

حاشية المطور (phasor) و الأرقام المركبة (complex numbers)

الأرقام المركبة

قبل أبي عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي كنا نعرف فقط الأرقام الموجبة و لكنه حينما توصل إلى حلول المعادلة الجبرية من الدرجة الثانية اضطر لتعريف الصفر (المأخوذة منه كلمة zero و لذا فمن العيب علينا إستخدام النطق المحور لكلمة أصلها عربي)

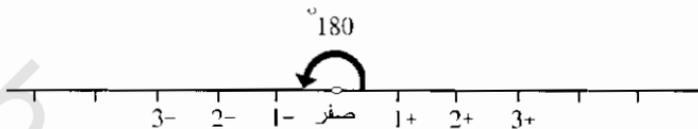
و لتعريف الأرقام السالبة و لتعريف الكمية التخيلية $\sqrt{-1}$

و نفهم تلك الأرقام و نتصور كنهها أورد التالي:
أصل الكلمة في اللغة العربية هو الفعل الماضي. فالفعل الماضي لكلمة الصفر هو صَفَرَ يعني خلا، فنقول صَفَرَت يداه أي خلت فهو صفر اليدين.

فإذا بدأنا من نقطة الصفر و أردنا رسم الأرقام الموجبة رسمنا خطاً أفقياً إلى يمين نقطة الصفر و قسمناه أقساماً متساوية و وضعنا عند نهاية كل قسم علامة صغيرة كتبنا تحتها رقماً موجباً فنكتب +1 تحت أول علامة علي يمين الصفر و نكتب +2 تحت ثاني علامة و هلم جرا. و سميننا الخط الأفقي الممتد يمين نقطة الصفر المحور الموجب.

و لرسم الأرقام السالبة أدرنا المحور الموجب 180 درجة عكس عقرب الساعة بحيث أصبح امتداداً للخط الأفقي على يسار نقطة

الصفير. و قسمناه و علمناه مثل ما صنعنا في المحور الموجب إلا أن الأرقام هنا هي 1- ثم 2- و هلم جرا. (انظر الشكل التالي) .



و جدير بنا هنا أن نلاحظ أن جميع شعوب العالم، بما فيه هؤلاء الذين يكتبون لغتهم من اليسار إلى اليمين قد أخذوا عنا المحور الموجب يمين الصفير و السالب يسار الصفير. بل أنهم أخذوا عنا الإجهاد من اليمين إلى اليسار أيضا في كتابة الأعداد فوق التسعة، فحينما تمتلأ خانة الآحاد بالرقم 9 نضع الصفير في خانة الآحاد (للدلالة على خلوها) و ننتقل من اليمين إلى اليسار كما نكتب لغتنا العربية إلى خانة العشرات و نضع فيها الرقم 1 ، و هذا نقلوه عنا أيضا.

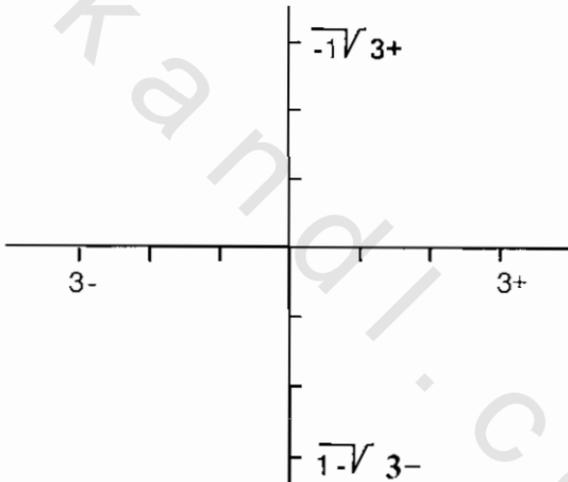
اللهم اجعلنا من أصحاب اليمين ولا تجعلنا من أصحاب الشمال.
(اقرأ سورة الواقعة).

و على ذلك فإن أي رقم سالب هو حاصل ضرب العامل (-1) في نفس مقدار العدد الموجب، أي أنه مثلا $-7 = (-1) \times 7$. أي أن العامل (-1) يسبب دوران العدد 180° عكس عقرب الساعة مع الإحتفاظ بمقداره. أي أن الرقم -7 يبعد يسارا عن نقطة الصفير بنفس المسافة التي يبعد بها يمينا الرقم $7+$ عن نقطة الصفير. وقد يبدو ذلك بديها و ما كان ليتطلب كل هذا الإستطراد، إلا أن المراد

الآن هو استخدام نفس الطريقة لرسم الأرقام السالبة تحت الجذر التربيعي.

أي أنه لرسم أي رقم سالب تحت الجذر يجب تعريف كيفية رسم الكمية التخيلية $x = \sqrt{-1}$

و كما عرفنا عامل الضرب -1 بأنه يسبب دوران العدد عكس عقرب الساعة بزاوية مقدارها 180° ، فلقد عرف عامل الضرب x بأنه يسبب دوران العدد عكس عقرب الساعة بزاوية مقدارها 90° .



ففي الشكل أعلاه نرى الرقم $3+$ على المحور الموجب يمين نقطة الصفر، و بضربه في $x = \sqrt{-1}$ يدور الرقم عكس إتجاه عقرب الساعة بزاوية 90° ليصبح فوق نقطة الصفر على محور

عمودي على المحور المذهب عند نقطة الصفر، أي أن حاصل الضرب وهو الرقم $3 + \sqrt{-1}$ يقع على هذا المحور العمودي

و الذي نسميه المحور التخيلي الموجب.

و بضرب الرقم $3 + \sqrt{-1}$ في x يدور عكس إتجاه عقرب الساعة بزواوية 90° ليصبح الرقم $3 - \sqrt{-1}$ ، ثم بالضرب مرة أخرى في x يصير الرقم $3 - \sqrt{-1}$ على محور عمودي أسفل نقطة

الصفر نسميه المحور التخيلي السالب.

الرقم المركب مثل (أ + خ ب) يتكون من جزئين الأول (أ) هو رقم حقيقي و الثاني هو الكمية التخيلية خ مضروبة في رقم حقيقي هو (ب).

و الآن نشرح المطور و كيفية استخدامه لرسم الأرقام المركبة.

المطور

كلمة vector تعني حامل و هي مشتقة من اللغة اللاتينية (محمول = vectus , يحمل = vehere) . و هناك من يطلق على vector كمية متجهة و قد تكون هذه التسمية مناسبة فيما إذا كنا نتعامل مع السرعة على أساس أن لها مقدار و إتجاه و ذلك يسمى space vector أي أننا نعمل في المجال المكاني . و لكن حينما نعمل في المجال الزمني فإننا لا نتعامل مع إتجاه بل نتعامل مع كمية لها سعة (amplitude) و طور (phase) و هو ما يسمى

phasor أو time vector و من الكلمتين كمية زمنية أو مطور
أختار الثانية أي مطور حيث أرى أنها الأنسب نظرا لما تعبر عنه.

و يستخدم المطور في التعبير عن ضغط الصوت و هو كمية لها
في المجال المكاني (أي عند أي نقطة حول مصدر الصوت) سعة
غير إتجاهية أي لا تعتمد على الإتجاه، و لكن تتغير من مكان إلى
آخر حسب بعدها من نقطة الصوت، كما أنها تتغير مع الزمن.

$$\text{الكمية } p \text{ } \hat{x}z = \text{جتاز} + \text{خ جاز}$$
$$\text{و } p^- \text{ } \hat{x}z = \text{جتاز} - \text{خ جاز}$$

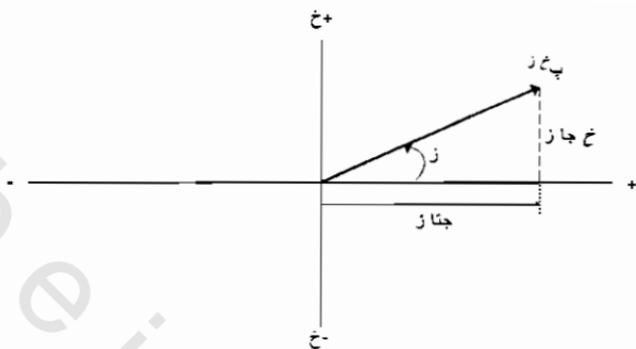
حيث

$$p \text{ أساس الخوارزم الطبيعي} = 2,71828$$

$$\text{خ الكمية التخيلية} \sqrt{-1}$$

المعادلتين السابقتين يطلق عليهما اسم الرياضي و عالم الطبيعة
Euler الذي اكتشفهما. وقد ولد Leonhard Euler في بازل
بسويسرا عام 1707 م و توفي عام 1783 م في بيتربورج
بروسيا و عمل مديرا لقسم الرياضيات في أكاديمية العلوم في
عاصمة ألمانيا برلين.

الكمية $p \hat{x}z$ هي رقم مركب و هي مطور و الشكل التالي يوضح
كيفية رسمها.



فهي كرقم مركب تتكون من (جتا ز) على المحور الأفقي و من (خ جاز) على المحور الرأسى. و هي كمطور لها سعة هي طول السهم (و هو هنا الواحد الصحيح) الذي يحصر بينه و بين المحور الموجب زاوية الطور (ز) و تسمى الطور.

كيفية إجراء العمليات الحسابية على الأرقام التخيلية و المركبة

جمع الأرقام التخيلية : $أخ + ب خ = (أ + ب)خ$

ضرب الأرقام التخيلية : (أ) (ب خ) = (أ ب) خ ، (أخ) (ب خ) = - أ ب

جمع الأرقام المركبة :

$$(أ + ب خ) + (ت + د خ) = (أ + ت) + (ب + د)خ$$

$$\text{مثلا } (2 + 5خ) + (-4 + 3خ) = 2 + 6خ$$

ضرب الأرقام المركبة :

$$(أ + ب خ) (ت + د خ) = أت + ب ت خ + أ د خ - ب د = (أ ت - ب د) + (ب ت + أ د)خ$$

$$\text{مثلا } (5 + 10خ) (3 - 8خ) = 15 - 80خ + 30خ - 80 = 15 + 40خ + 95 - 10خ$$

قسمة الأرقام المركبة :

$$\begin{aligned} (أ + ب د خ) / (ت + د خ) &= (أ + ب د خ) (ت - د خ) / [(ت + د خ) (ت - د خ)] \\ &= [(أ + ب د) + (أ د خ + 2 د ت)] / (ت^2 - 2 د ت + 2 د^2) \\ &= [(أ + ب د) / (د) + (ت + 2 د) / (د)] خ + [(ب ت - أ د) / (ت + 2 د)] \end{aligned}$$

مثلا $(3 + 4 د خ) / (2 + 3 د خ) = (3 + 2 د خ) / (2 + 3 د خ) + (1 + 1 د خ) / (2 + 3 د خ)$
 $= (3 + 2 د خ) / (2 + 3 د خ) + (13 / 18) - (13 / 18) د خ = 13 / (د خ - 18) = (13 / 1) د خ - (13 / 18)$

المطور في الحالة العامة

المطور في الحالة العامة هو رقم مركب و يمكن كتابته بعدة طرق:

م پ خ ز

م (جتاز + خ جاز) = أ + ب خ

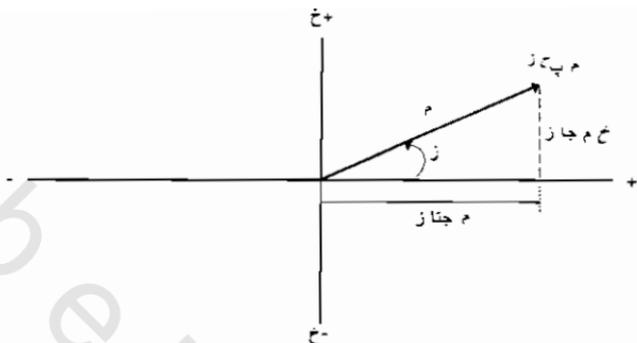
م ، ز

حيث م = السعة

ز = الطور (زاوية الطور)

$$\sqrt{2 + 2i} = |م| = \sqrt{2 + 2i}$$

و الشكل التالي يوضح ذلك.



و يلاحظ ان المسقط الراسي للمطور م يساوي م جاز اي انه يرسم منحنى الجيب كما هو موضح بالشكل التالي ، و أن المطور يدور عكس عقرب الساعة بسرعة زاوية مقدارها ω .

و يلاحظ أن منحنى الجيب عند الزمن صفر له في الشكل التالي قيمة مقدارها م جاز 1 حيث أن الطور عند الزمن صفر مقداره 1 .

كما أن الزاوية $2 = \omega ن + ز$ حيث ن هو الزمن المقاس من نقطة الصفر.

