الفصل الثامن

تحليل التباين وتصميم التجارب

ANALYSIS OF VARIANCE
& DESIGN OF EXPERIMENTS

(٨ – ١) التحليل الإحصائى وتصميم التجارب :

يميل بعض الباحثين التجريبيين إلى تصميم تجاربهم وتنفيذها ، وبعد الانتهاء من الحصول على بيانات ينظرون في تحليل هذه البيانات إحصائياً . وهذا خطأ كبير لأن إغفال الجانب الإحصائي أثناء وضع التصميم غالباً ما يؤدى إلى اختيار تصميم خاطىء لا تستخلص منه أية نتائج يعتد بها . وعلى العكس من ذلك ، إذا أخذ الجانب الإحصائي بعين الاعتبار ، فإنه لا يعاون فقط على تحليل البيانات تحليلا علمياً سليماً بل يسهم بشكل أساسي في اختيار التصميم الأكثر كفاءة أى الذى يعطى أكبر قدر من المعلومات والنتائج بأدني حد من الجهد التجريبي ، وهو بالإضافة إلى ذلك يقلل من مصادر أخطاء التجريب ويوضح طريقة تقدير هذه الأخطاء . فخطة التحليل الإحصائي هى جزء رئيسي من تصميم التجربة . وتقتضي هذه الخطة مراعاة عدة مبادىء لعل أهمها ما يلى :

(أولا) العشوائية : RANDOMNESS

إن التقنية الإحصائية للتجريب تقتضي تطبيق مبدأ العشوائية في كل ما يتعلق بالتجربة منعاً لأى تحيز من أى نوع ، وكوسيلة للتصدى لمجموعة العوامل الثانوية

التي نعجز عن حصرها أو حساب التأثير الطفيف الذى يحدثه كل منها وبالتالى نعجز عن التحكم فيها تجريبياً .

(أ) فالعينة التي تختار من المجتمع ينبغى أن تكون عشوائية ، فتكون مسحوبة بحسب خطة تضمن عدم وجود تحيز من أى نوع قد يؤثر فى عملية الاختيار .

(ب) وإذا قسمت هذه العينة إلى أقسام لتطبيق أنواع مختلفة من المعالجات على هذه الأقسام ينبغى أن يكون هذا التقسيم عشوائياً لكى يتوفر لكل وحدة من وحدات العينة نفس الفرصة لتلقي أى من هذه الأنواع .

(جـ) كما أن توزيع نوع ما لمعالجة ما على وحدات قسم ما ينبغى أن يكون عشوائياً خاصة من حيث الترتيب الزمني .

وبالنسبة لتقسيم العينة هناك طرق تكفل عشوائية هذا التقسيم ، ومن هذه الطرق ما يلى .

(١) رمى قطعة معدنية من العملة :

نفرض مثلا أننا نريد تقسيم ٢٠ حشرة إلى ٤ أقسام يحتوى كل منها على ٥ حشرات لكى تتلقي الحشرات التي تدخل في قسم ما واحداً من ٤ معالجات مختلفة ا ، ب ، حـ ، ى . نرقم الحشرات من ١ إلى ١٢٠ . نأخذ كل حشرة على حدة ونرمى قطعة منتظمة من العملة مرتين عشوائياً (أو نلقي قطعتين متميزتين من العملة مرة واحدة) . نحدد القسم الذى تدخل فيه الحشرة بحسب خطة كالآتية :

الرمية الأولى	الرمية الثانية	القسم (المعالجة)
صورة	صورة	ا
صورة	كتابة	ب
كتابة	صورة	حـ
كتابة	كتابة	ى

فإذا أخذنا الحشرة رقم (١) وظهرت كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية فإن هذه الحشرة تدخل القسم حـ أى تتلقى المعالجة حـ وهكذا بالنسبة للحشرات جميعاً . وإذا حدث أن امتلأ أحد الأقسام (بخمس حشرات) وجاءت رمية لهذا القسم نلغى هذه الرمية ونعيد الرمى . إن هذه الخطة تكفل أن تكون النواتج الممكنة من رمى العملة مرتين وهى (صورة ، صورة) و(صورة ، كتابة) و(كتابة ، صورة) و(كتابة ، كتابة) متساوية الاحتمال إذ من الواضح أن احتمال كل منها يساوى $\frac{١}{٤}$ بشرط أن تكون العملة منتظمة والرمى عشوائياً . وبهذا يكون لكل حشرة نفس الفرصة لتلقي أى من المعالجات الأربع . وهذا يعني توفر شرط عشوائية التقسيم . نلاحظ أنه بالنسبة للحشرة الأخيرة لا نكون بحاجة إلى رمى قطعة العملة .

(٢) رمى حجرة نرد :

في المثال السابق يمكن أن نستخدم خطة أخرى كالآتية :

نرمى حجرة نرد منتظمة عشوائيا . إذا ظهرت نقطة واحدة ندخل الحشرة في القسم ا وإذا ظهرت نقطتان ندخلها في القسم ب وإذا ظهرت ٣ نقط ندخلها في القسم حـ وإذا ظهرت ٤ نقط ندخلها في القسم ء . أما إذا ظهرت ٥ أو ٦ نقط فلا تحسب ويعاد الرمى . نلاحظ هنا أيضاً أن النواتج الستة متساوية الاحتمال فاحتمال كل منها يساوى $\frac{١}{٦}$.

(٣) استخدام ورق اللعب :

حين يكون عدد الأقسام المطلوبة كبيراً يحسن استخدام ورق اللعب . نفرض أننا نريد تقسيم ٦٠ حشرة إلى ١٢ قسماً يحتوى كل منها على ٥ حشرات لكى تتلقى الحشرات التى تدخل فى قسم ما واحداً من ١٢ معالجة مختلفة . نستخدم مجموعة من ورق اللعب بعد استبعاد الملوك الأربعة فيكون لدينا ٤٨ ورقة . نحدد خطة كالآتية :

الواحد للقسم الأول والاثنين للقسم الثاني ، ... ، ... والعشرة للقسم العاشر والولد للقسم الحادى عشر والبنت للقسم الثاني عشر . نأخذ كل حشرة على حدة ونخلط الورق جيداً ثم نقطعه عشوائياً فيكون العدد المقطوع هو الذى يحدد القسم الذى تدخل فيه الحشرة . نلاحظ أن احتمال ظهور أى من الحالات الاثني عشر يساوى $\frac{٤}{٤٨} = \frac{١}{١٢}$.

إن الطرق سابقة الذكر هى مجرد أمثلة على طرق التقسيم العشوائي ويمكن للباحث على ضوء هذه الأمثلة أن يبتدع طرقاً أخرى كثيرة ، وذلك إضافة إلى إمكانية استخدام جداول الأعداد العشوائية المشار إليها بالبند (١ - ٢) .

(ثانيا) الاستقلال : INDEPENDENCE

يقتضي التحليل الإحصائي ، خاصة في تحليل التباين ، افتراض استقلال أخطاء التجريب عن بعضها واستقلال المعالجات عن أخطاء التجريب ، فإذا كانت الأخطاء الكبيرة مثلا مرتبطة بمعالجة معينة فإن استخدام تقدير شامل لخطأ التجريب ، وهو الإجراء المتبع عادة ، لا يكون إجراء سليماً يعتمد عليه في اختبارات الدلالة . على أن تطبيق مبدأ العشوائية سابق الذكر يضمن إلى حد كبير تحقيق هذا الافتراض . كما يسهم في تحقيقه استخدام مجموعات من المشاهدات (مأخوذة من سلسلة من التجارب) بدلا من استخدام مجموعة واحدة من المشاهدات .

(ثالثا) النموذج الإحصائى : STATISTICAL MODEL

كما يقتضي التحليل الإحصائي وضع نموذج يرشدنا إلى الأسس الإحصائية التي تحدد أسلوب هذا التحليل ، وتعكس حدوده تأثيرات العوامل أو المتغيرات التي تدخل في التجريب . وترتبط بكل نموذج افتراضات خاصة تتعلق بتوزيعات هذه المتغيرات أو باستقلالها أو بالصورة الرياضية التي يأخذها النموذج لوصف وحدات التجريب ... وكلما كان النموذج ناجحاً في تصوير التجربة الفعلية كلما كانت النتائج التي نحصل عليها من تحليل البيانات أكثر صدقاً .

(رابعاً) مسائل أخرى :

ينبغى أن يجيب تصميم التجربة على تساؤلات عدة منها :

(أ) ما هو الحجم المناسب للعينة ؟

(ب) متي يتعين تكرير التجربة برمتها ؟

(جـ) متي نحتاج إلى إدخال مجموعة مراقبة ؟ control group

(د) ما الطريقة العملية لتطبيق مبدأ العشوائية ؟

(هـ) ما مدى الدقة والضبط اللازمين في عملية القياس ؟

(٨ - ٢) تحليل التباين :

كثيراً ما نلاحظ وجود اختلاف في قيم متغير ما لا نعرف سببه أو مصدره ولا نستطيع التحكم فيه . ومن أمثلة ذلك الاختلاف المشاهد في الزيادة الشهرية في أوزان مجموعة من الماشية حتي لو وضعت في ظروف واحدة وتحت نظام غذائي مشترك ، كذلك الاختلاف المشاهد في نمو وحدات نبات مزروع في حقل تحت نفس الظروف ... إن مثل هذا الاختلاف نصفه بأنه **اختلاف عشوائي** .

على أننا في كثير من التجارب ندخل سبباً إضافياً للاختلاف في قيم المتغير نعلم مصدره ، فمثلا قد نقسم مجموعة الماشية إلى عدة أقسام يتلقي كل منها نظاماً مختلفاً للتغذية ، أو قد يقسم الحقل إلى عدة أحواض يتلقي كل منها نوعاً مختلفاً من المخصبات أو طرقاً مختلفة للرى ونقول حينئذ أننا أدخلنا عاملا factor معيناً في التجربة . والعامل هو متغير نوعى يتألف من عدد من المعالجات treatments أو التقسيمات المرتبطة تسمى مستويات العامل levels فالعامل « نظام التغذية » قد يتكون من ٤ مستويات والعامل « نوع المخصب » قد يتكون من ٣ مستويات وهكذا ..

ومن الواضح أن الهدف من إدخال العامل معرفة ما إذا كانت المستويات المختلفة (لنظام التغذية مثلا) تحدث تأثيرات مختلفة في قيم المتغير (الزيادة في الوزن)

وهذا هو الغرض الذى تستخدم من أجله عملية تحليل التباين . وتؤسس هذه العملية على تصميم تجربة تمكننا من أن نفصل الاختلاف الذى سببه العامل عن الاختلاف العشوائي ، فإذا ظهر لنا أن ذلك الاختلاف جوهرى حكمنا بأن عامل التقسيم هو عامل مؤثر في قيم المتغير وتصدينا بعد ذلك للمقارنة بين مستويات هذا العامل .

فتحليل التباين هو عملية نستطيع بواسطتها أن نحلل الاختلاف الكلى المشاهد في مجموعة من البيانات إلى مركبتين أو أكثر يرجع كل منها إلى عامل أو مصدر مستقل ، وإذا كانت هذه البيانات من عينة عشوائية مأخوذة من مجتمع معتدل ذى تباين معين فإن كلا من هذه المركبات يعطى تقديراً مستقلا لهذا التباين ، والتقديرات الناتجة يمكن اختبار تجانسها بواسطة اختبار ف .

وفي التجارب التي نبحث فيها تأثير عامل واحد – كما في الأمثلة سابقة الذكر – يحلل الاختلاف الكلى إلى مركبتين مستقلتين إحداهما تناظر هذا العامل والأخرى تناظر الاختلاف العشوائي . وفي التجارب التي نبحث فيها تأثير عاملين مستقلين ، مثلا نوع الغذاء كأحد العاملين وكمية الغذاء كعامل ثان ، نحلل الاختلاف الكلى إلى ثلاث مركبات مستقلة اثنتان منهما تناظران العاملين والثالثة تناظر الاختلاف العشوائي ، وهكذا في حالة وجود أكثر من عاملين .

وفي بحثنا عن كيفية تحليل التباين نحتاج إلى المصطلحات والتعاريف المبينة في البند التالي .

(٨ – ٣) مصطلحات وتعاريف :

(ا) مجموع المربعات (م م) : SUM OF SQUARES (SS)

إذا كان لدينا مجموعة من القيم $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، . . . ، $س_{ن}$ فإن مجموع مربعات

انحرافات هذه القيم عن وسطها الحسابي $\bar{س}$ يسمى اختصارا بمجموع المربعات ونرمز له بالرمز م م ، أى أن :

$$\text{م م} = \sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2$$

$$= \sum_ر س_ر^2 - \frac{\text{م}^2}{ن} \qquad \text{حيث } \text{م} = \sum_ر س_ر = \text{مجموع القيم .}$$

ويتخذ م م كمقياس للاختلاف variation في هذه القيم . ويلاحظ أن قيمة م م لا تتغير إذا جمعنا أو طرحنا عددا ثابتا من جميع القيم .

(ب) درجات الحرية (ν) أو (د . ح)

DEGREES OF FREEDOM

يستخدم مصطلح « درجات الحرية » فى الإحصاء التطبيقى للتعبير عن عدد المقادير المستقلة خطيا فى مجموع المربعات . فمثلا القيم $س_1$ ، $س_2$ ، . . . ، $س_ن$ هى ن من المقادير المستقلة ولكن نظرا لأن $\sum (س_ر - \bar{س}) = 0$ فإن المقادير $(س_ر - \bar{س})$ لا تكون مستقلة خطيا لأنه يمكن اشتقاق واحد منها من الآخرين ولذلك يكون لمجموع مربعاتها $\sum (س_ر - \bar{س})^2$ درجات حرية عددها $ن - 1$.

كقاعدة عامة ، يحسب عدد درجات الحرية لإحصاءة ما كالآتي :

= عدد المشاهدات المستقلة المسببة للاختلاف – عدد البارامترات المستقلة التي قدرت من العينة عند حساب هذا الاختلاف .

وفى تحليل التباين نستخدم التعريف الإجرائي الآتي لدرجات الحرية لأى مصدر من مصادر الاختلاف .

= عدد الانحرافات المربعة – عدد النقط (المحاور) المستقلة التي أخذت حولها هذه الانحرافات . (يلاحظ أن عدد النقط أو المحاور هذه هى عدد القيود الخطية التي فرضت على تقدير الاختلاف) .

(حـ) متوسط المربعات (ع٢) أو (ط م) MEAN SQUARE (MS)

هــو خــارخ قسمــة مجمــوع المـربعـات علــى عــدد درجـات الحـريـة أى ع٢= م م / لا ويسمى هذا بالتباين ، غير أن التعبير متوسط المربعات هوتعبير أكثر عمومية .

(٨ - ٤) التجارب ذوات العامل الواحد :

SINGLE FACTOR EXPERIMENTS

في هذه التجارب يكون اهتمامنا منصبا على دراسة عامل واحد فقط ، وليكن نظام التغذية ، من حيث تأثيره على متغير ما وليكن الزيادة في وزن نوع من البقر في مدة ما . ولا يغرب عن بالنا هنا إمكانية وجود مصادر أو عوامل أخرى ذات تأثير على هذا المتغير مثل عمر البقر وجنسه ووزنه الأصلى .. ولذلك ينبغى أن نعمل على تحييد تأثير هذه العوامل ومنع تداخل هذا التأثير مع التأثير الذى يحدثه العامل الذى ندرسه .

ولتحقيق هذا الغرض يلجأ بعض الباحثين إلى تصميم تجربة يتحكم فيها تحكما كاملا في هذه العوامل فيقوم بتثبيتها عند مستويات محددة فيختار مجموعة من البقر في نفس العمر ومن نفس الجنس ونفس الوزن .. ويسمح فقط بتغيير عامل التغذية وذلك بتقسيم مجموعة البقر إلى عدة أقسام ومعالجة كل قسم بواحد من مستويات نظام التغذية ، وبهذا يخلى مسئولية أى من تلك العوامل مما قد يظهر من فروق جوهرية بين هذه المستويات . غير أن النتائج التى تسفر عنها هذه الطريقة تكون **مشروطة** بتوفر الظروف الخاصة التي هيئت لها التجربة من حيث العمر والجنس والوزن .. وقد لا تكون هذه النتائج صحيحة إذا ما تغير أى من هذه الظروف ، وبالتالى لا تعطى التجربة قدرا كافيا من المعلومات التي ينشدها الباحث . ومن ناحية أخرى من الصعب عمليا بل ومن المستحيل أحيانا التحكم في التجربة وضبط تلك العوامل الخارجية عند مستوى مشترك بالدقة الكافية .

ولذلك يفضل الباحثون تصميم تجربة على النقيض من ذلك ، فبدلا من أن نتحكم في العوامل الخارجية بوضعها عند مستويات خاصة ، نقوم **بتعشية** هذه العوامل بحيث يكون لكل مستوى من مستويات العامل الذى ندرسه نفس الفرصة للتعرض لها ، وبهذا يحق لنا ضم تأثير هذه العوامل تحت كلمة عامة هى **الاختلاف العشوائي** أو خطأ التجريب أو الصدفة . فإذا كان لدينا ٢٨ بقرة و٤ مستويات من نظام التغذية نرقم البقر من ١ إلى ٢٨ بصرف النظر عن العمر والجنس والوزن لتقسيم البقر عشوائيا إلى ٤ أقسام يحتوى كل منها على ٧ بقرات لتتلقي واحدا من مستويات نظام التغذية . إن مثل هذا التصميم يسمى **بالتصميم كامل التعشية** completely randomized design وهو ذلك التصميم الذى يبني لا على أساس التحكم في المصادر الخارجية وإنما على أساس تعشية هذه المصادر بحيث يمكن ضم الاختلافات الناشئة عنها تحت اسم **الاختلاف العشوائي** .

على أن طريقة التعشية في الحماية من تأثير العوامل الخارجية هى عملية مبنية على أساس احتمالى ، فقد تسفر هذه الطريقة عن أن يشتمل أحد الأقسام على ٧ بقرات كلها من الإناث أو كلها من صغار السن – وإن كان هذا أمرا بعيد الاحتمال – وهذا أحد الأسباب التي تجعل بعض الباحثين يميل إلى استخدام تصميم وسط بين النقيضين المذكورين وذلك بالتحكم في بعض العوامل وتعشية البعض الآخر . وسنعود إلى هذا الموضوع فى البند (٨ — ٧) تحت عنوان المقارنات التزاوجية.

اعتبر عينة عشوائية حجمها ن مأخوذة من متغير معتدل س وسطه الحسابى μ وتباينه σ^2 . افرض أن هذه العينة قسمت عشوائياً إلى ك من الأقسام تلقت كل منها واحداً من مستويات عامل ما (نظام الغذاء – نوع المخصب – طريقة الرى – ...) وجاءت البيانات كما يلي ، حيث $س_{رو}$ ترمز إلى قيم المتغير الذى ندرسه (مقدار المحصول مثلا) ، وحيث ر ، و ترمزان على الترتيب إلى رقم الصف ورقم العمود الذى تقع فيه القيمة $س_{رو}$.

	الأقسام (المعالجات)							
	(١)	(٢)	(٣)	...	(ق)	...	(ك)	
	$س_{١١}$	$س_{١٢}$	$س_{١٣}$	...	...	...	$س_{١ك}$	
	$س_{٢١}$	$س_{٢٢}$	$س_{٢٣}$	...	...	...	$س_{٢ك}$	
	$س_{٣١}$	$س_{٣٢}$	$س_{٣٣}$	...	...	...	$س_{٣ك}$	
	...	...	...	...	...	...	...	
	...	...	...	...	...	...	...	
	$س_{ر١}$	$س_{ر٢}$	$س_{ر٣}$	...	$س_{رق}$	...	$س_{رك}$	
	...	...	...	...	...	...	...	
	$س_{ن_١ ١}$	$س_{ن_٢ ٢}$	$س_{ن_٣ ٣}$	...	...	...	$س_{ن_ك ك}$	
$ن_ق$	$ن_١$	$ن_٢$	$ن_٣$	...	$ن_ق$	...	$ن_ك$	$ن = مجـ ن_و$
$م_ق$	$م_١$	$م_٢$	$م_٣$	...	$م_ق$	...	$م_ك$	$م = مجـ م_و$
$\overline{س}_ق$	$\overline{س}_١$	$\overline{س}_٢$	$\overline{س}_٣$	...	$\overline{س}_ق$	...	$\overline{س}_ك$	$\overline{س} = مجـ م_و / ن$

$ن_و$ ترمز إلى عدد قيم المتغير فى القسم و (و = ١ ، ٢ ، ... ، ك)

، ن ترمز إلى العدد الكلى لقيم المتغير

، $م_و$ ترمز إلى مجموع قيم المتغير فى القسم و

، $\overline{س}_و$ ترمز إلى متوسط قيم المتغير فى القسم و ، $\overline{س}$ ترمز إلى المتوسط العام.

المطلوب بحث ما إذا كان المجتمع متجانساً بالنسبة لهذا التقسيم أى ما إذا كانت مستويات هذا العامل تحدث تأثيرات متساوية في قيم المتغير س .

(٨ – ٤ – ١) النموذج الإحصائي (النموذج I) :

كما سبق القول يعتمد التحليل الإحصائى على اختيار نموذج يعبر عن تركيب أى عنصر مشاهد فى التجربة ويبرر ما يجرى من عمليات مصحوباً بافتراضات يقتضيها البناء الرياضي الذى تقوم عليه عملية التحليل . وسنفترض هنا ما يلي :

(١) المجتمع العام الذى أخذت منه وحدات التجريب هو مجتمع **معتدل** وسطه الحسابي μ وتباينه $\sigma^{٢}$.

(٢) مجموعات الوحدات في الأقسام ١ ، ٢ ، ... ، ك التي تلقت مستويات مختلفة من عامل التجريب تشكل عينات عشوائية **مستقلة** مأخوذة من ك من المجتمعات **المعتدلة** أوساطها الحسابية $\mu_{١}$ ، $\mu_{٢}$ ، ... ، $\mu_{ك}$ ولها تباين مشترك $\sigma^{٢}$ ($\sigma_{١}^{٢} = \sigma_{٢}^{٢} = ... = \sigma_{ك}^{٢} = \sigma^{٢}$) .

(٣) أى وحدة مشاهدة $س_{ر و}$ تخضع للنموذج الخطى الآتي :

$$س_{ر و} = \mu_{و} + خ_{ر و} \qquad ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن_{و} \qquad (١)$$

حيث $\mu_{و}$ هو الوسط الحسابي لمجتمع القسم و (و = ١ ، ٢ ، ... ، ك) .
، $خ_{ر و} = س_{ر و} - \mu_{و}$ هو خطأ التجريب بالنسبة للوحدة $س_{ر و}$ التي في الصف ر والعمود (القسم) و أى أن قيم $خ_{ر و}$ تعبر عن الفروق العشوائية بين الوحدات داخل القسم و ، وسنفرض أنه في مجتمع القيم $خ_{ر و}$ تكون هذه القيم مستقلة ويكون هذا المجتمع معتدلا وسطه الحسابي صفر وتباينه $\sigma^{٢}$.

ومن المعتاد أن يكتب النموذج (١) كالآتي :

$$س_{ر و} = \mu + \alpha_{و} + خ_{ر و} \qquad (٢)$$

حيث $\alpha_{و} = \mu_{و} - \mu$ = انحراف متوسط مجتمع القسم و عن متوسط المجتمع العام ، وهذا الرمز يصلح للتعبير عن متوسط أثر المستوى و لعامل التقسيم .

وسنعتبر أن هذا الأثر ثابت لكل وحدة بالقسم ق وأنه يختلف من قسم إلى آخر ، بمعنى أن كل عنصر من عناصر القسم الأول يتأثر (بالزيادة أو النقصان) بمقدار ثابت α_1 وكل عنصر من عناصر القسم الثانى يتأثر بمقدار ثابت α_2 وهكذا ... ولذلك يسمى هذا النموذج بالنموذج ثابت التأثيرات fixed effects model تمييزا له عن النموذج عشوائى التأثيرات random effects model حيث لا تتأثر عناصر الأقسام بمقادير ثابتة بل بمقادير عشوائية . وسوف نتناول هذا النموذج فى البند (٨ - ١٤) .

إن هذا النموذج هو الأساس الذى يبنى عليه التحليل ، فهو أولا يفترض أن أى قيمة مشاهدة $س_{رو}$ يمكن تجزئتها إلى مركبات تعزى إلى مصادر منطقية متميزة نتبينها كالآتى :

من (٢) : $س_{رو} = \mu + (\mu_و - \mu) + (س_{رو} - \mu_و)$ (٣)

ومن هذه الصيغة نرى أن $س_{رو}$ وهى القيمة المشاهدة فى الصف ر من القسم و تساوى المتوسط العام للمجتمع + تأثير يرجع إلى المعالجة التى تلقتها وحدات القسم و + تأثير عشوائى داخل القسم و .

كما أن هذا النموذج يحدد العلاقة بين الاختلافات الناشئة عن مختلف المصادر أو العوامل المؤثرة فى عملية التجريب :

من (٣) : $س_{رو} - \mu = (\mu_و - \mu) + (س_{رو} - \mu_و)$

أو $(س_{رو} - \bar{س}) = (\bar{س}_و - \bar{س}) + (س_{رو} - \bar{س}_و)$ (٤)

وذلك بوضع المتوسطات $\bar{س}$ ، $\bar{س}_و$ الناتجة فى العينة بدلا من المتوسطات النظرية المجهولة μ ، $\mu_و$. بتربيع كل من الطرفين والجمع على جميع قيم ر ، و تنتج المتطابقة الآتية :

$$\sum_و \sum_ر (س_{رو} - \bar{س})^2 = \sum_و ن_و (\bar{س}_و - \bar{س})^2 + \sum_و \sum_ر (س_{رو} - \bar{س}_و)^2 \quad (٥)$$

وهذه العلاقة صحيحة دائما سواء كانت المجتمعات معتدلة أو غير معتدلة ، وهى العلاقة الأساسية فى تحليل التباين ، وتشير إلى أن الاختلاف الكلى فى بيانات التجربة وهو مجـ مجـ $(سـ_{رو} - \overline{سـ})^2$ يتحلل إلى المركبتين الآتيتين :

(ا) المركبة $مجـ_{و}\ ن_{و}\ (\overline{سـ}_{و} - \overline{سـ})^2$

وهى تعبر عن الاختلاف بين متوسطات الأقسام (مرجحة بأعداد عناصر هذه الأقسام) ويرجع هذا الاختلاف بالطبع إلى عامل التقسيم ، أى إلى اختلاف تأثير مستويات عامل التجريب على قيم المتغير سـ . ونرمز لهذا الاختلاف بالرمز م م (بين الأقسام) وعدد درجات حريته ν_2 = ك ـــ ١ لأن هناك ك من الانحرافات المربعة وأخذت جميعها حول محور واحد هو $\overline{سـ}$.

(ب) المركبة مجـ مجـ $(سـ_{رو} - \overline{سـ}_{و})^2$

وهى تعبر عن مجموع الاختلافات العشوائية داخل الأقسام ، مع ملاحظة أن لكل قسم و اختلاف عشوائى قدره $مجـ_{ر}\ (سـ_{رو} - \overline{سـ}_{و})^2$ بدرجات حرية $ن_{و} - ١$ وإذن مجموع الاختلافات العشوائية داخل الأقسام كلها هو $مجـ_{و}\ مجـ_{ر}$ $(سـ_{رو} - \overline{سـ}_{و})^2$ بدرجات حرية عددها $\nu_3 = مجـ_{و}\ (ن_{و} - ١) = ن - ك$. ونرمز لهذا الاختلاف بالرمز م م (داخل الأقسام) .

وإذا رمزنا للاختلاف الكلى بالرمز م م (الكلى) بدرجات حرية ν_1 = ن −١ فإن المتطابقة (٥) تكتب كالآتى :

الاختلاف الكلى = الاختلاف بين الأقسام + الاختلاف داخل الأقسام .
أى م م (الكلى) = م م (بين الأقسام) + م م (داخل الأقسام) .

حيث $\nu_1 = \nu_2 + \nu_3$ لأن ن − ١ = (ك − ١) + (ن − ك)

من هذا نحصل على متوسط المربعات لكل من المركبتين كالآتي :

$ع^2_ب$ = م م (بين الأقسام) / (ك − ١)

، $ع^2_خ$ = م م (داخل الأقسام) / (ن − ك)

تحت الفروض سابقة الذكر نستطيع أن نثبت رياضياً أن $ع^2_ب$ ، $ع^2_خ$ هما تقديران مستقلان لتباين المجتمع σ^2 . غير أن التقدير الثاني ($ع^2_خ$) هو تقدير غير متحيز لتباين المجتمع بمعني أن متوسط مثل هذه التقديرات يكون على المدى البعيد مساوياً للتباين σ^2 ، أما التقدير الأول ($ع^2_ب$) فهو تقدير متحيز للتباين σ^2 إذ أن متوسط مثل هذه التقديرات على المدى البعيد $\sigma^2 + \frac{1}{ك - 1}$ مج $ن_ى (\mu_ى - \mu)^2$ أى يزيد عنه ولا يكون مساوياً له إلا إذا كانت المتوسطات μ_1 ، μ_2 ، . . . ، $\mu_ك$ متساوية جميعا . وعلى ذلك فإن أى فرق جوهرى بين التقديرين $ع^2_ب$ ، $ع^2_خ$ لا ينتج إلا من وجود فرق جوهرى بين هذه المتوسطات .

(٨ − ٤ − ٢) اختبار تجانس المجتمع بالنسبة لعامل التقسيم :

إن الفرض الصفرى هو أن المجتمع متجانس بالنسبة لعامل التقسيم وهذا يتضمن أن يكون للمجتمعات المعتدلة للأقسام نفس الخواص الإحصائية ، وبصفة خاصة :

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_ك \text{ ، } \sigma^2_1 = \sigma^2_2 = \ldots = \sigma^2_ك = \sigma^2$$

وإذا كان هذا الفرض صحيحاً ، ونظراً لأن $ع^2_ب$ ، $ع^2_خ$ هما تقديران مستقلان للتباين σ^2 لمجتمع معتدل فإن نسبة التباين

$$ف = \frac{ع^2_ب}{ع^2_خ} \qquad (٦)$$

يكون توزيعها مطابقاً لتوزيع المتغير ف بدرجتي حرية (ك − ١ ، ن − ك) − راجع البند (٦ − ٨) . وعلى ذلك يمكن استخدام اختبار ف للحكم على هذا التجانس وبالتالى للحكم على تساوى تلك المتوسطات .

أما الفرض الآخر $ف_{١}$ فهو أن الاختلاف الناشيء عن عامل التقسيم (بين المتوسطات) أكبر مما نتوقعه من اختلاف عشوائي في عينة من مجتمع متجانس بالنسبة لعامل التقسيم ، ولذلك فإن هذا الاختبار **يكون دائماً ذا جانب واحد** .

(٨ – ٤ – ٣) طريقة مختصرة لحساب الاختلاف :

لتسهيل حساب القيم العددية لمجاميع المربعات الثلاثة المبينة بالمتطابقة (٥) نستخدم الصيغ الآتية التي يمكن برهنتها رياضياً .

$$(١)\ م\,م\ (\text{الكلى}) = مجـ\ مجـ\ س^{٢}_{ر\,و} - \frac{م^{٢}}{ن} \qquad \text{حيث}\ \nu_{١} = ن - ١$$

$$(٢)\ م\,م\ (\text{بين الأقسام}) = مجـ\ \frac{م^{٢}_{و}}{ن_{و}} - \frac{م^{٢}}{ن} \qquad \text{حيث}\ \nu_{٢} = ك - ١$$

$$(٣)\ م\,م\ (\text{داخل الأقسام}) = (١) - (٢) \qquad \text{حيث}\ \nu_{٣} = ن - ك$$

وتوضع هذه القيم عادة في جدول يسمى بجدول التباين يأخذ الصورة الآتية :

الجدول (٨ – ٢)

جدول التباين للتجارب ذوات العامل الواحد

مصدر التباين	م م	د ح	تقدير التباين	$ف_{ح}$
بين الأقسام	(٢)	ك – ١	$ع^{٢}_{ب}$	$ع^{٢}_{ب} / ع^{٢}_{خ}$
داخل الأقسام	(١) – (٢)	ن – ك	$ع^{٢}_{خ}$	
المجموع	(١)	ن – ١		

ملاحظة (١) :

يفضل أن تكون حجوم العينات في الأقسام المختلفة متساوية أى $ن_1 = ن_2 = \ldots = ن_ه = ا$ مثلا لأنه في هذه الحالة لا يكون تحليل التباين حساساً للانحرافات الصغيرة عن فرض تساوى التباينات في مجتمعات الأقسام . هذا بالإضافة إلى تسهيل حساب مجاميع المربعات بين الأقسام حيث تكتب كما يلى :

$$م\ م\ (\text{بين الأقسام}) = \frac{مجـ\ م_ه^2}{ا} - \frac{م^2}{ن}$$

ملاحظة (٢) :

لا تتأثر نتائج تحليل التباين بأى حال إذا جمعنا أو طرحنا عدداً ثابتاً من جميع قيم وحدات التجريب .

مثال (٨ – ١) :

البيانات التى بالجدول (٨ ـــ ٣) نتجت عن تجربة في فسيولوجيا النبات ، وهى تعطى الطول (بوحدات شفرية) لمقاطع من نبات البسلة تركت لتنمو في مزرعة نسيجية في وجود هرمون الأوكسين ، وكان الهدف من التجربة اختبار تأثير إضافة أربعة أنواع من السكريات على النمو مقاساً بواسطة الطول .

(على فرض أن مبادىء العشوائية والاعتدالية قد روعيت في إجراء التجربة .)

الحل :

الفرض الصفرى ف هو أن المجتمع (المعتدل) الذى أخذت منه العينة متجانس بالنسبة لعامل التقسيم (نوع السكر) أى أن $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$. والفرض الآخر $ف_1$ هو : على الأقل اثنان من المتوسطات غير متساويين .

جدول (٨ - ٣)

	المعالجات (١) +٢٪ جلوكوز	(٢) +٢٪ فركتوز	(٣) +١٪ جلوكوز +١٪ فركتوز	(٤) +٢٪ سكروز	(٥) مراقبة	
	٥٧	٥٨	٥٨	٦٢	٧٥	
	٥٨	٦١	٥٩	٦٦	٦٧	
	٦٠	٥٦	٥٨	٦٥	٧٠	
	٥٩	٥٨	٦١	٦٣	٧٥	
	٦٢	٥٧	٥٧	٦٤	٦٥	
	٦٠	٥٦	٥٦	٦٢	٧١	
	٦٠	٦١	٥٨	٦٥	٦٧	
	٥٧	٦٠	٥٧	٦٥	٦٧	
	٥٩	٥٧	٥٧	٦٢	٧٦	
	٦١	٥٨	٥٩	٦٧	٦٨	
$ن_ي$	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	ن = ٥٠
$مج_ي$	٥٩٣	٥٨٢	٥٨٠	٦٤١	٧٠١	مج = ٣٠٩٧
$\bar{س}_ي$	٥٩,٣	٥٨,٢	٥٨	٦٤,١	٧٠,١	$\bar{س}$ = ٦١,٩٤

م م (الكلى) = $٥٧^{٢} + ٥٨^{٢} + \ldots + ٥٨^{٢} + ٦١^{٢} + \ldots + ٥٨^{٢}$

$+ ٥٩^{٢} + \ldots + ٦٢^{٢} + ٦٦^{٢} + \ldots + ٧٥^{٢} + ٦٧^{٢} + \ldots + ٦٨^{٢}$

$- \frac{(٣٠٩٧)^{٢}}{٥٠}$

= ١٩٣١٥١ − ١٩١٨٢٨,١٨ = ١٣٢٢,٨٢

حيث $\nu_{١}$ = ن − ١ = ٤٩

م م (بين الأقسام) = $\frac{(٥٩٣)^{٢}}{١٠}$ + $\frac{(٥٨٢)^{٢}}{١٠}$ + ... + $\frac{(٧٠١)^{٢}}{١٠}$ − $\frac{(٣٠٩٧)^{٢}}{٥٠}$

= ١٩٢٩٠٥,٥٠ − ١٩١٨٢٨,١٨ = ١٠٧٧,٣٢

حيث $\nu_{٢}$ = ك − ١ = ٤

م م (داخل الأقسام) = ١٣٢٢,٨٢ − ١٠٧٧,٣٢ = ٢٤٥,٥٠

حيث $\nu_{٣}$ = ن − ك = ٤٥

نضم هذه النتائج في جدول التباين الآتي :

جدول (٨ − ٤)

مصدر الاختلاف	مجموع المربعات	درجات الحرية	تقدير التباين	ف$_{ى}$
بين الأقسام (المعالجات)	١٠٧٧,٣٢	٤	٢٦٩,٣٣	٤٩,٣٣**
داخل الأقسام (خطأ التجريب)	٢٤٥,٥٠	٤٥	٥,٤٦	
المجموع	١٣٢٢,٨٢	٤٩		

من جدول ف ، وعند درجتي الحرية ٤ ، ٤٥ نجد أن :

ف$_{٠,٠٥}$ = ٢,٥٨ ، ف$_{٠,٠١}$ = ٣,٧٧ ، ف$_{٠,٠٠١}$ = ٥,٥٧

الاستنتاج :

نظرا لأن ف$_{ى}$ = ٤٩,٣٣ أكبر بكثير من أي من هذه القيم فإننا نرفض الفرض الصفرى عند مستوى عالى من الدلالة ونحكم بأن الأنواع المختلفة من السكريات ليستِ متساوية في تأثيرها على نمو مقاطع نبات البسلة .

ملاحظة (٣) :

في نسبة التباين ف نضع $ع^{٢}_{ب}$ دائماً في البسط و$ع^{٢}_{خ}$ في المقام وإذا حدث أن كانت $ع^{٢}_{ب}$ أصغر من $ع^{٢}_{خ}$ أى كانت ف < ١ نقبل الفرض الصفرى فوراً دون حاجة إلى إيجاد أى قيمة حرجة من الجدول لأن جميع هذه القيم أكبر من الواحد حين تزيد كل من درجتي الحرية عن الواحد .

ملاحظة (٤) :

حين يكون عدد الأقسام ك = ٢ تكون نتيجة تحليل التباين مطابقة للنتيجة التي نحصل عليها باستخدام اختبار ت وتكون ف (١ ، ن − ١) = $ت^{٢}$ (ن − ١) . ولذلك يمكن أن نعتبر أن اختبار ت للفرق بين متوسطى مجتمعين معتدلين هو حالة خاصة من اختبار ف .

(٨ − ٥) المقارنة بين المتوسطات :

في البند السابق أجرينا تحليلا للتباين المشاهد في البيانات التي أسفرت عنها التجربة ، غير أن هذا التحليل ليس إلا الخطوة الأولى لدراسة نتائج التجربة وينبغى أن يستكمل بإجراء مقارنات بين بعض أزواج هذه المتوسطات أو بين مجموعات منها . ودراسة هذه المقارنات قد يكون أكثر أهمية من التحليل العام . وهناك نوعان من المقارنات هما :

(أ) المقارنات القَبْلية — A priori (or planned) comparisons

(ب) المقارنات البَعْدية — A postiori (or unplanned) comparisons

ولعل سبب التمييز بين هذين النوعين هو اختلاف اختبارات الدلالة فيهما، كما سيتبين بعد .

(٨ – ٥ – ١) الاختبارات القَبْلية :

هى تلك الاختبارات التي كان مخططاً لها أثناء تصميم التجربة (وقبل إجرائها) . ففي المثال (٨ – ١) كان مخططاً لاختبار تأثير إضافة السكريات ضد مجموعة المراقبة ، كما كان مخططاً لاختبار ما إذا كانت السكريات النقية ككل (جلوكوز – فركتوز – سكروز) تختلف في تأثيرها عن السكريات المختلطة (١٪ جلوكوز + ١٪ فركتوز) .

إن مثل هذه الاختبارات تجرى بصرف النظر عن النتيجة العامة لتحليل التباين أى سواء رفضنا أو قبلنا الفرض الصفرى عن تساوى المتوسطات .

والقاعدة التي نتبعها للمقارنة هى نفس القاعدة العامة وليس علينا إلا مراعاة أن نتناول فقط البيانات التي بالأقسام التي نرغب في مقارنتها ، وأن ننسب تقدير التباين الناتج منها إلى تقدير التباين (داخل الأقسام) السابق إيجاده في التحليل العام وهو $ع^{٢}_{خ}$ لأن هذا التقدير مبني على جميع ما لدينا من بيانات (وليس على جزء منها) فهو أقدر على تقدير تباين المجتمع $\sigma^{٢}$.

والأمثلة الآتية هى استكمال لدراسة التجربة التي بالمثال (٨ – ١) .

مثال (٨ – ٢) مقارنة مجموعة المراقبة ضد المجموعات الأخرى :

ابحث ما إذا كانت إضافة السكريات تؤثر في نمو مقاطع البسلة .

الحل :

الفرض الصفرى هو أن متوسط مجموعات السكريات الأربعة مجتمعة يساوى متوسط مجموعة المراقبة . نعتبر أن لدينا قسمين يتألف الأول من الأقسام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ وبها ٤٠ عنصراً ، مجموع قيمها ٢٣٩٦ ، ومتوسطها ٥٩,٩ ، ويتألف

الثاني من قسم المراقبة وبه ١٠ عناصر مجموع قيمها ٧٠١ ومتوسطها ٧٠,١ ويكون المجموع الكلى لقيم العناصر التي اخترناها لهذه الدراسة ٣٠٩٧ .

$$\text{م م (السكريات ضد المراقبة)} = \frac{\text{٢٣٩٦}^{٢}}{\text{٤٠}} + \frac{\text{٧٠١}^{٢}}{\text{١٠}} - \frac{\text{٣٠٩٧}^{٢}}{\text{٥٠}}$$

$$= \text{٨٣٢,٣٢} \quad \text{حيث} \quad \nu_{٢} = ٢ - ١ = ١$$

$$\text{تقدير التباين بين القسمين} \quad = \text{ع}^{٢}_{\text{ب}} = \text{٨٣٢,٣٢} \div ١ = \text{٨٣٢,٣٢}$$

$$\text{ف}_{\text{ى}} = \frac{\text{٨٣٢,٣٢}}{\text{٥,٤٦}} = \text{١٥٢,٤٤}$$

$$\text{من الجدول : } \text{ف}_{\text{٠,٠١} \; [\text{١ ، ٤٥}]} = \text{٧,٢٣}$$

نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠١ ونظراً لأن متوسط السكريات يقل عن متوسط المراقبة نستنتج أن إضافة السكريات يؤخر نمو مقاطع نبات البسلة .

مثال (٨ – ٣) مقارنة السكريات النقية ضد السكر الخليط :

قارن تأثير إضافة السكريات النقية (مجتمعة) وتأثير إضافة السكر الخليط .

الحل :

الفرض الصفرى هو أن متوسط أقسام السكريات النقية معاً يساوى متوسط قسم السكريات الخليط .

نعتبر هنا أيضاً أن لدينا قسمين يتألف الأول من الأقسام ١ ، ٢ ، ٤ ككل وبها ٣٠ عنصراً مجموع قيمها ١٨١٦ ومتوسطها ٦٠,٥٣ ويتألف الثاني من القسم ٣ وبه ١٠ عناصر مجموع قيمها ٥٨٠ ومتوسطها ٥٨ ويكون المجموع الكلى لقيم العناصر التي اخترناها للدراسة ٢٣٩٦ .

م ٢ (سكريات نقية ضد سكريات خليط) = $\frac{١٨١٦^{٢}}{٣٠} + \frac{٥٨٠^{٢}}{١٠} - \frac{٢٣٩٦^{٢}}{٤٠}$

= ٤٨,١٣ حيث $\nu_{٢}$ = ٢ − ١ = ١

ف$_{ى}$ = $\frac{٤٨,١٣}{٥,٤٦}$ = ٨,٨٢

من الجدول : ف$_{٠,٠١ \; [١ ، ٤٥]}$ = ٧,٢٣

نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠١ ، ونظراً لأن متوسط مجموعة السكريات النقية أكبر من متوسط مجموعة السكر الخليط نستنتج أن إضافة السكريات النقية يؤخر نمو النبات بدرجة أقل مما يؤخره السكر الخليط .

مثال (٨ – ٤) مقارنة مجموعات السكريات النقية معاً :

ابحث ما إذا كان هناك فرق جوهرى بين تأثير السكريات النقية الثلاثة .

الحل :

الفرض الصفرى هو عدم وجود فروق بين متوسطات الأقسام الثلاثة . نعتبر هنا أن لدينا ثلاثة أقسام ١ ، ٢ ، ٤ مجموع قيمها ١٨١٦ .

م ٢ (بين الأقسام) = $\frac{٥٩٣^{٢}}{١٠} + \frac{٥٨٢^{٢}}{١٠} + \frac{٦٤١^{٢}}{١٠} - \frac{١٨١٦^{٢}}{٣٠}$

= ١٩٦,٨٧ حيث $\nu_{٢}$ = ٣ − ١ = ٢

تقدير التباين بين الأقسام = ع$^{٢}_{ب}$ = ١٩٦,٨٧ ÷ ٢ = ٩٨,٤٣٥

ف$_{ى}$ = $\frac{٩٨,٤٣٥}{٥,٤٦}$ = ١٨,٠٦

من الجدول نجد أن $ف_{٠,٠١\,[٢ ، ٤٥]}$ تقع بين ٥,١٨ ، ٤,٩٨

وإذن نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠١ ونستنتج أن السكريات النقية تختلف في تأثيرها ، ويبدو أن هذا الاختلاف يرجع إلى السكروز الذى له متوسط أعلى بكثير من متوسط النوعين الآخرين .

نستطيع تلخيص ما توصلنا إليه حتي الآن في الجدول الآتي :

جدول (٨ - ٥)

مصدر الاختلاف	مجموع المربعات	درجات الحرية	تقدير التباين	$ف_ى$
بين الأقسام	١٠٧٧,٣٢	٤	٢٦٩,٣٣	٤٩,٣٣**
المراقبة ضد السكريات	٨٣٢,٣٢	١	٨٣٢,٣٢	١٥٢,٤٤**
السكريات النقية ضد الخليط	٤٨,١٣	١	٤٨,١٣	٨,٨٢**
بين السكريات النقية	١٩٦,٨٧	٢	٩٨,٤٤	١٨,٠٣**
داخل الأقسام	٢٤٥,٥٠	٤٥	٥,٤٦	
المجموع	١٣٢٢,٨٢	٤٩		

ملاحظة (٥) :

إن تحديد شكل وعدد الاختبارات القبلية يتوقف على التساؤلات التي تطرحها المشكلة . على أن هناك تحفظات ينبغى مراعاتها ، فلا يجب أن يزيد مجموع درجات الحرية للمقارنات القبلية عن ك − ١ حيث ك عدد الأقسام ، ومن الواضح إذن أنه من غير المناسب أن نقرر مقدماً إجراء المقارنة بين متوسطات كل زوج من الأقسام وهى تتطلب $ك_{و_٢} = \frac{١}{٢} ك (ك - ١)$ من المقارنات وهذا العدد أكبر من ك − ١ حين $ك > ٢$.

وبالإضافة إلى ذلك يفضل أن تختار الاختبارات القبلية بحيث تكون مستقلة ، وذلك لكى تكون المعلومات الناتجة من أى منها ذات قيمة بذاتها وغير متداخلة مع المعلومات الناتجة من أى مقارنة أخرى ، وهذا ما فعلنا في المثال السابق ، إذ أجرينا الاختبارات المستقلة الآتية :

(١) ضد (٢) ضد (٤) بدرجات حرية عددها ٢

(١ ، ٢ ، ٤) ضد (٣) بدرجات حرية عددها ١

(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤) ضد (٥) بدرجات حرية عددها ١

وقد أدى هذا الاستقلال إلى أن يكون مجموع مجاميع المربعات في المقارنات الثلاث التي بنيت على ٢ ، ١ ، ١ من درجات الحرية مساوياً لمجموع المربعات بين الأقسام في التحليل العام الذى بني على ٤ درجات حرية . وهذا واضح في الجدول (٨ – ٥) . أى أن مجموع المربعات بين الأقسام قد تحلل إلى ثلاثة أجزاء منفصلة كل منها هو مجموع مربعات قائم بذاته وله درجات حرية خاصة به .

(٨ – ٥ – ٢) الاختبارات البَعدية :

هى تلك الاختبارات التي لم يخطط لإجرائها أثناء تصميم التجربة ولكنها تقترح نفسها عند التأمل فيما وصلنا إليه من نتائج بعد إجراء التجربة وتحليل البيانات ، إذ أن هذا التأمل يجعلنا نشتبه في وجود فروق جوهرية بين بعض الأقسام مما يستحق البحث والاختبار .

ففي التجربة التي بالمثال (٨ – ١) نشعر بأن هناك فرقاً كبيراً بين متوسط السكروز والمتوسطات الأخرى من السكريات مما يوحى بضرورة اختبار دلالة هذا الفرق . كذلك نشعر بأن الفرق بين متوسط السكروز ومتوسط المراقبة يستحق الاختبار .

إن مثل هذه الاختبارات لا تجرى إلا إذا كانت النتيجة العامة لتحليل التباين

ذات دلالة أى حين يرفض الفرض الصفرى عن تساوى جميع المتوسطات لأنه لو ظهر أن هذه المتوسطات متساوية فإن هذا يتضمن أن الفروق الظاهرة بين أى قسمين لا تكون فروقاً ذات دلالة وبالتالى فإن أى اختبار نجريه لا يضيف جديداً لما علمناه عن دلالة هذه الفروق .

على أن المقارنات البعدية تحتاج لتقرير دلالتها إلى طرق خاصة تختلف عن تلك التي استخدمت في التحليل العام وفى المقارنات القبلية . ذلك لأن الأقسام التى نأخذها للمقارنة ولو أنها مأخوذة من نفس المجتمع العام إلا أننا نقتطعها عمداً من جزء متحيز من التوزيع فهى تفتقد عنصر العشوائية ولا يصبح توزيع الاحتمال الذى أسست عليه عملية اختبار الفروض صالحاً لها . وإذا تناولنا التجربة بالمثال (٨ - ١) وقارناً القسم (٣) الذى أعطى أصغر متوسط والقسم (٥) الذى أعطى أكبر متوسط نكون قد أخذنا الجزء المتطرف الأيسر والجزء المتطرف الأيمن من التوزيع ويكون من السهل ظهور اختلاف كبير بين متوسطيهما حتي ولو كانا من نفس المجتمع . وإذا أردنا الدقة في الحكم فيجب أن نأخذ هذا في الاعتبار وذلك بتصعيب تقرير دلالة مثل هذا الفرق .

ويعتمد أحد طرق الاختبارات البعدية على إيجاد قيمة حرجة لمجموع المربعات إذا تعداها مجموع المربعات بين قسمين أو مجموعة من الأقسام يكون الاختلاف بينها ذا دلالة وإلا فهو ليس كذلك . وتوجد هذه القيمة الحرجة كما يلي :

إن الاختبارات البعدية لا تجرى كما سبق القول إلا إذا كانت قيمة $\text{ف}_{\text{ى}}$ فى تحليل التباين ذات دلالة ، أى إذا كان :

$$\text{ف}_{\text{ى}} = \text{ع}^{٢}_{\text{ب}} / \text{ع}^{٢}_{\text{خ}} \geq \text{ف}_{\alpha} [\text{ك} - ١ ، \text{ن} - \text{ك}]$$

$$\text{أى} \quad \frac{\text{م م (بين الأقسام)}}{(\text{ك} - ١)\ \text{ع}^{٢}_{\text{خ}}} \geq \text{ف}_{\alpha} [\text{ك} - ١ ، \text{ن} - \text{ك}]$$

$$\text{أى م م (بين الأقسام)} \geq (\text{ك} - ١)\ \text{ع}^{٢}_{\text{خ}}\ \text{ف}_{\alpha} [\text{ك} - ١ ، \text{ن} - \text{ك}] \quad (٧)$$

والعدد الذى بالطرف الأيسر من هذه المتباينة هو القيمة الحرجة المطلوبة . ويلاحظ أن هذا العدد أكبر من القيمة الحرجة المناظرة التي كان من الممكن استخدامها في المقارنات القبلية بعد وضع عدد أقسام المقارنة ا بدلا من العدد الكلى للأقسام ك . والهدف من كبر هذه القيمة تصعيب تقرير دلالة الاختلاف تعويضاً عن أننا نختار للمقارنة تلك الأقسام التي تسهم إسهاماً كبيراً في دلالة تحليل التباين .

ففي المثال (٨ – ١) وبأخذ α = ٠,٠٥ نجد أن :

القيمة الحرجة لمجموع المربعات = ٤ × ٥,٤٦ × ٢,٥٨ = ٥٦,٣٥

فإذا زادت قيمة مجموع المربعات بين متوسطات قسمين أو أكثر عن هذا العدد أو كانت مساوية له فإنها تكون ذات دلالة عند المستوى ٠,٠٥ .

ملاحظة (٦) :

تسمى هذه الطريقة « إجراء الاختبار الآنى لمجموع المربعات » sum of squares simultaneous test procedure وهى إحدى طرق الاختبارات البعدية للمقارنات المتعددة .

مثال (٨ – ٥) :

اختبر ما تراه يستحق الاختبار في نتائج تجربة المثال (٨ – ١) .

الحل :

لو رتبنا المتوسطات الناتجة تصاعدياً نجد الآتي :

٥٨ (جلوكوز + فركتوز) ، ٥٨,٢ (فركتوز) ، ٥٩,٣ (جلوكوز) ، ٦٤,١ (سكروز) ، ٧٠,١ (مراقبة) . وهذا الترتيب يوحي بعدة مقارنات تكتفي منها بما يلي :

(أولا) المقارنة بين المتوسطات الثلاث الأولى ، حيث أنها تبدو قريبة من بعضها ويشك في وجود فرق جوهرى بينها .

$$\text{م}^{٢}\ (\text{بين الأقسام الثلاثة}) = \frac{٥٩٣^{٢} + ٥٨٢^{٢} + ٥٨٠^{٢}}{١٠} - \frac{(٥٩٣ + ٥٨٢ + ٥٨٠)^{٢}}{٣٠}$$

$$= ١٠٢٦٧٧,٣ - ١٠٢٦٦٧,٥ = ٩,٨$$

بما أن ٩,٨ أصغر من القيمة الحرجة ٥٦,٣٥ نحكم بأن الفروق بين المتوسطات الثلاث ليست ذات دلالة أى يمكن اعتبار أن هذه الأقسام من مجتمعات متساوية المتوسطات ، وذلك عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ .

(ثانياً) المقارنة بين متوسط السكروز ومتوسط السكريات الثلاثة الأخرى :
م ٢ (سكروز ضد السكريات الأخرى) .

$$= \frac{٦٤١^{٢}}{١٠} + \frac{(٥٩٢ + ٥٨٢ + ٥٨٠)^{٢}}{٣٠} - \frac{(٦٤١ + ٥٩٣ + ٥٨٢ + ٥٨٠)^{٢}}{٤٠}$$

$$= ٤١٠٨٨,١ + ١٠٢٦٦٧,٥ - ١٤٣٥٢٠,٤ = ٢٣٥,٢$$

بما أن ٢٣٥,٢ أكبر من القيمة الحرجة ٥٦,٣٥ نحكم بأن الفرق بين السكروز والمستويات الأخرى من السكريات هو فرق جوهرى مما يشير إلى أن السكروز يؤخر نمو النبات بدرجة أقل من السكريات الأخرى .

ملاحظة (٧) :

إذا رغبنا في إجراء اختبار بين أى زوج من الأقسام فيمكننا استخدام اختبار ت للمقارنة بين متوسطى مجتمعين معتدلين – راجع البند (٦ – ٦ – ٣) مع أخذ $ع^{٢} = ع^{٢}_{خ}$ لتقدير التباين أى نستخدم الإحصاءة :

$$\frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{ع_خ \sqrt{\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}}}$$

بدرجات حرية (ن − ك) وهى درجة الحرية لتقدير التباين داخل الأقسام في تحليل التباين ، إلا أن الطريقة سابقة الذكر أكثر عمومية ، فهى صالحة للتطبيق مهما كان عدد أقسام المقارنة .

كما يمكننا إيجاد حدى ثقة بدرجة (١ − α) للفرق بين المتوسطين من الصيغة .

$$(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) \pm ع_خ \sqrt{\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}} \; ت_{\alpha(ن - ك)} \qquad (٨)$$

أما حدا الثقة بدرجة (١ − α) لمتوسط أى قسم $\bar{س}_ر$ فهما :

$$\bar{س}_ر \pm \frac{ع_خ}{\sqrt{ن_ر}} \; ت_{\alpha\,(ن - ك)} \qquad (٩)$$

ملاحظة (٨) : القيمة الحرجة للفرق بين متوسطى عينتين

CRITICAL DIFFERENCE (C.D.)

إذا رغبنا في إجراء عدة اختبارات بعدية بين أزواج من المتوسطات فيمكن بنفس فكرة القيمة الحرجة لمجموع المربعات إيجاد القيمة الحرجة للفرق بين أى زوج $\bar{س}_1$ ، $\bar{س}_2$ من المتوسطات كالآتي (على فرض تساوى عدد الوحدات في كل مجموعة) :

يكون الفرق بين متوسطين $\bar{س}_1$ ، $\bar{س}_2$ ذا دلالة

إذا كان $\dfrac{\left|\bar{\text{س}}_{1} - \bar{\text{س}}_{2}\right|}{\text{ع}_{\text{خ}}\sqrt{\dfrac{1}{\text{ن}_{1}} + \dfrac{1}{\text{ن}_{2}}}} > \text{ت}_{\alpha\,(\text{ن} - \text{ك})}$

أى إذا كان $\left|\bar{\text{س}}_{1} - \bar{\text{س}}_{2}\right| \geqslant \text{ع}_{\text{خ}}\sqrt{\dfrac{1}{\text{ن}_{1}} + \dfrac{1}{\text{ن}_{2}}}\ \text{ت}_{\alpha\,(\text{ن} - \text{ك})}$

والعدد الذى بالطرف الأيسر من هذه المتباينة هو القيمة الحرجة المطلوبة .

ففى المثال (٨ – ١) وبأخذ α = ٠,٠٥ نجد أن :

القيمة الحرجة بين متوسطى قسمين = $\sqrt{٥,٤٦} \times \sqrt{٠,٢} \times ٢,٠١$

= ٢,١٠٠٥

إذا زاد الفرق $\left|\bar{\text{س}}_{1} - \bar{\text{س}}_{2}\right|$ عن العدد ٢,١٠٠٥ أو كان مساويا له فإن هذا الفرق يكون ذا دلالة عند المستوى ٠,٠٥ وإلا فلا دلالة له عند هذا المستوى .

فمثلا : الفرق بين متوسطى قسمى الجلوكوز والفركتوز = ٥٩,٣ – ٥٨,٢ = ١,١

وهذا الفرق أصغر من القيمة الحرجة ٢,١ فهو غير ذى دلالة عند المستوى ٠,٠٥ . أما الفرق بين متوسطى قسمى السكروز والمراقبة وهو ٧٠,١ – ٦٤,١ = ٦ فأكبر من القيمة الحرجة ٢,١ فهو فرق جوهرى . ونصل إلى نفس هذه الاستنتاجات إذا استخدمنا طريقة القيمة الحرجة لمجموع المربعات .

ملاحظة (٥) : التقسيم الأحادى

ONE—WAY CLASSIFICATION

إن التقسيم الناتج عن التجارب ذوات العامل الواحد التى نوقشت فى البنود

السابقة يندرج تحت ما يسمى بالتقسيم الأحادى أو التقسيم من ناحية واحدة . وهذا التقسيم يتناول حالتين :

(أ) الحالة السابق دراستها ومُثل لها بالمثال (٨ - ١) وتوابعه ، حيث يكون لدينا **مجتمع واحد** ونريد اختبار تأثير ك **من المعالجات** (مستويات عامل التقسيم) على متغير ما متعلق بهذا المجتمع . فى هذه الحالة نسحب من هذا المجتمع عينة عشوائية ثم نقسمها عشوائيا إلى ك من المجموعات غير المتداخلة ونعطى لكل منها معالجة مختلفة ، ثم ندرس الاستجابات فى هذه المجموعات .

(ب) الحالة التى يكون لدينا فيها ك **من المجتمعات** لكل منها خاصة متميزة ويراد دراسة تأثير هذه الخواص على متغير ما . هنا نسحب عينة عشوائية من كل مجتمع ونعطى لكل منها **نفس المعالجة** ثم ندرس الاستجابات . ومن أمثلة هذه الحالة المسائل ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ من التمارين (٨ - ١) الآتية . ففى المسألة (٢) لدينا ٤ مجتمعات هى مجتمعات الأنواع الأربعة من الأرانب ، وفى المسألة (٣) لدينا ٣ مجتمعات هى المجتمع الذى تزرع فيه البذور فى أول مايو والمجتمع الذى تزرع فيه البذور فى ١٥ مايو ثم مجتمع ٢٩ مايو .

فى الحالة (ب) نفترض أن المجتمعات التى سحبت منها العينات هى مجتمعات معتدلة لها نفس التباين ، ونستخدم نفس النموذج الإحصائى ، وبهذا لا يختلف التحليل الاحصائى نظريا ولا حسابيا عن الحالة (أ) .

تمارين (٨ - ١)

(افتراضات العشوائية والاعتدالية متوفرة)

(١) الجدول الآتي يبين عينة من قيم شدة المقاومة لمعدن معين (بعد طرح ١٠٠ من كل منها) وقد حصلنا على هذه القيم من ٤ أشرطة من المعدن قيس كل منها

عند ٣ نقط مختلفة (الركن – الوسط – الحافة) . هل متوسط شدة المقاومة واحد عند جميع نقط الشريحة ؟

الركن	الوسط	الحافة
٣٧	٤٠	٤٢
٤٢	٣٩	٤٠
٢٨	١٧	٣٣
٣٧	٣٧	٤١

(٢) القيم الآتية هى أطوال أذناب نوع معين من يرقات القرادة في عينات من ٤ أنواع من الأرانب (مقيسة بالميكرون) . هل هناك فروق جوهرية بين متوسطات الأطوال في هذه الأنواع ؟

(١)	(٢)	(٣)	(٤)
٣٨٠	٣٥٠	٣٥٤	٣٧٦
٣٧٦	٣٥٦	٣٦٠	٣٤٤
٣٦٠	٣٥٨	٣٦٢	٣٤٢
٣٦٨	٣٧٦	٣٥٢	٣٧٢
٣٧٢	٣٣٨	٣٦٦	٣٧٤
٣٦٦	٣٤٢	٣٧٢	٣٦٠
٣٧٤	٣٦٦	٣٦٢	
٣٨٢	٣٥٠	٣٤٤	
	٣٤٤	٣٤٢	
	٣٦٤	٣٥٨	
		٣٥١	
		٣٤٨	
		٣٤٨	

اطرح ٣٠٠ أو أى عدد مناسب

(٣) هل تاريخ زراعة القطن يؤثر في وزن المحصول الناتج من البذور ؟

الآتي هى الأوزان بالكيلوجرامات الناتجة من ٤ حقول قسم كل منها إلى ٣ أحواض :

١ مايو	١٥ مايو	٢٩ مايو
٣,٣٥	٣,٨٦	١,٩٩
١,٤٩	٢,٧١	٢,٨٩
٢,٤٤	٢,١٨	١,٦٨
٢,٤٤	١,٩٥	٢,١٣

(٤) قسم ٢٨ أرنباً عشوائيا إلى ٤ أقسام متكافئة وأعطى لكل قسم معالجة ما (مثلا : دواء – نظام تغذية – بيئة ..) والجدول الآتى يعطى مستوى السكر في الدم الناتج من هذه المعالجات . هل هناك دليل على وجود فروق بين تأثيرات هذه المعالجات على مستوى السكر في الدم ؟

المعالجـات

(١)	(٢)	(٣)	(٤)
١٧	٣٧	٣٥	٩
١٦	٣٦	٢٢	٨
٢٨	٢١	٣٥	١٧
٤	١٣	٣٨	١٨
٢١	٤٥	٣١	١
صفر	٢٣	٣٤	٣٤
٢٣	١٣	٤٠	١٣

(٥) في تجربة صناعية كان أحد المهندسين مهتماً بكيفية تغير متوسط امتصاص الرطوبة بين خمس مجموعات مختلفة من الخرسانة ، واستخدم لذلك ٦ عينات لكل مجموعة تعرضت للرطوبة لمدة ٤٨ ساعة فجاءت البيانات كما يلي .

المجموعة (الوزن ٪)				
١	٢	٣	٤	٥
٥٥١	٥٩٥	٦٣٩	٤١٧	٥٦٣
٤٥٧	٥٨٠	٦١٥	٤٤٩	٦٣١
٤٥٠	٥٠٨	٥١١	٥١٧	٥٢٢
٧٣١	٥٨٣	٥٧٣	٤٣٨	٦١٣
٤٩٩	٦٣٣	٦٤٨	٤١٥	٥٥٦
٦٣٢	٥١٧	٦٧٧	٥٥٥	٦٧٩

اطرح ٤٥٠ أو ٥٠٠ أو أى عدد مناسب .

اختبر أن $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_5$ عند المستوى ٠,٠٥

(٦) في تجربة ما اختبرت سلالتان من Drosophila Melanogaster إحداهما لدورة يرقات قصيرة (short larval period) والأخرى لدورة طويلة ، كما أخذت سلالة كمجموعة مراقبة . وفي الجيل ٤٢ لخصت البيانات عن طول الدورة بالساعات فيما يلي :

	السلالة		
	دورة قصيرة	دورة طويلة	مراقبة
نو :	٨٠	٣٣	٦٩
مو :	٨٠٧٠	٣٦٤٠	٧٢٩١
مجـ مجـ س٢ رو :	١٩٩٤٦٥٠		

أولا : أجر تحليل التباين وفسره .
ثانيا : أجر المقارنة القبلية بين الدورتين القصيرة والطويلة معاً ضد المراقبة .
ثالثا : أجر المقارنة البعدية بين كل من أزواج المتوسطات الثلاثة .
رابعاً : أوجد فترة ثقة بدرجة ٩٥٪ لكل من هذه المتوسطات .

(٧) في أحد الأبحاث الطبية عن علاج جحوظ العين الناتج من تسمم الغدة الدرقية اختيرت عينة عشوائية من ٣٠ ضفدعة وقسمت عشوائياً إلى ثلاث مجموعات متساوية العدد تلقت إحداها علاجاً دوائياً وتلقت أخرى علاجاً جراحياً (استئصال الغدة النخامية) وتركت المجموعة الثالثة دون علاج (مجموعة مراقبة) ثم قيست العيون بالمقياس الأفقي للعين فنتجت القيم الآتية بالملليمترات .

مجموعة العلاج الدوائي : ١,٦ ١,٧ ١,٤ ١,٨ ١,٩ ١,٨ ١,٣ ١,٦ ١,٥ ١,٧
مجموعة العلاج الجراحى : ١,٥ ١,٤ ١,٣ ١,٢ ١,٨ ١,٩ ١,٩ ١,٧ ١,٦ ١,٣
مجموعة المراقبة : ١,٩ ٢ ٢ ١,٨ ٢ ١,٩ ٢,١ ٢ ١,٧ ١,٨

(أ) اختبر تأثير مجموعتي العلاج ضد مجموعة المراقبة .
(ب) اختبر ما إذا كان هناك فرق جوهرى بين نوعى العلاج .

(خذ α = ٠,٠١)

(٨ – ٦) التجارب ذوات العاملين :

TWO—FACTOR EXPERIMENTS

اعتبر عينة حجمها ن مأخوذة من متغير معتدل س وسطه الحسابي μ وتباينه σ^2 وافرض أن وحدات هذه العينة قد تعرضت لتأثير عاملين لأحدهما ك من المستويات وللثاني هـ من المستويات . المطلوب اختبار ما إذا كان المجتمع الذى أخذت منه العينة متجانساً بالنسبة لكل من هذين العاملين على حدة .

في هذه الحال علينا أن نختار بين طريقتين للتحليل ، ويتوقف هذا الاختيار على ما إذا كان العاملان مستقلين أو كانا يتفاعلان معاً . والمقصود بكلمة التفاعل هنا هو تأثير أى من العاملين على الآخر . وسنبدأ بالحالة الأبسط التي سنفترض فيها عدم وجود تفاعل بين العاملين .

(٨ - ٦ - ١) حالة عاملين لا يتفاعلان :

على أساس توفر عوامل الاعتدالية والعشوائية وخطية النموذج وعلى فرض عدم وجود تفاعل بين عاملى التجريب ، يكون تحليل التباين ما هو إلا امتداد لتحليل التباين للتجارب ذوات العامل الواحد ولا يزيد عنه إلا بخطوة منطقية واحدة . توضع وحدات العينة في ك من الأعمدة تناظر مستويات العامل الأول ، هـ من الصفوف تناظر مستويات العامل الثاني ، فتخضع أى وحدة تجريبية $\text{س}_{\text{رو}}$ للنموذج الآتي :

$$\text{س}_{\text{رو}} = \mu + \alpha_{\text{و}} + \beta_{\text{ر}} + \text{خ}_{\text{رو}} \qquad (١٠)$$

حيث μ ، $\alpha_{\text{و}}$ ، $\text{خ}_{\text{رو}}$ تحمل نفس المعاني السابقة في النموذج (٢) ، وحيث $\beta_{\text{ر}}$ تعبر عن متوسط أثر المستوى ر للعامل الثاني .

وكنتيجة مباشرة لذلك ، لا يتحلل مجموع المربعات الكلى إلى مركبتين كما هو الحال في المتساوية (٣) بل إلى ثلاث مركبات . ومن الطبيعى أن تظل المركبة الأولى التي تعبر عن الاختلاف بين مستويات العامل الأول (الأعمدة) كما هى ، أما المركبة الثانية في المتساوية (٣) فتنفصل إلى مركبتين إحداهما تعبر عن الاختلاف بين مستويات العامل الثاني (الصفوف) والأخرى تعطى الاختلاف الذى يتبقى من الاختلاف الكلى بعد استبعاد أثر كل من العاملين . هذا الاختلاف يعزى إلى عدة أسباب نضمها تحت كلمة « الخطأ » ، منها الخطأ العشوائي أو خطأ التجريب ومنها الخطأ الناشيء عن إهمال التفاعل بين العاملين إذا كان هناك تفاعل .

يمكن جبرياً أن نثبت المتطابقة الآتية :

$$\underset{\text{ر}}{\overset{\text{ك}}{\text{مجـ}}}\ \underset{\text{و}}{\overset{\text{هـ}}{\text{مجـ}}}\ (\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}})^{2} = \text{مجـ}_{\text{و}}\ \text{ن}_{\text{و}}\ (\bar{\text{س}}_{\text{و}} - \bar{\text{س}})^{2} + \text{مجـ}_{\text{ر}}\ \text{ن}_{\text{ر}}\ (\bar{\text{س}}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^{2}$$

$$+\ \text{مجـ}_{\text{و}}\ \text{مجـ}_{\text{ر}}\ (\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}_{\text{و}} - \bar{\text{س}}_{\text{ر}} + \bar{\text{س}})^{2} \qquad (٩)$$

وهذه المتطابقة تترجم لفظيا كالآتى :

م م (الكلى) = م م (بين الأعمدة) + م م (بين الصفوف)
+ م م (الخطأ)

حيث $\nu_{١} = \text{ن} - ١$ ، $\nu_{٢} = \text{ك} - ١$ ، $\nu_{٣} = \text{هـ} - ١$

، $\nu_{٤} = (\text{ن} - \text{ك}) - (\text{هـ} - ١) = (\text{ك} - ١)\ (\text{هـ} - ١) \qquad (١٠)$

وإذن :

$$\nu_{١} = \nu_{٢} + \nu_{٣} + \nu_{٤}$$

إن هذه المركبات الثلاث تعطى ثلاثة تقديرات مستقلة لتباين المجتمع σ^{2} وهى :

$\text{ع}^{2}_{١}$ = م م (بين الأعمدة)/(ك−١) ، $\text{ع}^{2}_{٢}$ = م م (بين الصفوف)/(هـ − ١) ،

$\text{ع}^{2}_{٣}$ = م م (الخطأ) / (ن − ك − هـ + ١)

ولا يبقي إلا استخدام نسبة التباين $\frac{\text{ع}^{2}_{١}}{\text{ع}^{2}_{٣}}$ لاختبار صحة الفرض الصفرى عن تساوى متوسطات مستويات العامل الأول . واستخدام نسبة التباين $\frac{\text{ع}^{2}_{٢}}{\text{ع}^{2}_{٣}}$ لاختبار صحة الفرض الصفرى عن تساوى متوسطات مستويات العامل الثاني .

مثال (٨ - ٦) :

قسمت ١٢ بقرة إلى هـ = ٤ من المجموعات بكل منها ٣ بقرات بحسب الوزن عند بدء التجربة . أعطى للأبقار الثلاث بكل مجموعة نوع مختلف من الغذاء . وبعد فترة من الزمن قيست الزيادات في أوزان الأبقار ورصدت بالجدول (٨ - ٦) الآتى . لدينا عاملان الأول هو عامل الغذاء وله ك = ٣ مستويات والثانى هو عامل الوزن الابتدائى للأبقار وله هـ = ٤ مستويات . المطلوب بحث تأثير كل من هذين العاملين على الزيادة فى وزن الأبقار عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ .

جدول (٨ - ٦)

الوزن الابتدائى للأبقار	نوع الغذاء				
	أ١	أ٢	أ٣	نر	مر
و١	٧,٠	١٤,٠	٨,٥	٣	٢٩,٥
و٢	١٦,٠	١٥,٥	١٦,٥	٣	٤٨,٠
و٣	١٠,٥	١٥,٠	٩,٥	٣	٣٥,٠
و٤	١٣,٥	٢١,٠	١٣,٥	٣	٤٨,٠
نو	٤	٤	٤	ن = ١٢	
مو	٤٧,٠	٦٥,٥	٤٨,٠	م = ١٦٠,٥	

الحل :

لدينا اثنان من الفروض الصفرية : لا الوزن الابتدائى ولا نوع الغذاء له تأثير فى زيادة أوزان الأبقار .

مم (الكلى) $= ٧^{٢} + ... + ١٤^{٢} + ... + ٨,٥^{٢} + ... + ١٣,٥^{٢} - \frac{١٦٠,٥^{٢}}{١٢}$

$= ٢٣١٦,٧٥ - ٢١٤٦,٦٨٧٥$

$= ١٧٠,٠٦٢٥$ بدرجات حرية ١١

مم (بين الأعمدة) $= \frac{٤٧^{٢} + ٦٥,٥^{٢} + ٤٨^{٢}}{٤} - \frac{١٦,٠٥^{٢}}{١٢}$

$= ٢٢٠٠,٨١٢٥ - ٢١٤٦,٦٨٧٥$

$= ٥٤,١٢٥$ بدرجات حرية ٢

مم (بين الصفوف) $= \frac{٢٩,٥^{٢} + ٤٨^{٢} + ٣٥^{٢} + ٤٨^{٢}}{٣} - \frac{١٦٠,٥^{٢}}{١٢}$

$= ٢٢٣٤,٤١٦٦ - ٢١٤٦,٦٨٧٥$

$= ٨٧,٧٢٩١$ بدرجات حرية ٣

مم (الخطأ) $= ١٧٠,٠٦٢٥ - (٥٤,١٢٥ + ٨٧,٧٢٩١)$

$= ٢٨,٢٠٨٤$ بدرجات حرية ٦

وينشأ جدول التباين الآتى .

الجدول (٨ – ٧)

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	تقدير التباين	$ف_{ى}$
بين الأعمدة (نوع الغذاء)	٥٤,١٢٥٠	ك – ١ = ٢	$ع_{١}^{٢}$ = ٢٧,٠٦٢٥	٥,٧٥٦*
بين الصفوف (الوزن الابتدائى)	٨٧,٧٢٩١	هـ – ١ = ٣	$ع_{٢}^{٢}$ = ٢٩,٢٤٣٠	٦,٢٢٠*
خطأ التجريب	٢٨,٢٠٨٤	(ك – ١)(هـ – ١) = ٦	$ع_{خ}^{٢}$ = ٤,٧٠١٤	
المجموع	١٧٠,٠٦٢٥	ن – ١ = ١١		

من الجدول نجد أن $ف_{٠,٠٥[٢ ، ٦]}$ = ٥,١٤ وهذه أصغر من ٥,٧٥٦ وإذن نرفض الفرض الصفرى الأول عند المستوى ٠,٠٥ ونقرر أن اختلاف نوع الغذاء يؤدى إلى الاختلاف فى الزيادة فى أوزان الأبقار .

كذلك $ف_{٠,٠٥[٣ ، ٦]}$ = ٤,٧٦ وهذه أصغر من ٦,٢٢٠ واذن نرفض الفرض الصفرى الثانى عند المستوى ٠,٠٥ ونقرر أن اختلاف الأوزان الابتدائية للأبقار له تأثير فى الزيادة فى أوزانها .

تمارين (٨ - ٢)

(١) أجريت تجربة زراعية لاختبار تأثير اختلاف التربة (٥ قطع من الأرض) واختلاف نوع القمح (٧ سلالات) على محصول الحبوب . وقد قسمت كل قطعة أرض عشوائياً إلى ٧ أحواض وزعت عليها السلالات السبع عشوائياً فنتجت البيانات الآتية التي تسجل المقادير الناتجة للمحصول بالكيلة .

قطعة الأرض	السلالة (١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	مر
(١)	١٦	١٥	١٧	١٤	١٤	١٥	١٣	١٠٤
(٢)	١٢	٩	١٥	١٠	١٠	١١	١١	٧٨
(٣)	١٣	١٣	١٤	١٥	١٢	١٣	١٠	٩٠
(٤)	١٥	١٤	١٩	١٧	١٣	١٨	١٦	١١٢
(٥)	١١	١٠	١٢	١٠	١١	١٢	١٢	٧٨
من	٦٧	٦١	٧٧	٦٦	٦٠	٦٩	٦٢	٤٦٢

مجـ مجـ $س^{٢}$ = ٦٣١٤

أولا : ابحث دلالة تأثير كل من عاملى التربة ونوع القمح .

ثانيا : ابحث ما إذا كان الفرق بين السلالتين (٥) ، (٦) ذا دلالة عند المستوى ٠,٠٥ .

ثالثا : ابحث ما إذا كانت تربة القطعتين ٢ ، ٥ (معاً) تختلف عن تربة القطعتين ١ ، ٤ (معاً) .

(استخدام مستوى الدلالة ٠,٠١) .

(٢) الآتي هى مقادير الكلوسترول (بالملليجرام في العبوة) التي وجدتها ٤ معامل في عبوات لثلاثة أنواع متشابهة من الغذاء وزن كل منها ٦ أوقيات .

الغذاء	المعامل (١)	(٢)	(٣)	(٤)
(أ)	٣,٧	٢,٨	٣,١	٣,٤
(ب)	٣,١	٢,٦	٢,٧	٣,٠
(حـ)	٣,٥	٣,٤	٣,٠	٣,٣

اختبر عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ ما إذا كانت :

(أولا) متوسطات الكلوسترول في الأنواع الثلاثة من الغذاء متساوية .

(ثانياً) المتوسطات التى حصلت عليها المعامل الأربعة متساوية .

(٣) الأعداد الآتية هى درجات الحرارة (مقاسة بالسنتجراد) لمياه إحدى البحيرات في أربعة أيام متتالية من صيف ١٩٥٢ م (الساعة الثانية بعد الظهر) ، وقد أخذت هذه الدرجات على ١٠ أعماق مختلفة (مقاسة بالمتر) . ابحث دلالة كل من عاملى اليوم والعمق .

الأعماق	٢٩ يوليو	٣٠ يوليو	٣١ يوليو	١ أغسطس	مجـر
٠	٢٣,٨	٢٤,٠	٢٤,٦	٢٤,٨	٩٧,٢
١	٢٢,٦	٢٢,٤	٢٢,٩	٢٣,٢	٩١,١
٢	٢٢,٢	٢٢,١	٢٢,١	٢٢,٢	٨٨,٦
٣	٢١,٢	٢١,٨	٢١,٠	٢١,٢	٨٥,٢
٤	١٨,٤	١٩,٣	١٩,٠	١٨,٨	٧٥,٥
٥	١٣,٥	١٤,٤	١٤,٢	١٣,٨	٥٥,٩
٦	٩,٨	٩,٩	١٠,٤	٩,٦	٣٩,٧
٩	٦,٠	٦,٠	٦,٣	٦,٣	٢٤,٦
١٢,٥	٥,٨	٥,٩	٦,٠	٥,٨	٢٣,٥
١٥,٥	٥,٦	٥,٦	٥,٥	٥,٦	٢٢,٣
مجـو	١٤٨,٩	١٥١,٤	١٥٢,٠	١٥١,٣	٦٠٣,٦

مجـ مجـ $س^{٢}_{رو}$ = ١١٢٣٠,٧٨

(٨ – ٦ – ٢) حالة عاملين يتفاعلان :

في التجارب ذوات العاملين ، إذا كان هناك شك في وجود تفاعل بين العاملين أى في تأثر كل منهما جزئياً بالآخر ، فإن النموذج (١٠) لا يكون مناسباً لأنه لا يفسح مكاناً لتأثير هذا التفاعل . وعلى فرض توفر شروط الاعتدالية والعشوائية وخطية النموذج فإن النموذج المناسب يأخذ الصورة الآتية :

$$س_{رو} = \mu + \alpha_{و} + \beta_{ر} + (\beta\alpha)_{رو} + خ_{رو} \qquad (١١)$$

حيث $(\beta\alpha)_{\text{ر و}}$ تعبر عن تأثير الاختلاف الناشيء من تفاعل العاملين . ولكى نوجد مقياساً لهذا الاختلاف لا مفر من تكرير التجربة برمتها مرة واحدة على الأقل وذلك لأنه في التجربة الواحدة يؤثر المستوى ٣ مثلا من العامل الأول مع المستوى ٢ مثلا من العامل الثاني على وحدة واحدة فقط هى $\text{س}_{٣٢}$ من وحدات التجريب ، وبالمثل بالنسبة لأزواج المستويات الأخرى ، ولا بكون هناك مجال حينئذ لإيجاد الاختلاف الناشيء عن تفاعل العاملين إلا إذا كان هناك أكثر من وحدة تتعرض لتأثير كل من أزواج هذه المستويات ، أى إلا إذا كررت التجربة مرة واحدة على الأقل . وتجمع نتيجة التجربيتن أو التجارب فيما يسمى بالخلايا كما في المثال (٨ – ٧) الآتي .

ومن الناحية الحسابية نوجد كلا من م م (الكلى) ، م م (بين الأعمدة) ، م م (بين الصفوف) من واقع القيم الناتجة عن التجريب كما في البند السابق . أما بالنسبة للاختلافين الباقيين فنحسبهما من مجاميع الخلايا كالآتي :

نفرض أننا كررنا التجربة برمتها ا من المرات فيكون كل زوج من أزواج المستويات قد أثر في ا من وحدات التجريب . سنسمى مجموع قيم كل من هذه الوحدات « **مجموع الخلية** » ونرمز له بالرمز $\text{م}_{\text{س}}$ وإذن :

$$\text{م م (بين الخلايا)} = \frac{\text{مج م}^{٢}_{\text{س}}}{\text{ا}} - \frac{\text{م}^{٢}}{\text{ن}} \qquad (١٢)$$

بدرجات حرية عددها (ك هـ – ١) حيث ك عدد الأعمدة ، هـ عدد الصفوف . إن هذا الاختلاف هو مجموع الاختلافات الناشئة عن العاملين بكل أنواعها وإذن :

م م (تفاعل العاملين) = م م (بين الخلايا) – م م (بين الأعمدة) – م م (بين الصفوف) بدرجات حرية عددها

(ك هـ –١) – (ك –١) – (هـ –١) = ك هـ – ك – هـ +١)
= (ك –١) (هـ –١)

أما الاختلاف الذى نضعه تحت كلمة « خطأ » فهو الاختلاف المتبقي من الاختلاف الكلى بعد استبعاد جملة الاختلاف الناشيء من العاملين . أى أن :

م م (الخطأ) = م م (الكلى) − م م (بين الخلايا) .

بدرجات حرية عددها (ن − ١) − (ك هـ − ١) = ن − ك هـ

مثال (٨ − ٧) :

الجدول (٨ − ٨) الآتي يعطى نتائج تجربة أجريت مرتين (بشكل مستقل) لدراسة تأثير كل من عاملى شدة الضوء ودرجة الحرارة على معدل نمو أحد النباتات . الأعداد ١٧ ، ٦ ، ٣ ، ٢ ، ... ، ٨ ، ٤ ، ٥ ، ٢ هى نتائج التجربة الأولى والأعداد ٩ ، ٨ ، ٤ ، ٢ ، ... ، ١٠ ، ٥ ، ٤ ، ٢ هى نتائج التجربة الثانية . أما الأعداد التى بين قوسين فهى مجاميع الخلايا . أجر تحليل التباين ثم أجب عن التساؤلات القبلية الآتية :

(أولا) هل متوسط تأثير درجة الحرارة ٨ يساوى متوسط تأثير درجة الحرارة ٢٨ ؟

(ثانيا) هل متوسط تأثير درجة الحرارة ١٤ يساوى متوسط تأثير درجة الحرارة ٢١ ؟

(ثالثا) هل متوسط تأثير درجتى الحرارة ٨ ، ٢٨ معا يساوى متوسط تأثير درجتى الحرارة ١٤ ، ٢١ معا ؟

الحل :

م م (الكلى) = مجـ مجـ مجـ $س_{و}^{٢}$ − $\frac{م^{٢}}{ن}$

= $١٧^{٢} + ٩^{٢} + ٦^{٢} + ٨^{٢} + ... + ٥^{٢} + ٤^{٢} + ٢^{٢} + ٢^{٢} − \frac{١٩٤^{٢}}{٣٢}$

= ١٧٧٤ − ١١٧٦ = ٥٩٨ حيث $\nu_{١}$ = ٣٢ − ١ = ٣١

الجدول (٨ - ٨)

درجة الحرارة	شدة الضوء (١)	(٢)	(٣)	(٤)	ن_س	م_س
٨	١٧، ٩ (٢٦)	١٣، ١٥ (٢٨)	١٣، ١٦ (٢٩)	٨، ١٠ (١٨)	٨	١٠١
١٤	٦، ٨ (١٤)	٦، ٥ (١١)	٦، ٤ (١٠)	٤، ٥ (٩)	٨	٤٤
٢١	٣، ٤ (٧)	٣، ٥ (٨)	٣، ٤ (٧)	٥، ٤ (٩)	٨	٣١
٢٨	٢، ٢ (٤)	٢، ٣ (٥)	٢، ٣ (٥)	٢، ٢ (٤)	٨	١٨
ن_ع	٨	٨	٨	٨	ن = ٣٢	
م_ع	٥١	٥٢	٥١	٤٠	م = ١٩٤	

م م (بين الأعمدة) $= \text{مج}_{ع} \dfrac{م_{ع}^{٢}}{ن_{ع}} - \dfrac{م^{٢}}{ن}$

$$= \frac{٥١^{٢} + ٥٢^{٢} + ٥١^{٢} + ٤٠^{٢}}{٨} - ١١٧٦$$

$$= ١١٨٨,٢٥ - ١١٧٦$$

$$= ١٢,٢٥$$ حيث $\nu_{٢} = ٣$

م م (بين الصفوف) $= \text{مج}_{س} \dfrac{م_{س}^{٢}}{ن_{س}} - \dfrac{م^{٢}}{ن}$

$$= \frac{١٠١^{٢} + ٤٤^{٢} + ٣١^{٢} + ١٨^{٢}}{٨} - ١١٧٦$$

$$= ١٦٧٧,٧٥ - ١١٧٦ = ٥٠١,٧٥$$ حيث $\nu_{٢} = ٣$

مم (بين الخلايا) $= \frac{\text{مجـ}\, م_{س}^{2}}{\text{أ}} - \frac{م^{2}}{\text{ن}}$

$= \frac{٢٦^{2} + ١٤^{2} + ... + ٩^{2} + ٤^{2}}{٢} - ١١٧٦$

$= ١٧٢٤ - ١١٧٦$

$= ٥٤٨$ حيث $\nu_{٤} = ٤\times٤-١=١٥$

مم (تفاعل) $= ٥٤٨ - (١٢,٢٥ + ٥٠١,٧٥)$

$= ٣٤$ حيث $\nu_{٥} = (٤-١)(٤-١) = ٩$

، مم (الخطأ) $= ٥٩٨ - ٥٤٨$

$= ٥٠$ حيث $\nu_{٦} = ٣١-١٥=١٦$

جدول (٨ - ٩)

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	تقدير التباين	ف
بين الأعمدة (شدة الإضاءة)	١٢,٢٥	٣	٤,٠٨	١,٣٠٤
بين الصفوف (درجة الحرارة)	٥٠١,٧٥	٣	١٦٧,٢٥	٥٣,٤٣٥
تفاعل (الإضاءة × الحرارة)	٣٤	٩	٣,٧٧	١,٢٠٤
داخل الأقسام (الخطأ)	٥٠	١٦	٣,١٣	
المجموع	٥٩٨	٣١		

$ف_{٠,٠٥\,[٣،١٦]}$ تقع بين ٣,١٠ ، ٣,٢٩ ، $ف_{٠,٠١\,[٣،١٦]}$ تقع بين ٤,٩٤ ، ٥,٤٢

$ف_{٠,٠٥\,[٩،١٦]}$ تقع بين ٣٩ ، ٢,٥٩

وعلى ذلك فإن :

(١) الاختلافات بين مستويات شدة الإضاءة ليست ذات دلالة عند المستوى ٠,٠٥ (أى يمكن اعتبار هذه المستويات متكافئة) .

(٢) الاختلافات بين مستويات درجة الحرارة ذات دلالة عالية .

(٣) التفاعل بين عاملى الإضاءة ودرجة الحرارة ليس ذى دلالة عند المستوى ٠,٠٥ .

نجيب الآن عن التساؤلات الثلاثة المطروحة .

(**أولا**)

$$\text{مج (درجة الحرارة ٨ ضد درجة الحرارة ٢٨)} = \frac{\text{١٠١}^2}{\text{٨}} + \frac{\text{١٨}^2}{\text{٨}} - \frac{\text{١١٩}^2}{\text{١٦}} = \text{٤٣٠,٥٦٢٥}$$

$$\text{ف}_{\text{ى}} = \frac{\text{٤٣٠,٥٦٢٥}}{\text{٣,١٣}} = \text{١٣٧,٥٦}^{**}$$

بما أن $\text{ف}_{\text{٠,٠١}\,[\text{١،١٦}]}$ = ٨,٦٨ < ١٣٧,٥٦ نرفض الفرض الصفرى عن تساوى تأثير درجة الحرارة ٨ وتأثير درجة الحرارة ٢٨ ونستنتج أن لدرجة الحرارة ٨ تأثير أكبر ، وذلك عند مستوى الدلالة ٠,٠١ .

(**ثانيا**)

$$\text{مج (بين مستوى درجتى الحرارة ١٤ ، ٢١)} = \frac{\text{٤٤}^2}{\text{٨}} + \frac{\text{٣١}^2}{\text{٨}} - \frac{\text{٧٥}^2}{\text{١٦}} = \text{١٠,٥٦٢٥}$$

$$\text{ف}_{\text{ى}} = \frac{\text{١٠,٥٦٢٥}}{\text{٣,١٣}} = \text{٣,٣٧٥}$$

بما أن $\text{ف}_{\text{٠,٠٥}\,[\text{١،١٦}]}$ = ٤,٥٤ > ٣,٣٧٥ نقبل الفرض الصفرى عن تساوى تأثير درجتى الحرارة ١٤ ، ٢١ .

(ثالثا)

$$\text{مم}(\text{بين الزوجين}) = \frac{(\text{١٠١} + \text{١٨})^{\text{٢}}}{\text{١٦}} + \frac{(\text{٤٤} + \text{٣١})^{\text{٢}}}{\text{١٦}} - \frac{\text{١٩٤}^{\text{٢}}}{\text{٣٢}} = \text{٦٠,٥}$$

$$\text{ف}_{\text{ى}} = \frac{\text{٦٠,٥}}{\text{٣,١٣}} = \text{١٩,٣٢٩}^{**}$$

نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠١ .

ملاحظة (٩) :

إن هذه المقارنات الثلاث مستقلة ويمكن التأكد من ذلك باستخدام معيار استقلال مقارنتين الذى سنقدمه بالبند (٨ – ١١ – ١) . ولذلك فإن مجموع مجاميع المربعات لهذه المقارنات وهو ٤٣٠,٥٦٢٥ + ١٠,٥٦٢٥ + ٦٠,٥ = ٥٠١,٦٢٥ يساوى مجموع المربعات بين الصفوف (درجات الحرارة) ، أى أن هذا المجموع قد تحلل إلى ٣ مركبات مستقلة ، كما تحللت درجات حريته الثلاثة إلى ثلاث درجات حرية منفصلة .

ملاحظة (١٠) :

إذا كنا قد وجدنا تفاعلا ذا دلالة بين شـدة الإضاءة ودرجة الحرارة فإن الخطوة التالية تكون حينئذ تقسيم البيانات إلى جداول منفصلة لكل مستوى من مستويات شدة الإضاءة وتحليل كل جدول لاختبار تأثير مستويات درجة الحرارة ، وقد نجد أنه في مستوى ما من مستويات الإضاءة تكون درجة الحرارة ذات تأثير جوهرى بينما في مستوى آخر لا يكون هذا التأثير جوهرياً . وبالمثل يمكن تجزىء البيانات لكل من مستويات درجة الحرارة لاختبار تأثير مستوى الإضاءة عند كل درجة حرارة .

تمارين (٨ – ٣)

في دراسة استهلاك الأكسجين لسلالتين من الحيوانات الصدفية عند ثلاثة تركيزات لماء البحر أخذت ٤ قراءات لكل مركب من السلالة وتركيز الماء (الملوحة) وسجلت القراءات بمقياس معين في الجدول الآتي :

الملوحة	السلالة (١)	السلالة (٢)	المجموع
٪١٠٠	٧,١٦	٦,١٤	
	٦,٧٨	٣,٨٦	
	١٣,٦٠	١٠,٤٠	
	٨,٩٤	٥,٤٩	
	مجـ = ٣٦,٤٧	مجـ = ٢٥,٨٩	٦٢,٣٦
٪٧٥	٥,٢٠	٤,٤٧	
	٥,٢٠	٩,٩٠	
	٧,١٨	٥,٧٥	
	٦,٣٧	١١,٨٠	
	مجـ = ٢٣,٩٥	مجـ = ٣١,٩٢	٥٥,٨٧
٪٥٠	١١,١١	٩,٦٣	
	٩,٧٤	٦,٣٨	
	٢٨,٨٠	١٣,٤٠	
	٩,٧٤	١٤,٥٠	
	مجـ = ٤٩,٣٩	مجـ = ٤٣,٩١	٩٣,٣٠
المجموع	١٠٩,٨١	١٠١,٧٢	٢١١,٥٣

(١) اختبر الفرض أن استهلاك الأوكسجين لا يختلف باختلاف السلالة .
(٢) اختبر الفرض أن استهلاك الأوكسجين لا يختلف باختلاف الملوحة .
(٣) اختبر تأثير تفاعل السلالة والملوحة على استهلاك الأوكسجين .

(خذ α = ٠,٠٥)

(٨ – ٧) المقارنات التزاوجية : PAIRED COMPARISONS

المفروض في التجارب ذوات العامل الواحد أن تكون وحدات التجريب فى مختلف أقسام المعالجة متجانسة بقدر الإمكان ، وذلك لكى تكون الفروق في استجابات هذه الوحدات لمستويات العامل راجعة فقط للفروق بين هذه المستويات . أما إذا كانت الوحدات غير متجانسة فإن هذا يتيح الفرصة لاختلافات عشوائية قد تكون من الكبر بحيث تؤدى إلى اختفاء الفروق الحقيقية في تأثيرات تلك المستويات كما سنرى في المثال (٨ – ٨) القادم .

غير أن متطلب التجانس هذا قد يفرض قيوداً عنيفة على عدد الوحدات التي تحتاجها الدراسة ، فمثلا لمقارنة نوعين من المسكنات لمرض ما المفروض أن يكون المرضي من نفس الجنس ومن نفس العمر والظروف الصحية وشدة الألم الناتج عن المرض ... ومن الواضح أنه من الصعب عمليا الحصول على عدد كاف من المرضي الذين يشتركون في هذه الخواص . وحتي إذا أمكن الحصول على مجموعة بهذه الأوصاف فإن دراسة مثل هذه المجموعة الخاصة تكون دراسة ضيقة وتكون النتائج قاصرة على مجموعة المرضي الذين يتصفون بهذه الصفات الخاصة ، والأفضل أن تشمل الدراسة مجالا أوسع لكى تكون النتائج أكثر عمومية ، وذلك بتجريب نوعى المسكنات على مختلف المرضي بذلك المرض نأخذهم عمداً من الجنسين ومن مختلف المجموعات العمرية والظروف الصحية .

ومن الضرورى إذا إيجاد حل وسط بين متطلب التجانس في وحدات التجريب ومتطلب تنويع هذه الوحدات ، وهما متطلبان متعارضان .

وقد وجد الحل بتصميم تجارب تعرف بتجارب القطاعات كاملة التعشية randomized complete blocks (كلمة كاملة تعني أن كل مستوى من مستويات العامل يظهر نفس العدد من المرات في كل قطاع) . وسنهتم هنا بحالة خاصة من هذه التجارب تعرف بالمقارنات التزاوجية وهى الحالة التي يكون فيها عامل التجريب ذا مستويين فقط (ك = ٢) وسميت تزاوجية لأن كل وحدة من وحدات التجريب تتلقي أحد المستويين ، تتزاوج مع وحدة **مماثلة** تتلقي المستوى الآخر . على أن الأسلوب الذى نتبعه في تناول وتحليل هذه الحالة يمتد إلى الحالات التي يكون فيها لعامل التجريب أكثر من مستويين .

والطريقة الإجرائية لهذه التجارب تعتمد على وضع وحدات التجريب مثني مثني في قطاعات يتألف كل منها من وحدتين تتلقي إحداهما المستوى الأول وتتلقي الأخرى المستوى الثاني ، بشرط أن تكون الوحدتان في كل قطاع متشابهتين – بل قد تكون نفس الوحدة تعالج مرتين في وقتين مختلفين – وبشرط أن يكون توزيع المستويين على الوحدتين عشوائياً (مثلا بإلقاء قطعة من العملة) في كل قطاع على حدة . أما الوحدات في القطاعات المختلفة فقد تكون متشابهة أو غير متشابهة .

القطاعات

	(١)	(٢)	(٣)		(ن)
وحدات	٢	١	١	....	٢
التجريب	١	٢	٢		١

إن هذا الإجراء يصون فعالية المقارنة داخل كل قطاع ويسمح في الوقت ذاته بتعدد الظروف بين مختلف القطاعات ، ويمكن النظر إلى الاستجابة في أى وحدة تجريبية على أنها مؤلفة من ثلاثة عناصر هى :

(أ) تأثير مستوى المعالجة لعامل التجريب .
(ب) تأثير الظروف داخل القطاعات (ويعتبر عاملا ثانياً) .
(جـ) مركبة عشوائية .

وتوضع استجابات وحدات التجريب كما يلى حيث $س_{ر}$ ، $ص_{ر}$ ترمزان إلى الاستجابات في القطاع $_{ر}$ للمستوى الأول وللمستوى الثاني على الترتيب .

القطاع	المستوى الأول	المستوى الثانى
(١)	$س_{١}$	$ص_{١}$
(٢)	$س_{٢}$	$ص_{٢}$
(٣)	$س_{٣}$	$ص_{٣}$
....	....	....
(ن)	$س_{ن}$	$ص_{ن}$

بهذا التصور نكون بصدد حالة خاصة للتجارب ذوات العاملين غير المتفاعلين ، وبالتالى تسير عملية تحليل التباين كما في البند (٨ - ٦ - ١) السابق .

مثال (٨ - ٨) :

أراد باحث أن يعرف ما إذا كان عرض الجزء الأسفل من وجه البنات أكبر في سن السادسة منه في سن الخامسة ، فاختار عينة عشوائية من ١٥ بنتاً وقاس عرض الوجه وهن في الخامسة ثم أعاد القياس بعد عام ، وسجلت الأطوال بالسنتيمتر كما يلى :

جدول (٨ - ١٠)

الأفراد (القطاعات)	(١) ٥ سنوات	(٢) ٦ سنوات	$م_ر$
(١)	٧,٣٣	٧,٥٣	١٤,٨٦
(٢)	٧,٤٩	٧,٧٠	١٥,١٩
(٣)	٧,٢٧	٧,٤٦	١٤,٧٣
(٤)	٧,٩٣	٨,٢١	١٦,١٤
(٥)	٧,٥٦	٧,٨١	١٥,٣٧
(٦)	٧,٨١	٨,٠١	١٥,٨٢
(٧)	٧,٤٦	٧,٧٢	١٥,١٨
(٨)	٦,٩٤	٧,١٣	١٤,٠٧
(٩)	٧,٤٩	٧,٦٨	١٥,١٧
(١٠)	٧,٤٤	٧,٦٦	١٥,١٠
(١١)	٧,٩٥	٨,١١	١٦,٠٦
(١٢)	٧,٤٧	٧,٦٦	١٥,١٣
(١٣)	٧,٠٤	٧,٢٠	١٤,٢٤
(١٤)	٧,١٠	٧,٢٥	١٤,٣٥
(١٥)	٧,٦٤	٧,٧٩	١٥,٤٣
$م_ك$	١١١,٩٢	١١٤,٩٢	م=٢٢٦,٨٤، ن= ٣٠
$\bar{س}_ك$	٧,٤٦	٧,٦٦	$\bar{س}$ = ٧,٥٦
مجـ $س^2_{رك}$	٨٣٦,٣٣	٨٨١,٨٣٠٤	مجـ مجـ $س^2_{رك}$=١٧١٨,١٦٠٤

لدينا عامل تجريب واحد هو العمر وهذا العامل له مستويان هما ٥ سنوات ، ٦ سنوات ونريد المقارنة بين متوسطى عرض الوجه في هذين المستويين . وتحسباً لوجود فروق بين أفراد العينة فإننا ندخل هؤلاء الأفراد كعامل ثان مع ملاحظة أن كل فرد يمثل

قطاعاً خضع لكل من مستويي العامل . وعلى أساس عدم وجود تفاعل بين العاملين نسير في تحليل التباين كما في البند (٨ – ٦ – ١) لنجد ما يلي :

م م (الكلي) = ١٧١٨,١٦٠٤ – $\frac{٢٢٦٨٤^{٢}}{٣٠}$ = ١٧١٨,٦٠٤ – ١٧١٥,٢١٢٨

= ٢,٩٤٧٦ حيث ν = ٢٩

م م (بين العمرين)= $\frac{١١١,٩٢^{٢} + ١١٤,٩٢^{٢}}{١٥}$ – ١٧١٥,٢١٢٨

= ١٧١٥,٥١٢٨ – ١٧١٥,٢١٢٨

= ٠,٣٠٠٠ حيث $\nu_{٢}$ = ١

م م (بين الأفراد)= $\frac{١٤,٨٦^{٢} + ١٥,١٩^{٢} + ... + ١٥,٤٣^{٢}}{٢}$ – ١٧١٥,٢١٢٨

= ٧١٧,٨٤٩٦ – ١٧١٥,٢١٢٨

= ٢,٦٣٦٨ حيث $\nu_{٣}$ = ١٤

م م (الخطأ) = ٢,٩٤٧٦ – (٠,٣٠٠٠ + ٢,٦٣٦٨)

= ٠,٠١٠٨ حيث $\nu_{٤}$ = ١٤

جدول (٨ – ١١)

مصدر التباين	م م	ν	تقدير التباين	ف
بين العمرين	٠,٣٠٠٠	١	٠,٣٠٠٠	٣٨٩,١١**
بين الأفراد	٢,٦٣٦٨	١٤	٠,١٨٨٣	٢٤٢,٠٢**
الخطأ	٠,٠١٠٨	١٤	٠,٠٠٠٧	
الكلي	٢,٩٤٧٦	٢٩		

الاستنتاج :

(١) نسبة التباين للأعمار ذات دلالة عالية لأن ف $_{٠,٠١}$ [١ ، ١٤] أصغر من ٩ ، مما يجعلنا نستنتج أن عرض وجه البنات في سن السادسة أوسع منه في سن الخامسة .

(٢) كما أن الفروق بين أفراد العينة ذات دلالة عالية لأن ف $_{٠,٠١}$ [١٤، ١٤] أصغر من ٤٠ .

ملاحظة (١١) :

إذا كنا لم ندخل في اعتبارنا الاختلافات بين أفراد العينة وأجرينا عملية تحليل التباين على أساس أن لدينا تجربة ذات عامل واحد كما في البند (٨ – ٤) نحصل على جدول التباين الآتي :

جدول (٨ – ١٢)

مصدر التباين	م م	ν	تقديرات التباين	ف
بين العمرين	٠,٣٠٠٠	١	٠,٣٠٠٠	٣,١٧
الخطـــأ	٢,٦٤٧٦	٢٨	٠,٠٩٤٦	
الكلي	٢,٩٤٧٦	٢٩		

وهنا نجد أن نسبة التباين للأعمار ليست ذات دلالة مما يشير إلى عدم وجود فرق بين عرض الوجه في العمرين الخامسة والسادسة . وهذه النتيجة خاطئة وتخالف ما توصلنا إليه من قبل والسبب في ذلك عدم تجانس أفراد العينة ووجود فروق

بينهن نشأ عنه اختلافات كبيرة كان يجب أن تستبعد ولكنها أضيفت إلى الاختلاف العشوائي فتضخم مجموع مربعات الخطأ وهذا بدوره دخل في مقام نسبة التباين فجعل هذه النسبة أصغر من أن تكون ذات دلالة ، وبالتالى اختفي الفرق بين مستويي عامل التجريب .

إن للمقارنات التزاوجية تطبيقات عديدة في مختلف ميادين البحث العلمى خاصة عند القياس أو الاختبار المتكرر لنفس المجموعة بعد فترة ما أو بعد حدث ما حيث يجرى القياس « قبل وبعد » هذه الفترة أو هذا الحدث . ومن أمثلة ذلك اختبار قوة عضلات مجموعة من الأفراد ثم تعريضهم لتمرينات رياضية عنيفة ثم اختبار قوة عضلاتهم مرة أخرى . كذلك قياس خاصة ما لمجموعة من الكائنات الحية أو الأفراد ثم قياس هذه الخاصة لنفس المجموعة بعد مرحلة ما كما في المثال (٨ – ٨) الأخير .

كذلك تنتج المقارنات التزاوجية عند تقسيم وحدة ما إلى نصفين يتلقي أحدهما أحد مستويي عامل ما ويتلقي النصف الآخر المستوى الثاني الذى يمكن أن يكون مستوى المراقبة . وكمثال لذلك اختبار قوة نوعين من المضادات الحيوية يحقن أحدهما في الذراع الأيمن والآخر في الذراع الأيسر لنفس الشخص ثم قياس قطر البقع الحمراء الناتجة في كل من الحالتين .

ومن التصميمات التي تؤدى إلى مقارنات تزاوجية أيضاً إعطاء معالجتين إلى شخصين يشتركان في خبرة واحدة سواء كانت خبرة وراثية أو بيئية ، كإعطاء دواء إلى مجموعة من التوائم أو الأشقاء يتلقي أحدهما الدواء ولا يتلقاه الآخر (مجموعة مراقبة) .

(٨ – ٧ – ١) اختبار ت للمقارنات التزاوجية :

ذكرنا في الملاحظة (٤) بالبند (٨ – ٤) أننا حين نتناول عاملا ذا مستويين (ك = ٢) يمكن أن نستخدم اختبار ت للمقارنة بين متوسطى هذين المستويين

وتكون النتيجة التي نحصل عليها من هذا الاختبار مطابقة تماماً للنتيجة التي نحصل عليها من تحليل التباين . غير أن الإحصاءة التي مرت بنا بالبند (٦ – ٦ – ٣) لا تصلح لهذا الغرض في حالة المقارنات التزاوجية لأن أحد شروط استخدام تلك الإحصاءة استقلال المجموعتين بينما نحن هنا بصدد مجموعتين مرتبطتين بل هما نفس المجموعة . أما الإحصاءة ت التي تصلح لذلك فتأخذ الصورة الآتية :

$$ت = \frac{\bar{ف} - (\mu_١ - \mu_٢)}{ع_ف / \sqrt{ن}} \quad \text{بدرجات حرية } \nu = ن - ١ \quad (١٣)$$

حيث $ف_ر = س_ر - ص_ر$

$$، \bar{ف} = \frac{١}{ن} \sum ف_ر = \frac{١}{ن} \sum (س_ر - ص_ر)$$

= متوسط الفروق بين استجابات المستويين

$$، ع_ف^٢ = \frac{١}{ن - ١} \sum (ف_ر - \bar{ف})^٢ = \text{تباين الفروق } ف_ر$$

$$= \frac{١}{ن - ١} \left[\sum ف_ر^٢ - \frac{(\sum ف_ر)^٢}{ن} \right] \quad (١٤)$$

مع ملاحظة أن $ع_ف / \sqrt{ن}$ هو الخطأ المعيارى لمتوسط الفروق مقدراً من العينة. والاختبار الذى نجريه باستخدام الإحصاءة (١٣) يعطى نتيجة مطابقة تماماً لما تعطيه طريقة تحليل التباين إلا أنه لا يزودنا بمقياس لتباين القطاعات (الصفوف) . وفي المثال (٨ – ٨) الأخير يمكننا الحل كما يلى :

الجدول (٨ - ١٣)

الأفراد	ف = س - ص	ف²	الأفراد	ف = س - ص	ف²
١	٠,٢٠	٠,٠٤	٩	٠,١٩	٠,٠٣٦١
٢	٠,٢١	٠,٠٤٤١	١٠	٠,٢٢	٠,٠٤٨٤
٣	٠,١٩	٠,٠٣٦١	١١	٠,١٦	٠,٠٢٦٥
٤	٠,٢٨	٠,٠٧٨٤	١٢	٠,١٩	٠,٠٣٦١
٥	٠,٢٥	٠,٠٦٢٥	١٣	٠,١٦	٠,٠٢٥٦
٦	٠,٢٠	٠,٠٤	١٤	٠,١٥	٠,٠٢٢٥
٧	٠,٢٦	٠,٠٦٧٦	١٥	٠,١٥	٠,٠٢٢٥
٨	٠,١٩	٠,٠٣٦١			
				٣,٠٠	٠,٦٢١٦

$\bar{ف} = \frac{٣}{١٥} = ٠,٢٠$ من السنتيمتر

$ع^{٢}_{ف} = \frac{١}{١٤} (٠,٦٢١٦ - \frac{٩}{١٥}) = ٠,٠١٥٤٣$

$ع_{ف} = ٠,٠٣٩٢٨١٠$

$ع_{ف} / \sqrt{ن} = \frac{٠,٠٣٩٢٨١٠}{\sqrt{١٥}} = ٠,٠١٠١٤٢٣$

الفرض الصفرى $ف_{.}$: $\mu_{٢} = \mu_{١}$

الفرض الآخر $ف_{١}$: $\mu_{٢} < \mu_{١}$

بحساب قيمة الإحصاءة (١٣) من بيانات العينة (وعلى أساس صحة الفرض الصفرى) نجد أن

$$ت_ى = \frac{٠,٢٠ - ٠}{٠,٠١٠١٤} = ١٩,٧٢٤^{**}$$ بدرجات حرية عددها ١٤

وهذه القيمة ذات دلالة عالية مما يجعلنا نرفض الفرض الصفرى ونستنتج أن عرض وجه البنات أوسع فى سن السادسة منه فى سن الخامسة .

ملاحظات :

(١) يمكن أن نثبت رياضيا أن مربع قيمة المتغير ت عند درجة الحرية ن يساوى قيمة المتغير ف عند درجتى الحرية (١ ، ن) . ففى المثال الأخير نجد أن : $ت^٢_ى$ = (١٩,٧٢٤)٢ = ٣٨٩,٠٣٦ . وهذا العدد يساوى العدد $ف_ى$ = ٣٨٩,١١ الذى ظهر بالجدول (٨ - ١١) فيما عدا الفرق الناشىء عن عمليات التقريب .

(٢) فى مثل هذه الحال يكون لدينا متغيران غير مستقلين س ، ص ، إلا أننا فى استخدام الإحصاءة (١٣) نعتبر أن لدينا متغيرا واحدا ف حيث ف = س - ص. ولما كان المتغيران س ، ص هما متغيران معتدلان متوسطاهما $\mu_١$ ، $\mu_٢$ وتبايناهما $\sigma^٢_١$ ، $\sigma^٢_٢$ على الترتيب ، فإن المتغير ف يكون متغيرا معتدلا متوسطه $\mu_ف = \mu_١ - \mu_٢$ وهذا المتوسط ينعدم إذا كان الفرض الصفرى صحيحا . أما التباين $\sigma^٢_ف$ فنقدره من العينة بالمقدار $ع^٢_ف$ المعرف فى (١٤) بصرف النظر عن تساوى أو عدم تساوى التباينين $\sigma^٢_١$ ، $\sigma^٢_٢$. أى أننا فى استخدامنا للإحصاءة (١٣) لا نكون بحاجة لفرض تساوى هذين التباينين .

(٣) إن حدى الثقة بدرجة ١ - α للفرق $\mu_١ - \mu_٢$ بين متوسطى مجتمعى المتغيرين غير المستقلين س ، ص هما (بالأسلوب المعتاد) :

$$\bar{ف} \pm \frac{ع_ف}{\sqrt{ن}} ت_{\alpha(ن - ١)} \qquad (١٥)$$

ففى المثال الأخير نجد أن حدى الثقة بدرجة ٩٩٪ للفرق بين متوسط عرض وجه البنات فى سن السادسة ومتوسط عرضه فى سن الخامسة هما

٠,٢٠ ± ٠,٠١٠١٤ × ٢,٩٧٧ أى ٠,١٧٠ ، ٠,٢٣٠ من السنتيمترات

تمارين (٨ - ٤)

١ - أراد طبيب باحث أن يقرر ما إذا كان تعاطى قرص من مادة معينة يحدث تأثيرا جانبيا غير مرغوب فيه من حيث تخفيض ضغط الدم . وقد بدأت التجربة بقياس ضغط الدم لعينة عشوائية من ١٥ فردا ثم إعطاء الأقراص لأفراد هذه العينة ، وانتهت بقياس ضغط الدم مرة أخرى بعد فترة معينة . سجلت القياسات كما يلى حيث س تعبر عن الضغط قبل تعاطى القرص ، ص تعبر عن الضغط لنفس الشخص بعد تعاطى القرص .

الفـــــرد :	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	(٨)	(٩)	(١٠)	(١١)	(١٢)	(١٣)	(١٤)	(١٥)
س :	٧٠	٨٠	٧٢	٧٦	٧٦	٧٦	٧٢	٧٨	٨٢	٦٤	٧٤	٩٢	٧٤	٦٨	٨٤
ص :	٦٨	٧٢	٦٢	٧٠	٥٧	٦٦	٦٨	٥٢	٦٤	٧٢	٧٤	٦٠	٧٤	٧٢	٧٤

هل هذه البيانات تؤدى إلى الحكم بأن للأقراص تأثيرا فى تخفيض ضغط الدم ؟
استخدم كلا من طريقة تحليل التباين واختبار ت وقارن بين النتيجتين .

٢ - كان أحد الأطباء يشك فى أن الميزان الذى يزن به المرضى فى عيادته يعطى قراءات أعلى من القراءات التى يجدها المرضى عند استخدامهم للموازين التى فى منازلهم . ولاختبار ذلك طلب الطبيب من عشرة مرضى تسجيل أوزانهم بملابسهم الكاملة قبل مغادرتهم منازلهم إلى عيادته ثم قام بوزنهم فور وصولهم فحصل على البيانات الآتية حيث س تعبر عن الوزن فى العيادة ، ص تعبر عن الوزن بالمنزل

س :	١٥٣	١٤٦	٢٠٧	١٧٣	١٢٧	١١٢	١٨١	١٣٢	١٣٩	٢١٣
ص :	١٥٠	١٤٧	٢٠٣	١٧١	١٢٩	١١٠	١٧٩	١٣٢	١٣٨	٢١٠

اختبر ما إذا كان الطبيب محقا فى شكه وأوجد فترة ثقة بدرجة ٩٥٪ للفرق بين نوعى الوزن .

(٨ – ٨) التجارب ذواتِ الثلاثة العوامل (في مربع لاتيني)
LATIN SQUARES

إن المشكلة الأساسية في تناول التجارب ذوات الثلاثة العوامل هى أنها تحتاج إلى عدد كبير من وحدات التجريب وينبغى البحث حينئذ عن تصميمات توفر في عدد هذه الوحدات ، وفكرة المربع اللاتيني تحقق هذا التوفير وتعطى مثالا جيداً لأهمية اختيار التصميم الكفء أى الذى يعطى نتائج كثيرة بأقل قدر من الجهد التجريبي .

والمربع اللاتيني من الرتبة ل هو تنظيم لحروف ا ، ب ، جـ ، ... عددها ل على هيئة مصفوفة مربعة (ل × ل) يشترط فيها أن يقع كل حرف مرة واحدة بالضبط في كل صف ومرة واحدة بالضبط في كل عمود ، وبذلك يظهر كل حرف ل بالضبط من المرات . المصفوفات الآتية هى أمثلة لمربعات لاتينية ذوات الرتب الثالثة والرابعة والخامسة ، علماً بأنه يمكن كتابة أى منها بصور أخرى مختلفة .

ا	ب	حـ
ب	حـ	ا
حـ	ا	ب

ى	ا	حـ	ب
حـ	ب	ى	ا
ب	ى	ا	حـ
ا	حـ	ب	ى

ب	ى	هـ	ا	حـ
حـ	ا	ب	هـ	ى
ى	حـ	ا	ب	هـ
ا	هـ	ى	حـ	ب
هـ	ب	حـ	ى	ا

في أى مربع لاتيني لدينا أعمدة يمكن أن تمثل عناصرها مستويات عامل ما ،

وصفوف يمكن أن تمثل عناصرها مستويات عامل ثان ، ولدينا أيضاً حروف ا ، ب ، جـ ، ... يمكن أن تمثل مستويات عامل ثالث . ولذلك تصلح المربعات اللاتينية لدراسة التجارب ذوات الثلاثة العوامل بطريقة تعد امتداداً للطريقة التي استخدمناها بالبند (٨ – ٦ – ١) . وبالاضافة إلى الشروط المعتادة ، ينبغي توفر الشرطين الآتيين لاستخدام المربعات اللاتينية :

١ – أن يتساوى عدد مستويات كل من العوامل الثلاثة ، وبذلك يكون عدد الأعمدة = عدد الصفوف = عدد الحروف = ل ، ويكون عدد وحدات التجريب هو ن = ل^{٢} .

٢ – ألا يكون هناك تفاعلات بين العوامل الثلاثة ، لأن هذا التصميم لا يقيس التفاعل نظرا لأن هناك مشاهدة واحدة فقط فى كل خلية .

(يحسن ألا تستخدم المربعات اللاتينية التي تقل رتبها عن خمسة لعدم وجود معلومات كافية عن مدى حساسية المربعات اللاتينية لانحراف ظروف التجربة عن الفروض الموضوعة) .

ولتحليل التباين من مربع لاتيني نوجد م م (الكلى) ، م م (بين الأعمدة) ، م م (بين الصفوف) كما في البند (٨ – ٦ – ١) وبالنسبة للعامل الثالث نوجد الاختلاف الناشيء عنه من الصيغة :

$$\text{م م (الحروف)} = \frac{\text{مج } \text{م}_{\text{س}}^{٢}}{\text{ل}} - \frac{\text{م}^{٢}}{\text{ن}}$$

حيث م$_{\text{س}}$ هو مجموع القيم المرتبطة بالحرف س (س = ا ، ب ، حـ ...) . أما م م (الخطأ) فيحسب بطرح مجموع الاختلافات الناشئة عن العوامل الثلاثة من الاختلاف الكلى .

مثال (٨ - ٩) :

لاختبار تأثير ٣ عوامل على المحصول وهى تأثير اختلاف الأسمدة (٥ أنواع) وتأثيرا اختلاف التربة في اتجاهين متعامدين ، قسمت قطعة أرض إلى ٢٥ حوضاً متساوية المساحة ومرتبة في ٥ صفوف موازية لأحد الاتجاهين ، ٥ أعمدة موازية للاتجاه المتعامد عليه ، ثم وزعت الأنواع الخمسة من الأسمدة عشوائيا على الأحواض بحسب خطة مربع لاتيني من الرتبة الخامسة ، ونتج المربع اللاتيني الآتي حيث تشير الحروف إلى الأسمدة وتشير الصفوف والأعمدة إلى الاتجاهين المتعامدين وتشير الأعداد إلى الكميات الناتجة من المحصول (مطروح ١٠ من كل منها) والمطلوب بحث تأثير كل من هذه العوامل الثلاثة .

					م ر
-٢,٦ أ	-١,١ د	-٤,٢ هـ	٢,٠ ب	٤,٣ حـ	-١,٦
١,٨ ح	-٣,٥ ب	-١,٣ أ	-٢,٤ هـ	-٢,١ د	-٧,٥
٠,١ د	٧,٩ حـ	-١,٠ ب	-١,٥ أ	-٢,٩ هـ	٢,٦
-١,٢ هـ	٠,١ أ	٥,٧ حـ	١,١ د	-٢,٦ ب	٣,١
١,٨ ب	-١,٢ هـ	٤,٣ د	٨,٤ حـ	٠,١ أ	١٣,٤
ع -٠,١	٢,٢	٣,٥	٧,٦	-٣,٢	م=١٠

الحل :

بالنسبة للأسمدة (الحروف) نجد أن المجاميع م س كما يلى :

$م_س$: أ = −٥,٢ ، ب= −٣,٣ ، جـ = ٢٨,١ ، د= ٢,٣ ، هـ = −١١,٩

م م (الكلى) $= \text{مج مج } س^{٢}_{رو} - \frac{م^{٢}}{ن}$

$= ٢٨٥,١٨ - \frac{١٠٠}{٢٥} = ٢٨١,١٨$ حيث $\nu_{١} = ٢٤$

م م (بين الأعمدة) $= \text{مج } \frac{م_{و}^{٢}}{ل} - \frac{م^{٢}}{ن}$

$= ١٧,٠٢ - ٤ = ١٣,٠٢$ حيث $\nu_{٢} = ٤$

م م (بين الصفوف) $= \text{مج } \frac{م_{ر}^{٢}}{ل} - \frac{م^{٢}}{ن}$

$= ٥٠,٩٥ - ٤ = ٤٦,٩٥$ حيث $\nu_{٣} = ٤$

م م (بين الأسمدة) $= \text{مج } \frac{م_{س}^{٢}}{ل} - \frac{م^{٢}}{ن}$

$= ١٩٤,٨٩ - ٤ = ١٩٠,٨٩$ حيث $\nu_{٤} = ٤$

م م (الخطأ) $= ٢٨١,١٨ - (١٣,٠٢ + ٤٦,٩٥ + ١٩٠,٨٩)$

$= ٣٠,٣٢$ حيث $\nu_{٥} = ٢٤ - ١٢ = ١٢$

$ف_{٠,٠٥[٤ ، ١٢]} = ٣,٣٦$ ، $ف_{٠,٠١[٤ ، ١٢]} = ٥,٤١$

الاستنتاج : انظر الجدول (٨ ــ ١٤) .

(١) الاختلاف الناشيء عن الأسمدة ذو دلالة عالية .

(٢) الاختلاف الناشيء عن الأعمدة ليس له دلالة عند المستوى ٠,٠٥

(٣) الاختلاف الناشيء عن الصفوف ذو دلالة عند المستوى ٠,٠٥ وليس ذى دلالة عند المستوى ٠,٠١

جدول (٨ – ١٤)

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	تقدير التباين	ف
بين الأعمدة	١٣,٠٢	٤ = ل − ١	٣,٢٥٥	١,٣
بين الصفوف	٤٦,٩٥	٤ = ل − ١	١١,٧٣٧	٤,٦*
بين الأسمدة	١٩٠,٨٩	٤ = ل − ١	٤٧,٧٢٢	١٨,٩**
الخطأ	٣٠,٣٢	١٢ = (ل−١)(ل−٢)	٢,٥٢٧	
المجموع	٢٨١,١٨	٢٤ = ل^2 − ١		

تمارين (٨ – ٥)

(١) في دراسة في أبحاث السوق كان المطلوب اختبار تأثير ثلاثة عوامل على مبيعات نوع معين من الغذاء في قطر ما وهذه العوامل هى :

(١) طرق التعبئة – ٤ مستويات : ا ، ب ، جـ ، ى

(٢) المناطق المختلفة في القطر – ٤ مستويات .

(٣) طرق التشجيع على الشراء – ٤ مستويات : نسبة تخفيض ، يانصيب ، كوبونات ، هدايا .

وقد أجريت تجربة باستخدام تصميم مربع لاتيني من الرتبة الرابعة وسجلت المبيعات في أسبوع بعشرات الآلاف من الدولار كالآتي :

المناطق	تخفيض	يانصيب	كوبونات	هدايا	المجموع
(١)	٤٨ أ	٣٨ ب	٤٢ جـ	٥٣ د	١٨١
(٢)	٣٩ ب	٤٣ جـ	٥٠ د	٥٤ أ	١٨٦
(٣)	٤٢ جـ	٥٠ د	٤٧ أ	٤٤ ب	١٨٣
(٤)	٤٦ د	٤٨ أ	٤٦ ب	٥٢ جـ	١٩٢
المجموع	١٧٥	١٧٩	١٨٥	٢٠٣	٧٤٢

مجـ أ = ١٩٧ مجـ ب = ١٦٧ مجـ جـ = ١٧٩ مجـ د = ١٩٩

ابحث دلالة تأثير كل من العوامل الثلاثة .

(٢) في المثال (٨ – ٩) أثبت أن الخطأ المعيارى

$ع_{خ} \sqrt{\frac{١}{ن_{١}} + \frac{١}{ن_{٢}}} = ع_{خ} \sqrt{\frac{٢}{ل}}$ للفرق بين متوسطين هو ١,٠٠٥

وممن ثم بين أن الفرق الذى يقل عن ٢,٢ بين أى متوسطين لا يكون ذا دلالة عند المستوى ٠,٠٥ ومن ثم برهن أن :

(أ) متوسط المحصول الناتج من السماد جـ أكبر جوهرياً من ذلك الناتج من أى نوع آخر من السماد .

(ب) متوسط المحصول الناتج من السماد د أكبر جوهرياً من ذلك الناتج من السماد هـ .

(٨ – ٩) معالجة الانحرافات عن افتراضات التحليل :

إن سلامة ما نجريه من تحليل وما نخرج به من نتائج تتوقف على توفرالافتراضات المذكورة فى البند (٨ – ٤ – ١) . ولكن ماذا يكون موقفنا إذا لم تكن بعض هذه الافتراضات مستوفاة ؟ هذا ما سناقشه كما يلى :

(أ) افتراض الاعتدالية :

إن افتراض اعتدال المجتمعات التى نتناولها فى تحليل التباين هو افتراض رئيسى . ولكن نظرا لأننا فى هذا التحليل (بالنموذج ثابت التأثيرات) نبحث فى الفروق بين المتوسطات فإن هذاالافتراض يمكن أن نتحلل منه دون خطورة بشرط أن تكون العينات كبيرة كبرا كافيا (أى لا يقل حجم كل منها عن ٣٠) . وذلك لأنه حسب نظرية النهاية المركزية – انظر ملاحظة البند (٦ – ٣) – إذا كانت الاستنتاجات المتعلقة بالأوساط الحسابية صحيحة حين تكون المجتمعات معتدلة فإنها تظل صحيحة حين تكون المجتمعات غير معتدلة بشرط أن تكون العينات كبيرة كبرا كافيا . وكلما اشتد انحراف المجتمع عن الاعتدالية كلما وجب علينا زيادة حجوم العينات .

(ب) افتراض تساوى التباينات :

يتضمن الافتراض الثانى من افتراضات تحليل التباين أن تكون مجتمعات أقسام أو مستويات عامل التجريب متساوية التباين . يمكن التجاوز عن هذا الافتراض بشرط أن تكون العينات متساوية الحجم لأنه فى هذه الحال لا يكون التحليل حساسا للانحرافات الصغيرة عن افتراض تساوى التباينات . أما إذا لم تكن العينات متساوية الحجم فإن اختلاف تباينات مجتمعاتها يكون ذا عواقب وخيمة على صحة الاستنتاج . ولهذا يفضل سحب عينات متساوية الحجم كلما أمكن ذلك .

(جـ) افتراض استقلال الأخطاء :

يتطلب الافتراض الثالث أن تكون أخطاء التجريب مستقلة عن بعضها وعن مستويات المعالجة ، وهذا أمر بالغ الأهمية لسلامة استخدام اختبار ف فى تحليل التباين . وعدم توفر هذا الشرط يمكن أن يؤدى إلى خطأ جسيم فى الاستنتاج . ولذلك وجب اتخاذ القدر الكافى من الحيطة فى عملية التجريب بحيث نضمن استقلال المشاهدات داخل وبين المجموعات ، ويساعدنا على ذلك تطبيق مبدأ العشوائية فى كافة جوانب التجربة وقد سبق الإشارة إلى ذلك .

وفى كثير من الأحيان يمكن تصحيح بعض الانحرافات عن الفروض الموضوعة باستخدام أحد التحويلات المناسبة كالمذكورة فى البند (٤ – ٥) . على أنه إذا فشلنا فى توفير هذه الفروض فلا مفر من الالتجاء فى التحليل إلى أحد الطرق غير البارامترية التى سنتناولها فى الفصل الرابع عشر .

(٨ – ١٠) عودة إلى مقارنة المتوسطات :

نعلم أن تحليل التباين ما هو إلا الخطوة الأولى لدراسة نتائج التجربة وأن الخطوة الثانية (فى النموذج ثابت التأثيرات) هى مقارنة متوسطات أقسام المعالجة واختبار ما قد يكون بينها من فروق . ولقد قدمنا فى البند (٨ – ٥) طريقة لاختبار هذه المقارنات فى حالتى المقارنات القبلية والبعدية . ونقدم الآن أسلوبا أو مدخلا آخر يسفر عن نفس الصيغ والاختبارات السابق تقديمها ولكن فى صور مختلفة وبدلالة متغيرات أخرى ، وبالتالى يسفر عن نفس الاستنتاجات . على أن دراسة هذا المدخل تعمق مفهوم المقارنات وتضفى عليها معانى مفيدة . وفى هذا البند والبنود الثلاثة التالية نقدم بعض التعاريف الأساسية فى هذا المدخل ونبدأ بالتعريف الآتى :

تعريف (١) : المقارنة (أو المتضادة)

COMPARISON (or CONTRAST)

(ا) المقارنة بين متوسطات مجتمعات :

لتكن $\mu_{١}$ ، $\mu_{٢}$ ، . . . ، $\mu_{\text{ك}}$ متوسطات ك من المجتمعات . ولتكن $\text{ا}_{١}$ ، $\text{ا}_{٢}$ ، . . . $\text{ا}_{\text{ك}}$ أعدادا ثابتة ليست جميعها أصفارا . إن أى تعبير خطى ψ فى هذه المتوسطات :

$$\psi = \text{ا}_{١}\,\mu_{١} + \text{ا}_{٢}\,\mu_{٢} + \ldots + \text{ا}_{\text{ك}}\,\mu_{\text{ك}} = \text{مجـ}_{\text{ر}}\ \text{ا}_{\text{ر}}\,\mu_{\text{ر}} \qquad (١٦)$$

يسمى مقارنة (خطية) بين متوسطات هذه المجتمعات إذا توفر الشرط الآتى :

$$\text{ا}_{١} + \text{ا}_{٢} + \ldots + \text{ا}_{\text{ك}} = ٠ \quad \text{أى} \quad \text{مجـ}\ \text{ا}_{\text{ر}} = ٠$$

ويتضمن هذا الشرط أن تكون بعض المعاملات $\text{ا}_{\text{ر}}$ (وتسمى أوزانا) موجبة والبعض الآخر سالبة . والمعتاد اختيار هذه الأوزان فى أى مقارنة بحيث يكون مجموع الأوزان الموجبة مساويا للواحد وبالتالى يكون مجموع الأوزان السالبة مساويا للعدد -١ . وهذا الإجراء ممكن دائما وعيبه أنه يجعل الأوزان فى صور كسرية فى أغلب المقارنات ولذلك لا يفضله بعض الباحثين . ومن أمثلة المقارنات الخطية ما يلى :

$$\mu_{١} - \mu_{٢} \ ، \ \tfrac{١}{٢}\mu_{١} + \tfrac{١}{٢}\mu_{٢} - \mu_{٣} \ ، \ ٢\mu_{١} - \mu_{٢} - \mu_{٣} \ .$$

(ب) المقارنة بين متوسطات عينات :

لتكن $\bar{\text{س}}_{١}$ ، $\bar{\text{س}}_{٢}$ ، . . . ، $\bar{\text{س}}_{\text{ك}}$ متوسطات ك من العينات المأخوذة من

المجتمعات موضع الدراسة . ولتكن $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ ، . . . ، $ا_{ك}$ أعدادا ثابتة ليست جميعها أصفارا . إن أى تعبير خطى $\hat{\psi}$ فى هذه المتوسطات :

$$\hat{\psi} = ا_{١}\,\bar{س}_{١} + ا_{٢}\,\bar{س}_{٢} + \ldots + ا_{ك}\,\bar{س}_{ك} \qquad (١٧)$$

$$\text{حيث } مجـ\, ا_{ر} = ٠ \qquad (١٨)$$

يسمى مقارنة بين متوسطات هذه العينات .

ويمكن إثبات أن توفر الشرط (١٨) يجعل قيمة أى مقارنة بين متوسطات العينات مستقلة عن قيمة المتوسط العام $\bar{س}$ لهذه العينات . وهذا أمر هام لأننا فى مقارنة متوسطات المجتمعات ينبغى ألا يكون لمتوسطات العينات أى علاقة بقيمة $\bar{س}$ التى نستخدمها لتقدير المتوسط العام μ للمجتمع .

(حـ) المقارنة بين مجاميع عينات

بالمثل ، لتكن $م_{١}$ ، $م_{٢}$ ، . . . ، $م_{ك}$ مجاميع ك من العينات ولتكن $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ ، ... ، $ا_{ك}$ أعدادا ثابتة ليس جميعها أصفارا . إن أى تعبير خطى $\hat{\psi}$ فى هذه المجاميع :

$$\hat{\psi} = ا_{١}\,م_{١} + ا_{٢}\,م_{٢} + \ldots + ا_{ك}\,م_{ك} \qquad (١٩)$$

$$\text{حيث } مجـ\, ا_{ر} = ٠$$

يسمى مقارنة بين مجاميع هذه العينات .

وفى تحليل التباين ، المعتاد استخدام المقارنات بين المجاميع وليس بين المتوسطات لأن ذلك يخفف من بعض عمليات القسمة والتقريب . غير أننا سنتناول هنا المقارنات بين المتوسطات لأننا أساسا ندرس هذه المتوسطات وبالتالى فإن تناولها يكون أكثر قدرة

على ما نريد توضيحه من مفاهيم . وعلى أية حال فإن ما سنقدمه من صيغ تخص المقارنات بين المتوسطات يمكن تحويلها إلى صيغ تخص المقارنات بين المجاميع بمجرد ضرب كل معامل اِر فى الحجم نر للعينة الخاصة به .

(يلاحظ أن رمز المقارنة ψ أو $\hat{\psi}$ هو عبارة عن عدد واحد لأنه يتركب من مجموع أعداد) .

إن أى تساؤل عن بعض أو كل متوسطات أقسام المعالجة يمكن وضعه فى صورة مقارنة بين هذه المتوسطات ولا يستلزم الأمر إلا وضع وزن مناسب لكل متوسط بحيث يتحقق الشرط (١٨) ، مع ملاحظة إعطاء الوزن صفر للمتوسطات التى لا تدخل فى المقارنة .

مثال (٨ – ١٠) :

فى المثال (٨ – ١) كان لدينا خمسة أقسام حجم كل منها ١٠ ومتوسطاتها كالآتى :

(١) جلوكوز	(٢) فركتوز	(٣)جلوكوز + فركتوز	(٤) سكروز	(٥) مراقبة
٥٩,٣	٥٨,٢	٥٨	٦٤,١	٧٠.١

وفى الأمثلة (٨ – ٢) و(٨ – ٣) و(٨ – ٤) التابعة لهذا المثال كان المطلوب الإجابة عن التساؤلات القبلية الآتية :

(١) هل متوسط مجموعة السكريات الأربعة مجتمعة يختلف عن متوسط مجموعة المراقبة ؟

(٢) هل متوسط مجموعة السكريات النقية (١) و(٢) و(٤) مجتمعة يختلف عن متوسط السكر الخليط ؟

(٣) هل متوسطات مجموعات السكريات (١) و(٢) و(٤) واحدة ؟

إن هذه التساؤلات يمكن صياغتها على هيئة مقارنات بين المتوسطات كالآتى ، مع ملاحظة أنه يمكن إعطاء أوزانا أخرى تتناسب مع الأوزان المأخوذة هنا ومع ملاحظة ضرورة توفر الشرط (١٨) :

$$\psi_1 = \frac{1}{4}\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_3 + \frac{1}{4}\mu_4 - \mu_5$$

$$\psi_2 = \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 - \mu_3 + \frac{1}{3}\mu_4 - \text{صفر} \times \mu_5$$

أما التساؤل الثالث فيتضمن مقارنتين يمكن كتابتهما بصور مختلفة منها :

$$\psi_3 = \mu_1 - \mu_2 ،$$
$$\psi_4 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) - \mu_4$$

وعادة ما تكتب المقارنات المناظرة بين متوسطات العينات فى جدول كالآتى :

جدول (٨ - ١٥)

المقارنات المتعلقة بالأمثلة (٨ - ٢) و(٨ - ٣) و(٨ - ٤)

المتوسط / المقارنة	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)
	٥٩,٣	٥٨,٢	٥٨	٦٤,١	٧٠,١
$\hat{\psi}_1$: سكريات ضد مراقبة	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	−١
$\hat{\psi}_2$: سكريات نقية ضد سكر خليط	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	−١	$\frac{1}{3}$	٠
$\hat{\psi}_3$: جلوكوز ضد فركتوز	١	−١	٠	٠	٠
$\hat{\psi}_4$: (جلوكوز+فركتوز) ضد سكروز	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	٠	−١	٠

من هذا الجدول يسهل إيجاد قيم المقارنات الأربع كالآتى :

$$\hat{\psi}_1 = \frac{1}{4}(59.3 + 58.2 + 58 + 64.1) - 70.1 = -10.2$$

$$\hat{\psi}_2 = \frac{1}{3}(59.3 + 58.2 + 64.1) - 58 + \text{صفر} = 2.5333$$

$$\hat{\psi}_3 = 59.3 - 58.2 + 0 + 0 + 0 = 1.1$$

$$\hat{\psi}_4 = \frac{1}{2}(59.3 + 58.2) + 0 - 64.1 + 0 = -5.35$$

(٨ – ١١) المقارنات القبلية :

كما سبق القول ، يفضل اختيار المقارنات القبلية بحيث تكون مستقلة إحصائيا عن بعضها ، وذلك لكى تكون المعلومات الناتجة من أى مقارنة ذات قيمة تخصها وحدها ولا تتداخل مع المعلومات الناتجة من أى مقارنة أخرى . ولذلك يهمنا أن نعرف قاعدة نستدل بها على استقلال أو عدم استقلال المقارنات .

(٨ – ١١ – ١) معيار استقلال مقارنتين :

يمكن البرهنة رياضيا على النظرية الآتية :

لتكن $\tilde{\text{س}}_1$ ، $\tilde{\text{س}}_2$ ، ... ، $\tilde{\text{س}}_\text{ك}$ هى ك من المتغيرات العشوائية **المستقلة** التى لها توزيعات **معتدلة وتباين مشترك** . ولتكن ψ_1 و ψ_2 هما المقارنتان :

$$\psi_1 = \text{ا}_1 \tilde{\text{س}}_1 + \text{ا}_2 \tilde{\text{س}}_2 + \dots + \text{ا}_\text{ك} \tilde{\text{س}}_\text{ك}$$

$$\psi_2 = \text{ب}_1 \tilde{\text{س}}_1 + \text{ب}_2 \tilde{\text{س}}_2 + \dots + \text{ب}_\text{ك} \tilde{\text{س}}_\text{ك}$$

يكون المتغيران العشوائيان ψ_1 و ψ_2 مستقلين إحصائيا إذا توفر الشرط الآتى :

$$\text{ا}_1 \text{ب}_1 + \text{ا}_2 \text{ب}_2 + \dots + \text{ا}_\text{ك} \text{ب}_\text{ك} = 0$$

أى $$\sum \text{ا}_\text{ر} \text{ب}_\text{ر} = 0 \qquad (20)$$

(لاحظ أن هذا الشرط يعتمد فقط على الأوزان ولا يعتمد على المتغيرات) .

إن هذه النظرية تمنحنا قاعدة أو معيارا للكشف عن استقلال المقارنات . فإذا كان لدينا ك من المجتمعات المعتدلة التى تشترك فى التباين وسحبنا منها ك من العينات **المستقلة** التى لها **نفس الحجم** فإنه تطبيقا لهذه النظرية تكون أى مقارنتين $\hat{\psi}_1$ و$\hat{\psi}_2$ بين متوسطات العينات مستقلتين إذا توفر الشرط (٢٠) .

ويقال لمقارنتين ينطبق عليهما معيار الاستقلال إنهما متعامدتان **orthogonal** . وتعامد مقارنتين هنا يعنى استقلالهما إحصائيا ، ولذلك تستخدم كلمتا « التعامد » و« الاستقلال » كمترادفتين ما دمنا نتعامل مع متغيرات مستقلة وتوزيعات معتدلة تشترك فى التباين .

وحين تكون العينات مختلفة الأحجام ، $\text{ن}_\text{ر}$ ترمز إلى حجم العينة ر فإن معيار الاستقلال يتخذ الصيغة الآتية :

$$\frac{\text{أ}_1\,\text{ب}_1}{\text{ن}_1} + \frac{\text{أ}_2\,\text{ب}_2}{\text{ن}_2} + \ldots + \frac{\text{أ}_\text{ك}\,\text{ب}_\text{ك}}{\text{ن}_\text{ك}} = 0 .$$

أى
$$\text{مج}\ \frac{\text{أ}_\text{ر}\,\text{ب}_\text{ر}}{\text{ن}_\text{ر}} = 0 . \qquad (21)$$

مثال (٨ – ١١) :

اختبر استقلال المقارنات المدونة بالجدول (٨ – ١٥) ، على فرض توفر شروط استقلال المتوسطات واعتدال المجتمعات وتساوى تبايناتها .

الحل :

بالجدول أربع مقارنات وإذن هناك ق^{4}_{2} = ٦ أزواج من المقارنات يراد اختبار استقلالها . ومع ملاحظة تساوى أحجام العينات نجد من الصيغة (٢٠) ما يلى :

للمقارنتين $\hat{\psi}_1$ و$\hat{\psi}_2$: $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\times(-1) + \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + (-1)\times 0 = 0$

وإذن هاتان المقارنتان مستقلتان .

للمقارنتين $\hat{\psi}_1$ و$\hat{\psi}_3$: $\frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times (-1) + 0 = 0$

وإذن هاتان المقارنتان مستقلتان .

بالمثل نجد أن الأزواج الأربعة الباقية مستقلة ، وبذلك تكون المقارنات الستة مستقلة مثنى مثنى . تحقق من ذلك .

(٨ – ١١ – ٢) اختبار المقارنات القبلية :

يعتمد اختبار المقارنات القبلية على الحقيقتين الآتيتين اللتين يمكن إثباتهما رياضيا .

(أولا) المقارنة $\hat{\psi}$ بين متوسطات العينات هى تقدير غير متحيز للمقارنة ψ بين متوسطات المجتمعات التى أخذت منها العينات والتى تحمل نفس الأوزان .

(ثانيا) على فرض استقلال المتوسطات ، وإذا كان σ^2 هو التباين المشترك للمجتمعات فإن الخطأ المعيارى للمقارنة $\hat{\psi}$ بين المتوسطات هو

$$\sigma \sqrt{\sum \frac{ا_ر^2}{ن_ر}} \qquad (٢٢)$$

حيث $ن_ر$ حجم العينة ر .

ونظرا لأن التباين σ^2 يكون عادة غير معروف فإننا نقدره من البيانات المشاهدة بنفس طريقة التقدير فى تحليل التباين أى بواسطة $ع_خ^2$ وهو تباين خطأ التجريب . وبذلك يكون تقدير الخطأ المعيارى للمقارنة $\hat{\psi}$ بين المتوسطات هو $ع_{\hat{\psi}}$ حيث :

$$ع_{\hat{\psi}} = ع_خ \sqrt{\sum \frac{ا_ر^2}{ن_ر}} \qquad (٢٣)$$

من هاتين الحقيقتين وحين تتوفر شروط اعتدالية المجتمعات وتساوى تبايناتها واستقلال المتوسطات – وهذا ما نفترضه عادة فى تحليل التباين – فإنه حسب البند (٦ – ٦) يكون للإحصاءة

$$ت = \frac{\hat{\psi} - \psi}{ع_{\psi}} \qquad (٢٤)$$

توزيع ت بدرجات حرية عددها هو عدد درجات حرية $ع^{٢}_{خ}$ والذى نرمز له بالرمز $\nu_{خ}$.

كما أنه من البند (٦ – ٦ – ٢) تكون الفترة

$$(\hat{\psi} - ع_{\psi} \,.\, ت_{\alpha[\nu\, خ]} \,،\, \hat{\psi} + ع_{\psi} \,.\, ت_{\alpha[\nu\, خ]}) \qquad (٢٥)$$

هى فترة ثقة بدرجة (١ – α) للمقارنة ψ .

كل من اختبار ت بالصورة (٢٤) والفترة (٢٥) يصلح لاختبار أى فرض عن قيمة المقارنة ψ . وبالرغم من أن اختبار ت هو أصلا ، كما نعلم ، اختبار للفرق بين متوسطى عينتين مستقلتين أى للمقارنات التى على الصورة $\hat{\psi} = \bar{س}_{م} - \bar{س}_{و}$ إلا أنه يصلح هنا أيضا لاختبار أى مقارنة مهما كان عدد المتوسطات الداخلة فيها . وهذا استثناء فى استخدام اختبار ت السابق دراسته . وبالنسبة للفترة (٢٥) ، إذا افترضنا قيمة معينة أ لمقارنة ψ ولم تقع هذه القيمة فى هذه الفترة فإننا ، كالمعتاد ، نرفض الفرض ψ = أ عند مستوى الدلالة α (اختبار ذو جانبين) .

وفى معظم الحالات يكون المطلوب اختبار الفرض الصفرى $\psi = ٠$ ضد الفرض $\psi \neq ٠$ وفى هذه الحالة تأخذ الإحصاءة (٢٤) الصيغة الآتية :

$$\text{ت} = \frac{\hat{\psi}}{\text{ع}_{\psi}} \qquad \text{بدرجة حرية } \nu_{\text{خ}} \qquad (\text{٢٦})$$

$$\text{أو الصيغة المكافئة ف} = \frac{\hat{\psi}^{\text{٢}}}{\text{ع}^{\text{٢}}_{\psi}} \qquad \text{بدرجتى حرية ١ ، } \nu_{\text{خ}} \qquad (\text{٢٧})$$

وفى هذه الحالة أيضا نرفض الفرض الصفرى $\psi = \text{٠}$ عند مستوى الدلالة α إذا كانت الفترة (٢٥) لا تحتوى الصفر .

مثال (٨ – ١٢) :

أجب عن التساؤل الأول المطروح بالمثال (٨ – ١٠) مستخدما مستوى الدلالة ٠,٠١ مع تذكر أننا وجدنا فى تحليل التباين أن تباين خطأ التجريب هو $\text{ع}^{\text{٢}}_{\text{خ}} = \text{٥,٤٦}$ بدرجات حرية $\nu_{\text{خ}} = \text{٤٥}$ وأن كلا من المتوسطات بنى على ١٠ مشاهدات

الحل :

التساؤل المطلوب يشير إلى المقارنة $\psi_{\text{١}}$ بين متوسط أقسام السكريات مجتمعة ومتوسط قسم المراقبة .

الفرض الصفرى : $\psi_{\text{١}} = \text{٠}$ والفرض الآخر $\psi_{\text{١}} \neq \text{٠}$.

وجدنا أن $\hat{\psi}_{\text{١}} = -\text{١٠,٢}$

من (٢٣) : $\text{ع}^{\text{٢}}_{\psi} = \text{ع}^{\text{٢}}_{\text{خ}} \text{ مج } \frac{\text{أ}^{\text{٢}}_{\text{ر}}}{\text{ن}_{\text{ر}}}$ حيث $\nu = \text{٤٥}$

$$= \text{٥,٤٦} \times \frac{\text{١}}{\text{١٠}}\left[(\tfrac{\text{١}}{\text{٤}})^{\text{٢}} + (\tfrac{\text{١}}{\text{٤}})^{\text{٢}} + (\tfrac{\text{١}}{\text{٤}})^{\text{٢}} + (-\text{١})^{\text{٢}}\right]$$

$$= \text{٠,٦٨٢٥}$$

من (٢٧) : $ف_{ى} = \frac{(-٢,١٠)^{٢}}{٠,٦٨٢٥} = ١٥٢,٤٤٨^{**}$

وبما أن $ف_{٠,٠١[١ ، ٤٥]} = ٧,٣١$ نرفض الفرض الصفرى عند المستوى ٠,٠١ . يلاحظ أن قيمة $ف_{ى}$ الناتجة هى نفس قيمة $ف_{ى}$ التى سبق أن توصلنا إليها فى المثال (٨ − ٢) .

ويمكن بطبيعة الحال استخدام اختبار ت بالصيغة (٢٦) حيث نجد أن القيمة التى تنتج تساوى الجذر التربيعى لقيمة $ف_{ى}$ التى حصلنا عليها . كما يمكن استخدام فترة الثقة (٢٥) كالآتى :

الحد الأدنى للفترة = $-٢,١٠ - \sqrt{٠,٦٨٢٥} \times ٢,٦٣ = -١٢,٣٧$

الحد الأعلى للفترة = $-٢,١٠ + \sqrt{٠,٦٨٢٥} \times ٢,٦٣ = -٨,٠٣$

إذن الفترة (−١٢,٣٧ ، −٨,٠٣) هى فترة ثقة بدرجة ٩٩٪ للمقارنة $\psi_{١}$. وبما أنها لا تحتوى الصفر نرفض الفرض $\psi_{١} = ٠$ عند المستوى ٠,٠١ .

إن الصيغ (٢٤) و(٢٥) و(٢٦) و(٢٧) لاختبار المقارنات القبلية التى وضعت أصلا للتجارب ذوات العامل الواحد تصلح كذلك للتجارب ذوات العاملين أو أكثر طالما كان النموذج المستخدم هو النموذج ثابت التأثيرات .

مثال (٨ − ١٣) :

أجب عن التساؤلات القبلية الثلاثة المطروحة بالمثال (٨ − ٧) علما بأن $ع^{٢}_{خ} = ٣,١٣$ بدرجات حرية ٤٥ وأن كلا من المتوسطات بنى على ٨ مشاهدات .

الحل :

نضع هذه التساؤلات على هيئة مقارنات كما بالجدول (٨ − ١٦) الآتى :

جدول (٨-١٦)

المقارنات المتعلقة بالمثال (٨-٧)

المقارنة \ المتوسط	(١)	(٢)	(٣)	(٤)
	١٢,٦٢٥	٥,٥	٣,٨٧٥	٢,٢٥
$\hat{\psi}_1$: درجة الحرارة ٨ ضد درجة الحرارة ٢٨	١	٠	٠	١-
$\hat{\psi}_2$: درجة الحرارة ١٤ ضد درجة الحرارة ٢١	٠	١	١-	٠
$\hat{\psi}_3$ الدرجتان (٨، ٢٨) ضد الدرجتان (١٤، ٢١)	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$

$$\hat{\psi}_1 = ١ \times ١٢,٦٢٥ - ١ \times ٢,٢٥ = ١٠,٣٧٥$$

$$ع^2_{\psi_1} = ٣,١٣ \times \frac{١}{٨} (١+١) = ٠,٧٨٢٥$$

$$ف_ى = (١٠,٣٧٥)^2 / ٠,٧٨٢٥ = ١٣٧,٥٥٩^{**}$$

بما أن $ف_{٠,٠١[١،٤٥]} = ٧,٣١$ فإن $ف_ى$ تكون ذات دلالة عالية ونرفض الفرض الصفرى أن $\psi_1 = ٠$

بالمثل نجد أن

$$\hat{\psi}_2 = ١,٦٢٥ \quad وع^2_{\psi_2} = ٠,٧٨٢٥ \quad وف_ى = ٣,٣٧٥$$

وإذن نقبل الفرض أن $\psi_2 = ٠$

كذلك

$$\hat{\psi}_3 = ٢,٧٥ \quad وع^2_{\psi_3} = ٠,٣٩١٢٥ \quad وف_ى = ١٩,٣٢٩^{**}$$

وإذن نرفض الفرض أن $\psi_3 = ٠$

لاحظ أن هذه هى نفس النتائج التى توصلنا إليها فى المثال (٨ - ٧).

(٨ – ١٢) تجزىء مجموع المربعات بين أقسام المعالجة :

إن تحليل التباين بالنموذج ثابت التأثيرات يكافىء فصل البيانات إلى مجموعة من المقارنات المستقلة ، إذ أن كل درجة من درجات الحرية تصاحب معالجة ما يناظرها مقارنة ما بين المتوسطات . ولتوضيح ذلك نبدأ بالتعريف الآتى :

تعريف (٢) : مجموع مربعات مقارنة :

إذا كانت $\hat{\psi} = ا_{١}\,\bar{س}_{١} + ا_{٢}\,\bar{س}_{٢} + \cdots + ا_{ك}\,\bar{س}_{ك}$ مقارنة بين متوسطات العينات فإن مجموع مربعات هذه المقارنة يعرف كالآتى :

$$مم(\hat{\psi}) = (\hat{\psi})^{٢} \Big/ \sum^{ك} \frac{ا_{ر}^{٢}}{ن_{ر}} \qquad (٢٨)$$

ويمكن إثبات أن لهذا المجموع درجة واحدة من درجات الحرية .

فمثلا ، فى المثال (٨ – ٢) الذى يتناول المقارنة $\hat{\psi}_{١}$ بين أقسام السكريات مجتمعة ضد قسم المراقبة نجد ما يلى :

$$\hat{\psi}_{١} = -١٠,٢$$

$$\sum \frac{ا_{ر}^{٢}}{ن_{ر}} = \frac{١}{١٠}\left[(\tfrac{١}{٤})^{٢} + (\tfrac{١}{٤})^{٢} + (\tfrac{١}{٤})^{٢} + (\tfrac{١}{٤})^{٢} + ١^{٢}\right] = ٠,١٢٥$$

$\therefore\ مم(\hat{\psi}_{١}) = (-١٠,٢)^{٢} / ٠,١٢٥ = ٨٣٢,٣٢$ بدرجة حرية واحدة .

وهذا العدد بالضبط هو الذى وجدناه فى المثال (٨ – ٢) .

كذلك ، فى المثال (٨ – ٣) الذى يتناول المقارنة $\hat{\psi}_{٢}$ بين السكريات النقية والسكر الخليط نجد ما يلى :

$$\hat{\psi}_{٢} = ٢,٥٣٣٣ \ ،\ \sum \frac{ا_{ر}^{٢}}{ن_{ر}} = ٠,١٣٣٣٣ \ ،\ مم(\hat{\psi}_{٢}) = ٤٨,١٣$$

بدرجة حرية واحدة . وهذا العدد هو بالضبط العدد الذى وجدناه فى المثال (٨ - ٣) .

ويترتب على التعريف (٢) أن

$$\text{تباين}(\hat{\psi}) = \text{م م}(\hat{\psi}) \div ١ = \text{م م}(\hat{\psi})$$

وحين تتوفر الشروط المعتادة لتحليل التباين يكون توزيع نسبة التباين لأى مقارنة $\hat{\psi}$ وهى

$$\text{ف} = \frac{\text{م م}(\hat{\psi})}{ع^{٢}_{خ}} \qquad (٢٩)$$

مطابقا لتوزيع ف بدرجتى حرية ١ ، $\nu_{خ}$ ويمكن باستخدام (٢٨) ، (٢٣) إثبات أن هذه النسبة هى بذاتها نسبة التباين (٢٧) وهى ف = $\frac{\hat{\psi}^{٢}}{ع^{٢}_{\psi}}$.

نبحث الآن فى المقارنات المستقلة ، وفى هذا البحث تلزمنا القاعدتين الآتيتين اللتين يمكن إثباتهما رياضيا .

قاعدة (١) :

إذا كانت $\hat{\psi}_{١}$ و$\hat{\psi}_{٢}$ مقارنتين مستقلتين على نفس البيانات فإن :

$$\text{م م}(\hat{\psi}_{١} \text{ و } \hat{\psi}_{٢}) = \text{م م}(\hat{\psi}_{١}) + \text{م م}(\hat{\psi}_{٢}) \qquad (٣٠)$$

أى أن مجموع مربعات مقارنتين مستقلتين يساوى مجموع مربعات إحداهما مضافا إلى مجموع مربعات الأخرى . كما أن مجموع المربعات الناتج من ضم المقارنتين يكون له درجتان من درجات الحرية .

وتمتد هذه القاعدة لأى عدد منتهى من المقارنات المستقلة ولذلك نقول إن المقارنات المستقلة تجميعية additive

فمثلا ، فى المثال (٨ – ٤) الذى يتساءل عما إذا كان هناك فروق بين السكريات النقية (١) و(٢) و(٤) ، رأينا فى المثال (٨ – ١٠) أن هذا التساؤل يتضمن المقارنتين $\hat{\psi}_{٣}$ و$\hat{\psi}_{٤}$. ونظرا لاستقلال هاتين المقارنتين يجب حسب القاعدة (١) أن يكون المجموع م م ($\hat{\psi}_{٣}$) + م م ($\hat{\psi}_{٤}$) مساويا لمجموع المربعات الذى حصلنا عليه فى المثال (٨ – ٤) . بالحساب نجد ما يلى :

$$\hat{\psi}_{٣} = ١,١ ، مح \frac{ا^{٢}}{ن} = \frac{١}{١٠} (١ + ١) = ٠,٢٠$$

م م ($\hat{\psi}_{٣}$) = $(١,١)^{٢}$ ÷ ٠,٢٠ = ٦,٠٥ بدرجة حرية واحدة

كذلك ، $\hat{\psi}_{٤}$ = –٥,٣٥ ، مح $\frac{ا^{٢}}{ن}$ = ٠,١٥ ، م م ($\hat{\psi}_{٤}$) = ١٩٠,٨٢

إذن م م ($\hat{\psi}_{٣}$) + م م ($\hat{\psi}_{٤}$) = ٦,٠٥ + ١٩٠,٨٢

= ١٩٦,٨٧ بدرجات حرية عددها ٢

وهذا بالضبط ما وجدناه بالمثال (٨ – ٤) وبذلك يتحقق أن

م م ($\hat{\psi}_{٣}$ و$\hat{\psi}_{٤}$) = م م ($\hat{\psi}_{٣}$) + م م ($\hat{\psi}_{٤}$)

قاعدة (٢) :

إذا كان بتجربة ما ك من أقسام المعالجة وكان هناك ك – ١ من المقارنات المستقلة $\hat{\psi}_{١}$ ، $\hat{\psi}_{٢}$ ، . . . ، $\hat{\psi}_{ك-١}$ بين متوسطات العينات فإن :

م م (جميع $\hat{\psi}_{ر}$) أى [م م ($\hat{\psi}_{١}$) + م م ($\hat{\psi}_{٢}$) + . . . + م م ($\hat{\psi}_{ك-١}$)]

= م م (بين أقسام المعالجة) (٣١)

وتتضمن هذه القاعدة أن مجموع مربعات أى مقارنة هو جزء من مجموع المربعات بين أقسام المعالجة (بدرجة حرية واحدة) ، كما تتضمن أنه لا يمكن أن يزيد عدد المقارنات المستقلة عن ك − ١ مقارنة . وهناك حرية كبيرة فى اختيار مجموعة من ك − ١ من المقارنات المستقلة ويتم هذا الاختيار بحسب التساؤلات التى تجرى التجربة للإجابة عنها ، فإذا بدأنا بمقارنة معينة يمكن دائما تكوين الـ ك − ٢ من المقارنات المستقلة الأخرى .

فمثلا ، اعتبر المثال (٨ − ١) والأمثلة الثلاثة التابعة له .

عدد أقسام المعالجة = ك = ٥

من المثال (٨ − ١) وجدنا أن م م (بين الأقسام) = ١٠٧٧,٣٢ بدرجات حرية ٤ .

المقارنات $\hat{\psi}_1$ و$\hat{\psi}_2$ و$\hat{\psi}_3$ و$\hat{\psi}_4$ المدونة بالجدول (٨ − ١٤) هى مقارنات مستقلة عددها ٤ (= ك − ١) .

م م ($\hat{\psi}_1$ و$\hat{\psi}_2$ و$\hat{\psi}_3$ و$\hat{\psi}_4$) = ٨٣٢,٣٢ + ٤٨,١٣ + ٦,٠٥ + ١٩٠,٨٢

= ١٠٧٧,٣٢ بدرجات حرية ٤

= م م (بين الأقسام)

وبذلك تتحقق القاعدة (٢) .

ملاحظة :

إن كل ما ذكر فى هذا البند عن المقارنات المستقلة بين المتوسطات ينطبق على المقارنات المستقلة بين مجاميع العينات ، مع ملاحظة أن مجموع مربعات مقارنة بين المجاميع هى $(\hat{\psi})^2$ / مجـ نر ا^{2}ر حيث $\hat{\psi}$ مقارنة بين المجاميع ، نر حجم العينة ر .

مثال (٨ - ١٤) :

وجدت المشاهدات الآتية فى تجربة ما :

جدول (٨ - ١٧)

	الأقسام (١)	(٢)	(٣)	(٤)	
	٤	٢	٣	٣	
	٦	٦	٥	٥	
	٥	٣	٧	٤	
		٥	٧	٥	
			٨	٣	
$\text{ن}_{\text{ر}}$	٣	٤	٥	٥	$\text{ن} = ١٧$
$\text{م}_{\text{ر}}$	١٥	١٦	٣٠	٢٠	$\text{م} = ٨١$
$\bar{\text{س}}_{\text{ر}}$	٥	٤	٦	٤	$\bar{\text{س}} = ٤,٧٦$

(أولا) أوجد م ٢ م (بين الأقسام) ،

(ثانيا) حدد أوزانا لكل من المقارنات القبلية الثلاث الآتية بحيث تكون مستقلة ،

(أ) المجموعة (١) ضد المجموعة (٢) .

(ب) المجموعتان (١) و(٢) معا ضد المجموعة (٣)

(حـ) المجموعات (١) و(٢) و(٣) ضد المجموعة (٤)

(ثالثا) أوجد قيمة كل مقارنة وقيمة مجموع مربعاتها ثم اختبر دلالتها عند المستوى ٠,٠٥ علما بأن $ع^٢_خ$ = ٢,٤٦ بدرجات حرية ١٣ . اكتب جدول التباين بالتفصيل .

الحل :

(أولا) م ٢ م (بين الأقسام) = $\frac{١٥^٢}{٣} + \frac{١٦^٢}{٤} + \frac{٣٠^٢}{٥} + \frac{٢٠^٢}{٥} - \frac{٨١^٢}{١٧}$

= ١٣,٠٥٨ بدرجات حرية = ٣

(ثانيا) لكى تكون المقارنات مستقلة يلزم توفر ما يلى :

(١) شرط المقارنة (١٨) وهو مح $ا_ر$ = ٠ .

(٢) شرط الاستقلال (٢١) وهو مح $\frac{ا_ر \, ب_ر}{ن_ر}$ = ٠ .

مع ملاحظة أن المجموعات مختلفة الأحجام .

بقليل من العمليات الحسابية نجد أن الأوزان المطلوبة يمكن أن تؤخذ بالقيم المسجلة بالجدول الآتى أو بأى مجموعة من القيم تتناسب معها . ويمكن أن يسير العمل كالآتى :

جدول (٨ – ١٨)

المتوسط / المقارنة	(١) ٥	(٢) ٤	(٣) ٦	(٤) ٤
$\hat{\psi}_1$: (١) ضد (٢)	١	– ١	٠	٠
$\hat{\psi}_2$: (١،٢) ضد (٣)	٣	٤	– ٧	٠
$\hat{\psi}_3$: (١، ٢ ،٣) ضد (٤)	٣	٤	٥	– ١٢

نبدأ بأسهل المقارنات وهى $\hat{\psi}_1$ ونضع لها الوزنين ١، − ١ ثم نفرض أن أوزان المقارنة $\hat{\psi}_2$ هى ا_1 ، ا_2 ، ا_3 . لتحقيق شرط المقارنة ينبغى أن يكون $\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 = 0$.
ولتحقيق شرط استقلال $\hat{\psi}_1$ و $\hat{\psi}_2$ ينبغى أن يكون :

$$\frac{1 \times \text{ا}_1}{3} + \frac{-1 \times \text{ا}_2}{4} + 0 = 0$$

مع ملاحظة أن ٣ هو حجم العينة الأولى ، ٤ حجم العينه الثانية .

وإذن $\frac{\text{ا}_1}{3} = \frac{\text{ا}_2}{4}$ أى $\text{ا}_1 : \text{ا}_2 = 3 : 4$

فإذا أخذنا $\text{ا}_1 = 3$ فإن $\text{ا}_2 = 4$ ، $\text{ا}_3 = -7$

وهذه هى الأعداد التى وضعت بالصف الثانى بالجدول .

بالمثل ، إذا فرضنا أن أوزان المقارنة $\hat{\psi}_3$ هى ب_1 ، ب_2 ، ب_3 ، ب_4 فإن $\text{ب}_1 + \text{ب}_2 + \text{ب}_3 + \text{ب}_4 = 0$.

لاستقلال $\hat{\psi}_1$ ، $\hat{\psi}_3$: $\frac{1 \times \text{ب}_1}{3} + \frac{-1 \times \text{ب}_2}{4} = 0$ ومنها $\text{ب}_1 : \text{ب}_2 = 3 : 4$

لاستقلال $\hat{\psi}_2$ ، $\hat{\psi}_3$: $\frac{3\,\text{ب}_1}{3} + \frac{4\,\text{ب}_2}{4} + \frac{-7\,\text{ب}_3}{5} = 0$

ومنها $\text{ب}_1 + \text{ب}_2 - \frac{7}{5}\text{ب}_3 = 0$. فإذا أخذنا $\text{ب}_1 = 3$ ، $\text{ب}_2 = 4$ فإن $\text{ب}_3 = 5$ ، $\text{ب}_4 = -12$

وهذه هى الأعداد التى وضعت بالصف الثالث من الجدول .

(ثالثا) $\hat{\psi}_1 = 1 \times 5 + (-1) \times 4 = 1$

$\text{م م}(\hat{\psi}_1) = 1^2 / [\frac{1}{3} \times 1^2 + \frac{1}{4} \times (-1)^2] = 1 / \frac{7}{12} = \frac{12}{7} = 1{,}714$

$\therefore$ $\text{ف}_\text{ى} = \frac{1{,}714}{2{,}46} < 1$ ليست ذات دلالة

كذلك

$$\hat{\psi}_{٢} = ٣ \times ٥ + ٤ \times ٤ - ٧ \times ٦ = -١١$$

$$\text{م م}\,(\hat{\psi}_{٢}) = (-١١)^{٢} / \left(\frac{٩}{٣} + \frac{٦}{٤} + \frac{٤٩}{٥}\right) = ١٢١ / ١٦\tfrac{٤}{٥} = ٧{,}٢٠٢$$

$\therefore$ $\text{ف}_{ى} = \frac{٧{,}٢٠٢}{٢{,}٤٦} = ٢{,}٩٢٨$ ليست ذات دلالة عند المستوى ٠,٠٥

لأن $\text{ف}_{٠{,}٠٥\,[١ ، ١٣]} = ٤{,}٧٥$

بالمثل

$\hat{\psi}_{٣} = ١٣$ ، م م $(\hat{\psi}_{٣}) = ٤{,}١٤٢$ ، $\text{ف}_{ى} = ١{,}٦٨٤$ ليست ذات دلالة

نلاحظ أن م م (المقارنات الثلاث) = ١,٧١٤+٧,٢٠٢ + ٤,١٤٢

= ١٣,٠٥٨ حيث ν = ٣

وهذا يساوى م م (بين الأقسام) كما نتوقع .

جدول التباين هو :

جدول (٨ – ١٩)

مصدر التباين	م م	د ح	تقدير التباين	ف
بين الأقسام	١٣,٠٥٨	٣	٤,٣٥٣	١,٧٧
$\hat{\psi}_{١}$	١,٧١٤	١	١,٧١٤	١ >
$\hat{\psi}_{٢}$	٧,٢٠٢	١	٧,٢٠٢	٢,٩٢٨
$\hat{\psi}_{٣}$	٤,١٤٢	١	٤,١٤٢	١,٦٨٤
الخطأ	٣١,٩٨٠	١٣	٢,٤٦٠	
الكلى	٤٥,٠٣٨	١٦		

بما أن $ف_{٠,٠٥[٣ ، ١٣]} = ٥,٩٥$ ، $ف_{٠,٠٥[١ ، ١٣]} = ٤,٧٥$

نقبل الفرض الصفرى بأنه لا يوجد فروق بين أقسام المعالجة ، كما نقبل أن

$\psi_١ = ٠$ ، $\psi_٢ = ٠$ ، $\psi_٣ = ٠$.

(٨ – ١٣) اختبار المقارنات البعدية :

نعلم أننا لا نجرى اختبارات المقارنات البعدية إلا إذا وجدنا من تحليل التباين أن هناك دلالة لعامل التجريب أوضحتها قيمة ف . كما نعلم أنه فى اختبار هذه المقارنات لا يهمنا أن تكون مستقلة كما هو الحال فى المقارنات القبلية .

وقد قدمنا بالبند (٨ – ٥ – ٢) أسلوبا لاختبار المقارنات البعدية يعتمد على إيجاد قيمة حرجة لمجموع المربعات إذا تعداها مجموع المربعات بين قسمين أو مجموعة من الأقسام يكون الاختلاف بينها ذا دلالة وإلا فهو ليس كذلك . ويتميز هذا الأسلوب بالبساطة والعمومية ويمكن استخدامه لاختبار أى مقارنة دون اشتراط تساوى أحجام العينات ، وهو فى الوقت نفسه غير حساس للانحرافات عن الاعتدالية وعدم تجانس التباينات . والصيغة التى استخدمناها لذلك هى المتباينة (٦) بالبند المذكور وهى :

$$م\ م\ (\text{بين الأقسام}) \geqslant (ك - ١)\ ع^٢_خ \cdot ف_{\alpha[ك - ١ ، ن - ك]} \qquad (٣٢)$$

وهذه المتباينة يمكن كتابتها بدلالة قيمة المقارنة $\hat{\psi}$ والخطأ المعيارى لها $ع_\psi$ كالآتى :

$$(\hat{\psi})^٢ \geqslant (ك - ١)\ ع^٢_\psi \cdot ف_{\alpha[ك - ١ ، ن - ك]} \qquad (٣٣)$$

حيث $ع^٢_\psi = ع^٢_خ \sum \frac{أ^٢_ر}{ن_ر}$ ، ك عدد أقسام المعالجة ، ن الحجم الكلى للعينات .

والعدد الذى بالطرف الأيسر من المتباينة (٣٣) هو القيمة الحرجة للقمية $(\hat{\psi})^٢$. فإذا كانت $(\hat{\psi})^٢$ مساوية أو أكبر منها يرفض الفرض الصفرى $\psi = ٠$ عند المستوى α وتكون هذه المقارنة هى إحدى العوامل التى تسببت فى الدلالة العامة

لعامل التجريب ، أما إذا كانت $\hat{\psi}^{٢}$ أقل من القيمة الحرجة فإنها لا تكون ذات دلالة .

مثال (٨ – ١٥) :

فى المثال (٨ – ٥) كان أحد التساؤلات البعدية هو : هل متوسط السكروز يختلف عن متوسط السكريات الثلاثة الأخرى مجتمعة ؟

هذا التساؤل يمكن وضعه على هيئة مقارنة كالآتى :

$$\hat{\psi} = \frac{١}{٣}\,\bar{س}_{١} + \frac{١}{٣}\,\bar{س}_{٢} + \frac{١}{٣}\,\bar{س}_{٣} - \bar{س}_{٤}$$

$$= \frac{١}{٣}\,(٥٩,٣ + ٥٨,٢ + ٥٨) - ٦٤,١ = -٥,٦$$

$$(\hat{\psi})^{٢} = ٣١,٣٦$$

$$ع^{٢}_{\psi} = ٥,٤٦ \times \frac{١}{١٠}\,(\frac{١}{٩} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٩} + ١)$$
$$= ٥,٤٦ \times ٠,١٣٣٣ = ٠,٧٢٨$$

$\therefore$ القيمة الحرجة $= ٤ \times ٠,٧٢٨ \times ٢,٥٨ = ٧,٥١٣$

بما أن $٣١,٣٦ > ٧,٥١٣$ نرفض أن $\psi = ٠$ عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ .

(٨ – ١٣ – ١) مقارنة أزواج المتوسطات :

تستخدم المتباينة (٣٣) للاختبارات البعدية لأزواج المتوسطات . ففى المثال (٨ – ١) كان لدينا خمسة أقسام واذن يكون هناك $^{٥}ق_{٢} = ١٠$ اختبارات كل

منها على الصورة $\bar{س}_ر - \bar{س}_و$. فى هذه الحالة يكون لدينا قيمة حرجة واحدة لجميع الاختبارات لأن قيمة $ع^{٢}_{ح}$ واحدة لأى مقارنة وهى :

$$ع^{٢}_{ح} = ٥,٤٦ \times \frac{١}{١٠} (١+١) = ١,٠٩٢$$

وتكون القيمة الحرجة هى ٤ × ١,٠٩٢ × ٢,٥٨ = ١١,٢٦٩

ومن المناسب هنا وضع جميع المقارنات العشرة (الفروق بين المتوسطات) فى جدول كالآتى حيث الأعداد داخل الجدول تعبر عن الفروق بين المتوسطات .

جدول (٨ - ٢٠)

المتوسطات	(١) ٥٩,٣	(٢) ٥٨,٢	(٣) ٥٨,٠	(٤) ٦٤,١	(٥) ٧٠,١
(١) ٥٩,٣	٠	١,١	١,٣	-٤,٨*	-١٠,٨*
(٢) ٥٨,٢		٠	٠,٢	-٥,٩*	-١١,٩*
(٣) ٥٨,٠			٠	-٦,١*	-١٢,١*
(٤) ٦٤,١				٠	-٦,٠*
(٥) ٧٠,١					٠

وبمضاهاة القيمة المطلقة لكل من هذه الفروق بالجذر التربيعى للقيمة الحرجة وهو $\sqrt{١١,٢٦٩}$ = ٣,٣٥٧ نجد أن سبعة منها ذات دلالة عند المستوى ٠,٠٥ وهى المشار إليها بنجمة فى الجدول .

تمارين (٨ – ٦)

(١) فى احدى التجارب ذوات العامل الواحد كان هناك خمسة مستويات لعامل التجريب ، وقد اختير للتجريب خمس عينات عشوائية مستقلة بكل منها ١٠ مشاهدات وجد أن متوسطاتها كما هو مبين بالجدول الآتى :

المقارنات	المتوسطات				
	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)
	٨٦	٩٥	٩٢	٨٠	١٠٤
$\hat{\psi}_1$	١	-1	٠	٠	٠
$\hat{\psi}_2$	٠	٠	٠	١	-1
$\hat{\psi}_3$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\hat{\psi}_4$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(أولا) اثبت أن المقارنات المدونة بالجدول مستقلة وأوجد قيمة كل منها .

(ثانيا) أوجد مجموع مربعات كل مقارنة واكتب جدول التباين بالتفصيل علما بأن المجموع الكلى للمربعات ٥١١٢ . بين أن هناك دلالة لعامل التجريب ثم ابحث دلالة كل من المقارنات الأربعة .

(ثالثا) أجر الاختبارات البعدية للفرق بين كل زوج من المتوسطات الخمسة .

(٢) أجريت تجربة لمعرفة العلاقة بين حجم ولون الحائط لحجرة تستخدم فى أسلوب مقنن للمقابلات interviews وبين مستوى القلق للمختبرين ، وجاءت النتائج كما فى الجدول الآتى :

الحجم \ اللون	أزرق	أخضر	أصفر	أحمر	المجموع
صغير	٨٦ ٧١ ١١٢ ——— ٢٦٩	١٠٤ ١٧٥ ٩٦ ——— ٣٧٥	١٣٤ ١٣٩ ١٤٤ ——— ٤١٧	١٦٠ ١٥٥ ١٧٠ ——— ٤٨٥	١٥٤٦
متوسط	١١٠ ٨٧ ١٠٠ ——— ٢٩٧	٨٣ ٨٩ ٧٩ ——— ٢٥١	١٥٠ ١٥٦ ١٥٩ ——— ٤٦٥	١٧٥ ١٥٢ ١٦٧ ——— ٤٩٤	١٥٠٧
مرتفع	١٠٥ ٩٣ ٨٥ ——— ٢٨٣	٨٤ ٨٦ ٨٣ ——— ٢٥٣	١٧٠ ١٣٣ ١٢٨ ——— ٤٣١	١٨٠ ١٥٤ ١٤١ ——— ٤٧٥	١٤٤٢
المجموع	٨٤٩	٨٧٩	١٣١٣	١٤٥٤	٤٤٩٥
المتوسط	٩٤,٣٣	٩٧,٦٧	١٤٥,٨٩	١٦١,٥٦	١٢٤,٨٦

(أولا) أجر تحليل التباين على أساس احتمال وجود تفاعل بين الخاصتين .

(ثانيا) أجر المقارنات القبلية الآتية بين الأعمدة (الألوان) واختبر دلالتها :

$\hat{\psi}_1 = \bar{س}_1 - \bar{س}_2 - \bar{س}_3 + \bar{س}_4$ ، $\hat{\psi}_2 = -\bar{س}_1 + \bar{س}_4$ ، $\hat{\psi}_3 = -\bar{س}_2 + \bar{س}_3$

(ثالثا) أجر المقارنات البعدية بين جميع الفروق بين أزواج متوسطات الأعمدة (الألوان) ،

(رابعا) اختر مقارنتين مستقلتين بين الصفوف (الأحجام) واختبر دلالة كل منهما .

(٨ – ١٤) النموذج عشوائى التأثيرات RANDOM EFFECTS MODEL

فى تناولنا لتحليل التباين للتجارب ذوات العامل الواحد بالبند (٨ – ٤) افترضنا أن لدينا مجتمعا معتدلا متوسطه μ وتباينه $\sigma^{٢}$ أخذت منه عينة عشوائية قسمت عشوائيا إلى ك من المجموعات لتتلقى ك من المعالجات المختلفة مما قد يؤدى إلى اختلاف تراكيب هذه المجموعات ، ولذلك اعتبرنا أن هذه المجموعات هى عينات مأخوذة من مجتمعات (معتدلة) قد تختلف متوسطاتها $\mu_{١}$ ، $\mu_{٢}$ ، ... ، $\mu_{ك}$ وإن كنا نعتبر أن لها تباين مشترك $\sigma^{٢}$ هو تباين المجتمع الأصلى . ونظرا لأن عناصر كل مجموعة تتلقى معالجة محددة فإننا نعتبر أن تأثير أى معالجة هو تأثير ثابت على جميع عناصر المجموعة التى تلقت هذه المعالجة ، ويختلف هذا التأثير من مجموعة إلى أخرى . ومن ثم وصفنا النموذج الإحصائى الذى استخدمناه فى التحليل بأنه نموذج ثابت التأثيرات أو النموذج I ووضعناه بالصيغة (٢) وهى :

$س_{رو} = \mu + \alpha_{و} + خ_{رو}$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ... ، $ن_{و}$ ؛ و = ١،٢،...،ك

وحيث $س_{رو}$ هو العنصر الرائى من المجموعة و التى تلقت المعالجة و

، $\alpha_{و} = \mu_{و} - \mu$ (الفرق بين متوسط المجتمع و ومتوسط المجتمع الأصلى) وهو فرق ثابت بالنسبة لعناصر المجموعة و ويختلف من مجموعة إلى أخرى .

، $خ_{رو}$ تعبر عن أخطاء التجريب وهو متغير عشوائى افترضنا أن له توزيع معتدل : مع (٠ ، σ) .

ويهدف هذا النموذج إلى المقارنة بين المتوسطات $\mu_{١}$ ، $\mu_{٢}$ ، ... ، $\mu_{ك}$.

فى هذا النموذج ننظر إلى المعالجات التى استخدمت فى التجريب على أنها تستغرق جميع المعالجات ذات الأهمية وتقتصر استنتاجاتنا فقط على هذه المعالجات الممثلة فى التجربة . ولكن هناك أنواع من التجارب يكون المطلوب فيها التوصل إلى استنتاجات عن مجموعة كبيرة من المعالجات تشمل المعالجات الممثلة وغير الممثلة فى التجربة . أى أن الباحث يكون مهتما بمجموعة كبيرة من المعالجات الممكنة لعامل التجريب ولكنه حين يقوم بالتجربة لا يأخذها جميعها بل يأخذ عينة عشوائية منها ومع ذلك يرغب فى التوصل إلى استنتاجات عن تأثيرات المجموعة الكاملة . فى هذه الحالة يستخدم نموذجا إحصائيا آخر يسمى بالنموذج عشوائى التأثيرات أو بالنموذج **II** يصاغ كالآتى :

$$س_{رو} = \mu + أ_{و} + خ_{رو} \qquad \text{حيث } ر = ١، ٢، \ldots، ن_{و}$$
$$و = ١، ٢، \ldots، ك \qquad (٣٤)$$

$$\text{وحيث } أ_{و} = \mu(و) - \mu$$

= الفرق بين المتوسط μ (و) للمعالجة و ومتوسط المجتمع الأصلى .

ولما كان μ (و) هو متغير عشوائى لأن المعالجة و تختار عشوائيا ، فإن $أ_{و}$ يكون بالضرورة متغيرا عشوائيا هو الآخر .

وهذا النموذج يشبه النموذج **I** إلا أن الفرق بينهما كبير ، فبينما نعتبر أن تأثيرات $\alpha_{و}$ فى النموذج **I** ثابتة ، فإننا نعتبر أن تأثيرات $أ_{و}$ عشوائية . أى أننا حين نكرر سحب العينات فإننا تحت النموذج **I** نسحب دائما نفس المعالجات بنفس التأثيرات $\alpha_{و}$ ، أما تحت النموذج **II** فنسحب فى كل مرة عينة عشوائية جديدة تختلف فيها تأثيرات $أ_{و}$. ومن ثم نصف تأثيرات $أ_{و}$ بأنها عشوائية وتتوقف على العينة المختارة . وكما سبق القول يستخدم النموذج **I** حين يكون المطلوب التوصل إلى استنتاجات عن فئة محددة من المعالجات تستخدم جميعها فى التجريب ، أما النموذج **II** فيستخدم حين تكون هناك فئة كبيرة من المعالجات التى تهم الباحث ولكنه لا يستخدمها جميعا بل يستخدم عينة عشوائية منها .

وفى النموذج II نفترض أن للمتغيرين العشوائيين ا$_{و}$ وخ$_{رو}$ التوزيعين الآتيين :

ا$_{و}$: مع (٠، $\sigma_{ا}$)، خ$_{رو}$: مع (٠، σ) (٣٥)

كما نفترض أن قيم ا$_{و}$ ، خ$_{رو}$ مستقلة عن بعضها البعض .

ويلاحظ أننا عرفنا ا$_{و}$ بانها انحرافات متوسطات المعالجات عن المتوسط العام للمجتمع ولذلك فإن متوسط تأثيرات يساوى صفرا ، وهذا ما دعانا لأن نفرض أن متوسط توزيع ا$_{و}$ صفر ، أما تباين هذا التوزيع فهو مقدار مجهول $\sigma_{ا}^{2}$ يراد تقديره وتقدير مدى مساهمته فى الاختلاف الذى يظهر عند تحليل التباين وهذا أمر هام فى كثير من التطبيقات الإحصائية .

إن تحليل التباين يتخذ نفس الأسلوب الحسابى فى النموذجين I وII إلا أن الهدف من التحليل يختلف تماما ، فبينما يهدف التحليل فى النموذج I إلى مقارنة المتوسطات ، فهو يهدف فى النموذج II إلى دراسة التباينات ، وبصفة خاصة إلى تقدير واختبار كل من التباينين σ^{2} σ^{2} وكذلك إلى تقدير التباين $\sigma^{2}_{\bar{س}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابى لأهميته فى تقدير مدى الثقة فى تقدير المتوسط الحقيقى μ للمجتمع عن طريق المتوسط $\bar{س}$ للعينات. أما متوسطات تأثيرات ا$_{و}$ فلا جدوى من محاولة تقديرها أو تقدير الفروق بينها لأنها عشوائية .

إذا رمزنا بالرمز ع$^{٢}_{خ}$ للتباين المشاهد داخل أقسام المعالجة : ط م (داخل الأقسام) ، وبالرمز ع$^{٢}_{ب}$ للتباين المشاهد بين الأقسام : ط م (بين الأقسام) وبالرمز ن لعدد قيم المتغير فى أى قسم فيمكن إثبات ما يلى :

(١) ع$^{٢}_{خ}$ هو تقدير غير متحيز للتباين σ^{2} (٣٦)

(٢) $ع^{٢}_{ب}$ هو تقدير غير متحيز للمقدار $\sigma^{٢} + ن\ \sigma$ (٣٧)

وإذا رمزنا بالرمز $ع^{٢}_{ا}$ للتقدير غير المتحيز للتباين $\sigma^{٢}$ فإن

$$ع^{٢}_{ا} = \frac{١}{ن} \left(ع^{٢}_{ب} - ع^{٢}_{خ} \right) \quad (٣٨)$$

وهذه نتيجة مباشرة من (١) ، (٢) ، كما ينتج أن الفرض الصفرى $\sigma^{٢}_{ا} = ٠$ يمكن أن يختبر بواسطة اختبار ف بالصورة الآتية لأنه فى حالة صحة هذا الفرض يكون كل من $ع^{٢}_{ب}$ ، $ع^{٢}_{خ}$ تقديرا غير متحيز للتباين $\sigma^{٢}$:

$$ف = \frac{ع^{٢}_{ب}}{ع^{٢}_{خ}} \quad \text{بدرجتى حرية (ك − ١ ، هـ −ك)} \quad (٣٩)$$

حيث ك عدد أقسام المعالجة و هـ = الحجم الكلى للعينات = ك ن .

(٣) تقدير $\sigma^{٢}$ هو $\frac{ع^{٢}_{ب}}{هـ}$ (٤٠)

أى أن التباين $\sigma^{٢}_{\bar{س}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابى يقدر بواسطة التباين المشاهد بين الأقسام مقسوما على العدد الكلى للمشاهدات هـ .

تتبين نوعية التجارب التى تستلزم النموذج II من المثالين الآتيين .

مثال (٨ − ٢٦) :

فى دراسة لمحتوى الكلسيوم فى أوراق نبات اللفت الأخضر أخذت عينة عشوائية من ٤ أوراق من هذا النبات ثم أخذ من كل ورقة اختيرت ٤ أجزاء وزن كل منها ١٠٠ جرام وبذلك تجمع ١٦ جزءا من أوراق النبات . قيست النسبة المئوية لمحتوى الكلسيوم فى كل منها وسجلت القياسات بالجدول (٨ − ٢١) الآتى :

جدول (٨ – ٢١)

النسب المئوية للكلسيوم فى أوراق نبات اللفت : ك = ٤ أوراق ، ن = ٤ أجزاء .

	الأوراق (١)	(٢)	(٣)	(٤)	
النسبة المئوية للكلسيوم في أجزاء الورقة	٣,٢٨	٣,٥٢	٢,٨٨	٣,٣٤	
	٣,٠٩	٣,٤٨	٢,٨٠	٣,٣٨	
	٣,٠٣	٣,٣٨	٢,٨١	٣,٢٣	
	٣,٠٣	٣,٣٨	٢,٧٦	٣,٢٦	
المجموع للورقة	١٢,٤٣	١٣,٧٦	١١,٢٥	١٣,٢١	م = ٥٠,٦٥
المتوسط للورقة	٣,١١	٣,٤٤	٢,٨١	٣,٣٠	س̄ = ٣,١٧

نظرا لأن الأوراق تختلف من جوانب كثيرة قد لا نعرف طبيعتها كالاختلافات الوراثية والبيئية ونظرا لأننا اخترنا عينة عشوائية منها فإن النموذج المناسب هو النموذج عشوائى التأثير بالصيغة (٣٤) حيث س‌هر ترمز إلى نسبة الكلسيوم فى الجزء ر من الورقة ه ، ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ؛ ه = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ وحيث μ ترمز إلى المتوسط الحقيقى لنسبة الكلسيوم فى مجتمع أوراق اللفت الأخضر .

كما أن :

σ_1^2 ترمز إلى التباين بين الأوراق أى إلى مدى أثر الاختلافات الوراثية بين ورقة وأخرى على محتوى الكلسيوم ،

σ^2 ترمز إلى التباين **داخل الأوراق** أى بين القياسات داخل كل ورقة وبالتالى فهى تعبر عن تأثير الاختلافات غير الوراثية على محتوى الكلسيوم .

المطلوب فى هذا المثال ما يلى :

(أولا) اختبار وجود أو عدم وجود تأثيرات ترجع إلى المعالجات أى إلى العوامل الوراثية . ويتضمن هذا الاختبار اختبار الفروض الصفرية : $ا_١ = ٠$ ، $ا_٢ = ٠$ ، $ا_٣ = ٠$ ، $ا_٤ = ٠$. وتتحقق هذه الفروض إذا وفقط إذا تحقق الفرض $\sigma_١^٢ = ٠$ ولذلك فإن الفرض الصفرى المطلوب اختباره يؤول إلى الآتى :

$$ف_٠ : \sigma_١^٢ = ٠$$

وهذا الاختبار لا يتعلق فقط بوجود تأثيرات للمعالجات التى استخدمت فى التجربة بل لجميع المعالجات الممكنة التى دخلت والتى لم تدخل فيها .

(ثانيا) تقدير المتوسط μ لمحتوى الكلسيوم فى مجتمع أوراق اللفت مع تقدير درجة الثقة فى هذا التقدير . وهذا هو الهدف الرئيسى فى هذه التجربة .

(ثالثا) المقارنة بين التباينين $\sigma_١^٢$ و $\sigma^٢$ لأن هذه المقارنة قد تشير إلى ضرورة تعديل التجربة وتصميم تجربة مماثلة تكون أكثر دقة وأقل تكلفة . فإذا كان التباين $\sigma_١^٢$ بين الأوراق أكبر نسبيا من التباين $\sigma^٢$ داخل الأوراق فالأفضل تصميم تجربة نأخذ فيها عددا أكبر من الأوراق وعددا أصغر من الأجزاء والعكس بالعكس ، لأن هذا من شأنه تصغير تباين توزيع المعاينة للوسط الحسابى فيكون تقديرنا للبارامتر μ أكثر دقة .

نقوم الآن بتحليل التباين للمثال (٨ – ١٦) .

$$\text{عامل التصحيح} = \frac{م^٢}{ه} = \frac{٥٠,٦٥^٢}{١٦} = ١٦٠,٣٣٨٩$$

مم (الكلى) = $٣,٢٨^{٢} + ٣,٠٩^{٢} + ... + ٣,٢٦^{٢} - ١٦٠,٣٣٨٩$

= ٠,٩٦٦٦ بدرجات حرية ١٥

مم (بين الأوراق) = $\frac{١}{٤}(١٢,٤٣^{٢} + ١٣,٧٦^{٢} + ١١,٢٥ + ١٣,٢١^{٢})$

− ١٦٠,٣٣٨٩

= ٠,٨٨٨٣٧ بدرجات حرية ٣

مم (داخل الأوراق) = ٠,٩٦٦٦ − ٠,٨٨٨٣٧

= ٠,٠٧٨٢٣ بدرجات حرية ١٢

جدول (٨ − ٢٢)

مصدر التباين	م م	د ح	ط م	التباين المتوقع
بين الأوراق	٠,٨٨٨٣٧	٣	$ع^{٢}_{ب}$ = ٠,٢٩٦١	$\sigma^{٢} + ٤\sigma^{٢}_{١}$
بين القياسات داخل الأوراق	٠,٠٧٨٢٣	١٢	$ع^{٢}_{خ}$ = ٠,٠٠٦٦	$\sigma^{٢}$
الكلى	٠,٩٦٦٦	١٥		

(أولا) : الفرض الصفرى : $\sigma^{٢}_{١} = ٠$ (لا يوجد تأثير للخواص الوراثية على محتوى الكلسيوم)

من (٣٩) : $ف_{ى} = \frac{٠,٢٩٦١}{٠,٠٠٦٦} = ٤٤,٩^{**}$

وهذه القيمة تزيد كثيرا عن القيمة الحرجة $\text{ف}_{٠,٠١[٣،١٢]}$ = ٥,٩٥ مما يجعلنا نرفض الفرض الصفرى عند مستوى عالى من الدلالة ونستنتج أن هناك تفاوتا كبيرا فى الخواص الوراثية لأوراق النبات يؤثر تأثيرا فعالا فى محتوى الكلسيوم فى هذه الأوراق .

(ثانيا) : نقدر الوسط الحسابى μ للنسبة المئوية لمحتوى الكلسيوم فى مجتمع أوراق نبات اللفت الأخضر بواسطة الوسط الحسابى العام للعينات وهو = ٣,١٧ ولبيان مدى الدقة فى هذا التقدير وحساب فترات الثقة للمتوسط μ نستخدم الصيغة (٤٠) لتقدير تباين توزيع المعاينة للوسط الحسابى كالآتى :

$$\text{تقدير } \sigma^{2}_{\bar{\text{س}}} = \frac{\text{ع}^{2}_{\text{ب}}}{\text{ه}} = \frac{٠,٢٩٦١}{١٦} = ٠,٠١٨٥$$ بدرجات حرية ٣

ويمكننا أن نوجد فترة ثقة للمتوسط μ بدرجة ٩٩٪ كالآتى :

الحد الأدنى للفترة $= ٣,١٧ - \sqrt{٠,٠١٨٥} \times \text{ت}_{٠,٠١\,[٣]}$

$= ٣,١٧ - ٠,١٣٦٠ \times ٥,٨٤١ = ٢,٣٧٦$

الحد الأعلى للفترة $= ٣,١٧ + ٠,١٣٦٠ \times ٥,٨٤١ = ٣,٩٦٤$

أى أن فترة الثقة المطلوبة هى (٢,٣٧٦ ، ٣,٩٦٤) .

(ثالثا) : من (٣٦) ، التقدير غير المتحيز للتباين σ^{2} هو $\text{ع}^{2}_{\text{خ}} = ٠,٠٠٦٦$

ومن (٣٨) ، التقدير غير المتحيز للتباين $\sigma^{2}_{١}$ هو

$$\text{ع}^{2}_{١} = \frac{١}{\text{ن}}(\text{ع}^{2}_{\text{ب}} - \text{ع}^{2}_{\text{خ}}) = \frac{١}{٤}(٠,٢٩٦١ - ٠,٠٠٦٦)$$
$$= ٠,٠٧٢٤$$

نلاحظ أن $\frac{\text{ع}^{2}_{١}}{\text{ع}^{2}_{\text{خ}}} = \frac{٠,٠٧٢٤}{٠,٠٠٦٦} = ١٠,٩٧$

أى أن تقدير σ^2 عشرة أضعاف أو أكثر تقدير σ^2 ولو أردنا تحسين التجربة وتحسين الخطأ المعيارى لتوزيع المعاينة للوسط الحسابى ينبغى أن نزيد من عدد الأوراق وأن نقلل من عدد الأجزاء التى تؤخذ من كل ورقة .

ملاحظة :

فى هذا المثال اخترنا عينة عشوائية من الوحدات (أوراق النبات) التى يمكن أن نسميها بالوحدات الابتدائية للمعاينة primary sampling units ثم اخترنا عينات عشوائية جزئية من كل وحدة من الوحدات الابتدائية ويمكن أن نستمر فى ذلك بأخذ عينات عشوائية من كل عنصر من عناصر العينات الجزئية السابق اختيارها وأن نكرر ذلك حسبما تقتضى التجربة . إن مثل هذه المعاينة تسمى بالمعاينة ذات المراحل أو بالمعاينة العشية multistage or nested sampling حيث تحدث عدة تقسيمات متدرجة ومتداخلة كأعشاش الطيور . وسوف نعود إلى ذلك فى البند (١٥ – ٥) من الفصل الخامس عشر .

مثال (٨ – ١٧) :

فى إحدى التجارب النفسية كان يشك فى أن شخصية المجرب (القائم بالتجريب) لها تأثير على النتائج التى يتوصل إليها . ونظرا لأن هناك عددا كبيرا من المجربين الذين يمكنهم القيام بالتجربة مما يعوق استخدامهم جميعا فقد اختير منهم عينة عشوائية من خمسة مجربين لإجراء التجربة تحت نفس الظروف على أن يستخدم كل منهم مجموعة من ٨ أشخاص تختار عشوائيا وعلى أن توزع المجموعات على المجربين عشوائيا . سجلت البيانات الناتجة من التجارب الخمس فى الجدول (٨ – ٢٣) الآتى ، والمطلوب بحث ما إذا كان لشخصيات المجربين أثر على نتائج التجربة .

الجدول (٨ - ٢٣)

المجربون (١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	
٥,٨	٦,٠	٦,٣	٦,٤	٥,٧	
٥,٩	٦,١	٥,٥	٦,٤	٥,٩	
٥,٧	٦,٦	٥,٧	٦,٥	٦,٥	
٥,٩	٦,٥	٦,٠	٦,١	٦,٣	
٥,٦	٥,٩	٦,١	٦,٦	٦,٢	
٥,٤	٥,٩	٦,٢	٥,٩	٦,٤	
٥,٣	٦,٤	٥,٨	٦,٧	٦,٠	
٥,٢	٦,٣	٥,٦	٦,٠	٦,٣	
٤٤,٠	٥٠,٦	٤٧,٢	٥٠,٦	٤٩,٣	٢٤٠,٨

الحل :

نظرا لأن هناك عدداً كبيرا من الأفراد الذين يمكنهم القيام بالتجربة ، لكل منهم شخصية تميزه عن الآخرين ، ونظرا لأننا اخترنا عينة عشوائية منهم ، فإن النموذج المناسب لهذه التجربة هو النموذج عشوائى التأثير بالصيغة (٣٤) ، ونعتبر أن لدينا خمس معالجات يمثلها خمسة مجربين .

$$\text{عامل التصحيح} = \frac{(٢٤٠,٨)^{٢}}{٤٠} = ١٤٤٩,٦١٦$$

م م (الكلى) = ٥,٨^{٢} + ٥,٩^{٢} + ... + ٦,٠^{٢} + ٦,٣^{٢}
− ١٤٩٩,٦١٦

= ٦,٣٢ بدرجات حرية ٣٩

م م (بين المجربين) = $\frac{١}{٨}$(٤٤,٠^{٢} + ٥٠,٦^{٢} + ... + ٤٩,٣^{٢}) − ١٤٤٩,٦١٦

= ٣,٤٧ بدرجات حرية ٤

م م (داخل المجربين) = ٦,٣٢ − ٣,٤٧ = ٢,٨٥ بدرجات حرية ٣٥

نلخص هذه النتائج فى جدول التباين الآتي :

جدول (٨ − ٢٤)

مصدر التباين	م م	د ح	ط م	التباين المتوقع	ف$_{ى}$
بين المجربين	٣,٤٧	٤	ع$^{٢}_{ب}$=٠,٨٦٨	$\sigma^{٢} + ٨\sigma^{٢}_{١}$	١٠,٧٢**
داخل المجربين	٢,٨٥	٣٥	ع$^{٢}_{خ}$=٠,٠٨١	$\sigma^{٢}$	
الكلى	٦,٣٢	٣٩			

الفرض الصفرى : $\sigma^{٢}_{١}$ = ٠ (لا يوجد تأثير للمجربين على نتائج التجربة)

ف$_{ى}$ = $\frac{٠,٨٦٨}{٠,٠٨١}$ = ١٠,٧٢**

وهذه القيمة تزيد عن القيمة الحرجة ف $_{٠,٠١[٤،٣٥]}$ التى تقع بين ٣,٨٣ ، ٤,٠٢ وإذن نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠١ ونحكم بأن هناك دليلا كافيا على صحة القول بأن لشخصيات المجربين تأثيرا فيما يتوصلون إليه من نتائج فى هذه التجربة . وهذه نتيجة خطيرة ينبغى أن تؤخذ فى الاعتبار عند تفسير نتائج التجربة . وتتبين هذه الخطورة أيضا إذا حسبنا النسبة التى ساهم بها التباين σ^2_1 من التباين الكلى (وهو ٦,٣٢ ÷ ٣٩ = ٠,١٧٩) :

من (٣٨) : التقدير غير المتحيز للتباين σ^2_1 هو

$$ع^2_1 = \frac{1}{8} (٠,٨٦٨ - ٠,٠٨١) = ٠,٠٩٨$$

∴ النسبة التى ساهم بها التباين σ^2_1 من التباين الكلى = $\frac{٠,٠٩٨}{٠,١٧٩}$ = ٠,٥٥ وهى نسبة كبيرة تشير إلى أن أكثر من نصف التباين الكلى يرجع إلى تأثير اختلاف شخصيات المجربين .

ملاحظة :

يمتد استخدام النموذج عشوائى التأثيرات لتحليل التباين للتجارب ذوات العاملين أو أكثر .