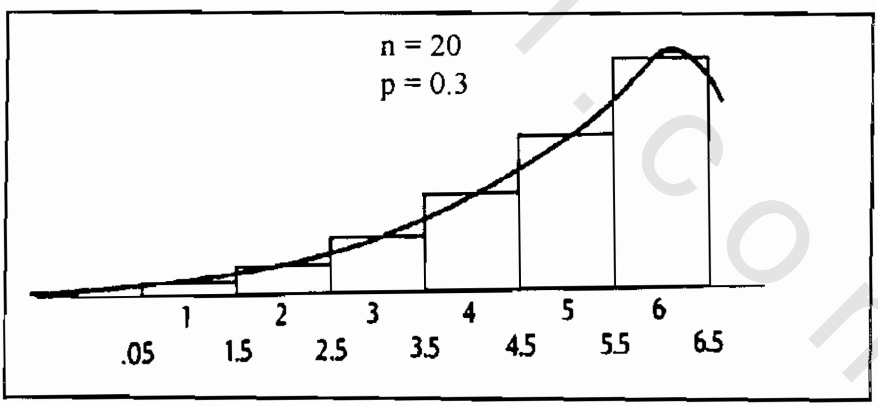
عند زيادة حجم العينة n لصفة تتبع توزيع "ذو الحدين" فإن هذا التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعى بمتوسط $\mu = np$ وانحراف معيارى $\sigma = \sqrt{npq}$ ويزداد هذا التوزيع قرباً من التوزيع الطبيعى كلما اقتربت p من النصف (إذا كانت p أقل من النصف وكان $\mu \geq 15$ يستخدم التوزيع الطبيعى التقريبى بدلا من استخدام التوزيع الأصلى وهو "ذو الحدين" والمتوسط يقل عن ذلك إذا كانت p تساوى النصف).

ولهذا التقريب أهمية كبرى فى جعل حساب الاحتمالات أكثر سهولة عندما تكون n كبيرة ولكن يجب إجراء تصحيحاً لعدم الاستمرارية correction for discontinuity حيث إن توزيع "ذو الحدين" من التوزيعات المتقطعة كما سبق ذكره بينما التوزيع الطبيعى من التوزيعات المستمرة ويكون التصحيح بطرح ½ من القيمة المطلقة للفرق بين r (عدد مرات النجاح) والمتوسط كما فى العلاقة التالية:

$$Z = \frac{|r - \mu| - \frac{1}{2}}{\sigma} \qquad (٤-٣١)$$

حيث أن: $\mu = np$ ، $\sigma = \sqrt{npq}$

والشكل التالى يوضح العلاقة بين التوزيع الطبيعى وتوزيع "ذو الحدين".



شكل ٤-١٢ العلاقة بين التوزيع الطبيعى وتوزيع "ذو الحدين"

مثال ٤-٢٥

فى قطيع مكون من 400 بقرة متوقع ولادتها، احسب احتمال الحصول على:

١- 200 ذكر.

٢- 230 ذكر على الأقل.

٣- 170 أنثى على الأكثر.

فى هذا المثال يوجد نوعان من جنس المولود إما أن يكون ذكراً وإما أن يكون أنثى، واحتمال كل منهما يساوى النصف، وبهذا فإن صفة الجنس تتبع توزيع "ذو الحدين" وللحصول على إجابة مضبوطة فإن:

$$\Pr(200\,\text{males}) = C_{200}^{400}\left(\frac{1}{2}\right)^{200}\left(\frac{1}{2}\right)^{200}$$

$$= \frac{400!}{200!200!}\left(\frac{1}{2}\right)^{400}$$

$$= \frac{400\text{x}399\text{x}\cdots\text{x}201\text{x}200!}{200!200\text{x}199\text{x}\cdots\text{x}3\text{x}2\text{x}1}\left(\frac{1}{2}\right)^{400}$$

$$= \frac{400\text{x}399\text{x}\cdots\text{x}201}{200\text{x}199\text{x}\cdots\text{x}3\text{x}2\text{x}1}\left(\frac{1}{2}\right)^{400}$$

١- واضح أنه من الصعب حساب قيمة هذا الاحتمال. وحيث إن متوسط "ذو الحدين" عبارة عن $np = 200$ واحتمال الحصول على حالة نجاح (الحصول على ذكر مثلاً فى هذه الحالة) يساوى النصف فإنه يمكن استخدام التوزيع الطبيعى التقريبى للحصول على قيم الاحتمالات المختلفة فى مثل هذه الحالة. ويبين الشكل ٤-١٣ توزيع "ذو الحدين" لهذا المثال.

وحيث إن:

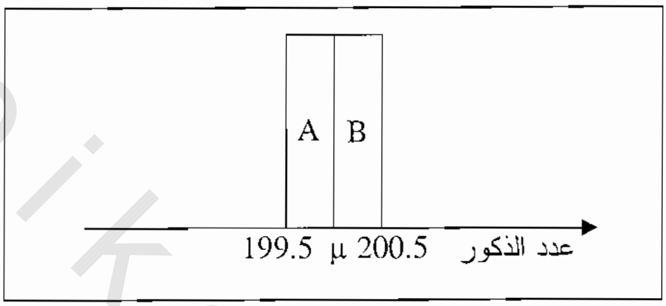
$\mu = np = 400\text{x}\frac{1}{2} = 200$ ، $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400\text{x}\frac{1}{2}\text{x}\frac{1}{2}} = 10$ ، فإن

$$Z_1 = \frac{200.5 - 200}{10} = 0.05$$

وقيمة هذا الاحتمال هو 0.0199، وقيمة الاحتمال المقابلة لـ Z_2 هى: 0.0199 أيضاً.

وحيث إن $A = B$ حيث إن التوزيع الطبيعى متماثل (شكل ٤-١٣) فإن مساحة $A + B$ تساوى ضعف مساحة A.

أى أن احتمال الحصول على 200 ذكر عبارة عن $0.0398 = (2)(0.0199)$



شكل ٤-١٣ توزيع "ذو الحدين" لعدد الذكور

٢- احتمال الحصول على 230 ذكر على الأقل:

$$Z = \frac{|r-\mu| - \frac{1}{2}}{\sigma} = \frac{|230-200| - \frac{1}{2}}{10} = \frac{29.5}{10} = 2.95$$

إذاً احتمال الحصول على 230 ذكر على الأقل هو $0.5 - 0.4984 = 0.0016$

٣- احتمال الحصول على 170 أنثى على الأكثر. أى احتمال الحصول على 170 أو 169 أو 168 أو ... أو صفر أنثى. وهذا الاحتمال هو نفسه احتمال الحصول على 230 أو 231 أو ... 400 ذكراً، لأن هذه الاحتمالات تقع تحت توزيع "ذو الحدين" أصلاً، وحيث إن حالة النجاح فى هذا المثال هى الحصول على ذكر وتم حساب المتوسط بناء على ذلك (مع ملاحظة أن متوسط الذكور هو نفسه متوسط الإناث حيث إن $p = q$ فى هذه الحالة) وقد حسبت قيمة هذا الاحتمال قبل ذلك مباشرة أى أن:

احتمال الحصول على 170 أنثى على الأكثر هو نفسه الحصول على 230 ذكر على الأقل = 0.0016.

تمارين الباب الرابع

٤-١ إذا ألقت قطعة من النقود عشرة مرات فما احتمال الحصول على (,0, 1, 2, 3 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) صورة ؟ (احتمال الصورة = احتمال الكتابة = 0.5).

٤-٢ إذا كان هناك 4 أحداث (A, B, C, D) هى كل الأحداث الممكنة الناتجة من تجربة وكلها متنافية ويوجد 4 إجابات لقيم الاحتمالات مبينة بالجدول التالى. اختبر أى الإجابات يمثل الإجابة الصحيحة:

الحالة	احتمال A	B	C	D
أ	0.34	0.29	0.17	0.30
ب	0.17	0.59	0.21	0.03
ج	0.24	0.05	0.18	0.33
د	$\frac{13}{80}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{3}{8}$

٤-٣ ما عدد الطرق التى يمكن بها لأسرة أن تنجب 3 ذكور و 2 أنثى ؟

٤-٤ عند إلقاء حجرى نرد ما احتمال أن يكون مجموع الوجهين 5 على الأقل ؟

٤-٥ أسرة مكونة من 5 أطفال ما احتمال أن يكون الأطفال من كلا الجنسين ؟

٤-٦ إذا كان لديك صندوقان أحدهما: (أ) به 4 كرات حمراء، 6 كرات بيضاء، والآخر (ب) به 5 كرات حمراء، 6 كرات بيضاء. سحبت كرة من كل صندوق، ما احتمال أن تكون الكرتان من لون واحد ؟

٤-٧ إذا كان لديك الأرقام التالية: (3, 2, 1, 0) فما الأعداد الثلاثية الممكن تكوينها دون تكرار الرقم أكثر من مرة فى العدد الواحد وبحيث يكون فى خانة العشرات دائماً الرقم 3 ؟

٤-٨ احسب: C_2^5 ، C_5^6 ، C_3^5

٤-٩ إذا نتج طلوقة من تزاوج فردين طبيعيين ولكن حاملين لأليل أوتوسومى مميت، فما احتمال أن يكون هذا الطلوقة حاملا لهذا الأليل، مع العلم أنه عندما لقح هذا الطلوقة 5 بقرات طبيعية حاملة لهذا الأليل نتج عن هذا التلقيح 5 أبناء طبيعية ؟

٤-١٠ إذا كان لديك 3 صناديق:

صندوق (أ) به 2 كرة بيضاء، 3 كرة حمراء، كرة واحدة سوداء،

صندوق(ب) به 3 كرات بيضاء، 4 كرة حمراء، 2 كرة سوداء،

صندوق(ج) به 4 كرات بيضاء، 2 كرة حمراء، 3 كرات سوداء.

سحبت كرتان من أحد الصناديق وكانت إحداهما حمراء والأخرى سوداء، فما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من الصندوق الأول ؟

٤-١١ إذا كان اللون الأسود سائداً سيادة تامة على اللون الأحمر فى سلالة أبقار الأبردين أنجس، طلوقة أسود اللون لقح بقرة سوداء فأنتجا عجلاً أحمر، احسب الاحتمالات الآتية:

أ- أن يكون العجل القادم من نفس الفردين أحمر اللون.

ب- إذا أنتج هذا التزاوج أربع عجول، فما احتمال أن يكون من بينهما 3 عجول حمراء؟

٤-١٢ إذا كان اللون الأجوتى يسود على اللون الأبيض فى الأرانب ويتوقف على زوج واحد من العوامل الوراثية، وفى تزاوج بين فردين خليطين تم الحصول على خمسة أفرد، فما احتمال الحصول على:

١- فردين أجوتى.

٢- على الأقل 3 أفراد أجوتى.

٣- أن يكون الأفراد الخمسة أجوتى.

٤- أن يظهر اللونان فى النسل.

٤-١٣ فى توزيع "ذو الحدين"، إذا كانت $n = 10$، $p = q = 0.5$، احسب الاحتمالات الآتية:

١- الحصول على 4 حالات نجاح على الأقل

٢- الحصول 4 حالات نجاح على الأكثر

٣- الحصول على 3 حالات نجاح

٤-١٤ باستخدام البيانات فى (٤-١٣) احسب الاحتمالات مستخدماً التوزيع الطبيعى التقريبى، مرة عندما تكون $p = 0.5$ وأخرى عندما $p = 0.75$ ثم قارن النتائج التى حصلت عليها بنتائج التمرين السابق. وما تستنتج ؟

٤-١٥ فى تزاوج بين فردين خليطين (Aa)، تم الحصول على 144 فرداً. فما احتمال أن يكون:

(أ) عدد الأفراد الخليطة بين 71 ، 73 فرداً.

(ب) عدد الأفراد الأصلية aa يزيد عن 42 فرداً.

(ج) متوسط عدد الأفراد aa بين 36-36.5 فرداً.

٤-١٦ إذا كانت صفة الطول تتوزع طبيعياً بمتوسط 50 cm وتباين $64\ cm^2$، أوجد ما يلى:

١- احتمال الحصول على فرد طوله 50 cm

٢- القيم التى تحصر فيما بينها أطول 20% من الأفراد

٣- احتمال الحصول على:

أ- فرد طوله بين 45, 60 cm

ب- فرد طوله أقل من 40 cm