الفصل السابع

حساسية اختبارات الفروض

SENSITIVITY OF TESTS OF HYPOTHESES

لا يوجد قرار إحصائى منزه عن الخطأ ، فالقرارات الإحصائية هى دائما قرارات احتمالية بمعنى أنه لا مفر من وجود احتمال للخطأ فى أى قرار نصدره عن مجتمع عن طريق عينة . ولما كانت هذه القرارات مؤسسة على ما نجريه من اختبارات للفروض وتزيد ثقتنا فيها بزيادة حساسية هذه الاختبارات ، وجب علينا أن ندرس كيف نزيد من هذه الحساسية أى من قدرة الاختبارات على تمكيننا من اتخاذ القرار السليم الذى لا يشوبه إلا قدر ضئيل من الخطأ . ويتأتى ذلك عن طريق التحكم ما أمكن فى احتمالات الأخطاء التى تنجم حتما عند استخدام هذه الاختبارات . ومن الطبيعى إذن أن نبدأ بتقديم هذه الأخطاء توطئة لدراسة كيفية التقليل منها ما استطعنا إلى ذلك سبيلا .

(٧ – ١) نوعا الأخطاء الإحصائية :

نعلم حتى الآن أننا حين نكون بصدد اتخاذ قرار برفض أو قبول فرض صفرى ف$_0$ ضد فرض آخر ف$_1$ عند مستوى معين α من الدلالة ، نقوم أولا بتجزىء فضاء العينة إلى منطقتين منفصلتين ومتكاملتين م ، م´ نسمى إحداهما م بمنطقة الرفض أو بالمنطقة الحرجة ونسمى الأخرى م´ بمنطقة القبول . وإذا وقعت قيمة مشاهدة من إحصاءة الاختبار فى المنطقة م رفضنا الفرض الصفرى عند المستوى

α لصالح الفرض الآخر ، أما إذا وقعت القيمة المشاهدة فى المنطقة م َ فإننا نقبل الفرض الصفرى .

ونظرا لأننا لا نعرف مسبقا ما إذا كان الفرض الصفرى صحيحا أو زائفا فإن القرار الذى نتخذه يكون على إحدى الحالات الآتية :

(١) أن يكون الفرض الصفرى صحيحا ويكون قرارنا هو رفض هذا الفرض .
(٢) أن يكون الفرض الصفرى صحيحا ويكون قرارنا هو قبول هذا الفرض .
(٣) أن يكون الفرض الصفرى زائفا ويكون قرارنا هو رفض هذا الفرض .
(٤) أن يكون الفرض الصفرى زائفا ويكون قرارنا هو قبول هذا الفرض .

ومن الواضح أن قرارنا يكون صائبا فى الحالتين (٢) و(٣) ويكون خاطئا فى الحالتين (١) و(٤) . يقال للخطأ الناشيء عن القرار (١) إنه خطأ من النوع الأول ، كما يقال للخطأ الناشيء عن القرار (٤) إنه خطأ من النوع الثانى . ويعرّف هذان النوعان من الخطأ كالآتى :

الخطأ من النوع الأول : TYPE I ERROR

هو ذلك الخطأ الذى ينشأ حين نتخذ قرارا برفض الفرض الصفرى بينما يكون هذا الفرض صحيحا فى الواقع . ويرمز لاحتمال هذا الخطأ بالرمز α .

الخطأ من النوع الثانى : TYPE II ERROR

هو ذلك الخطأ الذى ينشأ حين نتخذ قرارا بقبول الفرض الصفرى بينما يكون هذا الفرض زائفا فى الواقع . ويرمز لاحتمال هذا الخطأ بالرمز β .

وقد اصطلح على تسمية المقدار ه = ١ − β بقوة الاختبار power of the test وهو يعبر عن احتمال تجنب الخطأ من النوع الثانى . ومن الواضح أن قوة الاختبار تزيد كلما نقص الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى والعكس بالعكس .

نلخص المعانى السابقة فى الجدول (٧ – ١) الآتى :

الجدول (٧ – ١)

حالات رفض أو قبول الفرض الصفرى

القرار	الحالة المجهولة للفرض الصفرى ف. صحيح	ف. زائف
رفض ف.	خطأ I (باحتمال α)	صواب (باحتمال ١ – β)
قبول ف.	صواب (باحتمال ١–α)	خطأ II (باحتمال β)

يلاحظ أن كلا من الاحتمالين α ، β هو احتمال شرطى ونكتب :

α = ل (رفض ف. | ف. صحيح) ، β = ل (قبول ف. | ف. زائف) .

فى الأمثلة التى تناولناها فى الفصل السابق كان اهتمامنا منصبا على الخطأ من النوع الأول وحرصنا على أن يكون الاحتمال α لهذا الخطأ عددا صغيرا يسمح لنا بالتجاوز عن هذا الخطأ ، وسمينا هذا العدد مستوى الدلالة واتخذناه كأحد أسس قاعدة اختبار الفروض ، خاصة فيما يتعلق بفصل فضاء العينة إلى منطقتى رفض وقبول الفرض الصفرى . وسنهتم الآن بالخطأ من النوع الثانى ، إذ ينبغى عند تصميم التجارب وبناء اختبارات الفروض أن نعمل على أن يكون كل من الاحتمالين α ، β صغيرا على قدر الإمكان .

غير أنه نظرا لأن تصغير أحد هذين الاحتمالين يؤدى إلى كبر الآخر كما سنرى فى البند (٧ – ٢ – ٢) ، يكون من العبث البحث عن طريقة عامة تضمن صغر كل من هذين الاحتمالين معا ونكون حينئذ أمام مشكلة يجب أن نجد لها حلا .

والطريقة المعتادة لتناول هذه المشكلة تبدأ بالتحكم فى احتمال الخطأ من النوع الأول (وهو الخطأ الأكثر خطورة) وذلك بوضع حد أعلى للاحتمال α فنختار لهذا الحد قيمة صغيرة مثل ٠,٠٥ أو ٠,٠١ ثم نحسب على أساسها كلا من منطقتى قبول ورفض الفرض الصفرى من واقع ما لدينا من بيانات ومن معرفتنا بتوزيع إحصاءة الاختبار . بعد ذلك نقوم بحساب الاحتمال β ، فإذا كان هذا الاحتمال صغيرا تكون المشكلة قد حلت تلقائيا ، أما إذا كان كبيرا بدرجة لا نستطيع معها المجازفة به وجب علينا أن نعمل على تخفيض هذا الاحتمال . وهذا ما سنتناوله فى البند (٧ - ٥) بعد تقديم طريقة حساب هذا الاحتمال والعوامل المؤثرة عليه .

طريقة إيجاد احتمال الخطأ من النوع الثانى :

نفرض أننا اخترنا مستوى الدلالة α وحددنا عند هذا المستوى كلا من منطقة الرفض م ومنطقة القبول مَ للفرض الصفرى مع ملاحظة أن بارامتر إحصاءة الاختبار يتحدد هنا على أساس التسليم بصحة هذا الفرض . بعد ذلك نوجد احتمال وقوع قيم المتغير فى منطقة القبول مَ على أساس أن الفرض الصفرى زائف وأن الفرض الآخر هو الصحيح فيكون هذا الاحتمال هو احتمال قبول الفرض الصفرى عندما يكون زائفا أى هو الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى مع ملاحظة اختلاف بارامتر إحصاءة الاختبار . وعلى هذا فحساب الاحتمال β يكون على خطوتين هما :

(أ) تحديد منطقة القبول على أساس صحة الفرض الصفرى ،

(ب) إيجاد احتمال وقوع المتغير فى هذه المنطقة على أساس أن الفرض الآخر هو الصحيح .

سنوضح هذا الأسلوب لحساب قيمة الاحتمال β فى عدة حالات نبدأها فى البند (٧ - ٢) بحالة الاختبار ذى الجانب الواحد لفرض عن متوسط مجتمع معتدل

مع بيان العوامل المؤثرة على قوة الاختبار وكيفية زيادة هذه القوة ، ثم نطبق ذلك كله على ثلاث حالات أخرى نقدمها فى البنود الثلاثة الأخيرة .

(٧ – ٢) حساب قيمة β فى اختبار فرض عن متوسط معتدل – حالة الاختبار ذى الجانب الواحد .

مثال (٧ – ١) :

اعتبر مجتمعا معتدلا تباينه σ^2 = ٤٩ ووسطه الحسابى μ غير معروف . بين كيف تستخدم الوسط الحسابى $\bar{س}$ لعينة عشوائية من الحجم ن = ٢٥ لاختبار الفرض الصفرى μ = ٧٥ ضد الفرض الآخر μ > ٧٥ عند مستوى الدلالة ٥٪ ثم أوجد قوة الاختبار عندما μ = ٧٦ .

الحل :

نظرا لأن المجتمع معتدل فإن المتغير $\bar{س}$ الذى يعبر عن الوسط الحسابى للعينات من الحجم ن يكون ذا توزيع معتدل وسطه الحسابى μ وانحرافه المعيارى $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ – راجع البند (٦ – ٣) – وبالتالى يكون للإحصاءة

$$ع = \frac{\bar{س} - \mu}{\sigma/\sqrt{ن}}$$

توزيع معتدل معيارى : مع (٠ ، ١) .

لدينا σ^2 = ٤٩ ، ن = ٢٥ ، α = ٠,٠٥ وإذن $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}} = \frac{٧}{٥}$ = ١,٤

الفرض الصفرى ف٠ : μ = ٧٥

الفرض الآخر ف١ : μ > ٧٥

نظرا لأن الاختبار ذو جانب واحد هو الجانب الأيمن فإن منطقة الرفض م هى

تلك المنطقة التي يأخذ فيها الوسط الحسابي $\bar{س}$ لعينة من الحجم ٢٥ قيمة أكبر من العدد ا حيث :

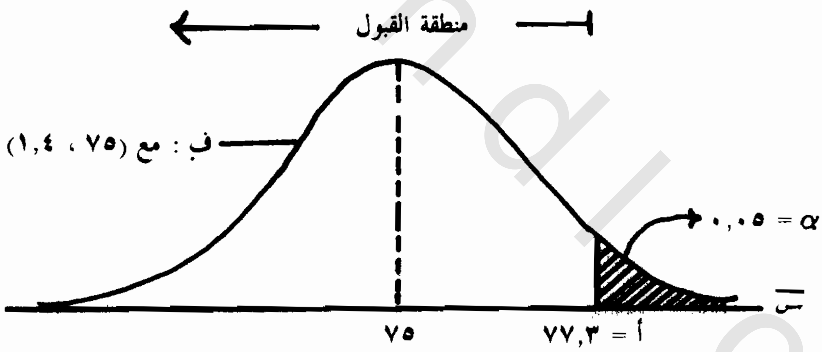
$$ل\ (\bar{س} > ا) = ٠,٠٥ \qquad \text{تحت الفرض الصفرى } \mu = ٧٥$$

$$\text{ومنها } ل\ \left(\frac{\bar{س} - ٧٥}{١,٤} > \frac{ا - ٧٥}{١,٤}\right) = ٠,٠٥$$

$$\text{أى } ل\ \left(ع \qquad > \frac{ا - ٧٥}{١,٤}\right) = ٠,٠٥$$

من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعيارى نجد أن

$$\frac{ا - ٧٥}{١,٤} = ١,٦٤ \qquad \text{ومنها } ا = ٧٧,٢٩٦ = ٧٧,٣ \text{ تقريبا}$$



الشكل (٧ - ١)

منطقتا القبول والرفض فى اختبار ذى جانب واحد

وإذن المنطقة التى نرفض فيها الفرض الصفرى $\mu = ٧٥$ حين يكون هذا الفرض صحيحا وعند المستوى $\alpha = ٠,٠٥$ هى تلك المنطقة التى تأخذ فيها الأوساط الحسابية للعينات ذوات الحجم ٢٥ قيما تزيد عن ٧٧,٣ واحتمال وقوع المتغير

فى هذه المنطقة هو ٥٪،وتعبر عن هذا الاحتمال مساحة الجزء المظلل بالشكل (٧ – ١) . وعلى ذلك تتحدد قاعدة الاختبار كالآتى :

« إذا وقع الوسط الحسابى $\bar{\text{س}}$ لعينة عشوائية من الحجم ٢٥ فى المنطقة م = { $\bar{\text{س}}$: $\bar{\text{س}}$ > ٧٧,٣ } نرفض الفرض الصفرى ف٠ عند مستوى الدلالة ٥٪ وإلا نقبل ف٠ » .

أما منطقة قبول الفرض الصفرى فهى بالطبع المنطقة $\bar{\text{س}}$ ⩽ ٧٧,٣ المكملة لمنطقة الرفض . أى أننا نقبل الفرض الصفرى إذا كان الوسط الحسابى لعينة عشوائية من الحجم ٢٥ مأخوذة من التوزيع الممثل لهذا الفرض يساوى أو يقل عن ٧٧,٣ ونسبة هذه العينات هى ٩٥٪ من العينات التى تؤخذ من هذا التوزيع .

ولكن ماذا لو كان الفرض الصفرى زائفا والفرض الآخر هو الصحيح ؟ نفرض مثلا أن القيمة الصحيحة هى μ = ٧٦ (وهذه قيمة تحقق الفرض الآخر μ > ٧٥) .

فى هذه الحالة يكون للمتغير $\bar{\text{س}}$ توزيع معتدل : مع (٧٦ ، ١,٤) ، وينتج ما يلى :

β = احتمال قبول الفرض الصفرى عندما يكون زائفا والفرض الآخر μ = ٧٦ هو الصحيح

= احتمال وقوع قيم المتغير $\bar{\text{س}}$ فى منطقة القبول مَ حين يكون لهذا المتغير توزيع معتدل مع (٧٦ ، ١,٤)

= ل ($\bar{\text{س}}$ ⩽ ٧٧,٣)   حيث $\bar{\text{س}}$: مع (٧٦ ، ١,٤)

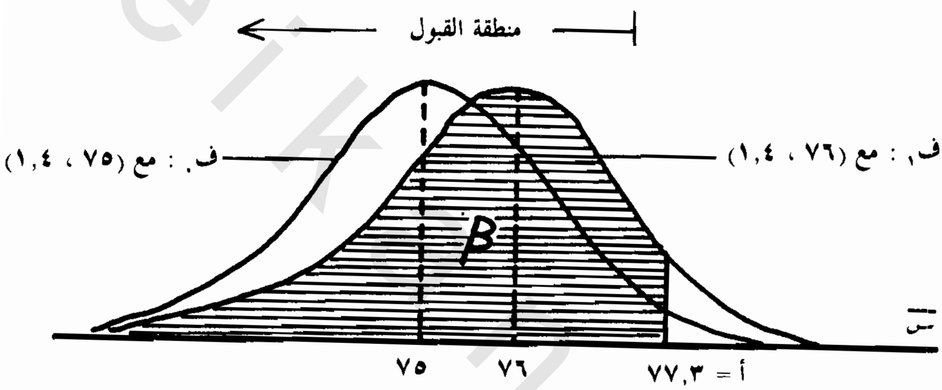
$$= \text{ل}\left(\frac{\bar{\text{س}} - ٧٦}{١,٤} \leqslant \frac{٧٧,٣ - ٧٦}{١,٤}\right) = \text{ل}\,(\text{ع} \leqslant ٠,٩٣)$$

من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعيارى نجد أن

β = ٠,٨٢٣٨ = ٠,٨٢ تقريبا

وهذا هو احتمال الوقوع فى الخطأ من النوع الثانى . أما قوة الاختبار عندما تأخذ μ القيمة ٧٦ فهى ق = ١ − β = ٠,١٨ .

لتوضح ذلك هندسيا نرسم كما فى الشكل (٧ − ٢) توزيع المتغير س̄ فى حالتين ، أولاهما عندما يكون الفرض الصفرى ف٠ صحيحا ويكون التوزيع معتدلا متوسطه ٧٥ وثانيهما عندما يكون الفرض الآخر ف١ صحيحا ويكون التوزيع معتدلا متوسطه ٧٦ .



الشكل (٧ − ٢)

التوزيع الممثل للفرض الصفرى والتوزيع الممثل للفرض الآخر

(مساحة الجزء المظلل تعبر عن الاحتمال β فى اختبار ذى جانب واحد)

من هذا الشكل يتبين أن بعض العينات التى تنتمى إلى توزيع ف١ تكون متوسطاتها واقعة فى منطقة القبول لتوزيع ف٠ ونسبة هذه العينات هى نسبة الجزء من توزيع ف١ الذى يشترك مع توزيع ف٠ فى منطقة القبول ، وهى تعطى بالاحتمال ل (س̄ ≤ ٧٧,٣) محسوبا من توزيع ف١ وهذا الاحتمال هو بالضبط احتمال قبول الفرض الصفرى عندما يكون الفرض الآخر هو الصحيح ، أى هو الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى .

(يلاحظ أننا لا نستطيع حساب قيمة β إلا إذا حددت قيمة معينة مثل μ =٧٦ للبارامتر μ تحقق الفرض الآخر(وهو μ > ٧٥) وذلك لكى يتحدد التوزيع الممثل للفرض الآخر تحديدا تاما) .

(٧ – ٢ – ١) دالة القوة POWER FUNCTION

فى هذا المثال وجدنا أن قوة الاختبار عندما نفترض أن μ = ٧٦ هى ٠,١٨ وتختلف هذه القوة بحسب قيمة μ فإذا افترضنا أن μ = ٧٧ نجد بنفس المنطق السابق أن

β = ل (س̄ ⩽ ٧٧,٣)   حيث س̄ : مع (٧٧ ، ١,٤)

= ل ((س̄ – ٧٧) / ١,٤ ⩽ (٧٧,٣ – ٧٧) / ١,٤) = ل (ع ⩽ ٠,٢١)

= ٠,٥٨ وبالتالى يكون قوة الاختبار ق = ١ – ٠,٥٨ = ٠,٤٢

وبالمثل : بأخذ μ = ٧٨ نجد أن β = ٠,٣١ و ق = ٠,٦٩

وبأخذ μ = ٧٩ نجد أن β = ٠,١١ و ق = ٠,٨٩

وبأخذ μ = ٨٠ نجد أن β = ٠,٠٣ و ق = ٠,٩٧ ... الخ

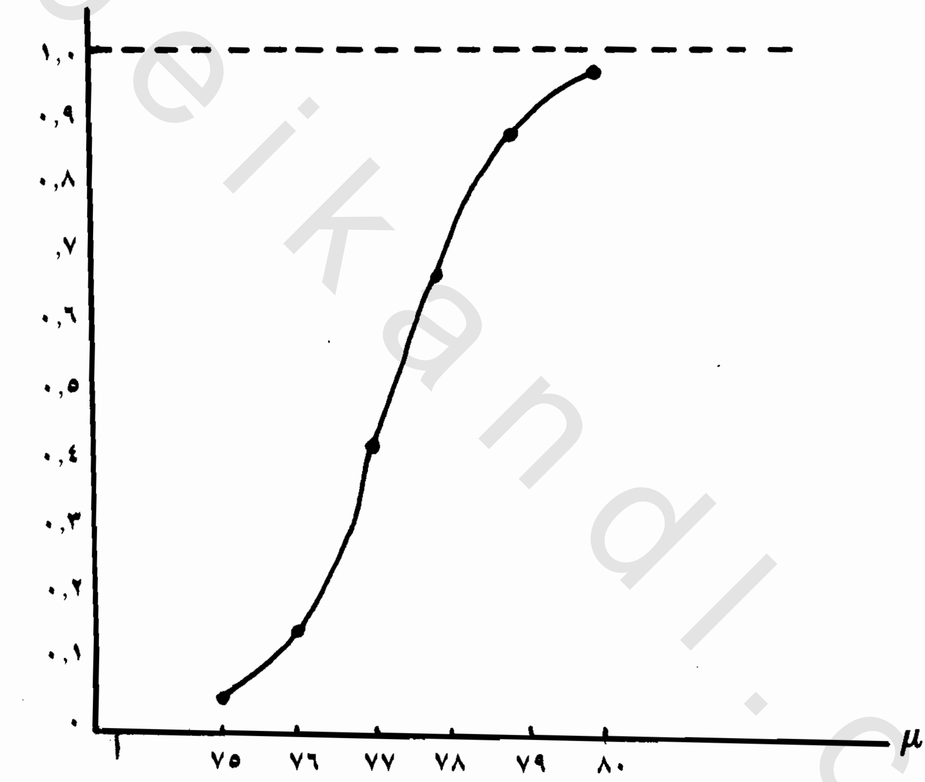
ومن هذا نرى أن قوة الاختبار تتوقف على البارامتر μ أى هى دالة د فى μ تأخذ الصيغة الآتية :

دالة قوة الاختبار = د (μ) = ق = ١ – β = ١ – ل (س̄ ⩽ ا)

= ل (س̄ > ا)   حيث س̄ : مع (μ ، ١,٤)

وحيث ا هى القيمة الحرجة التى تفصل بين منطقتى القبول والرفض . (قيمة الدالة د عند قيمة معينة μ تسمى قوة الاختبار عند القيمة μ) .

وتمثل دالة القوة بيانيا كما فى الشكل (٧ – ٣) الذى يوضح أنها دالة تزايدية ، تزيد قيمتها كلما بعدت قيمة μ التى يحددها الفرض الآخر عن قيمة μ التى يحددها الفرض الصفرى .



الشكل (٧ – ٣)

منحنى القوة لاختبار المثال (٧ – ١) – اختبار ذو جانب واحد

فى هذا المثال وجدنا أن احتمال الخطأ من النوع الثانى β = ٠,٨٢ ومن الواضح أن هذا الاحتمال هو احتمال كبير لهذا الخطأ لا ينبغى أن نسمح به حين نتخذ قرارا

بشأن رفض أو قبول الفرض الصفرى لأنه يجعلنا نشك فى حساسية الاختبار ، بمعنى أنه إذا كانت α = ٠,٠٥ ، σ^{2} = ٤٩ وأخذنا عينة من الحجم ں = ٢٥ فإن هذه العينة لا تكون قادرة على التمييز بين الفرضين بدرجة كافية من الثقة ، إذ بالرغم من أن ٩٥٪ من العينات المأخوذة من التوزيع الذى يفترض صحة الفرض الصفرى (μ = ٧٥) تقع فى منطقة القبول ، إلا أن ٨٢٪ من العينات المأخوذة من التوزيع الذى يفترض صحة الفرض الآخر ((μ = ٧٦) تقع أيضا فى المنطقة ذاتها . وهذا التداخل الكبير هو الذى نعنيه بقولنا إن الاختبار ذو قوة ضعيفة أو أنه اختبار غير حساس .

فى مثل هذه الحالة يجب أن ندخل تعديلا فى تصميم التجربة التى تمدنا بالبيانات التى نتخذ قرارنا على أساسها لتلافى الوقوع فى خطأ كبير من النوع الثانى ولإعطاء الاختبار قوة كافية للتمييز بين مختلف الفروض . وفى بحثنا عن التعديل اللازم لتحقيق هذا الغرض نبدأ بتدارس العوامل التى تؤثر فى هذا الخطأ .

(٧ – ٢ – ٢) العوامل المؤثرة فى الخطأ من النوع الثانى :

بالتأمل فى المثال السابق يتبين لنا أن الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى وقوة الاختبار ه يتوقفان على القيم الآتية :

(١) القيمة التى تختار للاحتمال α للخطأ من النوع الأول :

ذلك لأن هذه القيمة هى التى تحدد القيمة الحرجة ا (تساوى ٧٧,٣ فى هذا المثال) التى تفصل بين منطقتى الرفض والقبول . وكلما صغرت قيمة α كلما صغرت منطقة الرفض وأزيحت ا إلى اليمين (فى هذا المثال) واتسعت منطقة القبول وبالتالى زاد احتمال هذه المنطقة تحت الفرض الآخر . ومن هنا يمكننا تقبل الحقيقة الآتية :

كلما صَغُر الاحتمال α للخطأ من النوع الأول كلما كبر الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى وصغرت قوة الاختبار .

وهذه الحقيقة تعطينا سببا وجيها يبرر التقليد المتبع باختيار α = ٠,٠٥ أو α = ٠,٠١ . لأن اختيارنا لقيم تقل عن ذلك يؤثر تأثيرا سيئا فى الاحتمال β الذى يمكن التحكم فيه بتكبير حجم العينة كما سيتبين بعد .

(٢) قيمة البارامتر μ

بالتأمل فى قيم β أو ق التى حسبناها فى البند (٧ – ٢ – ١) نجد أن هذه القيم تتوقف على بعد القيمة μ_1 التى يحددها الفرض الآخر عن القيمة μ_0 التى يحددها الفرض الصفرى . ومن الناحية الهندسية إذا كانت μ_1 ، μ_0 قريبتين من بعضهما أى كان متوسطا توزيعى ف$_{١}$ ، ف$_{٠}$ قريبين من بعضهما فإن التداخل بين هذين التوزيعين فى منطقة القبول يكون كبيرا وهذا يؤدى إلى كبر الاحتمال β وصغر قوة الاختبار . أما إذا كانت μ_1 بعيدة عن μ_0 فإن هذا التداخل يكون صغيرا ويؤدى إلى صغر الاحتمال β وكبر قوة الاختبار . وتتضح هذه الحقيقة أيضا عند التأمل فى منحنى دالة القوة المبين بالشكل (٧ – ٣) . ومن هنا يمكننا تقبل الحقيقة الآتية :

كلما زاد الفرق بين القيمة التى يحددها الفرض الصفرى للبارامتر المختبر والقيمة التى يحددها الفرض الآخر ، كلما صَغُر الاحتمال β وزادت قوة الاختبار

(٣) الخطأ المعيارى لإحصاءة الاختبار :

فى المثال (٧ – ١) كان الخطأ المعيارى لإحصاءة الاختبار هو $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ = ١,٤ ووجدنا أن قيمة العدد أ الذى يفصل بين منطقتى الرفض والقبول هى ٧٧,٣ . إذا

أجرينا تعديلا فى هذا المثال بحيث يصبح الخطأ المعيارى أقل من ١,٤ نجد أن ا تصغر وتزاح النقطة الممثلة لها على توزيع الإحصاءة $\bar{س}$ إلى اليسار وبالتالى تصغر منطقة القبول ويقل الاحتمال β . فمثلا إذا أخذنا $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ = ١,١ فإن

$$ل\ (\bar{س} > ا) = ٠,٠٥ \qquad \text{ومنها} \qquad ل\ (ع > \frac{ا - ٧٥}{١,١}) = ٠,٠٥$$

$\therefore \frac{ا - ٧٥}{١,١} = ١,٦٤ \quad \therefore ا = ٧٦,٨٠٤$ وهذا العدد أصغر من ٧٧,٣ ومن هنا يمكننا تقبل الحقيقة الآتية :

كلما صَغُر الخطأ المعيارى لإحصاءة الاختبار
كلما صغر الاحتمال β وزادت قوة الاختبار .

ومن الواضح أن قيمة الكسر $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ تتوقف على قيمتين هما الإنحراف المعيارى σ للمجتمع وحجم العينة ن ، ويصغر هذا الكسر (أى يصغر الخطأ المعيارى) إذا صغرت قيمة σ فقط أو كبرت قيمة ن فقط أو صغرت σ وكبرت ن فى الوقت نفسه .

(٧ – ٢ – ٣) كيفية زيادة قوة الاختبار :

فى الفقرة السابقة وجدنا أن قوة الاختبار تتوقف على أربع قيم هى α ، μ ، σ ، ن . ولما كانت القيمتان α ، μ تتحددان سلفا بحسب خبرة الباحث وطبيعة المشكلة التى يتناولها ، لا يبقى لدينا من الناحية الإحصائية لزيادة قوة الاختبار إلا الاعتماد على تصغير الخطأ المعيارى $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ وذلك بتصغير σ أو تكبير ن .

ونظرا لأننا نقدر عادة تباين المجتمع σ^2 من تباين العينة فإن زيادة قوة الاختبار تقتضى أن نحرص على ألا يكون هذا التقدير أكبر مما ينبغى وهذا لا يتأتى إلا

بالتحكم الجيد فى ظروف التجريب واستبعاد تأثير أية عوامل خارجية تؤثر فى المشاهدات وتسهم فى زيادة تباينها .

أما زيادة حجم العينة فهو **العامل الرئيسى** الذى نعتمد عليه فى زيادة **قوة** الاختبار ، وهذه أهم نتيجة نخرج بها من هذا الفصل وتتلخص فى الحقيقة الآتية :

إذا تساوت جميع الظروف ، كلما كبر حجم العينة
كلما صغر الاحتمال β وزادت قوة الاختبار .

الحد الأمثل لحجم العينة :

على أن كفاءة التجريب تستدعى ألا يكون حجم العينة أكبر مما ينبغى تحسبا لما تتطلبه هذه العملية من جهد ووقت وتكاليف ، ومن المناسب إذن وضع حد أعلى لحجم العينة يحقق الهدف المنشود من زيادة قوة الاختبار دون تحمل أعباء لا ضرورة لها . غير أنه لا توجد قاعدة عامة لتحديد الحجم المناسب للعينة ، إلا أننا نستطيع ذلك فى بعض الحالات الخاصة ومنها الحالات التى يتناولها هذا الفصل .

ففى حالة اختبار فرض عن متوسط مجتمع معتدل ، نفرض أننا حددنا مسبقا قيمة α وقيمتى الفرض الصفرى والفرض الآخر . إذا أردنا أن نضمن أن يأخذ احتمال الخطأ من النوع الثانى قيمة محددة β يمكن إثبات أن الحد الأعلى لحجم العينة الذى يحقق هذا الضمان ينتج من حل المعادلة الآتية :

$$\text{خ . م .} = \frac{\text{ف}}{\text{ع}_{1} - \text{ع}_{2}} \qquad (1)$$

حيث خ. م. = الخطأ المعيارى لإحصاءة الاختبار

، ف = الفرق بين القيمة التى يحددها الفرض الصفرى والقيمة التى يحددها الفرض الآخر

أما ع_1 ، ع_2 فتتحددان بحل المتباينتين الآتيتين :

$$\text{ل}\,(\text{ع} > \text{ع}_1) = \begin{cases} \alpha & \text{إذا كان الاختبار ذا جانب واحد} \\ \frac{\alpha}{٢} & \text{إذا كان الاختبار ذا جانبين} \end{cases}$$

$$،\ \text{ل}\,(\text{ع} \leqslant \text{ع}_2) = \beta$$

حيث ع هو المتغير المعتدل المعيارى : مع (٠ ، ١) . أى أن ع_1 ، ع_2 توجدان من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعيارى بمجرد التعويض عن قيمتى α ، β . والمعادلة (١) هى معادلة عامة فى حالة اختبار فرض عن متوسط مجتمع معتدل أو اختبار الفرق بين متوسطى مجتمعين معتدلين ، مع بعض الاختلافات فى حساب القيم التى تتركب منها هذه المعادلة كما سنرى بعد .

مثال (٧ − ٢) :

اعتبر المثال (٧ − ١) حيث σ^2 = ٤٩ ، α = ٠,٠٥ نريد اختبار الفرض μ = ٧٥ ضد الفرض μ > ٧٥ . وإذا أخذنا μ_1 = ٧٨ فأوجد الحد الأعلى لحجم العينة الذى يضمن أن تكون β = ٠,٠٨ .

الحل :

$$\text{خ . م} = \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} = \frac{٧}{\sqrt{\text{ن}}}$$

$$\text{ف} = \mu_1 - \mu = ٧٨ - ٧٥ = ٣$$

من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعيارى نجد أن :

ل $(\text{ع} > \text{ع}_1) = \alpha$ = ٠,٠٥ تعطى ع_1 = ١,٦٤ (اختبار ذو جانب واحد)

، ل $(\text{ع} \leqslant \text{ع}_2) = \beta$ = ٠,٠٨ تعطى ع_2 = − ١,٤١

بالتعويض فى المعادلة (١) ينتج أن :

$$\frac{٧}{\sqrt{ن}} = \frac{٣}{١,٦٤ - (-١,٤١)} = \frac{٣}{٣,٠٥}$$

$$\therefore \quad ن = \left(\frac{٧ \times ٣,٠٥}{٣}\right)^{٢} = ٥٠,٦٤٦٩$$

أى أننا إذا أعدنا التجربة بأخذ عينة عشوائية من الحجم ٥١ (بدلا من الحجم ٢٥) فإننا نضمن أن يكون احتمال الخطأ من النوع الثانى β = ٠,٠٨ (تحقق من ذلك بأخذ ن = ٥١ وإثبات أن القيمة الحرجة ا = ٧٦,٦٠٧ والاحتمال β = ٠,٠٧٧٨) . يلاحظ أننا استطعنا أن نضمن احتمالا صغيرا هو ٠,٠٨ للخطأ من النوع الثانى (بدلا من الاحتمال β = ٠,٣١ الذى وجدناه فى عينة بالحجم ٢٥) ، إلا أن ذلك كان على حساب زيادة حجم العينة إلى الضعف تقريبا فى هذا المثال .

(٧ – ٣) حساب قيمة β فى اختبار فرض عن متوسط مجتمع معتدل – حالة الاختبار ذى الجانبين .

مثال (٧ – ٣) :

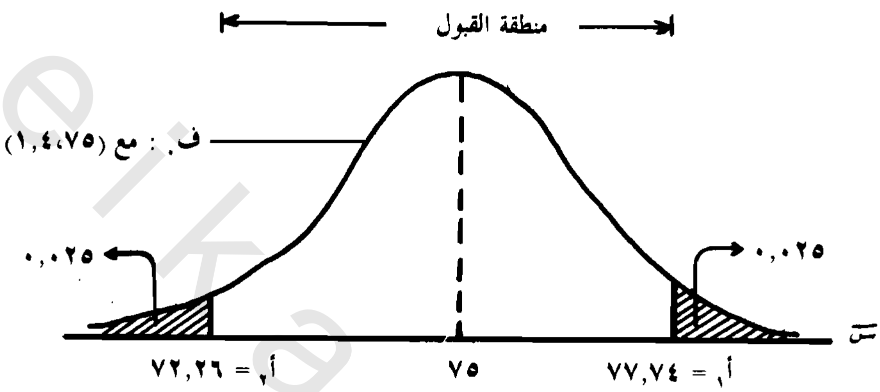
بأخذ بيانات المثال (٧ – ١) بيّن كيف تستخدم الوسط الحسابى لعينة لاختبار الفرض الصفرى ف. : μ = ٧٥ ضد الفرض الآخر $\mu \neq$ ٧٥ عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ . حدد قوة الاختبار عند μ = ٧٦ وارسم دالة القوة لهذا الاختبار .

الحل :

نظرا لأن المجتمع معتدل يكون للمتغير $\bar{س}$ توزيع معتدل : مع (μ ، $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$)
وبالتالى يكون للاحصاءة

$$ع = \frac{\bar{س} - \mu}{\sigma/\sqrt{ن}}$$ توزيع معتدل معيارى : مع (٠ ، ١) .

ونظرا لأن الاختبار ذو جانبين فإن منطقة رفض الفرض الصفرى تتألف من جزءين متساويين فى جانبى التوزيع . لتكن $أ_١$ هى القيمة الحرجة التى تحد منطقة الرفض اليمنى من اليسار ، ولتكن $أ_٢$ هى القيمة الحرجة التى تحد منطقة الرفض اليسرى من اليمين . انظر الشكل (٧ - ٤) .



الشكل (٧ - ٤)

منطقتا الرفض والقبول فى اختبار ذى جانبين

لإيجاد قيمتى $أ_١$ ، $أ_٢$ نستخدم جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعيارى كالآتى :

$$ل\,(\bar{س} > أ_١) = \frac{٠,٠٥}{٢} = ٠,٠٢٥ \text{ ،} \qquad \text{حيث } \bar{س} : \text{مع } (٧٥ \text{ ، } ١,٤)$$

$$\therefore ل\left(\frac{\bar{س} - ٧٥}{١,٤} > \frac{أ_١ - ٧٥}{١,٤}\right) = ٠,٠٢٥ \quad \text{أى } ل\,(ع > \frac{أ_١ - ٧٥}{١,٤}) = ٠,٠٢٥$$

$$\therefore \frac{أ_١ - ٧٥}{١,٤} = ١,٩٦ \qquad \text{ومنها } أ_١ = ٧٧,٧٤٤$$

بالمثل ، ل $(\bar{س} > ا_٢) = \frac{٠,٠٥}{٢} = ٠,٠٢٥$ حيث $\bar{س}$: مع (٧٥ ، ١,٤)

$\therefore$ ل $\left(ع > \frac{ا_٢ - ٧٥}{١,٤} \right) = ٠,٠٢٥$

$\therefore \frac{ا_٢ - ٧٥}{١,٤} = - ١,٩٦$ ومنها $ا_٢ = ٧٢,٢٥٦$

وإذن تتحدد منطقة قبول الفرض الصفرى حين يفترض صحته بالفترة (٧٢,٢٦ ، ٧٧,٧٤) وتكون قاعدة الاختبار كالآتى :

« إذا وقع الوسط الحسابى لعينة عشوائية من الحجم ٢٥ خارج المنطقة م' = $\{\bar{س} : ٧٧,٧٤ \geqslant \bar{س} > ٧٢,٢٦\}$ نرفض الفرض الصفرى ف عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ وإلا نقبل ف »

نحسب الآن الاحتمال β عند $\mu = ٧٦$ وفقا للمنطق السابق .

β = احتمال وقوع قيم المتغير $\bar{س}$ فى منطقة القبول (٧٢,٢٦ ، ٧٧,٧٤) تحت الفرض الآخر $\mu = ٧٦$

= ل $(٧٧,٧٤ > \bar{س} > ٧٢,٢٦)$ حيث $\bar{س}$: مع (٧٦ ، ١,٤)

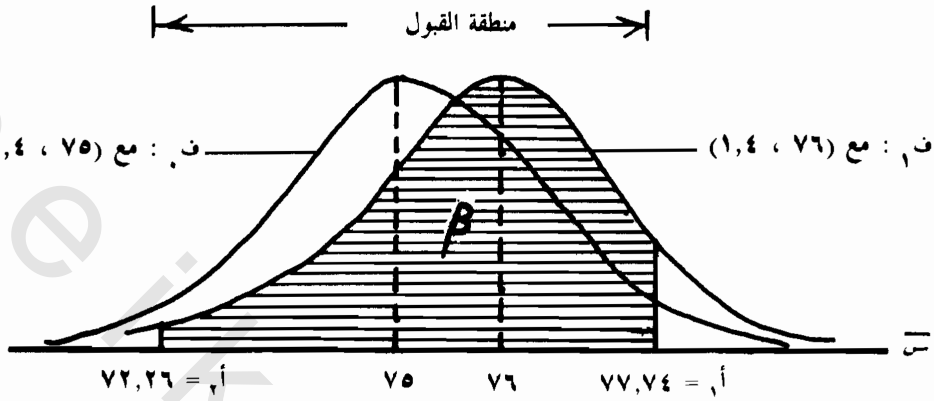
$$= ل\left(\frac{٧٧,٧٤ - ٧٦}{١,٤} \geqslant \frac{\bar{س} - ٧٦}{١,٤} \geqslant \frac{٧٢,٢٦ - ٧٦}{١,٤}\right)$$

= ل $(١,٢٤ \geqslant ع \geqslant - ٢,٦٧) = ٠,٨٩$ تقريبا

$\therefore$ قوة الاختبار عند $\mu = ٧٦$ هى و $= ١ - ٠,٨٩ = ٠,١١$ تقريبا

لتوضيح ذلك هندسيا نرسم كما فى الشكل (٧ — ٥) توزيع المتغير $\bar{س}$ تحت كل من الفرضين ف : $\mu = ٧٥$ وف : $\mu = ٧٦$. من هذا الشكل يلاحظ

أن الاحتمال β = ٠,٨٩ هو نسبة الجزء من توزيع ف$_1$ الذى يشترك فى منطقة القبول مع توزيع ف$_0$ ، وهذه النسبة تعبر عنها مساحة الجزء المظلل من الشكل (٧ – ٥) .



الشكل (٧ – ٥)

التوزيع الممثل للفرض الصفرى والتوزيع الممثل للفرض الآخر
(مساحة الجزء المظلل تعبر عن الاحتمال β فى اختبار ذى جانبين)

فى هذه الحالة تأخذ دالة قوة الاختبار الصيغة الآتية :

د (μ) = ل (سَ ≥ أ$_1$) + ل (سَ ≤ أ$_2$)

= ١ – ل (أ$_1$ > سَ > أ$_2$)

وفى هذا المثال نجد أن :

د (μ) = ١ – ل (٧٧,٧٤ > سَ > ٧٢,٢٦) حيث سَ : مع (μ ، ١,٤)

وقد وجدنا أن د (٧٦) = ١ – ٠,٨٩ = ٠,١١

وبالمثل نجد ما يلى :

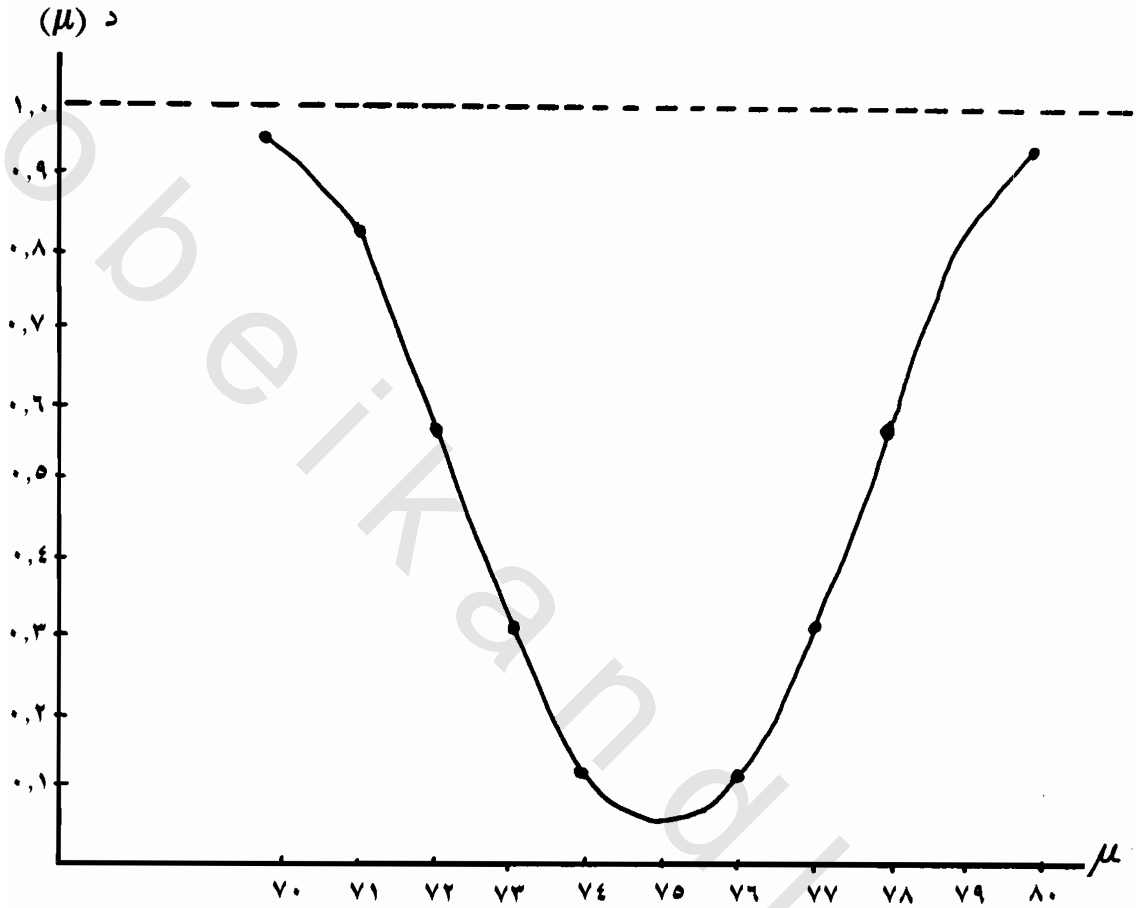
د (٧٧) = ٠,٣٠ و د (٧٨) = ٠,٥٧ و د (٧٩) = ٠,٨٢ و د (٨٠) = ٠,٩٤

... الخ . ومن التماثل نجد أن

د (٧٤) = ٠,١١ ود (٧٣) = ٠,٣٠ ود (٧٢) = ٠,٥٧ ود (٧١) = ٠,٨٢

ود (٧٠) = ٠,٩٤ ... الخ

والشكل (٧ - ٦) يمثل هذه الدالة بيانيا .



الشكل (٧-٦)

منحنى القوة لاختبار المثال (٧-٢)- اختبار ذو جانبين

إن الملاحظات والحقائق التى ذكرت فى البند (٧ - ٢ - ٢) عن العوامل المؤثرة فى قيمة β تنطبق هنا أيضا . فكلما صغُر الاحتمال α كلما صَغُر جزءا منطقة الرفض ، واتسعت منطقة القبول وهذا يؤدى إلى زيادة الاحتمال β وصغر قوة الاختبار . كذلك كلما بعدت القيمة μ التى يفرضها الفرض الآخر عن القيمة التى يحددها الفرض الصفرى كلما قل التداخل بين توزيعى ف$_{.}$ ، ف$_{١}$ وصغرت

β وزادت قوة الاختبار . وأخيرا كلما نَقُص الخطأ المعيارى سواء بتصغير الانحراف المعيارى σ للمجتمع أو بزيادة حجم العينة ، كلما صغرت β وزادت قوة الاختبار .

وجدير بالملاحظة هنا أنه إذا تساوت جميع الظروف فإن الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى يكون أقل فى الاختبار ذى الجانب الواحد منه فى الاختبار ذى الجانبين ، أى أن الاختبار ذا الجانب الواحد يكون أقل تعرضا لهذا النوع من الخطأ .

وكما فى البند (٧ - ٢ - ٣) حين نتناول اختبارا ذا جانبين لفرض عن متوسط مجتمع معتدل ، إذا تحددت قيم α ، μ ، σ وأردنا أن نضمن أن يأخذ احتمال الخطأ من النوع الثانى قيمة محددة β فإن الحد الأعلى لحجم العينة الذى يوفر هذا الضمان هو ذلك الذى ينتج من حل نفس المعادلة (١) السابق تقديمها وهى :

$$\text{خ. م.} = \frac{\text{ف}}{\text{ع}_1 - \text{ع}_2}$$

والفرق فى استخدام هذه المعادلة بين الحالتين يحدث فقط فى حساب القيمة ع_1

مثال (٧ - ٤) :

فى المثال (٧ - ٣) حيث σ^2 = ٤٩ ، α = ٠,٠٥ ، μ = ٧٥ إذا أخذنا μ_1 = ٧٨ فأوجد الحد الأعلى لحجم العينة الذى يضمن أن تكون β = ٠,١٠ .

الحل :

$$\text{خ.م.} = \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} = \frac{٧}{\sqrt{\text{ن}}}$$

$$\text{ف} = \mu_1 - \mu = ٧٨ - ٧٥ = ٣$$

ل (ع > ع$_١$) = $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠٢٥ ومنها ع$_١$ = ١,٩٦ (اختبار ذو جانبين)

ل (ع ≥ ع$_٢$) = β = ٠,١٠ ومنها ع$_٢$ = − ١,٢٨

$$\therefore \frac{٧}{\sqrt{ن}} = \frac{٣}{١,٩٦ - (-١,٢٨)} = \frac{٣}{٣,٢٤} = \frac{١}{١,٠٨}$$

ومنها ن = (٧ × ١,٠٨)^٢ = ٥٧,١٥

أى أنه يكفى أن نأخذ عينة حجمها ٥٨ لنضمن أن تكون β = ٠,١٠ (تحقق من ذلك بأخذ ن = ٥٨ وإثبات أن القيمتين الحرجتين هما أ$_١$ = ٧٦,٨٠ ، أ$_٢$ = ٧٣,١٩٩ وأن β = ٠,٠٩٨١)

(٧ – ٤) حساب قيمة β فى اختبار الفرق بين متوسطى مجتمعين معتدلين :

نستخدم نفس الأسلوب المقدم فى البندين السابقين مع مراعاة طريقة حساب الخطأ المعيارى التى تتطلبها هذه الحالة .

مثال (٧ – ٥) :

لتجربة أقراص لإنقاص الوزن عند النساء ، اختيرت ٤٠ من إناث القطط المنزلية وقسمت عشوائيا إلى مجموعتين بكل منها ٢٠ قطة ووضعت المجموعتان تحت نفس الظروف والنظام الغذائى فيما عدا أن الأقراص كانت تضاف إلى غذاء واحدة فقط من المجموعتين . وبعد ستة أسابيع وباستخدام مقياس معين حسب الوسطان الحسابيان $\bar{س}_١$ ، $\bar{س}_٢$ للمجموعتين . إذا اعتبرنا أن المجموعتين مستقلتان ومأخوذتان من مجتمعين معتدلين تباين كل منها ٤٠ ومتوسطاهما $\mu_١$ ، $\mu_٢$:
(أولا) بين كيف نختبر الفرض الصفرى $\mu_١ = \mu_٢$ ضد الفرض $\mu_١ \neq \mu_٢$ عن مستوى الدلالة ٠,٠٥ .

(ثانيا) أوجد قوة الاختبار عندما يفترض أن الفرق بين متوسطى المجتمعين يساوى ٣ وحدات . .

(ثالثا) أوجد الحد الأدنى لحجم العينة الذى يضمن أن يكون الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى يساوى ٠,١٥ .

الحل :

(أولا)

نظرا لأن المجتمعين معتدلان والعينتين مستقلتان فإن المتغير العشوائى $\bar{س}_١ - \bar{س}_٢$ يكون ذا توزيع معتدل وسطه الحسابى $\mu_١ - \mu_٢$ وتباينه يساوى

$$\frac{\sigma_١^٢}{ن_١} + \frac{\sigma_٢^٢}{ن_٢} = \frac{٢\,\sigma^٢}{ن} \quad \text{لأن} \quad \sigma_١^٢ = \sigma_٢^٢ = \sigma^٢ \quad \text{و} \quad ن_١ = ن_٢ = ن$$

وبالتالى يكون للإحصاءة

$$ع = \frac{(\bar{س}_١ - \bar{س}_٢) - (\mu_١ - \mu_٢)}{\sqrt{\frac{٢\,\sigma^٢}{ن}}}$$

توزيع معتدل معيارى : مع (٠ ، ١) .

لدينا $\sigma_١^٢ = \sigma_٢^٢ = ٤٠$ و $ن_١ = ن_٢ = ٢٠$

اذن $\sqrt{\frac{٢\,\sigma^٢}{ن}} = \sqrt{\frac{٢ \times ٤٠}{٢٠}} = ٢$ وهذا هو الخطأ المعيارى للإحصاءة

الفرض الصفرى ف. هو $\mu_1 = \mu_2$

الفرض الآخر ف١ هو $\mu_1 \neq \mu_2$ (اختبار ذو جانبين) ، α = ٠,٠٥

نظرا لأن الاختبار ذو جانبين فإن منطقة رفض الفرض الصفرى تتألف من منطقتين عند ذيلى التوزيع يحدهما العددان ا١ ، ا٢ بحيث

$$\text{ل}\,(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2 < \text{ا}_1) = \text{٠,٠٢٥} \quad \text{و} \quad \text{ل}\,(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2 > \text{ا}_2) = \text{٠,٠٢٥}$$

على أن يحسب كلا الاحتمالين على أساس التسليم بصحة الفرض الصفرى $\mu_1 = \mu_2$ أى من الإحصاءة

$$\text{ع}_{\text{م}} = \frac{(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) - \text{صفر}}{\text{٢}} = \frac{\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2}{\text{٢}}$$

التى تتبع التوزيع المعتدل المعيارى : مع (٠ ، ١) .

$$\text{لدينا ل}\,(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2 < \text{ا}_1) = \text{ل}\left(\frac{\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2}{\text{٢}} < \frac{\text{ا}_1}{\text{٢}}\right) = \text{ل}\left(\text{ع} < \frac{\text{ا}_1}{\text{٢}}\right)$$

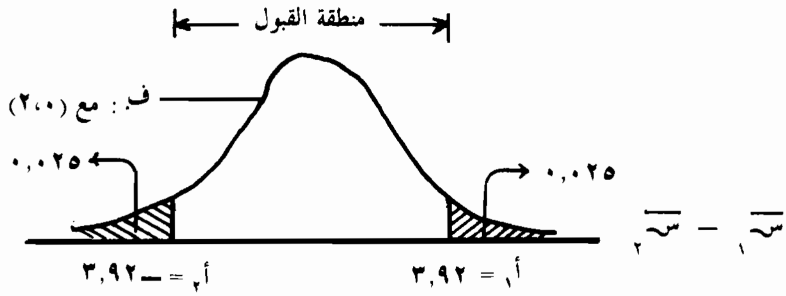
$$= \text{٠,٠٢٥}$$

من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل نجد أن

$$\frac{\text{ا}_1}{\text{٢}} = \text{١,٩٦} \qquad \text{ومنها ا}_1 = \text{٣,٩٢}$$

من التماثل نجد أن :

$$\frac{\text{ا}_2}{\text{٢}} = -\text{١,٩٦} \qquad \text{ومنها ا}_2 = -\text{٣,٩٢}$$



الشكل (٧ − ٧)

وإذن تتألف المنطقة التى نرفض فيها الفرض الصفرى ف. : $\mu_{١} = \mu_{٢}$ عند المستوى ٠,٠٥ من اتحاد المنطقتين $(\bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢}) > ٣,٩٢$ و$(\bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢}) < -٣,٩٢$ أى من المنطقة التى يأخذ فيها الفرق بين الوسطين الحسابيين للعينات من الحجم ٢٠ قيما تزيد عن ٣,٩٢ أو قيما تقل عن ـــ ٣,٩٢ واحتمال هاتين المنطقتين معا تعبر عنه مساحتى الجزءين المظللين بالشكل (٧ ــ ٧) ، وتكون منطقة القبول هى المنطقة المكملة لهاتين المنطقتين أى المنطقة التى تحددها الفترة (− ٣,٩٢ ، ٣,٩٢) وتتحدد قاعدة الاختبار كالآتى :

« إذا وقع الفرق بين متوسطى عينتين مستقلتين من الحجم ٢٠ خارج المنطقة $م' = \{\bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢} : ٣,٩٢ \geqslant \bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢} \geqslant -٣,٩٢\}$ نرفض الفرض الصفرى ف. عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ وإلا نقبل ف. . »

(ثانيا)

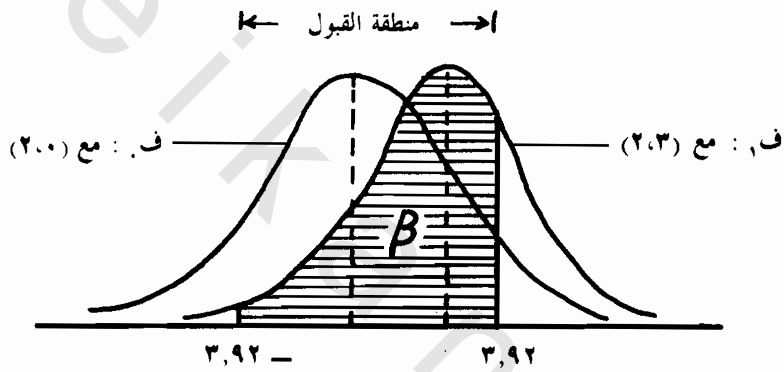
لحساب قيمة β نحسب احتمال وقوع قيم المتغير $\bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢}$ فى منطقة القبول على أساس أن الفرض الصفرى خاطىء والفرض الآخر $\mu_{١} - \mu_{٢} = ٣$ هو الصحيح .

β = ل $(٣,٩٢ \geqslant \bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢} \geqslant -٣,٩٢)$ حيث $\bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢}$: مع (٣ ، ٢)

$$= ل \left(\frac{-٣,٩٢ - ٣}{٢} \leq \frac{\bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢} - ٣}{٢} \leq \frac{٣,٩٢ - ٣}{٢} \right)$$

$= ل\,(-٣,٤٦ \leq ع \leq ٠,٤٦) = ٠,٦٨$ من جدول المساحات

وإذن قوة الاختبار عندما $\mu - \mu_{٢} = ٣$ هى ق = ٠,٣٢ – انظر الشكل (٧ – ٨) .



الشكل (٧ – ٨)

التوزيع الممثل للفرض الصفرى والتوزيع الممثل للفرض الآخر

(مساحة الجزء المظلل تعبر عن الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى)

(ثالثا)

لإيجاد الحد الأعلى لحجم العينة الذى يضمن أن تكون $\beta = ٠,١٥$ نستخدم نفس المعادلة (١) السابق تقديمها وهى :

$$خ . م . = \frac{ف}{ع_{١} - ع_{٢}}$$

ويستلزم الأمر هنا أن تكون العينتان مستقلتين ومن نفس الحجم .

لدينا خ . م . = $\sqrt{\frac{2\sigma^2}{ن}}$ = $\sqrt{\frac{80}{ن}}$

، ف = ٣ − ٠ = ٣

ل (ع > ع$_1$) = $\frac{\alpha}{2}$ = ٠,٠٢٥ لأن الاختبار ذو جانبين

وإذن ع$_1$ = ١,٩٦

ل (ع ⩾ ع$_2$) = β = ٠,١٥ وإذن ع$_2$ = ١,٠٤

∴ $\sqrt{\frac{80}{ن}}$ = $\frac{3}{1,96 - (-1,04)}$ = $\frac{3}{3}$ = ١

∴ ن = ٨٠

أى أنه يكفى أخذ عينتين مستقلتين حجم كل منهما ٨٠ لكى نضمن أن تكون β = ٠,١٥ (تحقق من ذلك بأخذ ن = ٨٠ وإثبات أن ا$_1$ = ١,٩٦ و ا$_2$ = −١,٩٦ وأن β = ٠,١٤٩٢)

(٧ – ٥) حساب قيمة β فى اختبار النسبة :

فى البنود الثلاثة السابقة كنا نتناول الأوساط الحسابية لعينات من مجتمعات معتدلة أو معتدلة تقريبا . على أن المنطق الذى استخدمناه فى حساب الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى وحساب قوة الاختبار ينطبق على أى مقاييس أخرى . وفى المثال الآتى نتناول نسبة وقوع حدث ما فى مجتمع ما .

مثال (٧ – ٦) :

بينت الخبرة أن معدل الشفاء من مرض معين بواسطة علاج قياسى ٦٠٪ ابتكر علاج جديد يظن أنه أفضل من العلاج القياسى . بين كيف تختبر عند مستوى

الدلالة ٠,٠٥ ما إذا كان معدل الشفاء بالعلاج الجديد أعلى منه بالعلاج القياسى ، وذلك باستخدام عينة من ١٥ مريضا بهذا المرض . حدد قوة الاختبار عندما يفترض أن معدل الشفاء بالعلاج الجديد ٧٠٪ .

الحل :

إن جودة العلاج تقاس بقيمة المتغير س الذى يعبر عن عدد المرضى الذين شفوا فى عينة من الحجم ١٥ . وإذا اعتبرنا أن العينة عشوائية ذات وحدات مستقلة فإن المتغير س يكون له توزيع ذى الحدين دليلاه ن ، ح حيث ن = ١٥ ، ح بارامتر مجهول يعبر عن احتمال الشفاء لأى مريض . راجع البند (٣ - ٣) .

ولبحث أفضلية العلاج الجديد ، علينا أن نقارن بين الفرضين الآتيين :

الفرض الصفرى ف. : ح = ٠,٦ (لا يوجد فرق فى معدل الشفاء بين نوعى العلاج)

الفرض الآخر ف١ : ح > ٠,٦ (اختبار ذو جانب واحد)

إذا كان الفرض الصفرى صحيحا ، يكون للمتغير س توزيع ذو حدين دليلاه ن = ١٥ ، ح = ٠,٦ ويمكننا حينئذ إيجاد توزيع احتمال هذا المتغير بالحساب المعتاد (أى من دالة الكتلة) أو باستخدام الجدول (٣) فى ذيل هذا الكتاب مع أخذ ن = ١٥ ، ح = ٠,٦ فنجد التوزيع الذى ننقله فى الجدول (٧ - ٢) الآتى .

نظرا لأن الاختبار ذو جانب واحد هو الجانب الأيمن فإن منطقة رفض الفرض الصفرى هى المنطقة التى يأخذ فيها المتغير س قيما تزيد عن العدد ا حيث ل (س > ا) لاتزيد عن α = ٠,٠٥ ولإيجاد القيمة الحرجة ا التى تحد التوزيع من اليمين نجرب بضعة قيم مستعينين بالجدول (٧ - ٢) كالآتى :

ل (س > ١٤) = ٠

ل (س > ١٣) = ٠,٠٠٥

ل (س > ١٢) = ٠,٠٠٥ + ٠,٠٢٢ = ٠,٠٢٧

ل (س > ١١) = ٠,٠٢٧ + ٠,٠٦٣ = ٠,٠٩٠

وهذا الاحتمال يزيد عن ٠,٠٥

إذن القيمة الحرجة ا = ١٢ وتتحدد قاعدة الاختبار كالآتى :

« إذا كان عدد المرضى الذين شفوا فى عينة من ١٥ مريضا يزيد عن ١٢ نرفض الفرض الصفرى فٍ أن ح = ٠,٦ عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ وإلا نقبل فٍ » .

الجدول (٧ -٢)

توزيع الاحتمال لمتغير ذى حدين : حد (١٥ ، ٠,٦)

س عدد حالات الشفاء	ل احتمال هذا العدد	س عدد حالات الشفاء	ل احتمال هذا العدد
٠	———	٨	٠,١٧٧
١	———	٩	٠,٢٠٧
٢	———	١٠	٠,١٨٦
٣	٠,٠٠٢	١١	٠,١٢٧
٤	٠,٠٠٧	١٢	٠,٠٦٣
٥	٠,٠٢٤	١٣	٠,٠٢٢
٦	٠,٠٦١	١٤	٠,٠٠٥
٧	٠,١١٨	١٥	———
			٠,٩٩٩

لحساب قوة الاختبار عندما يفترض أن ح = ٠,٧ نحسب احتمال وقوع قيم المتغير س فى منطقة القبول وهى س ≤ ١٢ تحت هذا الفرض أى على أساس أن للمتغير س توزيعا ذا حدين دليلاه ١٥ ، ٠,٧ .

احتمال الخطأ من النوع الثانى = β = ل(س ≤ ١٢)حيث س : حد (١٥ ، ٠,٧)

= ١ − ل (س > ١٢)

من الجدول (٣) بذيل هذا الكتاب وبأخذ ن = ١٥ و ح = ٠,٧ نجد أن :

β = ١ − (٠,٠٩٢ + ٠,٠٣١ + ٠,٠٠٥) = ١ − ٠,١٢٨

= ٠,٨٧٢ = ٠,٨٧ تقريبا

وإذن قوة الاختبار = ق = ١ − ٠,٨٧ = ٠,١٣

ويلاحظ أن قوة الاختبار ضعيفة مما يدعونا إلى الشك فى قدرة التجربة على التمييز بين معدلى الشفاء فى العلاجين القياسى والجديد . وينبغى حينئذ العمل على زيادة هذه القدرة وذلك بزيادة حجم العينة .

حل آخر :

فى هذا المثال يمكننا استخدام تقريب التوزيع المعتدل لتوزيع ذى الحدين ــ راجع البند (٤ − ٦) مع ملاحظة أن ن ح = ١٥ × ٠,٦ = ٩ > ٥ كما أن ن ك = ١٥ × ٠,٤ = ٦ > ٥ ، ويقترب توزيع ذى الحدين حد (١٥ ، ٠,٦) من توزيع معتدل متوسطه μ = ن ح = ٩ وانحرافه المعيارى σ = $\sqrt{\text{ن ح ك}}$ = $\sqrt{١٥ \times ٠,٦ \times ٠,٤}$ = ١,٨٩٧ وبالتالى يكون للمتغير

$$\text{ع} = \frac{(\text{س} - ٠,٥) - ٩}{١,٨٩٧}$$

بالتقريب توزيع معتدل معيارى : مع (٠ ، ١) .

لإيجاد القيمة الحرجة أ لدينا :

ل (س > ا) = ل (ع > $\frac{(ا - ٠,٥) - ٩}{١,٨٩٧}$ = ٠,٠٥ فرضا

من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعيارى نجد أن

$\frac{ا - ٩,٥}{١,٨٩٧}$ = ١,٦٤ ومنها أ = ١٢,٦١١

واذن نرفض الفرض الصفرى أن ح = ٠,٦ عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ إذا كان عدد المرضى الذين شفوا فى عينة من ١٥ مريضا يزيد عن ١٢. وهذه هى النتيجة التى توصلنا إليها بالحل الأول . كذلك :

β = ل (س ⩽ ١٢) حيث س : حد (١٥ ، ٠,٧)

وبالتقريب بتوزيع معتدل وسطه الحسابى ن ح = ١٥ × ٠,٧ = ١٠,٥

وانحرافه المعيارى σ = $\sqrt{\text{ن ح ك}}$ = $\sqrt{١٥ \times ٠,٧ \times ٠,٣}$ = ١,٧٧٤٨

نجد أن :

β = ل (س ⩽ ١٢) = ل (ع ⩽ $\frac{(١٢ + ٠,٥) - ١٠,٥}{١,٧٧٤٨}$

= ل (ع ⩽ ١,١٣) = ٠,٨٧٠٨ = ٠,٨٧ تقريبا

، ق = ١ - ٠,٨٧ = ٠,١٣

تمارين (٧)

(١) أخذت عينة عشوائية حجمها ن = ٥ من مجتمع معتدل تباينه ١٥,٢١ . بين كيف تختبر عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ الفرض الصفرى أن متوسط المجتمع μ = ٤٥,٥ ضد الفرض $\mu \neq$ ٤٥,٥ . أوجد قوة الاختبار عندما نفترض أن μ = ٥٤ .