الفصل الخامس

توزيعات خاصة

SPECIAL DISTRIBUTIONS

كل من التوزيعات الثلاثة الآتية هو توزيع احتمال لمتغيرعشوائى متصل مركب بطريقة معينة من عدد من المتغيرات العشوائية المعتدلة . وهذه التوزيعات لا تستخدم كنماذج احتمال للمجتمعات كما هو الحال في التوزيعات التي عرضت في الفصلين السابقين ، وإنما تبرز من خلال التحليل الإحصائي للعينات وتبني عليها اختبارات إحصائية ذات أهمية قصوى في عملية الاستدلال الإحصائي كما سنرى في الفصل التالى . ومن الناحية التطبيقية يهمنا بصفة خاصة في دراسة هذه التوزيعات أمرين هما :

(١) الشكل الهندسي العام لكل توزيع .

(٢) كيفية استخدام الجداول لإيجاد الاحتمالات والقيم الحرجة .

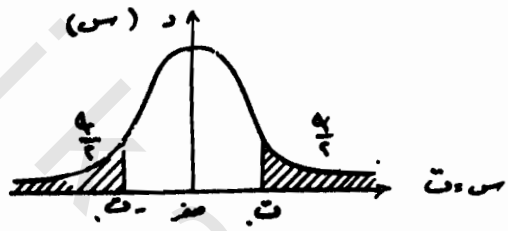
(٥-١) توزيع ت : STUDENT t- DISTRIBUTION

يقال لمتغير عشوائي س~ إن له توزيع ت إذا وفقط إذا كانت دالة كثافة احتماله معرفة بالقاعدة :

$$د(س) = \frac{\frac{1}{2}(ن+1)!}{\sqrt{ن\pi}\ \frac{1}{2}(ن-2)!}\left(1+\frac{س^2}{ن}\right)^{-\frac{1}{2}(ن+1)} \qquad (1)$$

حيث $\infty > س > -\infty$ ، ن = ١ ، ٢ ، ٣ ...

وهذا التوزيع له دليل واحد هو ن يسمى بعدد درجات الحرية للتوزيع ، ولهذا فالتوزيع يتحدد تماماً إذا علمت قيمة ن .



الشكل (٥-١) منحني توزيع المتغير ت

والمنحني الممثل للدالة ص = د (س) المعرفة في (١) هو منحني ذو قمة واحدة ومتماثل حول المستقيم س = صفر .

الوسط الحسابي للتوزيع : μ = صفر (٢)

، تباين التوزيع : $\sigma^2 = \frac{ن}{ن-2}$ حيث ن > ٢ (٣)

وجدير بالذكر أن توزيع ت يقترب من التوزيع المعتدل المعيارى كلما اقتربت درجات الحرية ن من اللانهاية .

جدول القيم الحرجة :

الجدول (٧) بملحق هذا الكتاب يعطى القيمة الحرجة ت critical value للمتغير ت وهى تلك القيمة الموجبة التي تجعل مساحة المنطقة أسفل المنحني وخارج الفترة

(−ت. ، ت.) مساوية لقيمة معينة α عند درجة الحرية ن . أي أن العدد α يعبر عن المساحة عند ذيلي المنحني ($\frac{\alpha}{2}$ عند كل ذيل) وبالتالى فهو يعبر عن احتمال وقوع قيم المتغير ت خارج الفترة المذكورة . (انظر الشكل ٥−١) . ونكتب هذا رمزياً كالآتي :

$$\alpha = (\ |ت| > ت\ )\ ل \qquad (٤)$$

فى هذا الجدول كتبت درجات الحرية في كل من العمودين الهامشيين الواقعين في يمين ويسار الجدول ، وكتبت الاحتمالات α = ٠,٠٠١ ، ٠,٠١ ، ٠,٠٢ ، ٠,٠٥ ، ٠,١ ، ٠,٢ ، ٠,٤ ، ٠,٥ ، ٠,٩ في الهامش الأفقى الذى بأعلى الجدول . أما القيم الحرجة فمدونة في الخلايا التي بقلب الجدول . وحين تكون درجة الحرية ن معلومة لنا ، نستطيع استخراج مايلى :

(١) القيمة الحرجة ت إذا أعطيت قيمة الاحتمال α . ونجد تلك القيمة عند نقطة التقاء الصف الذى به درجة الحرية ن والعمود الذى به قيمة α .

(٢) قيمة الاحتمال α إذا أعطيت القيمة الحرجة . ولإيجاد تلك القيمة نبحث في الصف الذى به درجة الحرية عن القيمة الحرجة المعطاة فتكون α هى العدد الذى يعلو العمود الذى به هذه القيمة .

مثال (٥−١) :

ليكن س متغيراً له توزيع ت بدرجات حرية عددها ٨ . من الجدول نجد مايلى :

(ا) إذا كانت α = ل (|ت| > ت.)=٠,٠٥ فإن القيمة الحرجة ت =٢,٣٠٦

(ب) الاحتمال ل (|ت| >٢,٨٩٦) = ٠,٠٢

(حـ) الاحتمال ل (ت > ٢,٨٩٦) = ٠,٠١ مساحة الذيل الأيمن فقط .

تقليـــد :

نكتب $ت_{\alpha[\nu]}$ (٥)

للتعبير عن القيمة الحرجة ت في توزيع ت عند درجة الحرية ن بحيث يكون مجموع مساحتي المنطقتين عند الذيلين يساوى α ، فمثلا :

$ت_{[٧]٠,٠٥} = ٢,٣٦٥$ ، $ت_{[٣]٠,٠١} = ٥,٨٤١$ ، $ت_{[\infty]٠,٠٥} = ١,٩٦$

(٥-٢) توزيع χ^2 : THE CHI-SQUARE DISTRIBUTION

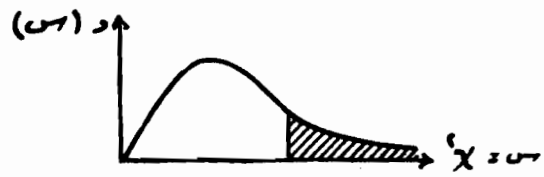
يقال لمتغير عشوائى س إن له توزيع χ^2 (تنطق كاى تربيع) إذا وفقط إذا كانت دالة كثافة احتماله معرفة بالقاعدة :

$$د(س) = \frac{١}{\tau_{\frac{ن}{٢}} (\frac{ن}{٢})} \; س^{\frac{ن}{٢}-١} \; هـ^{-\frac{س}{٢}} \qquad (٦)$$

حيث $\infty > س > ٠$ ، ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ....

وهذا التوزيع له دليل واحد هو ن يسمى بعدد درجات الحرية للتوزيع ، ولهذا فالتوزيع يتحدد تماماً إذا علمت قيمة ن .

والمنحني الممثل للدالة ص = د (س) المعرفة في (٦) وعندما ن >٢ يكون منحنى ذو قمة واحدة وملتوى إلى اليمين .



الشكل (٥-٢) منحني توزيع المتغير χ^2 ، (ن > ٢)

الوسط الحسابي للتوزيع : $\mu = $ ن (٧)

، تباين التوزيع : $\sigma^2 = ٢$ ن (٨)

جدول القيم الحرجة :

الجدول (٨) بملحق هذا الكتاب يعطى القيمة الحرجة $\chi^2_{.}$ للمتغير χ^2 وهي القيمة التي تجعل مساحة المنطقة أسفل المنحني وفوق الفترة $(\chi^2_{.}, \infty)$ مساوية لقيمة معينة α عند درجة الحرية ن . أى أن العدد α يعبر عن المساحة عند الذيل الملتوى، وبالتالى فهو يعبر عن احتمال وقوع قيم المتغير χ^2 على يمين العدد χ^2 (انظر الشكل ٥-٢) . ونكتب هذا رمزياً كالآتى :

$$\alpha = \text{ل}(\chi^2 > \chi^2_{.}) \quad (٩)$$

فى هذا الجدول كتبت درجات الحرية والاحتمالات α والقيم الحرجة بنفس الطريقة التى كتبت بها في جدول ت ، غير أن α تأخذ القيم ٠,٠٠٥ ، ٠,٠١، ٠,٠٢٥، ٠,٠٥ ، ٠,١ ، ٠,٥ ، ٠,٩ ، ٠,٩٧٥ ، ٠,٩٩٥ .

وحين تكون درجة الحرية ن معلومة لنا، نستطيع من الجدول استخراج القيمة الحرجة $\chi^2_{.}$ إذا أعطيت قيمة الاحتمال α أو استخراج الاحتمال α بمعلومة القيمة الحرجة $\chi^2_{.}$.

مثال (٥-٢) :

ليكن س متغيراً له توزيع χ^2 بدرجات حرية عددها ١٠ . من الجدول نجد مايلى :

(أ) إذا كانت ل $(\chi^2 > \chi^2_{.}) = ٠,١$ فإن القيمة الحرجة $\chi^2_{.} = ١٥,٩٨٧$

(ب) الاحتمال ل $(\chi^2 > ١٨,٣١) = ٠,٠٥$.

(حـ) الاحتمال ل $(١٨,٣١ > \chi^2 > ٤,٨٧) = ٠,٩٠ - ٠,٠٥ = ٠,٨٥$

تقليـد :

نكتب $\chi^2_{[\nu]\alpha}$ (١٠)

للتعبير عن القيمة الحرجة χ^2 في توزيع χ^2 عند درجة الحرية ν بحيث تكون مساحة المنطقة التي إلى يمينها مساوية للعدد α ، :

$\chi^2_{[٥]٠,٠٥} = ١١,٠٧٠$ ، $\chi^2_{[٥]٠,٠٥} = ٤,٣٥١$ ، $\chi^2_{[٦٠]٠,٠٠١} = ٨٨,٣٧٩$

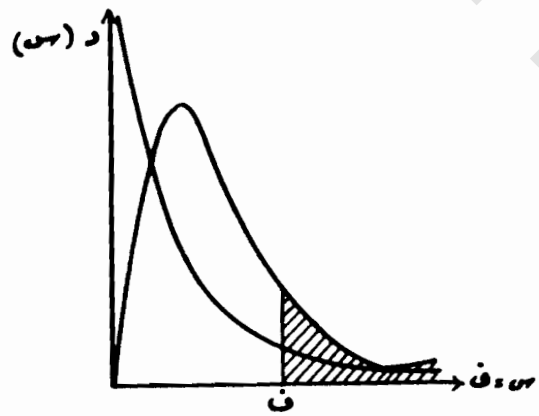
(٥-٣) توزيع ف : THE F-DISTRIBUTION

يقال لمتغير عشوائي س إن له توزيع ف إذا وفقط إذا كانت دالة كثافة احتماله معرفة بالقاعدة :

$$د(س) = \frac{(\frac{م}{ن})^{\frac{م}{2}} \; (\frac{م+ن-2}{2})!}{(\frac{م-2}{2})! \; (\frac{ن-2}{2})!} \times \frac{س^{\frac{م}{2}-1}}{(\frac{م}{ن}+1)^{\frac{م+ن}{2}}} \quad (١١)$$

حيث $\infty > س > ٠$ ، م ، ن عددان صحيحان موجبان .

وهذا التوزيع له دليلان هما م ، ن يسميان بعددى درجات الحرية ، ويتحدد التوزيع تماماً إذا علمت قيمتي هذين الدليلين .



الشكل (٥-٣) منحنى توزيع المتغير ف

والمنحني الممثل للدالة ص = د (س) المعرفة في (١١) يختلف شكله بحسب قيمتي م ، ن فهو يأخذ الشكل ⌣ إذا كانت م ، ن صغيرتين جداً إلا أنه يصبح محدباً وملتوياً إلتواء شديداً إلى اليمين كلما زادت قيمتا م ، ن .

$$\text{الوسط الحسابي للتوزيع} = \mu = \frac{\text{ن}}{\text{ن}-٢} \qquad \text{حيث ن} > ٢ \qquad (١٢)$$

جدول القيم الحرجة :

الجدول (٩) بملحق هذا الكتاب يعطى القيمة الحرجة ف. للمتغير ف وهي تلك القيمة التي تجعل مساحة المنطقة أسفل المنحني وفوق الفترة (ف. ، ∞) مساوية لقيمة معينة α عند درجتي الحرية م ، ن . أى أن العدد α يعبر عن المساحة عند الذيل الملتوى وبالتالى فهو يعبر عن احتمال وقوع قيم ف على يمين العدد ف . (انظر الشكل ٥-٣) ونكتب هذا رمزياً كالآتي :

$$\alpha = \text{ل}(\text{ف} > \text{ف}.) \qquad (١٣)$$

ويختلف تركيب هذا الجدول عن جدولى ت وχ^2 إذ يحمل الهامش الأفقى العلوى درجات الحرية م ويحمل كل من العمودين الهامشيين على جانبى الجدول درجات الحرية ن وعند كل من هذه الدرجات وضعت ثلاث قيم للعدد α هى ٠,٠٥ ، ٠,٠٢٥ ، ٠,٠١ وعند تقاطع كل عمود م مع كل صف ن توجد ٣ قيم حرجة تناظر تلك القيم الثلاث .

وحين تكون درجتا الحرية م ، ن معلومتين نستطيع من الجدول استخراج القيمة الحرجة ف. بمعلومية الاحتمال α أو استخراج قيمة الاحتمال α بمعلومية القيمة الحرجة .

مثال (٥-٣) :

ليكن س~ متغيراً له توزيع ف بدرجتي حرية ٧ ، ٩ .

(أ) إذا كانت ل (ف >ف.) = ٠,٠٥ فإن ف. = ٣,٢٩

(ب) إذا كانت ل (ف >ف.) = ٠,٠١ فإن ف. = ٥,٦١

(حـ) الاحتمال ل (ف >٤,٢) = ٠,٠٢٥

ملاحظة :

لا يعطى الجدول القيم الحرجة إلا عند ثلاث قيم للاحتمال α هي ٠,٠٥ ، ٠,٠٢٥ ، ٠,٠١ ولكن يمكننا أيضاً إيجاد تلك القيم عند الاحتمالات المكملة ٠,٩٥ ، ٠,٩٧٥ ، ٠,٩٩ باستخدام النظرية الآتية :

« إذا كان س~ متغيراً عشوائياً له توزيع ف بدرجتي حرية ن ، ن ، فإن المتغير $\frac{1}{س}$ يكون له توزيع ف بدرجتي حرية ن ، ن » . ويمكن أن نكتب هذه النظرية كالآتى :

$$ف_{\alpha[ن_2،ن_1]} = \frac{1}{ف_{(1-\alpha)[ن_1،ن_2]}}$$

مثال (٥-٤) :

ليكن س~ متغيراً له توزيع ف بدرجتي حرية ٥ ، ٩ أوجد قيمة ف. بحيث ل(ف > ف.) = ٠,٩٥

الحـــل :

نلاحظ أن الاحتمال ٠,٩٥ ليس له وجود بالجدول أما الاحتمال المكمل ٠,٠٥ فموجود به . المتباينة ف > ف. تكافئ المتباينة $\frac{1}{ف} < \frac{1}{ف.}$ مع ملاحظة أن ف ، ف. موجبان .

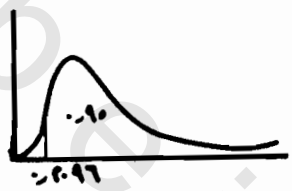
إذن ل(ف > ف$_{\alpha}$) = ل ($\frac{1}{ف}$ < $\frac{1}{ف_{\alpha}}$) = ٠,٩٥ فرضاً .

إذن ل ($\frac{1}{ف}$ ⩾ $\frac{1}{ف_{\alpha}}$) = ٠,٠٥

من النظرية يكون لدينا متغير له توزيع ف بدرجتي حرية ٩ ، ٥

من الجدول نجد أن $\frac{1}{ف_{\alpha}}$ = ٤,٧٧

إذن ف$_{\alpha}$ = ١ ÷ ٤,٧٧ = ٠,٢٠٩٦



الشكل (٥-٤)

تقليد :

نكتب (١٤)

$ف_{\alpha\,[م\,،\,ن]}$

للتعبير عن القيمة الحرجة في توزيع ف عند درجتي الحرية م ، ن بحيث تكون مساحة المنطقة على يمينها مساوية للعدد α ، فمثلا :

ف$_{٠,٠٥\,[٥\,،\,٨]}$ = ٣,٦٩ ، ف$_{٠,٠٥\,[٨\,،\,٥]}$ = ٤,٨٢ ، ف$_{٠,٠١\,[١٥\,،\,٤]}$ = ١٤,٢

لاحظ أن العدد الأول م يحدد العمود والعدد الثاني ن يحدد الصف .

تمارين (٥)

(١) أوجد كلا من القيم الحرجة الآتية :

(أ) ت$_{٠,٠٥[١٢]}$ ، ت$_{٠,٠٢[٤٠]}$ ، ت$_{٠,٠١[١٦]}$ ، ت$_{٠,٠٥[\infty]}$.

(ب) $\chi^{٢}_{٠,٠٥[٢٠]}$ ، $\chi^{٢}_{٠,٠١[٣٥]}$ ، $\chi^{٢}_{٠,١[٣٦]}$ ، $\chi^{٢}_{٠,٠٥[١]}$.

(حـ) ف$_{٠,٠٥[٨،٦]}$ ، ف$_{٠,٠٥[٦،٨]}$ ، ف$_{٠,٠١[١٠،٤٠]}$ ، ف$_{٠,٠٥[١٤،٣٠]}$.

(٢) أوجد كلا من الاحتمالات الآتية :

(ا) ل (| ت | > ٢,٢٠١) حيث ن = ١١

، ل (ت > ٢,٢٠١) حيث ن = ١١

(ب) ل (χ^2 > ٥٢,١٩) حيث ن = ٣١

، ل (χ^2 > ١٩,٣٤) حيث ن = ٢٠

(جـ) ل (ف > ١٠,٧) حيث م = ٦ ، ن = ٥

، ل (ف > ٨,٥) حيث م = ٣٠ ، ن = ٤

obeikandl.com