حساب المثلثات

Elements of Trigonometry

مبادئ حساب المثلثات

إعداد أ / علاء الدين الطنطاوى
إدارة بلقاس التعليمية

بعض التعريفات والقوانين الأساسية
Some Basic Definitions and laws

نسترح فيما يلى بعض التعريفات الأساسية فى حساب المثلثات ثم نستنتج بعض المتطابقات الهامة :

النسب المثلثية للزوايا الحادة Trigonometric Ratios of Acute Angles :

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية فى B ، ولتكن Θ قياس الزاوية ∠ACB .

تعرف النسب المثلثية للزوايا الحادة ACB كالآتى :

$$\sin \Theta = \frac{AB}{AC}$$

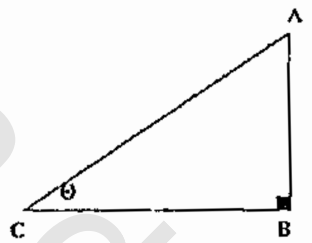
$$\cos \Theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan \Theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\cot \Theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\sec \Theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\csc \Theta = \frac{AC}{AB}$$



الدوال المثلثية - النسب المثلثية

الدالة المثلثية :

هى العلاقة (النسبة) بين أى ضلعين من أضلاع Δ القائم الزاوية .

∢ جا θ = جيب الزاوية = $\sin\Theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

معكوس الضربى (مقلوبها) = قتا θ

= قاطع تمام الزاوية = $\operatorname{cosec}\Theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

••••••••••••••••••••••••••••••••••

∢ جتا θ = جيب تمام الزاوية = $\cos\Theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$.

معكوسها الضربى (مقلوبها) = قا Θ

= قاطع الزاوية = $\sec = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

••••••••••••••••••••••••••••••••••

∢ ظا θ = ظل الزاوية = $\tan\Theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

معكوسها الضربى (مقلوبها) ظتا Θ

= $\operatorname{cotan}\Theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = ظل تمام الزاوية

••••••••••••••••••••••••••••••••••

العلاقات الأساسية بين النسب المثلثية Basic Relations:

من التعريفات السابقة نستنتج العلاقات الأساسية الآتية :

$$\tan\Theta = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta}$$

$$\tan\Theta \times \cot\Theta = 1$$

$$\sin^2\Theta + \cos^2\Theta = 1$$

$$1 + \tan^2\Theta = \sec^2\Theta$$

$$\sin^2\Theta = 1 - \cos^2\Theta$$

$$\cot\Theta = \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta} = \frac{1}{\tan\Theta}$$

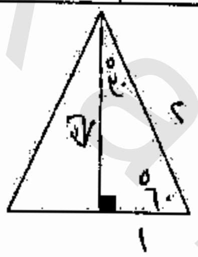
$$\csc\Theta = \frac{1}{\sin\Theta}$$

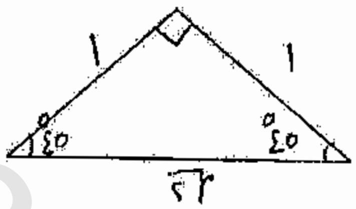
$$\cos^2\Theta = 1 - \sin^2\Theta$$

$$1 + \cot^2\Theta = \csc^2\Theta$$

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :Trigonometric Ratios of Some Angles

	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
Cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
Tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرفة
Cot	غير معرفة	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0
Sec	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	غير معرفة
Csc	غير معرفة	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1





الدوال المثلثية :Trigonometric Functions

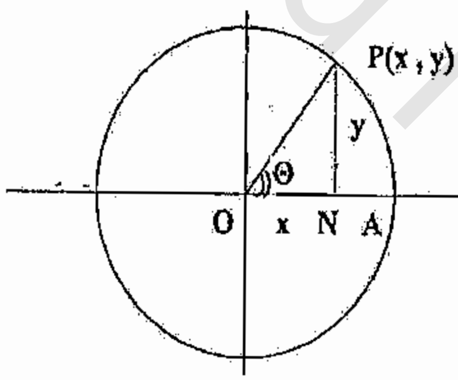
لتكن P (x , y) نقطة على دائرة الوحدة ولتكن Θ = ∠AOP .

(x , y)

cosΘ   sinΘ

$$\tan\Theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot\Theta = \frac{x}{y}$$



$$x^2 + y^2 = 1$$

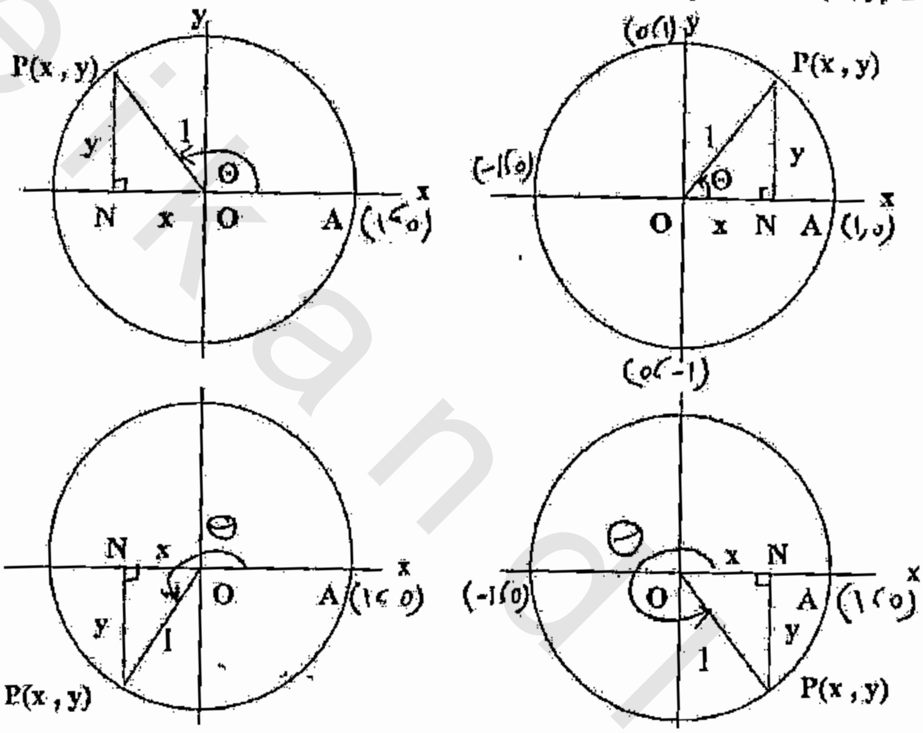
من الشكل نستنتج أن :

$$\sin\Theta = \frac{PN}{OP} = \frac{PN}{1} = Y \quad , \quad \cos\Theta = \frac{ON}{OP} = \frac{ON}{1} = x$$

كلما تحركت النقطة P على دائرة الوحدة كلما تغيرت قيمتها بإحداثياها (x , y) وبذلك تكون النسب المثلثية بمثابة دوال للزاوية Θ تتغير كلما تغيرت Θ وتتغير إشارات هذه الدوال بالسالب والايجاب تبعا

للربع الذى تقع فيه الزاوية Θ فمثلا اذا كانت الزاوية Θ تقع فى الربع الثانى فان x تكون سالبة ، y تكون موجبة وبذلك تكون sin Θ موجبة ، cos Θ سالبة ، tan Θ سالبة ، واذا وقعت الزاوية Θ فى الربع الثالث فان كل من x , y تكونان سالبتين وبذلك تكون كل من sin Θ ، cosΘ تكونان سالبتين أما tanΘ فتكون موجبة ، واذا وقعت الزاوية Θ فى الربع الرابع فان x تكون موجبة ، y تكون سالبة وبذلك تكون كل من sin Θ ، tanΘ سالبتين أما cosΘ فتكون موجبة .

لتكن P (x , y) نقطة على دائرة الوحدة ولتكن $\Theta = \angle AOP$.

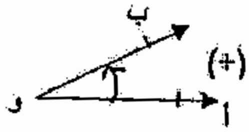


ونستطيع أن نكون الجدول الآتى لاشارات الدوال الدوال المثلثية طبقا للربع الذى تقع فيه الزاوية .

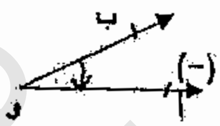
الربع	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc
الأول	+	+	+	+	+	+
الثانى	+	−	−	−	−	+
الثالث	−	−	+	+	−	−
الرابع	−	+	−	−	+	−

☐ الزاويـــــة : هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بدء مشتركة .

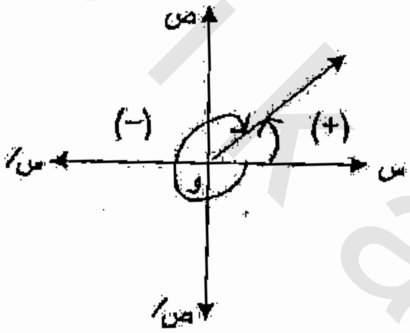
☐ الزاوية الموجهة : هي زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية لها نقطة بداية واحـده هـى رأس الزاوية .



($\overleftarrow{وأ}$ ، $\overleftarrow{وب}$) اتجاهها ضد عقارب الساعة موجب



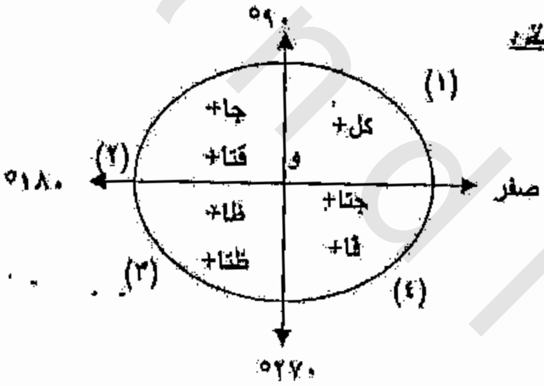
($\overleftarrow{وب}$ ، $\overleftarrow{وأ}$) اتجاهها مع عقارب الساعة سالب



الوضع القياسي للزاوية الموجهة :

تكون الزاوية في وضع قياسي اذا كان رأسها هو نقطة الأصل لنظام احداثي متعامد وضلعها الابتدائي هو $\overleftarrow{وس}$.

إشارات الدوال المثلثية :



الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :

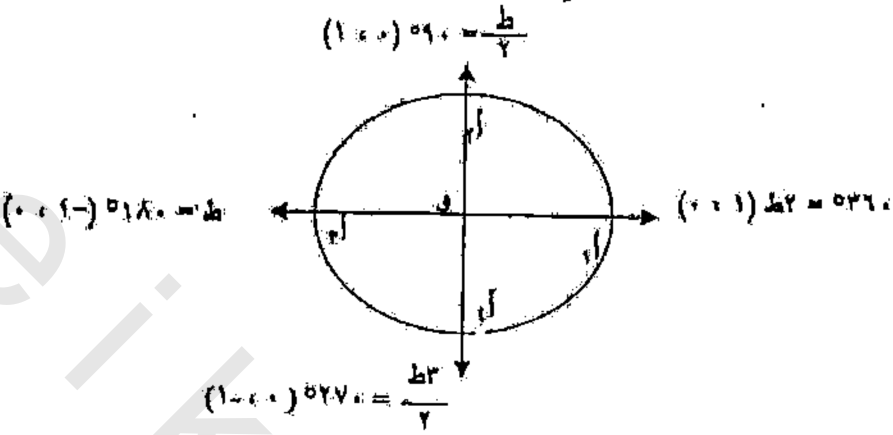
الدوال المثلثية : °٣٠ ⟵ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$)

الدوال المثلثية : °٦٠ ⟵ ($\frac{1}{2}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

الدوال المثلثية : °٤٥ ⟵ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

جتاθ جاθ

ظا Θ = $\frac{\text{المسقط الثانى}}{\text{المسقط الأول}}$ ظتا Θ = $\frac{\text{المسقط الأول}}{\text{المسقط الثانى}}$



ملحوظة :

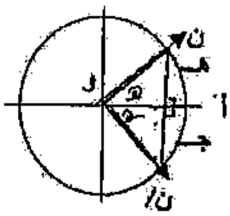
((١)) جا (٩٠ – هـ) = جتا هـ

جتا (٩٠ – هـ) = جا هـ

ظا (٩٠ – هـ) = ظتا هـ

والعكس صحيح إذا كان جا أ = جتا ب ∴ أ + ب = ٩٠°

((٢)) الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما هـ ، – هـ



جا (–هـ) = – جا هـ ، قتا (–هـ) = – قتا هـ

ظا (–هـ) = – ظا هـ ، ظتا (–هـ) = – ظتا هـ

جتا (–هـ) = جتا هـ ، قا (–هـ) = قا هـ

النسب المثلثية للزوايا المنتسبة :

إذا وقعت الزاوية Θ فى الربع خلاف الربع الأول فإننا نستطيع أن ننسب قيم دوالها المثلثية إلى قيم دوال نظيرتها الحادة طبقا للقواعد الآتية :-

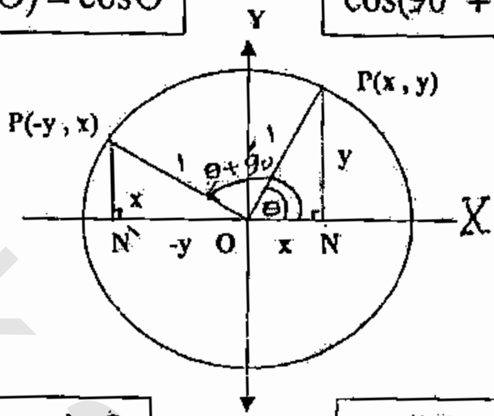
$\sin(90° - \Theta) = \cos\Theta$

$\cos(90° - \Theta) = \sin\Theta$

لاحظ أن الزاوية $\Theta - 90°$ هى المتممة للزاوية Θ .

$\sin(90° + \Theta) = \cos\Theta$

$\cos(90° + \Theta) = \sin\Theta$

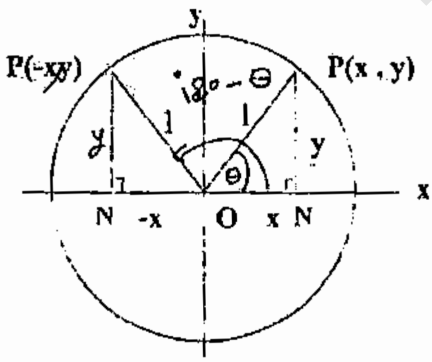


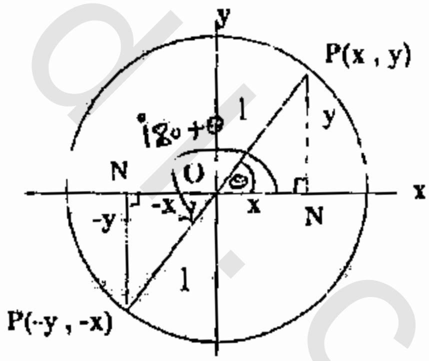
$\sin(180° - \Theta) = \sin\Theta$

$\cos(180° - \Theta) = \cos\Theta$

$\sin(180° + \Theta) = \sin\Theta$

$\cos(180° + \Theta) = \cos\Theta$



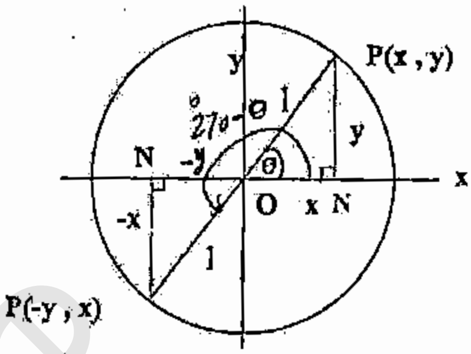


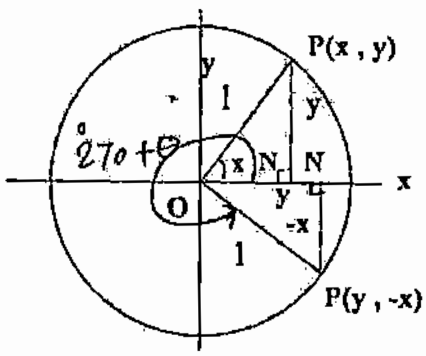
$\sin(270° - \Theta) = -\cos\Theta$

$\cos(270° - \Theta) = -\sin\Theta$

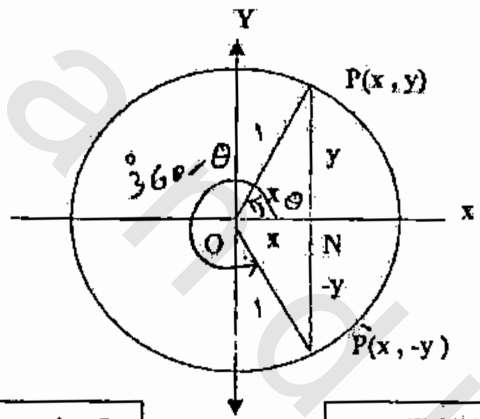
$\sin(270° + \Theta) = -\cos\Theta$

$\cos(270° + \Theta) = \sin\Theta$





$\boxed{\sin(360° - \Theta) = \sin\Theta}$ $\boxed{\cos(360° - \Theta) = \cos\Theta}$



$\boxed{\sin(360° + \Theta) = \sin\Theta}$ $\boxed{\cos(360° + \Theta) = \cos\Theta}$

نلاحظ أن op يعود لوضعه الأصلي حين تزداد Θ بمقدار °360 أو مضاعفاتها

- اذا نسبنا الزاوية لاحدى الزوايا ٩٠° ، ٢٧٠° ، ...

فاننا نغير النسبة بمعنى جا ⟷ جتا

ظا ⟷ ظتا

قا ⟷ قتا

مثال : جا (٢٧٠ − أ) = − جتا أ

- أما اذا نسبنا الزاوية لاحدى الزوايا ١٨٠° ، ٣٦٠° ، ...

فاننا لا نغير النسبة أي جا ⟵ جا مع مراعاة قاعدة الاشارات جتا ⟵ جتا

مثال : جا (١٨٠ + أ) = - جا أ

- إذا أضفنا أو حذفنا ٣٦٠° أو مضاعفاتها من أى زاوية فإن قياس الزاوية الناتجة لها نفس النسب المثلثية للزوايا الأصلية .

النسب المثلثية ق (هـ) ≡ النسب المثلثية [ق (هـ) ± ن × ٣٦٠°]

تسمى هذه العلاقة الصيغة المكافأة لأى زاوية .. حيث ن ∈ ص .

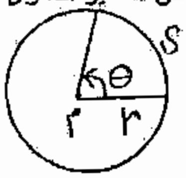
وحدات قياس الزاوية :

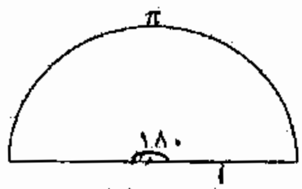
((١)) القياس الستينى :

- الأساس فى هذا القياس هو أننا قسمنا محيط الدائرة إلى ٣٦٠ قوسا متساوية فى الطول وعليه تكون أى زاوية مركزية يمر ضلعها بنهايتى قوس من هذه الأقواس يقال ان قياسها درجة واحدة يرمز لها بالرمز ١°
- وكل درجة تقسم إلى ستون قسم كل قسم يسمى دقيقة ١° = ٦٠′
- وكل دقيقة تقسم إلى ستون قسم كل قسم يسمى ثانية ١′ = ٦٠″ وهكذا

((٢)) القياس الدائرى للزوايا :- Radian Measure of Angles

- تعرض قيمة الزاوية Θ بالتقدير الدائرى بأنها تساوى خارج قسمة طول القوس المقابل للزاوية على طول نصف قطر الدائرة . أى أن : $\boxed{\Theta^{rad} = \frac{S}{r}}$
- وإذا أخذنا دائرة الوحدة فان قياس الزاوية بالتقدير الدائرى يساوى طول القوس المقابل لها وحيث أن طول نصف محيط دائرة الوحدة يساوى π فان التقدير الدائرى للزاويا المستقيمة ١٨٠° يساوى π .





هذا ونستطيع أن نكتب القاعدتين الآتيتين لتحويل من التقدير الستينى إلى التقدير الدائرى والعكس .

$$\Theta^{rad} = \frac{\pi}{180}\Theta^{\circ} \qquad 0.017453292519943\Theta = 1^{\circ}$$

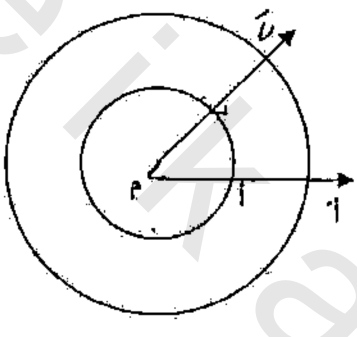
$$\Theta^{\circ} = \frac{180}{\pi}\Theta^{rad} \qquad 57.295779513082\Theta = 1^{rad}$$

أى أن الدرجة الواحدة بالتقدير الستينى تساوى تقريباً 0.0174532925l994 بالتقدير الدائـــرى ووحـدة التقدير الدائرى تساوى تقريبا $57°17'45''$

علاقة هندسية :

فى الدوائر المتحدة المركز النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المنـــاظرة تساوى مقدارا ثابتا يتوقف على قياس الزاوية التى تحصر هذا القوس .

ففى الشكل المجاور :



$$\frac{م\,أ'}{م\,أ} = \frac{م\,ب'}{م\,ب} = ك \quad ، \quad \frac{\overset{\frown}{أ'ب'}}{\overset{\frown}{أ\,ب}} = ك$$

$$\therefore \frac{\overset{\frown}{أ'ب'}}{\overset{\frown}{أ\,ب}} = \frac{م\,أ'}{م\,أ}$$

$$\therefore \frac{\overset{\frown}{أ'ب'}}{م\,أ'} = \frac{\overset{\frown}{أ\,ب}}{م\,أ} = \text{مقدار ثابت}$$

ولهذا يعتبر ذلك أسلوبا آخر لقياس الزاوية يسمى بالقياس الدائرى للزاوية .

تعريف : القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$
ويرمز له بالرمز $هـ^{د}$

فاذا رمزنا لطول القوس بالرمز (ل) ولطول نصف القطر بالرمز (نق) .

فان $\boxed{هـ^{د} = \frac{ل}{نق}}$ ومنها $\boxed{ل = هـ^{د}\, نق}$

ووحدة قياس الزوايا لهذا النوع من التقدير تسمى للزاوية النصف قطرية وتعرف كما يلى :

تعريف الزاوية النصف قطرية : هى الزاوية المركزية فى الدائرة التى تحصر قوسا طوله يساوى طول نصف قطر هذه الدائرة .

(ط) = π = النسبة بين طول محيط أى دائرة إلى طول قطرها ، وهى نسبة ثابتة = $\frac{٢٢}{٧}$

(ط) بالتقدير الدائرى = $\frac{٢٢}{٧}$ وبالتقدير الستينى = ١٨٠°

وعلى هذا تكون الزاوية التى قياسها $٣^{د}$ هى الزاوية المركزية فى دائرة والتى تحصر قوسا من هذه الدائرة طوله يساوى ثلاثة أمثال طول نصف قطر هذه الدائرة .

العلاقة بين التقديرين الدائرى والستينى :

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى الوحدة ، فإن :

١-قياس الزاوية المركزية (بالتقدير الدائرى) يساوى طول قوسها .

٢-الزاوية المركزية التى قياسها الستينى يساوى ٣٦٠° يكون طول قوسها ٢ط أى قياسها الدائرى يساوى $٢ط^{د}$ ،

٣-$٢ط^{د} = ٣٦٠^\circ$ ومنها $ط^{د} = ١٨٠^\circ$ ،

$$١^{د} = \frac{١٨٠^\circ}{ط} = ٥٧{,}٢٧٣^\circ \cong ٢٠'' \; ١٩' \; ٥٧^\circ \quad \text{حيث } ط = \frac{٢٢}{٧} \text{ ،}$$

$$١^\circ = \frac{ط}{١٨٠} \cong ٠{,}٠١٧٥^{د}$$

فاذا كانت لدينا زاوية قياسها بالتقدير الدائرى $هـ^{د}$ وقياسها بالتقدير الستيني $س^\circ$ فان :

$$\frac{س}{١٨٠^\circ} = \frac{هـ^{د}}{ط}$$

أو

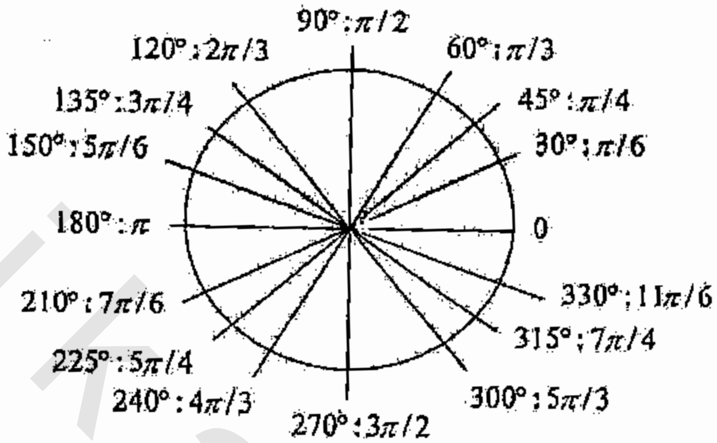
$$هـ^{د} = س^\circ \times \frac{ط}{١٨٠^\circ}$$

$$س^\circ = هـ^{د} \times \frac{١٨٠^\circ}{ط}$$

ملاحظة :

إذا علم القياس الدائرى لزاوية ما بدلالة ط فان يمكن ايجاد قياس الستينى وذلك بالتعويض عن ط بما تساوى من الدرجات وهو ١٨٠° .

فمثلا : $\frac{٧}{٨}$ ط^{ر} = $\frac{٧ \times ١٨٠^\circ}{٨}$ = $\frac{٣١٥^\circ}{٨}$ = $١٥٧,٥^\circ$ = $١٥٧^\circ\ ٣٠'$



حل المثلث Solution of the Triangle

هو إيجاد العناصر المجهولة من أطوال أضلاع Δ أو قياسات زوايا Δ .

لتكم C , B , A هى زوايا المثلث ، c , b , a أطوال أضلاعه المقابلة ، Δ هى مساحته فإن :

$$\boxed{\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ}$$

(ا) قاعدة الجيب :

فى أى مثلث تتناسب أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها . أى أن :

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

(ب) قاعدة جيب التمام :

لإيجاد طول أى ضلع من المثلث بدلالة الضلعين الآخرين والزاوية المحصورة بينهما تستخدم إحدى القواعد الآتية :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

كما يمكننا أيضا الحصول على زوايا المثلث إذا علمت أضلاعه الثلاثية باستخدام إحدى القواعد الآتية :

$$\boxed{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

$$\boxed{\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

$$\boxed{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

ملخص حل Δ :-

(١) اذا وجدت أطوال أضلاعه الثلاثة أو النسب بينهم نستخدم قانون :

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}'^{2} + \text{جـ}'^{2} - \text{أ}'^{2}}{\text{٢ ب' جـ'}}$$

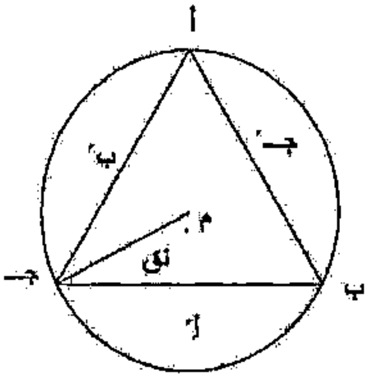
(٢) إذا علم طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما نستخدم قانون :

$$\text{أ}'^{2} = \text{ب}'^{2} + \text{جـ}'^{2} - \text{٢ ب' جـ' جتا أ}$$

(٣) خلاف ذلك نطبق قانون الجيب :

$$\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}} = \text{٢ نق}$$

حيث نق نصف قطر الدائرة المرسومة خارج Δ .



ملاحظة :

$$\text{مساحة } \Delta = \frac{١}{٢} \text{ أ' ب' جا جـ}$$

$$\Delta = \text{٢ نق}^{2} \text{ جا أ جا ب جا جـ}$$

$$\Delta = \frac{\text{أ' ب' جـ'}}{\text{٤ نق}}$$

(جـ) مساحة المثلث :

مساحة أى مثلث تساوى نصف حاصل ضرب أى ضلعين من أضلاعه فى جيب الزاوية المحصـــورة بينهما . أى :

$$\boxed{\Delta = ab\sin C = bc\sin A = ac\sin B}$$

كما يمكننا الحصول على مساحة أى مثلث إذا علمت أضلاعه الثلاثة كما يلى :-

$$\boxed{\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ s = \frac{a+b+c}{2}}$$

النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما :

نذكر فيما يلى القوانين التى تعبر عن النسب المثلثية لمجموع زاويتين بدلالة النسب المثلثيـــة لكـل مــن الزاويتين :

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} \quad (1)$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} \quad (2)$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \quad (3)$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \quad (4)$$

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}} \quad (5)$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}} \quad (6)$$

النسب المثلثية لضعف الزاوية :

بوضع α بدلاً من β فى المعادلات (1) ، (2) ، (3) نجد أن :

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

تحويل حاصل ضرب جيبي أو جيبي تمام زاويتين إلى مجموع أو فرق بجمع المعادلتين (1) (2) وقسمة الناتج على 2 فان :

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]}$$

وبطرح (2) من (1) وقسمة الناتج على 2 فان :

$$\boxed{\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]}$$

وبجمع المعادلتين (3) ، (4) وقسمة الناتج على 2 فان :

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]}$$

وبطرح (4) من (3) وقسمة الناتج على 2 فان :

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]}$$

تحويل مجموع وفرق جيبي وجيبي تمام زاويتين إلى حاصل ضرب :

بوضع $\alpha+\beta=a$ ، $\alpha-\beta=b$ في المعادلات (7)، (8)، (9)، (10) فإن :

$$\boxed{\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} \qquad (7)$$

$$\boxed{\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}} \qquad (8)$$

$$\boxed{\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} \qquad (9)$$

$$\boxed{\cos a-\cos b=2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}} \qquad (10)$$

بعض القوانيـــن الهامـــة

(١) $\text{٢ جا هـ جتا هـ} = \text{جا ٢ هـ}$

$\text{جا هـ جتا هـ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{جا ٢ هـ}$

(٢) $\text{جتا}^{\text{٢}}\ \text{هـ} - \text{جا}^{\text{٢}}\ \text{هـ} = \text{جتا ٢ هـ}$

$\text{جتا}^{\text{٢}}\ \text{هـ} + \text{جا}^{\text{٢}}\ \text{هـ} = \text{١}$

(٣) $\frac{\text{ظا هـ}}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\ \text{هـ}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{ظا ٢ هـ}$

---

(٤) $\text{جا هـ} = \text{٢ جا}\ \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}\ \text{جتا}\ \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$

(٥) $\text{جتا هـ} = \text{جتا}^{\text{٢}}\ \frac{\text{هـ}}{\text{٢}} - \text{جا}^{\text{٢}}\ \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$

$= \text{٢ جتا}^{\text{٢}}\ \frac{\text{هـ}}{\text{٢}} - \text{١}$

$= \text{١} - \text{٢ جا}^{\text{٢}}\ \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$

(٦) $\text{ظا هـ} = \frac{\text{٢ ظا}\ \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\ \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}}$

---

(٧) $\text{جتا هـ} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}\ \sqrt{\text{١} + \text{جتا ٢ هـ}}$

(٨) $\text{جا هـ} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}\ \sqrt{\text{١} - \text{جتا ٢ هـ}}$

(٩) $\text{ظا هـ} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \sqrt{\frac{\text{١} - \text{جتا ٢ هـ}}{\text{١} + \text{جتا ٢ هـ}}}$

(١٠) -١ ≤ جتا هـ ≤ ١

-١ ≤ جا هـ ≤ ١

قا هـ ≥ ١ أو قا هـ ≤ -١

قتا هـ ≥ ١ أو قتا هـ ≤ -١

-∞ < ظا هـ < ∞ ، -∞ < ظتا هـ < ∞

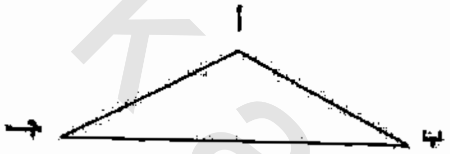
---

(١١) $\text{جا}^2 \frac{\text{جـ}}{٢} = \frac{١}{٢} [١ - \text{جتا جـ}]$

(١٢) $\text{جتا}^2 \frac{\text{جـ}}{٢} = \frac{١}{٢} [١ + \text{جتا جـ}]$

(١٣) $\text{ظا}^2 \frac{\text{جـ}}{٢} = \frac{١ - \text{جتا جـ}}{١ + \text{جتا جـ}}$

(١٤) <u>العلاقات بين النسب المثلثية لزوايا Δ</u>



أ + ب + جـ = ١٨٠°

أ + ب = ١٨٠° - جـ

• جا (أ + ب) = جا (١٨٠° - جـ) = جا جـ

• جتا (أ + ب) = جتا (١٨٠° - جـ) = -جتا جـ

• ظا (أ + ب) = ظا (١٨٠° - جـ) = -ظا جـ

(١٥) <u>العلاقات بين النسب المثلثية لأنصاف زوايا Δ :</u>

أ + ب + جـ = ١٨٠° ، $\frac{\text{أ + ب}}{٢} = ٩٠° - \frac{\text{جـ}}{٢}$

• $\text{جا} \left(\frac{\text{أ + ب}}{٢} \right) = \text{جا} \left(٩٠° - \frac{\text{جـ}}{٢} \right) = \text{جتا} \frac{\text{جـ}}{٢}$

• $\text{جتا} \left(\frac{\text{أ + ب}}{٢} \right) = \text{جتا} \left(٩٠° - \frac{\text{جـ}}{٢} \right) = \text{جا} \frac{\text{جـ}}{٢}$

• $\text{ظا} \left(\frac{\text{أ + ب}}{٢} \right) = \text{ظا} \left(٩٠° - \frac{\text{جـ}}{٢} \right) = \text{ظتا} \frac{\text{جـ}}{٢}$

(١٦) العلاقات بين النسب المثلثية لمضاعفات زوايا Δ :

أ + ب + جـ = ١٨٠ ° ∴ ٢(أ + ب) = ٣٦٠ − ٢ جـ

- جا ٢(أ + ب) = جا (٣٦٠ ° − ٢جـ) = − جا ٢جـ
- جتا ٢(أ + ب) = جتا (٣٦٠ ° − ٢جـ) = جتا ٢ جـ
- ظا ٢(أ + ب) = ظا (٣٦٠ ° − ٢جـ) = − ظا ٢ جـ

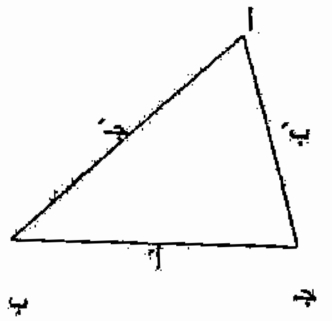
(١٧) العلاقات بين النسب المثلثية لمضاعفات زوايا Δ :

- جا أ + جا ب = ٢ جا $\frac{١}{٢}$(أ + ب) جتا $\frac{١}{٢}$ (أ − ب)
- جا أ − جا ب = ٢ جتا $\frac{١}{٢}$(أ + ب) جا $\frac{١}{٢}$ (أ − ب)
- جتا أ + جتا ب = ٢ جتا $\frac{١}{٢}$(أ + ب) جتا $\frac{١}{٢}$ (أ − ب)
- جتا أ − جتا ب = ٢ جا $\frac{١}{٢}$(أ + ب) جا $\frac{١}{٢}$ (ب − أ)

- جا أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ {جتا (أ − ب) − جتا (أ + ب)}
- جتا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ {جتا (أ − ب) + جتا (أ + ب)}
- جا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ {جا (أ − ب) − جا (أ + ب)}

(١٨) العلاقة بين أضلاع المثلث وزواياه : —

أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه أَ ، بَ ، جـَ وزوايا أ ، ب ، جـ



قاعدة الجيب : $\dfrac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \dfrac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}}$

قاعدة جيب التمام : $\text{جتا أ} = \dfrac{\text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{٢\,\text{ب}'\,\text{جـ}'}$

$\text{جتا ب} = \dfrac{\text{أ}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{ب}'^{٢}}{٢\,\text{أ}'\,\text{جـ}'}$

$\text{جتا جـ} = \dfrac{\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{جـ}'^{٢}}{٢\,\text{أ}'\,\text{ب}'}$

قاعدة ظل نصف الفرق : ظا $\frac{١}{٢}$ (أ − ب) = $\dfrac{\text{أ}' - \text{ب}'}{\text{أ}' + \text{ب}'}$. ظا $\frac{١}{٢}$ (أ + ب)

(١٩) النسب المثلثية لنصف الزاوية :

$$\text{جا}\ \frac{\text{أ}}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا أ}}{٢}}$$

+ إذا كان $\frac{\text{أ}}{٢}$ في الربع الأول أو الثاني

− إذا كان $\frac{\text{أ}}{٢}$ في الربع الثالث أو الرابع

$$\text{جتا}\ \frac{\text{أ}}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ + \text{جتا أ}}{٢}}$$

+ إذا كان $\frac{\text{أ}}{٢}$ في الربع الأول أو الرابع

− إذا كان $\frac{\text{أ}}{٢}$ في الربع الثاني أو الثالث

$$\text{ظا}\ \frac{\text{أ}}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا أ}}{١ + \text{جتا أ}}}$$

+ إذا كان $\frac{\text{أ}}{٢}$ في الربع الأول أو الثالث

− إذا كان $\frac{\text{أ}}{٢}$ في الربع الثاني أو الرابع

$$\frac{\text{جا أ}}{١ + \text{جتا أ}} = \frac{١ - \text{جتا أ}}{\text{جا أ}} = \text{قتا أ} - \text{ظتا أ}$$

(٢٠) قوى النسب المثلثية للزاوية :

- $\text{جا}^٢\ \text{أ} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\ \text{جتا ٢ أ}$
- $\text{جتا}^٢\ \text{أ} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\ \text{جتا ٢ أ}$
- $\text{جا}^٣\ \text{أ} = \frac{٣}{٤}\ \text{جا أ} - \frac{١}{٤}\ \text{جا ٣ أ}$
- $\text{جتا}^٣\ \text{أ} = \frac{٣}{٤}\ \text{جتا أ} + \frac{١}{٤}\ \text{جتا ٣ أ}$

(٢١) النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية :

$$\text{جا ٣ أ} = ٣\ \text{جا أ} - ٤\ \text{جا}^٣\ \text{أ}$$

$$\text{جتا ٣ أ} = ٤\ \text{جتا}^٣\ \text{أ} - ٣\ \text{جتا أ}$$

$$\text{ظا ٣ أ} = \frac{٣\ \text{ظا أ} - \text{ظا}^٣\ \text{أ}}{١ - ٣\ \text{ظا}^٢\ \text{أ}}$$

(٢٢) النسب المثلثية لأنصاف زوايا Δ بدلالة أضلاعه :

• نرمز لنصف محيط Δ بالرمز ح فإن :

$$\text{أَ} + \text{بَ} + \text{جـَ} = \text{٢}\,\text{ح} \quad \therefore \text{ح} = \frac{\text{أَ} + \text{بَ} + \text{جـَ}}{\text{٢}}$$

$$\therefore \text{بَ} + \text{جـَ} - \text{أَ} = \text{٢}\,(\text{ح} - \text{أَ}) \text{ ،}$$

$$\text{جـَ} + \text{أَ} - \text{بَ} = \text{٢}\,(\text{ح} - \text{بَ}) \text{ ،}$$

$$\text{أَ} + \text{بَ} - \text{جـَ} = \text{٢}\,(\text{ح} - \text{جـَ})$$

$$\bullet\ \text{جا}\,\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \sqrt{\frac{(\text{ح} - \text{بَ})(\text{ح} - \text{جـَ})}{\text{بَ}\,\text{جـَ}}}$$

$$\text{جا}\,\frac{\text{ب}}{\text{٢}} = \sqrt{\frac{(\text{ح} - \text{جـَ})(\text{ح} - \text{أَ})}{\text{بَ}\,\text{أَ}}}$$

$$\bullet\ \text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \sqrt{\frac{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أَ})}{\text{بَ}\,\text{جـَ}}}$$

$$\text{جتا}\,\frac{\text{ب}}{\text{٢}} = \sqrt{\frac{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{بَ})}{\text{جـَ}\,\text{أَ}}}$$

$$\bullet\ \text{ظا}\,\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \sqrt{\frac{(\text{ح} - \text{بَ})(\text{ح} - \text{جـَ})}{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أَ})}}$$

(٢٣) إيجاد جيب أي زاوية في Δ إذا علمت أضلاعه الثلاثة :

$$\text{جا أ} = \frac{\text{٢}}{\text{بَ}\,\text{جـَ}} \sqrt{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أَ})\,(\text{ح} - \text{بَ})\,(\text{ح} - \text{جـَ})}$$

$$\text{جا ب} = \frac{\text{٢}}{\text{أَ}\,\text{جـَ}} \sqrt{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أَ})\,(\text{ح} - \text{بَ})\,(\text{ح} - \text{جـَ})}$$

(٢٤) قاعدة الظل لنصف الفرق بين زاويتين في مثلث (قاعدة نابير) :

$$\text{ظا}\,\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{٢}} = \frac{\text{أَ} - \text{بَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}}\ \text{ظا}\,\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{٢}}$$

$$\text{ظا}\,\frac{\text{ب} - \text{جـ}}{\text{٢}} = \frac{\text{بَ} - \text{جـَ}}{\text{بَ} + \text{جـَ}}\ \text{ظا}\,\frac{\text{ب} + \text{جـ}}{\text{٢}}$$

لاحظ أن $\text{ظا}\,\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{٢}} = \text{ظتا}\,\frac{\text{جـ}}{\text{٢}}$