الفصل الأول

مفاهيم أولية

يتناول هذا الفصل عدداً من المفاهيم التي ترتكز عليها دراسة الإحصاء التطبيقي خاصة في مجال العلوم ، فهي بمثابة الأبجدية التي لا مفر من إرسائها قبل متابعة تلك الدراسة . وهي وإن بدت منفصلة عن بعضها إلا أنها تتكاتف معا لخدمة موضوعات الفصول التالية .

(١ - ١) المجتمع والعينة :

إن التمييز بين المجتمع والعينة هو أول ما ينبغي أن يتنبه له أي باحث تطبيقي خاصة حين يستخدم الطرق الإحصائية وعملية الاستدلال الإحصائي .

في الإحصاء تستخدم كلمة **مجتمع** للتعبير عن أي مجموعة (منتهية أو لا نهائية) من الأشياء أو الأحداث التي تكون موضع اهتمامنا في وقت ما من حيث ظاهرة ما أو متغير ما سـ . ومن أمثلة المجتمعات الإحصائية : جميع نباتات حنك السبع المزروعة في حقل ما في وقت ما ، جميع نباتات البسلة في العالم ، جميع القواقع في بحيرة ما ، جميع الفيران من نوع معين ، سقوط المطر في منطقة ما ...

وينبغي أن يكون المجتمع الذي ندرسه معرفا تعريفا جيدا خاصة فيما يتعلق بالمتغير سـ وطريقة قياسه وفي تحديد الوحدة أو العنصر التي يتكون المجتمع من مجموعها . فمثلا قد يعبر المتغير سـ عن الطول أو الوزن أو اللون أو عدد ضربات القلب التي تنتج عن حقن قلب الفأر بمادة الأدرينالين ... وقد تكون الوحدة هي قرن بسلة أو قوقعة أو قلب فأر ...

وفي كثير من الأحيان يمكن وصف المتغير سـ في مجتمع ما عن طريق نموذج نظرى يوضع على هيئة معادلة أو صيغة رياضية تعبر عما يسمى « توزيع المجتمع » فنقول مثلا إن مجتمعا ما هو مجتمع معتدل أو مجتمع ذو حدين أو مجتمع بواسوني ... وهذا ما سوف نتناوله فيما بعد .

والأعداد التي تميز مجتمعا ما تسمى بارامترات (أو معالم أو أدلة أو ثوابت) المجتمع وهى أعداد ثابتة تميز كل مجتمع عن غيره من المجتمعات حتى ولو كان له نفس التوزيع ، مثل الوسط الحسابي μ وهو مقياس للنزعة المركزية للمجتمع ، والانحراف المعيارى σ وهو مقياس لتشتت مفردات المجتمع حول الوسط الحسابى .

أما **العينة** فهي جزء من المجتمع يختار بحسب مواصفات معينة وبهدف استخدامها لدراسة المجتمع ، وهناك من النظريات والطرق الإحصائية ما يمكننا من تقدير بارامترات المجتمعات أو مقارنتها أو إصدار قرارات أو تنبؤات بشأنها عن طريق فحص ودراسة عينات مأخوذة منها .

وبطبيعة الحال ينبغي أن تختار العينة بحيث تمثل المجتمع أفضل تمثيل ممكن ، على أن التحليل الإحصائي يتطلب بالضرورة أن تكون العينة **عشوائية** . والعشوائية لاتعني أن نأخذ جزءا من المجتمع بشكل جزافي ، بل هي إجراء يصمم بدقة بحيث يضمن عدم وجود تحيز من أى نوع قد يؤثر في عملية اختيار العينة وبحيث يكون لكل وحدة من وحدات المجتمع احتمال معروف للدخول في العينة . ومن ثم فقد وضعت خطط مختلفة للمعاينة العشوائية random sampling plans أى لسحب العينات العشوائية ، يتوقف استخدام أى منها لدراسة مجتمع ما على طبيعة هذا المجتمع وعلى الهدف من دراسته . ومن أشهر هذه الخطط ما ينتج العينات التي تحمل الأسماء الآتية : العينة العشوائية البسيطة – العينة الطبقية – العينة ذات المراحل – العينة المنتظمة – العينة المساحية ... وسنهتم هنا بصفة خاصة بالعينة العشوائية البسيطة التى هى على أية حال أساس لكثير من تلك الخطط ، أما بقية الخطط فقد أفرد لها فصل خاص هو الفصل الخامس عشر من هذا الكتاب .

(١ – ٢) العينة العشوائية البسيطة : SIMPLE RANDOM SAMPLE

لعل أبسط تعريف للعينة العشوائية البسيطة هو أنها تلك العينة التى تؤخذ من المجتمع بحيث يكون لكل وحدة من وحداته نفس الفرصة في الظهور في العينة . ولذلك فإن هذه العينة لا تصلح لتمثيل المجتمع إلا إذا كان هذا المجتمع **متجانسا** من حيث المتغير الذي ندرسه . وفيما يلي حين نذكر كلمة عينة فسوف نقصد عينة عشوائية بسيطة .

ولعل أوضح خطة لاختيار عينة عشوائية بسيطة من مجتمع منتهي هي تلك التى اشتهر استخدامها في تحديد أصحاب جوائز المسابقات التليفزيونية . نفرض مثلا أن لدينا ٤٥٢ شخصا أجابوا إجابات صحيحة ونريد أن نختار منهم ٢٠ شخصا دون تحيز . إن هذا يعني أن لدينا مجتمعا متجانسا حجمه ٤٥٢ ونريد سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها ٢٠ . نعد ٤٥٢ قطعة صغيرة متطابقة من الورق ونكتب عليها أسماء هؤلاء الأشخاص (أو نعطيهم أرقاما مسلسلة من ١ إلى ٤٥٢ ثم نكتب هذه الأرقام على قطع الورق) . نضع هذه القطع في علبة ونخلطها جيدا ثم نسحب منها ٢٠ قطعة الواحدة بعد الأخرى دون أى تحيز مع إرجاع كل قطعة تسحب إلى الصندوق قبل كل سحبة وخلط القطع جيدا في كل مرة وإهمال القطع التى تتكرر في السحب ، فتكون مجموعة الأشخاص الذين تظهر أسماؤهم أو أرقامهم على هذه القطع هى العينة المطلوبة .

غير أنه يمكن الاستغناء عن العلبة وقطع الورق وبناء خطة الاختيار على أحد الجداول المسماة **بجداول الأرقام العشوائية** ، مثل الجدول (١) بملحق هذا الكتاب . ويتألف هذا الجدول من عدة أعمدة (أو صفوف) مجمعة كل خمسة معا للسهولة وبكل عمود أرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ٩ مرتبة ترتيبا خاصا يجعل لكل من هذه الأرقام نفس الفرصة في الظهور في أي موضع بالجدول ، ويمكن أن نقرأ منها أعدادا متتابعة يتألف كل منها من رقم واحد أو رقمين أو ثلاثة .. أى نأخذ عمودا واحدا أو اثنين أو ثلاثة ... حسما نريد ، كما يمكن أن نبدأ القراءة

من أى صف أو أى عمود وفي أى اتجاه ، إلى أعلى أو إلى أسفل يمينا أو يسارا أو قطريا . ويعتمد عدد الأعمدة التي نختارها على عدد الأرقام التي يشتمل عليها حجم المجتمع .

مثال (١ – ١) :

لدينا مجتمع حجمه ٥٠٠ من المرضى بمرض معين ونريد أن نستخدم جدول الأرقام العشوائية لاختيار عينة عشوائية بسيطة حجمها ٢٠ لإجراء بعض القياسات على عناصرها .

نظرا لأن حجم المجتمع وهو ٥٠٠ يتألف من ثلاثة أرقام ، نعطى لوحدات المجتمع أرقاما مسلسلة ٠٠١ ، ٠٠٢ ، ٠٠٠ ، ٠١٠ ، ٠١١ ، ٠٠٠ ، ٤٩٩ ، ٥٠٠ يتألف كل منها من ٣ خانات ومن ثم نحتاج لاختيار العينة إلى ثلاثة أعمدة . نغمض أعيننا ونضع أصبعنا عشوائيا على أى نقطة في الجدول ولتكن هذه النقطة هى نقطة التقاء العمود ٨ والصف ٢١ حيث نجد العدد ٠٠٨ فيكون هذا الرقم هو الرقم المسلسل الأول في العينة . نقرأ ابتداء من هذا العدد رأسيا إلى أسفل (مثلا) بشكل هندسي ثابت مع إهمال الأعداد التي تزيد عن ٥٠٠ والأعداد التي يتكرر ظهورها . وإذا صادف أن انتهى العمود ٨ و لم يكتمل بعد الحجم المطلوب للعينة نتحول إلى ثلاثة أعمدة أخرى من أى من الجانبين الأيمن أو الأيسر ونقرأ من أعلى الجدول أو من أى مكان آخر في نفس الاتجاه السابق حتى نصل إلى الحجم المطلوب ونكون بذلك قد توصلنا إلى عينة عشوائية بسيطة قد تأخذ مفرداتها الأرقام المسلسلة الآتية :

٠٠٨ ١٤٢ ٠١٨ ١٤٣ ٤١٨ ٤٩١ ٢٤٠ ٠٢٠ ١٤٠ ٠٠٦
١٠١ ٢٤٩ ٠١٦ ١٣٤ ٠٤٩ ٣١٩ ٤٨٣ ٢٣٢ ٠٥٢ ٠٢٩

ملاحظة : احتمال الحصول على عينة بهذه الطريقة يساوى احتمال الحصول على أى عينة أخرى من نفس الحجم ، وتؤخذ هذه الخاصة أحيانا كتعريف للعينة العشوائية البسيطة

(١ – ٣) المتغيرات الإحصائية : STATISTICAL VARIABLES

في أي دراسة تطبيقية إحصائية ينبغي أن نحصل على بيانات عددية عن المتغيرات التي ندرسها . وتختلف طريقة تناولنا لهذه البيانات باختلاف تلك المتغيرات التي يمكن تقسيمها بصفة عامة إلى الأنواع الآتية :

أولا – المتغيرات الوصفية (أو النوعية) :
QUALITATIVE VARIABLES (ATTRIBUTES)

وهى متغيرات لا يمكن قياس مفرداتها عدديا ولكن يمكن تقسيم هذه المفردات بحسب اشتراكها في صفة أو خاصة ما . ومن أمثلة هذه المتغيرات متغير اللون أو الجنس أو المهنة أو الخواص الوراثية . والجدول (١ – ١) هو مثال لبيانات وصفية فهو يعطى التوزيع التكرارى لألوان عيون عينة من ٨٠ فارا .

الجدول (١ – ١)
التوزيع التكرارى لألوان عيون عينة من الفيران

اللون	التكرار
أسود	٤
ياقوتي	٢
رمادي	٧٤
المجموع	٨٠

الجدول (١ – ٢)
ترتيب محكمين لخمسة من الأشخاص

المتقدم	المحكم الأول	المحكم الثاني
أ	٢	١
ب	١	٢
جـ	٤	٥
د	٣	٤
هـ	٥	٣

ثانيا – المتغيرات الرتبية : RANKED VARIABLES

وهى أيضا متغيرات لا يمكن قياس مفرداتها عدديا ولكن يمكن تنظيم هذه المفردات بحسب ترتيب ما أو رتبة ما . ومن أمثلة هذه المتغيرات متغير النمو الذى

يمكن تقسيمه إلى ضعيف – عادى – مفرط ، كذلك المتغيرات التي تنتج من عملية التحكيم كما هو الحال مثلا عندما يطلب إلى مجموعة من علماء النبات ترتيب عشرة نباتات من حيث شدة التلف الذى أصابها من مرض فطرى ، فيعطى كل منهم بحسب تقديره الترتيب (١) لأقل النباتات تأثرا بالمرض والترتيب (١٠) لأكثرها تأثرا ، أو حينما يطلب إلى مجموعة من الأطباء إبداء آرائهم في مشاهداتهم الميكروسكوبية عن مرض السرطان وترتيبها من حيث تزايد الورم السرطانى . الجدول (١ – ٢) يعطى الترتيب الذى رآه اثنان من المحكمين لخمسة من المتقدمين لشغل وظيفة ما .

ثالثا – المتغيرات العددية « الكمية » : QUANTITATIVE VARIABLES

وهى التى يمكن التعبير عنها بالأعداد العادية (الحقيقية) فيكون التغير فيها هو تغير من حيث المقدار أى يمكن تقسيم مفرداتها بحسب الأصغر والأكبر ، ونميز هنا بين النوعين الآتيين :

(ا) المتغيرات المتصلة : CONTINUOUS VARIABLES

وهى تلك التى نحصل عليها عادة عن طريق القياس measurement مثل الطول والوزن والعمر ودرجة الحرارة . وفى هذه المتغيرات نستطيع أن نتصور أن المفردات يمكن أن تختلف عن بعضها بمقادير صغيرة صغراً لا نهائيا من الناحية النظرية . وإذا وقعت قيم متغير متصل بين عددين ا ، ب فإنها تمثل بيانيا بجميع نقط قطعة مستقيمة محدودة بهذين العددين .

(ب) المتغيرات الوثابة : DISCRETE (OR MERISTIC) VARIABLES

وهى تلك التى نحصل عليها عادة عن طريق العد counting مثل عدد الذرية – عدد الخلفة – عدد ضربات القلب . ومجموعة قيم المتغير الوثاب قد تكون منتهية مثل { ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ن } أو لا نهائية مثل {٠ ، ١ ، ٢ ، ...} . وفى كلتا الحالتين تمثل بيانيا بنقط منفصلة على خط مستقيم .

وفى المتغيرات العددية نميز من جهة أخرى بين المتغيرات **العشوائية** والمتغيرات **غير العشوائية** . والمتغيرات العشوائية هى متغيرات تخضع لمؤثرات عشوائية لا يمكن التحكم فيها تجريبيا ومن أمثلتها متغير درجات حرارة الجو ومتغير ضغط دم الإنسان أو تحصيله الدراسى ومتغير عدد ضربات قلب ضفدعة بعد معالجة ما ، وهذه جميعها تتأثر بعوامل عشوائية غير منظورة . أما المتغيرات غير العشوائية (أو الرياضية) فهى تلك التى لا تكون واقعة تحت تأثير عوامل عشوائية ولذلك يمكن قياسها بدقة أو بأخطاء صغيرة يمكن إهمالها .

ويهتم الإحصاء بصفة خاصة بالمتغيرات العشوائية بل هى محور الدراسة فيه نظريا وتطبيقيا ولذلك سوف نتناولها بشيء من التفصيل هى وتوزيعاتها ونماذجها في الفصل الثالث من هذا الكتاب ليتيسر لنا التعامل معها بعد ذلك في الفصول التالية .

(١ – ٤) الأخطاء العشوائية (أخطاء الصدفة) RANDOM ERRORS

هناك أخطاء تخص المجال الذى يعمل فيه الباحث ولا تدخل في صميم الموضوعات الإحصائية كالأخطاء الناتجة عن عدم ضبط الأجهزة أو الأدوات المستخدمة في القياس أو عدم توفر الظروف الملائمة لإجراء التجربة كدرجة الحرارة أو الرطوبة ، أو الأخطاء الناتجة عن عدم ملاءمة طريقة القياس ، أى عندما يكون هناك اختلاف بين التعريف النظرى للمتغير والتعريف الإجرائى المستخدم فى عملية قياس هذا المتغير .

أما ما نهتم به فى الإحصاء فهى الأخطاء العشوائية ، وتظهر فى الاختلافات التى نجدها فى القيم العددية التي نحصل عليها عند القيام بقياسات متكررة لنفس الوحدة أو الشيء ، كما هو الحال مثلا عند قياس طول حشرة عدة مرات . ويتسبب فى هذه الاختلافات عدد كبير من العوامل الثانوية التي نعجز عن حصرها أو تحديد مصدرها أو التنبؤ بها ونعجز عن حساب التأثير الضئيل الذى يحدثه كل منها على حدة . وبالتالى نعجز عن التحكم فيها تجريبيا ، وفى هذه الحال نحاول البحث عن وسائل تسمح بتقدير تأثيرها الكلى للإفادة من هذا التقدير فى عملية التحليل الإحصائى

وحين تكون القياسات معرضة للأخطاء العشوائية فقط فإن أى قيمة س ر نحصل عليها من قياس عنصر منه تمثل بالنموذج الآتى :

$$س_ر = أ + خ_ر .$$

حيث أ هى القيمة الحقيقية للعنصر المقاس ، خ ر هى الخطأ فى س ر أى انحراف س ر عن القيمة الحقيقية أ .

إلا أنه على المدى البعيد تميل هذه الأخطاء إلى تعويض بعضها البعض بمعنى حدوث توازن بين الأخطاء الموجبة والأخطاء السالبة بحيث يقترب متوسط القياسات من القيمة الحقيقية للشىء الذى نقيسه ، ولذلك فإننا نفترض فى كثير من الحالات أن متوسط الأخطاء هو صفر على المدى البعيد .

(١ – ٥) قواعد تقريب الأعداد : RULES FOR ROUNDING

كثيرا ما نلجأ إلى تدوين قياساتنا للمتغيرات العددية مقربة إلى عدد معين من الخانات . ولقد وجد أنه من المناسب الاتفاق على القواعد الآتية :

ليكن ق هو الرقم الذى فى الخانة المراد التقريب إليها ، أ هو الرقم التالى من اليمين مباشرة للرقم ق .

(أولا) إذا كان أ < ٥ يبقى الرقم ق كما هو .

(ثانيا) إذا كان أ > ٥ يزاد الرقم ق واحدا .

(ثالثا) إذا كان أ = ٥ ، أ متبوعا بأرقام غير الصفر ، يزاد الرقم ق واحدا .

أما إذا كان أ = ٥ ، أ يقف وحده أو متبوعا بأصفار ، يبقى الرقم ق كما هو إذا كان زوجيا ويزاد واحدا إذا كان فرديا . وهذه القاعدة الأخيرة من شأنها إحداث توازن بين الأعداد التى زيدت فى التقريب والأعداد التى نقصت ، خاصة إذا كان لدينا متتابعة طويلة من الأعداد المقربة .

مثال (١ - ٢)

العدد	العدد مقربا (إلى خانتين عشريتين)
أ ق	
٤٨,٣٢٤٦	٤٨,٣٢
٤٨,٣٢٦٠	٤٨,٣٣
٤٨,٣٢٥١	٤٨,٣٣
٤٨,٣٢٥٠	٤٨,٣٢
٤٨,٣١٥٠	٤٨,٣٢

مثال (١ - ٣) :

العدد	عدد الأرقام المعنوية المطلوبة	العدد المقرب
٢٦,٥٨	٢	٢٧
١٣٣,٧١٤٧	٥	١٣٣,٧١
١٣٣,٧١٤٧	٦	١٣٣,٧١٥
,٠٣٧٢٥	٣	,٠٣٧٢
,٠٣٧١٥	٣	,٠٣٧٢
١٨٣١٦	٢	١٨٠٠٠
١٨٣١٦	٣	١٨٣٠٠
١٧,٣٤٧٦	٣	١٧,٣

هذا مع ملاحظة أن آخر رقم فى عدد مقرب ينبغى دائما أن يكون معنويا أى ينبغى أن يتضمن فترة تقع فيها القيمة الحقيقيةللعدد ، وهذهالفترة تبدأ بنصف وحدة خطوة أسفل العدد المقرب المدون وتنتهى بنصف وحدة خطوة أعلاه فمثلا العدد المقرب ٧,٨ يعنى أن قيمته الحقيقية تقع في الفترة بين ٧,٧٥ ، ٧,٨٥ أى ٧,٨ ± ٠,٠٥ والعدد المقرب ٧,٨٠ يعنى أن قيمته الحقيقية تقع في الفترة بين

obeikandl.com

٧,٧٩٥ ، ٧,٨٠٥ أى ٧,٨٠ ± ٠,٠٠٥ والعدد المقرب ٣,٢٤ يعنى أن قيمته الحقيقية تقع فى الفترة بين ٣,٢٣٥ ، ٣,٢٤٥ أى ٣,٢٤ ± ٠,٠٠٥

وحين نرغب فى تدوين قياس وحدة ما مقربة إلى عدد معين من الخانات نوجد هذا القياس بحيث يكون عدد الخانات الناتجة أكثر بواحد على الأقل من العدد المطلوب ثم نجرى التقريب . فمثلا لإيجاد خارج القسمة ١٥ ÷ ٧ مقربا إلى ٣ خانات عشرية نقوم بعملية القسمة حتى نحصل على ٤ خانات ثم نقرب إلى ٣ خانات كالآتى : ١٥ ÷ ٧ = ٢,١٤٢٨ = ٢,١٤٣ تقريبا .

(١ - ٦) الدقة والضبط : ACCURACY AND PRECISION

الدقة هى تعبير عن مدى قرب قيمة نتجت عن قياس وحدة ما من القيمة الحقيقية لهذه الوحدة ، أما الضبط فهو تعبير عن مدى قرب القياسات المتكررة لوحدة ما من بعضها البعض تحت نفس الظروف . والإحصاء يهتم أساسا بالضبط لأن الضبط يتضمن الدقة طالما كانت أداة القياس غير متحيزة .

والدقة في عدد مقرب يحكم عليها بدلالة النسبة المئوية للخطأ الذى يحتويه ، فمثلا نفرض أن عددا سجل على أنه ٨٩ تقريبا . إن هذا يعنى أن القيمة الحقيقية لهذا العدد تقع بين العددين ٨٨,٥ ، ٨٩,٥ وتكون القيمة المطلقة للحد الأقصى للخطأ هى ٠,٥ وبالتالى تكون نسبة الخطأ هى :

$$\frac{٠,٥}{٨٩} \times ١٠٠ = ٠,٥٦ .$$

نفرض أن عددا آخر سجل على أنه ١٥,٥ تقريبا فتكون نسبة الخطأ هى :

$$\frac{٠,٥}{١٥,٥} \times ١٠٠ = ٣,٢٢ .$$

ونظرا لأن ٠,٥٦ أكبر من ٠,٣٢ نقول إن العدد ٨٩ أقل دقة من العدد ١٥,٥ أى أن العدد يكون أكثر دقة إذا استطعنا كتابته بعدد أكبر من الأرقام المعنوية .

أما الضبط فنحكم عليه بعدة طرق منها حجم الوحدة المستخدمة في القياس ، ففى قياس طول وحدة ما يكون القياس أكثر ضبطا حين نستخدم مسطرة مدرجة بالملليمترات عنه حين نستخدم مسطرة مدرجة بالبوصات . وفى الإحصاء يتم التعبير عن الضبط فى كثير من الحالات بواسطة الانحراف المعيارى للقياسات المتكررة .

(١ - ٧) الاحتمال : PROBABILITY

إن القرارات والأحكام والتنبؤات التى نتخذها فى الإحصاء هى دائما قرارات احتمالية بمعنى أننا لا نستطيع أن نجزم جزما باتا بصحتها أو بخطئها ، فتأتى القرارات مصحوبة باحتمالات معينة للصواب أو الخطأ . ولعل هذا هو الذى أعطى الإحصاء قوته الكبرى وميزته عن الرياضيات ، إذ يتعرض للقضايا والفروض التى تعلن الرياضيات عجزها عن تناولها ، فيبت فيها بأسلوب احتمالى هو على أية حال أفضل من ترك القضايا دون حل عملا بالحكمة القائلة : « ما لا يدرك كله لا يترك كله ».ويهمنا فى مستهل دراستنا للإحصاء أن نتبين معنى الاحتمال من الناحية التطبيقية على الأقل .

إذا كان لدينا فرض ما فإننا نعين لصواب هذا الفرض العدد «١» ونعين لخطئه العدد « صفر » ومن ثم فإن أى عدد يقع بين الصفر والواحد يمكن أن يعبر عن درجة صواب أو خطأ هذا الفرض . إن الأعداد التى تبدأ بالصفر وتنتهى بالواحد هى التى نعبر بها عن الاحتمالات ، فنقول مثلا إن احتمال ظهور البترول فى منطقة ما هو ٠,٦ أو إن احتمال الحصول على نباتات حمراء من مجموعة معينة من بذور حنك السبع هو ٠,٤ وهكذا ... ويؤخذ الاحتمال بداهة كمقياس لدرجة اعتقادنا أو شدة اقتناعنا فى صحة فرض ما أو فى وقوع حدث ما . وليس من المناسب أن نعتبر هذا تعريفا للاحتمال لأنه يخضع لذاتية المشاهد وخبرته ، ومع ذلك فكثيرا ما نجد أنفسنا مضطرين إلى أن نقدر احتمال حدث ما بالبداهة أو الخبرة أو أى عوامل ذاتية أخرى وذلك حين لا تتوفر عوامل مباشرة تكفى لحساب احتمال الحدث .

والتعريف الدقيق للاحتمال يتألف من مجموعة من المسلمات المصاغة صياغة رياضية ، على أن الدراسات التطبيقية لا تحتاج إلى هذا التعريف وإنما تكتفى بتعريفين فى مستوى أقل ، فيعتبر الأول أن الاحتمال هو « نسبة » ويعتبر الثانى أن الاحتمال هو « تكرار نسبى » كما هو موضح بعد .

(ا) التعريف التقليدى : CLASSICAL DEFINITION

إذا أسفرت تجربة عن ن من النواتج أو الحالات المتساوية الإمكانات وكان الحدث أ يقع فى م من هذه النواتج فإن احتمال وقوع هذا الحدث يساوى $\frac{م}{ن}$

أى يساوى النسبة بين عدد الحالات التى يمكن أن يقع فيها الحدث والعدد الكلى للحالات التى يمكن أن تسفر عنها التجربة .

فمثلا إذا ألقينا حجرة نرد منتظمةعشوائيا تكون النواتج الممكنة للتجربة هى الأعداد الست ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ وهذه النواتج متساوية الإمكانات لأنه لا يوجد لدينا ما يجعلنا نتوقع ظهور أحدها دون الآخرين وعلى ذلك فإن احتمال الحدث « عدد فردى » مثلا هو $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$. كذلك احتمال سحب « صورة » من مجموعة محكمة الخلط من ورق اللعب = $\frac{١٢}{٥٢} = \frac{٣}{١٣}$.

(ب) التعريف الإحصائى : STATISTICAL DEFINITION

ينطلق هذا التعريف من فكرة التكرار النسبى ومن ظاهرة اكتشفت بالملاحظة والتجريب تعرف **بظاهرة الانتظام الإحصائى Statistical regularity** ومجملها أنه إذا كررت تجربة مرات كثيرة تحت نفس الظروف (مثل زراعة بذرة من نبات حنك السبع) فإن التكرار النسبى لحدث ما متعلق بهذه التجربة (مثل ظهور اللون الأحمر) يقترب من عدد ثابت كلما زاد عدد مرات إجراء التجربة ، ويؤخذ هذا العدد كتقدير لاحتمال ذلك الحدث . ولذلك يعرف احتمال حدث ما بأنه نهاية متتابعة من التكرارات النسبية لوقوع هذا الحدث . فمثلا إذا ألقينا قطعة نقود منتظمة عشوائيا عشر مرات ثم مائة ثم ألف ثم ... فإن التكرار النسبى لظهور

الصورة يقترب من العدد $\frac{1}{2}$ كلما زاد عدد مرات إلقاء القطعة . وهنا نقول إن احتمال الحدث « ظهور الصورة » هو $\frac{1}{2}$. ويفهم من هذا أنه إذا رميت قطعة نقود عددا كبيرا من المرات فإن نسبة عدد المرات التى تظهر فيها الصورة إلى العدد الكلى لمرات رمى القطعة هو $\frac{1}{2}$ (على المدى الطويل) .

ويوحى التعريف الإحصائى بطريقة مناسبة لإيجاد احتمالات الأحداث تجريبيا ، فإذا أردنا مثلا إيجاد احتمال وجود وحدة معيبة من الوحدات التى ينتجها مصنع ما ، نسحب عينة عشوائية كبيرة من هذه الوحدات ونحسب التكرار النسبى للوحدات المعيبة فنحصل على تقدير للاحتمال المطلوب ، ويمكن بعد ذلك اختبار دقة هذا التقدير بالطرق الإحصائية التى سندرسها بعد .

أما التعريف التقليدى فيصلح لإيجاد الاحتمالات نظريا فى الحالات التى يتوفر فيها شرط تساوى الإمكانات كما فى المثال الآتى .

مثال (١ - ٤) :

فى مجموعة من ١٠٠ رجل علم أن ١٢ منهم يلبسون نظارات ، ٨ منهم لا يلبسون نظارات ولكن يحتاجون إليها . إذا اخترنا رجل واحد من هذه المجموعة عشوائيا فإن :

(ا) احتمال أن يكون الرجل لابساً نظارة = ٠,١٢

(ب) احتمال أن يكون الرجل « لا يلبس نظارة ولكن يحتاج إليها » = ٠,٠٨

(ج) احتمال أن يكون الرجل « لا يلبس نظارة ولا يحتاج إليها » = ٠,٨٠

امتداد للتعريف التقليدى :

إن التعريف التقليدى للاحتمال الذى سبق تقديمه يتناول التجارب التى تسفر عن عدد منتهى من النواتج ، إلا أنه مع بعض التعديل يمكن أن يمتد ليشمل التجارب التى تسفر عن عدد غير منتهى من النواتج كتلك التى يكون فيها لفضاء التجريب مقياس هندسى كالطول أو المساحة أو الحجم . فإذا كان هذا الفضاء يتألف من

منطقة محددة ا وكانت المنطقة ب جزءا من المنطقة ا واخترنا عشوائيا نقطة من المنطقة ا فإن احتمال الحدث « وقوع النقطة فى المنطقة ب » يعرف بالنسبة :

$$\frac{\text{مقياس ب}}{\text{مقياس ا}}$$

وذلك مع الاحتفاظ بفرض تساوى الإمكانات . ويلاحظ هنا أن تعبير العشوائية يعنى أن احتمال وقوع نقطة فى جزء من فضاء التجريب يتناسب مع مقياس هذا الجزء وأن هذا الاحتمال مستقل عن شكل المنطقة وموضعها .

مثال (١ – ٥)

اختيرت نقطة عشوائيا من داخل دائرة ا نصف قطرها ٣ سم . ما احتمال ألا يزيد بعد هذه النقطة عن مركز الدائرة عن ٢ سم ؟

الحل :

يقع الحدث المطلوب إذا وقعت النقطة المختارة داخل دائرة ب لها نفس مركز الدائرة ا ونصف قطرها ٢ سم .

$$\therefore \text{الاحتمال المطلوب} = \frac{\text{مقياس الدائرة ب}}{\text{مقياس الدائرة ا}} = \frac{\text{ط} \times ٤}{\text{ط} \times ٩} = \frac{٤}{٩}$$

مثال (١ – ٦)

اختيرت نقطة عشوائيا على القطعة المستقيمة ا = { س : ٠ ≤ س ≤ ١٠ }

ما احتمال وقوع النقطة فى القطعة المستقيمة ب = { س : ٢ ≤ س ≤ ٨ }

الحل :

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{\text{طول القطعة ب}}{\text{طول القطعة ا}} = \frac{٦}{١٠} = ٠,٦$$

اصطلاحات وتعاريف :

(١) الرمز ل (ا) يعنى احتمال وقوع الحدث ا ، ويلاحظ أن

$$٠ \leqslant ل (ا) \leqslant ١$$

وحين ل (ا) = ٠ نقول إن الحدث ا هو حدث مستحيل ،

وحين ل (ا) = ١ نقول إن الحدث ا هو حدث مؤكد .

(٢) الرمز ل (ا$_{١}$ أو ا$_{٢}$)

يعنى احتمال وقوع واحد على الأقل من الحدثين ا$_{١}$ ، ا$_{٢}$ أى وقوع ا$_{١}$ فقط أو ا$_{٢}$ فقط أو ا$_{١}$ ، ا$_{٢}$ معا .

(٣) الرمز ل (ا$_{١}$ وا$_{٢}$)

يعنى احتمال وقوع الحدثين ا$_{١}$ ، ا$_{٢}$ معا أو بالتتابع .

(٤) الرمز ل (ا$_{٢}$ | ا$_{١}$)

يعنى احتمال وقوع الحدث ا$_{٢}$ بشرط أن يكون الحدث ا$_{١}$ قد وقع فعلا ويسمى هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطى للحدث ا$_{٢}$ بالنسبة الحدث ا$_{١}$.

مثال ذلك احتمال اختيار طالب من مدرسة ما بشرط أن يكون من الرياضيين .

(٥) يقال للحدثين ا$_{١}$ ، ا$_{٢}$ إنهما **متنافيان** إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر وبذلك لا يمكن أن يقع الحدثان معا ، أى يكون ل (ا$_{١}$ وا$_{٢}$) = ٠ فمثلا فى حالة ولادة طفل يكون الحدث « المولود ذكر » والحدث « المولود أنثى » حدثين متنافيين (لا يمكن أن يقعا معا) .

(٦) يقال للحدثين ا$_{١}$ ، ا$_{٢}$ إنهما **مستقلان** إذا كان احتمال وقوع أيهما لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الآخر ، أى إذا كان :

ل (ا٢ | ا١) = ل (ا٢) ، ل (ا١ | ا٢) = ل (ا١)

فمثلا إذا ألقينا قطعتين من العملة عشوائيا فإن ما يظهر على أى منهما (صورة أو كتابة) يكون مستقلا عما يظهر على الأخرى (إلا إذا كانت القطعتان مربوطتين معا بخيط مثلا) . كذلك اختيار طالب من كلية العلوم واختيار طالب من كلية الإنسانيات هما حدثان مستقلان .

توافقات الاحتمال :

القاعدتان الآتيتان تسهلان حساب الاحتمالات في كثير من الحالات ويمكن إثباتهما رياضياً :

أولا – قاعدة الجمع :

ل (ا١ أو ا٢) = ل (ا١) + ل (ا٢) – ل (ا١ وا٢)

أى أن احتمال وقوع أحد الحدثين ا١ ، ا٢ أو كلاهما يساوى
احتمال وقوع الأول + احتمال وقوع الثانى – احتمال وقوعهما معا .

حالة خاصة :

إذا كان الحدثان ا١ وا٢ **متنافيين** فإنه حسب التعريف (٥) تصبح قاعدة الجمع كالآتى :

ل (ا١ أو ا٢) = ل (ا١) + ل (ا٢)

وتسمى هذه القاعدة **بقاعدة الجمع للأحداث المتنافية** ، ويمكن تعميمها كالآتى :

إذا كانت ا١ ، ا٢ ، ... ، ان أحداثا متنافية فإن :

ل (ا١ أو ا٢ أو... أو ان) = ل (ا١) + ل (ا٢) + ... + ل (ان)

مثال (١ - ٧)

فى مجموعة من ١٠٠ طالب رسب ١٢ فى الرياضيات ورسب ١٥ فى الفيزياء ورسب ٨ فى كلتا المادتين . إذا اختير طالب واحد عشوائيا من هذه المجموعة فما احتمال أن يكون راسبا فى الرياضيات أو فى الفيزياء ؟

الحل :

نلاحظ أن الرسوب فى أى مادة لا يمنع الرسوب فى المادة الأخرى ، أى أن الحدثين غير متنافيين وحسب قاعدة الجمع نجد أن :

ل (راسب فى الرياضيات أو راسب فى الفيزياء) = ٠,١٢ + ٠,١٥ - ٠,٠٨ = ٠,١٩

مثال (١ - ٨) :

ألقى حجر نرد منتظم عشوائيا مرة واحدة . نجد أن :

(ا)احتمال ظهور ٥ أو ٦ = ل (٥ أو ٦)

= ل (٥) + ل (٦) (حدثان متنافيان)

= $\frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣}$

(ب)احتمال ظهور عدد فردى = ل (١ أو ٣ أو ٥)

= $\frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{١}{٢}$ (٣ أحداث متنافية)

نتيجة :

إذا كانت $ا_١$ ، $ا_٢$ ، ... ، $ا_ن$ هى جميع الأحداث الممكنة فى تجربة ما وكانت هذه الأحداث متنافية فإن مجموع احتمالات هذه الأحداث يساوى الواحد الصحيح ، أى أن :

ل ($ا_١$) + ل ($ا_٢$) + ... + ل ($ا_ن$) = ١

لاحظ تحقق هذه النتيجة فى المثال (١ - ٤) السابق .

ثانيا – قاعدة الضرب :

ل (أ١ و أ٢) = ل (أ١) . ل (أ٢ | أ١) ، ل (أ١) ≠ ٠

أو = ل (أ٢) . ل (أ١ | أ٢) ، ل (أ٢) ≠ ٠

أى أن احتمال وقوع حدثين معا يساوى احتمال أحدهما مضروبا فى الاحتمال الشرطى للآخر بالنسبة للأول .

حالة خاصة :

إذا كان الحدثان أ١ ، أ٢ مستقلين فإنه حسب (٦) تصبح القاعدة كالآتى :

ل (أ١ و أ٢) = ل (أ١) . ل (أ٢)

وتسمى هذه النتيجة **بقاعدة الضرب للأحداث المستقلة** ، ويمكن تعميمها كالآتى :

إذا كانت أ١ ، أ٢ ، ... ، أن أحداثا مستقلة فإن :

. ل (أ١ و أ٢ و ... وأن) = ل (أ١) . ل (أ٢) ... ل (أن)

مثال (١ – ٩) :

رمى حجرا نرد منتظمان ومتميزان عشوائيا مرة واحدة . نجد أن :

(ا) احتمال ظهور ٥ على القطعة الأولى و٦ على القطعة الثانية

= ل (٥ و٦) = $\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣٦}$ (**حدثان مستقلان**)

(ب) احتمال ظهور ٦ على القطعة الأولى و٥ على القطعة الثانية

= ل (٦ و٥) = $\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣٦}$ (**حدثان مستقلان**)

(جـ) احتمال ظهور ٥ على إحدى القطعتين و٦ على القطعة الأخرى

= ل (٦ و٥) + ل (٥ و٦) (**حدثان متنافيان**)

= $\frac{١}{٣٦} + \frac{١}{٣٦} = \frac{١}{١٨}$

مثال (١ – ١٠) :

ثلاث مجموعات من الأطفال تتألف الأولى من (٣ بنات ، ولد واحد) وتتألف الثانية من (بنتين ، ولدين) وتتألف الثالثة من (بنت واحدة ، ٣ أولاد) . اختير طفل واحد عشوائياً من كل مجموعة . ما احتمال أن يكون الثلاثة الأطفال المختارون عبارة عن بنت واحدة وولدين ؟

الحـل :

يقع الحدث المطلوب بإحدى الطرق الثلاث الآتية :

(بنت – ولد – ولد) أو (ولد – بنت – ولد) – أو (ولد – ولد – بنت)

احتمال الطريقة الأولى = $\frac{٣}{٤} \times \frac{٢}{٤} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٩}{٣٢}$ (**أحداث مستقلة**)

احتمال الطريقة الثانية = $\frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٤} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٣٢}$ (**أحداث مستقلة**)

احتمال الطريقة الثالثة = $\frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٤} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٣٢}$ (**أحداث مستقلة**)

وبما أن هذه الطرق الثلاثة متنافية فإن احتمال أن يكون الأطفال المختارون عبارة عن بنت واحدة وولدين هو مجموع احتمالات هذه الطرق ، أى :

$$\frac{٩}{٣٢} + \frac{٣}{٣٢} + \frac{١}{٣٢} = \frac{١٣}{٣٢}$$

مثال (١ – ١١)

صندوق به ٧ كرات حمراء و٣ كرات بيضاء . سحبت كرتان عشوائياً الواحدة بعد الأخرى دون إرجاع . احسب احتمالات الأحداث الآتية :

(أ) أن تكون كلا الكرتين حمراء . (ب) أن تكون كلا الكرتين بيضاء .

(جـ) أن تكون إحدى الكرتين حمراء والأخرى بيضاء .

obeikandl.com

الحـل :

(أ) احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء = $\frac{٧}{١٠}$

احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء = $\frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

(هذا احتمال شرطى مع ملاحظة أنه بعد السحبة الأولى يبقي في الصندوق ٩ كرات منها ٦ حمراء) .

احتمال أن تكون كلا الكرتين حمراء = $\frac{٧}{١٠} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٧}{١٥}$

وذلك باستخدام قاعدة الضرب وملاحظة أن الاحتمال $\frac{٢}{٣}$ هو احتمال شرطى فهو احتمال ظهور كرة حمراء في السحبة الثانية بشرط أن تكون السحبة الأولى حمراء .

(ب) بنفس المنطق نجد أن :

احتمال أن تكون كلا الكرتين بيضاء = $\frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{٩} = \frac{١}{١٥}$

(جـ) احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء = $\frac{٧}{١٠} \times \frac{٣}{٩} = \frac{٧}{٣٠}$

واحتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء = $\frac{٣}{١٠} \times \frac{٧}{٩} = \frac{٧}{٣٠}$

احتمال أن تكون إحدى الكرتين حمراء والأخرى بيضاء = $\frac{٧}{٣٠} + \frac{٧}{٣٠} = \frac{٧}{١٥}$

(حدثان متنافيان)

(١ - ٨) النماذج الرياضية : MATHEMATICAL MODELS

النموذج لظاهرة ما هو وسيلة لبيان الهيكل العام لتركيب هذه الظاهرة أو للتعبير عن نظرية أو وضع يؤخذ كمولد لما نلمسه من مشاهدات عن هذه الظاهرة . وفي التحليل الإحصائي عادة ما توضع النماذج في صورة رياضية وإن كان هناك صور أخرى بيانية كالخرائط الهندسية والجغرافية والجيولوجية .

والنموذج الرياضي هو تجريد لنموذج فيزيائي حيث تحل محل الأشياء والقوى والأحداث رموز تعبر عن متغيرات وبارامترات وثوابت . ويمكن تقسيم النماذج الرياضية إلى ثلاثة أنواع هى : النماذج التحديدية – النماذج الإحصائية – نماذج العمليات العشوائية .

(أ) النماذج التحديدية : DETERMINISTIC MODELS

هى تلك النماذج الرياضية المعتادة التي تستخدم في مختلف المجالات العلمية والتي تعبر عن العلاقة الدالية بين المتغيرات على هيئة قوانين أو معادلات جبرية أو تفاضلية أو تكاملية أو مصفوفية يمكن اشتقاقها نظرياً دون الالتجاء إلى التجريب ، كقوانين نيوتن للحركة .

غير أنه عند التحقق من صحة هذه القوانين تجريبياً نتعرض إلى عدة مصادر للخطأ منها الخطأ في القياس measurement error ومنها خطأ المعادلة equation error أى خطأ استخدام معادلة غير مناسبة ، ومنها الأخطاء العشوائية السابق الإشارة إليها في البند (١ – ٤) . إن هذه الأخطاء لا تدخل في اعتبار النموذج التحديدي ويتطلب تقييمها تحويل هذا النموذج إلى نموذج إحصائي .

(ب) النماذج الإحصائية : STATISTICAL MODELS

النموذج الإحصائي هو تعبير رياضي يشتمل على واحد أو أكثر من المركبات العشوائية بالإضافة إلى المتغيرات والبارامترات والثوابت التي يشتمل عليها النموذج التحديدى . ويمكن اشتقاق نموذج إحصائي من نموذج تحديدى بإضافة صريحة للمركبات العشوائية . فمثلا القانون الشهير الذى يربط المسافة ف والزمن ن لجسيم يسير بسرعة ابتدائية ع وعجلة منتظمة حـ يأخذ الصورة :

$$ف = ع . ن + \frac{١}{٢} حـ ن^{٢}$$

وهذا نموذج تحديدى . إذا أجرينا تجربة عدة مرات وكانت ف ترمز إلى

المسافة المقطوعة في التجربة الرائية ، نستطيع أن ندخل العامل العشوائي صراحة كالآتي (على أساس أن ع ، ن ، حـ ثوابت) :

$$ف_ر = ع ن + \frac{1}{2} حـ ن^2 + خ_ر$$

$$أوف_ر = ف + خ_ر$$

حيث ف هى القيمة الحقيقية للمسافة كما تحسب من النموذج التحديدى ، $خ_ر$ هى انحراف المسافة الناتجة في التجربة الرائية عن المسافة الحقيقية ف .

وسنلقى أمثلة كثيرة للنماذج الإحصائية خاصة عند دراسة تحليل التباين وتحليل الانحدار .

على أنه ليس من الضرورى أن يعبر النموذج الإحصائي عن نموذج فيزيائي بالوضوح الظاهر في القانون السابق بل يمكن اختيار نموذج إحصائي مناسب اعتماداً على ما نتصوره من مصادر تؤثر فيما نشاهده من الاختلافات في البيانات الناتجة عن الظواهر التي ندرسها .

(جـ) نماذج العمليات العشوائية : STOCHASTIC PROCESS MODELS

هذا النوع من النماذج قد يشتمل على عوامل عشوائية مماثلة لتلك التي في النماذج الإحصائية ولكنه بالاضافة إلى ذلك يشتمل على عملية عشوائية معينة تدخل في بناء النموذج وتصف الظاهرة على أساس احتمالى وليس على أساس تحديدى . ومن هذه النماذج النموذج IIالذى سنقدمه فى فصل تحليل التباين بالبند (٨ – ١٤) .

تمـــارين (١)

١ – الآتى بيان الأعمار بالسنوات للأطفال الذين ذهبوا إلى إحدى المستشفيات للعلاج في أحد الأيام وعددهم ٢٤٠ .

(أ) أعط هذه الأعمار أرقاماً مسلسلة من ٠٠١ إلى ٢٤٠

(ب) استخدم جدول الأعداد العشوائية لاستخراج عينة عشوائية حجمها ٣٠ (اذكر رقم العمود ورقم الصف اللذين بدأت بهما) .

(جـ) أوجد الوسط الحسابي لأعمار أفراد هذه العينة .

(د) كرر الخطوتين (ب) ، (جـ) عدة مرات وقارن بين الأوساط الحسابية للعينات الناتجة وبين الوسط الحسابي لأعمار الأطفال جميعاً .

٧	١٠	٣	١٠	٨	٢
٥	١٤	٧	١٣	١٢	٥
٧	١١	٦	١١	٢	٥
٦	٢	٢	٥	١	٥
١٣	٥	٤	٣	٢	٩
٢	٣	١	١	٤	٤
٢	١	٦	١٥	١	١٣
٥	٥	٦	٢	٥	٨
٨	٢	٩	١٤	١٠	٥
٤	٣	١٤	٦	٧	١٤
٣	٨	١	٢	٨	٥
٤	١	٢	٤	١	١
٩	٢	١	١	١٥	١٣
٣	٥	٤	٣	٥	٨
٢	٦	١١	٧	٣	١٤

١١	٩	١٠	٨	٣	١
٨	١	١	١	٦	٣
٢	٥	٥	١	٨	١٥
١	١٤	٩	٢	١	٦
٤	١٠	٦	٥	١٢	٢
١٥	٤	١	١١	٢	٢
٧	٩	٧	٥	١٠	١١
١	١٥	٢	٢	٢	٦
١٣	٤	١	٢	٥	٤
١٠	١	٣	١٣	١٥	١٤
٦	٣	٤	٩	٢	٣
٤	٨	٧	٥	٢	١
١	١١	٣	١٣	١٢	٦
١٤	١	١١	٣	٩	٥
١٠	٤	٢	٥	١	١٠
٣	٧	٣	٩	١٤	٢
١٢	١٣	٩	١	١٠	٩
٥	١	٥	١٤	٥	٢
١٢	٧	٦	٣	١٢	١٣
٣	٣	١	٣	٢	٣
٢	٩	١٢	٨	١٠	٧
٩	٢	٩	٥	٥	٤
٤	٤	٣	٢	١	٧
١	١	١	١٢	٥	١٢
٨	١٠	٧	٧	١٤	٣

obeikandl.com

٢ – قرّب الأعداد الآتية إلى درجة الدقة المشار إليها .

٦٥,٤ إلى أقرب وحدة ، ٠,٠٦٣٥ إلى أقرب جزء من ألف

١٤٤,٥ إلى أقرب وحدة ، ٢,٥٠٠١ إلى أقرب وحدة

٣,٥٤٢ إلى أقرب جزء من مائة ، ٢٤,٦٢ إلى رقمين معنويين .

٣ – اجمع الأعداد ٨,٣٤ ، ٦,١٢ ، ٧,٥٤ ، ٦,٥٦ ، ٦,٤٧ ، ٧,٢٨ ، ٧,١٧

(أ) مباشرة (ب) بعد تقريب كل منها إلى جزء من عشرة .

٤ – صندوق به ٦ كرات حمراء و٤ كرات صفراء . سحبنا منه عشوائياً كرتين الواحدة بعد الأخرى دون إعادة .

(أ) احسب احتمال أن تكون كلا الكرتين حمراء .

(ب) احسب احتمال أن تكون كلا الكرتين صفراء .

(جـ) احسب احتمال أن تكون واحدة حمراء وواحدة صفراء .

٥ – مجموعتان من الأطفال تتألف الأولى من (٣ بنات ، ولدين) وتتألف الثانية من (بنتين ، ٣ أولاد) . اختير طفل واحد عشوائيا من كل مجموعة . ما احتمال أن يكون الطفلان المختاران عبارة عن بنت واحدة وولد واحد ؟ .