الفصل السابع

المشكلة الثنائية وتحليل الحساسية

أولا : المشكلة الثنائية :

يلاحظ ان كل المشاكل السابق علاجها تعتبر مشاكل أصلية Primal Problems وكل مشكلة اصلية يكون لها مشكلة بديلة الامر الذى يترتب عليه انه فى حالة ما اذا كانت المشكلة الاصلية هى تعظيم الربح مثلا فان المشكلة البديلة تكون تقليل التكلفة ويكون من المهم المقارنة بين مشكلة التعظيم ومشكلة التقليل ويكون للمشكلة الثنائية نفس الحل الامثل وان كانت طرق الحل مختصرة عن طريق حل المشكلة الاصلية .

وعلى ذلك يتلخص مبدأ الثنائية فى ان كل مشكلة برمجة خطية ترتبط بمشكلة اخرى تحدد الخطة المثلى للمشكلة الاولية وتعتبر المشكلة الثنائية احدى حالات البرمجة الخطية ويطلق على المشكلة الاصلية البرنامج الاولى Primal Programme كما يطلق على المشكلة المصاحبة البرنامج الثنائى Dual Programme فاذا فرضنا ان المشكلة الاصلية هى :

المطلوب ايجاد قيم س = (١ س ، س ، س ، ... س) التى تجعل
٢ ك ن
دالة الهدف ف = ص س + ص س + .. + ص س + ... + ص س اكبر مايمكن
١ ١ ٢ ٢ ك ك ن ن
بشرط تحقيق القيود الاتية :

$$\begin{aligned}
&أ_{١١} س_١ + أ_{١٢} س_٢ + .. + أ_{١ك} س_ك + ... + أ_{١ن} س_ن \leq ب_١ \\
&أ_{٢١} س_١ + أ_{٢٢} س_٢ + ... + أ_{٢ك} س_ك + ... + أ_{٢ن} س_ن \leq ب_٢ \\
&... ... ... \\
&أ_{ى١} س_١ + أ_{ى٢} س_٢ + ... + أ_{ىك} س_ك + .. + أ_{ىن} س_ن \leq ب_ى \\
&... ... ... \\
&أ_{م١} س_١ + أ_{م٢} س_٢ + .. + أ_{مك} س_ك + .. + أ_{من} س_ن \leq ب_م \\
&س_ك \geq صفر
\end{aligned}$$

وتكون المشكلة الثنائية هى :

المطلوب ايجاد قيم و = (و١ ، و٢ ، ... و ى ، ... و م) التى تجعل دالة الهدف

ف = ب١ و١ + ب٢ و٢ + ... + ب ى و ى + ... + ب م و م

اقل ما يمكن بشرط تحقيق القيود الاتية :

$$أ_{11} و_1 + أ_{12} و_2 + \cdots أ_{1ى} و_ى + \cdots أ_{1م} و_م \leqslant ص_1$$

$$أ_{21} و_1 + أ_{22} و_2 + \cdots + أ_{2ى} و_ى + \cdots + أ_{2م} و_2 \leqslant ص_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$أ_{ك1} و_1 + أ_{ك2} و_2 + \cdots + أ_{كى} و_ى + \cdots + أ_{كم} و_م \leqslant ص_ك$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$أ_{ن1} و_1 + أ_{ن2} و_2 + أ_{نى} و_2 + \cdots + أ_{نم} و_ى \leqslant ص_ن$$

$$و_ى \geqslant صفر$$

ويتلخص الفرق بين المشكلتين فى الاتى :

١ - المصفوفة المكونة من معاملات المجاهيل فى المشكلة الثنائية نحصل عليها بنقل المصفوفة المطابقة فى المشكلة الاصلية فمثلا تكون مصفوفة المعاملات فى المشكلة الاصلية :

$$أ = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{1ن} \\ أ_{21} & أ_{22} & أ_{2ن} \\ أ_{م1} & أ_{م2} & أ_{من} \end{vmatrix}$$

وفى المشكلة المصاحبة تكون مصفوفة المعاملات

$$أ = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{م1} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{م2} \\ أ_{1ن} & أ_{2ن} & أ_{من} \end{vmatrix}$$

٢ - اذا فرضنا ان مجاهيل البرنامج الاولى هى الكميات المنتجة من السلع النهائية فان مجاهيل البرنامج الثنائى عبارة عن اسعار الموارد المتاحة .

٣ ـ اذا كانت دالة الهدف فى البرنامج الاولى تعظيم ففى البرنامج الثنائى تكون الدالة تقليل والعكس صحيح ٠

٤ ـ القيود فى البرنامج الثنائى هى معاملات دالة الهدف فى المشكلة الاصلية ٠

٥ ـ معاملات دالة الهدف فى البرنامج الثنائى هى القيود من المشكلة الاصلية ٠

٦ ـ اذا كانت قيود البرنامج الاولى تأخذ شكل $\geq$ فان البرنامج الثنائى يكون فى شكل $\leq$ والعكس صحيح ٠

٧ ـ تكون القيمة المثلى لدالة الهدف فى المشكلة الاصلية تساوى القيمة المثلى لدالة الهدف فى المشكلة البديلة ٠

ومعنى ذلك ان المشكلة الاقتصادية يمكن النظر اليها من وجهتى نظر احداهما تمثل الارباح والاخرى تمثل التكلفة وفى كلتى الحالتين نحصل على نفس النتيجة ٠

مثال خاص بنقل ثلاثة انواع من الشحنات على ثلاث سفن :

يفرض ان البيانات فى الجدول الاتى (جدول رقم ١) خاصة بنقل ثلاثة انواع من الشحنات أ ، ب ، جـ على ثلاث سفن ويوضح الجدول الاتى ما تنقله كل سفينة فى الرحلة الواحدة بوحدات الاطنان وكذا الشحنات المطلوب نقلها وتكلفة النقل لكل رحلة ولكل سفينة بالوحدات النقدية ٠

(جدول رقم ١)

انواع الشحنات	ما تنقله كل سفينة فى الرحلة الواحدة بوحدات الحمولة على كل سفينة			الشحنات المطلوب نقلها (بوحدات الحمولة)
	السفينة الاولى	السفينة الثانية	السفينة الثالثة	
أ	٤	٣	٦	٦٢
ب	٦	١	٢	٣٠
جـ	٤	٦	٤	٤٤
تكلفة الرحلة الواحدة بالوحدات النقدية	٨	٥	٦	

وبذلك تصبح المشكلة الاصلية كالاتى :

المطلوب تقليل دالة الهدف ف (س) = ٨ س$_{١}$ + ٥ س$_{٢}$ + ٦ س$_{٣}$ بشرط تحقيق القيود الاتية :

$$٤ س_{١} + ٣ س_{٢} + ٦ س_{٣} \geq ٦٢$$
$$٦ س_{١} + ١ س_{٢} + ٢ س_{٣} \geq ٣٠$$
$$٤ س_{١} + ٦ س_{٢} + ٤ س_{٣} \geq ٤٤$$

وبشرط ان تكون قيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ $\geq$ صفر

وتصبح المشكلة الثنائية على النحو الاتى :

المطلوب تعظيم دالة الهدف الاتية : ف (و) = ٦٢ و$_{١}$ + ٣٠ و$_{٢}$ + ٤٤ و$_{٣}$ بشرط تحقيق القيود الاتية :

$$٤ و_{١} + ٦ و_{٢} + ٤ و_{٣} \leq ٨$$
$$٣ و_{١} + ١ و_{٢} + ٦ و_{٣} \leq ٥$$
$$٦ و_{١} + ٢ و_{٢} + ٤ و_{٣} \leq ٦$$

وبشرط ان تكون قيم و$_{١}$ ، و$_{٢}$ ، و$_{٣}$ $\geq$ صفر

ويمكن تصوير المثال السابق فى الجدول الاتى :

(جدول رقم ٢)

البرنامج الاول	البرنامج الثانى
المطلوب تقليل الدالة ٨ س$_{١}$ + ٥ س$_{٢}$ + ٦ س$_{٣}$ بشرط تحقيق القيود الاتية: ٤ س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ + ٦ س$_{٣}$ $\geq$ ٦٢ ٦ س$_{١}$ + ١ س$_{٢}$ + ٢ س$_{٣}$ $\geq$ ٣٠ ٤ س$_{١}$ + ٦ س$_{٢}$ + ٤ س$_{٣}$ $\geq$ ٤٤ وبشرط ان تكون س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ $\geq$ صفر	المطلوب تعظيم الدالة ٦٢ و$_{١}$ + ٣٠ و$_{٢}$ + ٤٤ و$_{٣}$ بشرط تحقيق القيود الاتية : ٤ و$_{١}$ + ٦ و$_{٢}$ + ٤ و$_{٣}$ $\leq$ ٨ ٣ و$_{١}$ + ١ و$_{٢}$ + ٦ و$_{٣}$ $\leq$ ٥ ٦ و$_{١}$ + ٢ و$_{٢}$ + ٤ و$_{٣}$ $\leq$ ٦ وبشرط ان تكون و$_{١}$ ، و$_{٢}$ ، و$_{٣}$ $\geq$ صفر

obeikan.com

وباستخدام طريقة السمبلكس نحصل على الحل النهائى (الحل الامثل للمشكلة البديلة) (جدول رقم ٦) وتسمى طريقة الحل هذه طريقة السمبلكس الثنائية The Dual Simplex Method.

وتتكون خطوات حل المشكلة الثنائية كالآتى :

الجدول الاول (جدول رقم ٣)

ص ج	ب صفر	و صفر	٦٢	٣٠	٤٤	صفر	صفر	صفر
			و ١	و ٢	و ٣	و ٤	و ٥	و ٦
صفر	و ٤	٨	٤	٦	٤	١	صفر	صفر
صفر	و ٥	٥	٣	١	٦	صفر	١	صفر
صفر	و ٦	٦	٦	٢	٤	صفر	صفر	١
ص ج — ز ج		صفر	— ٦٢	— ٣٠	— ٤٤	صفر	صفر	صفر

الجدول الثانى (جدول رقم ٤)

صفر	و ٤	٤	صفر	$\frac{١٤}{٣}$	$\frac{٤}{٣}$	١	صفر	$\frac{٢}{٣}$
صفر	و ٥	٢	صفر	صفر	٤	صفر	١	$-\frac{١}{٢}$
٦٢	و ١	١	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٢}{٣}$	صفر	صفر	$\frac{١}{٦}$
ز ج — ص ج		٦٢	صفر	$\frac{٢٠}{٣}$	$\frac{٨}{٣}$	صفر	صفر	$\frac{٣١}{٣}$

الجدول الثالث (جدول رقم ٥)

٣٠	$و_{٢}$	$\frac{٦}{٧}$	صفر	١	$\frac{٢}{٧}$	$\frac{٣}{١٤}$	صفر	-١
صفر	$و_{٥}$	٢	صفر	صفر	٤	صفر	١	$-\frac{١}{٢}$
٦٢	$و_{١}$	$\frac{٥}{٧}$	١	صفر	$\frac{٤}{٧}$	$-\frac{١}{١٤}$	صفر	$\frac{٣}{١٤}$
ز ج	$-ص_{ج}$	٧٠	صفر	صفر	صفر	٢	صفر	٩

الجدول الرابع (جدول رقم ٦)

٣٠	$و_{٢}$	$\frac{٥}{٧}$	صفر	١	صفر	$\frac{٣}{١٤}$		$-\frac{٣}{٢٨}$
٤٤	$و_{٣}$	$\frac{١}{٢}$	صفر	صفر	١	صفر	$\frac{١}{٤}$	$-\frac{١}{٨}$
٦٢	$و_{١}$	—	١	صفر	صفر	$-\frac{١}{١٤}$	$-\frac{١}{٧}$	$\frac{٢}{٧}$
ز ج	$-ص_{ج}$	٧٠	صفر	صفر	صفر	٢	صفر	صفر

حل المشكلة الاصلية

الجدول الاول (جدول رقم ٧)

ص ج	ب صفر	س صفر	٨	٥	٦	صفر	صفر	صفر
			$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$	$س_{٦}$
صفر	$س_{٤}$	-٦٢	٤	٣	٦	١	صفر	صفر
صفر	$س_{٥}$	-٣٠	٦	١	٢	صفر	١	صفر
صفر	$س_{٦}$	-٤٤	٤	٦	٤	صفر	صفر	١
ز ج	$-ص_{ج}$	صفر	٨	٥	٦	صفر	صفر	صفر

الجدول الثانى (جدول رقم ٨)

ص ج	ب ١	س صفر	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦
٦	س ٣	٣١/٣	٢/٣	١/٢	١	— ١/٦	صفر	صفر
صفر	س ٥	— ٢٨/٣	— ١٤/٣	صفر	صفر	— ١/٣	١	صفر
صفر	س ٦	— ٨/٣	— ٤/٣	— ٤	صفر	— ٢/٣	صفر	١
ز ج — ص ج		٦٢	— ٤	— ٢	صفر	— ١	صفر	صفر

الجدول الثالث (الامثل) جدول رقم (٩)

ص ج	ب ١	س صفر	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦
٦	س ٣	٩	صفر	١/٢	١	— ٣/١٤	— ١/٧	صفر
٨	س ١	٢	١	صفر	صفر	١/١٤	— ٣/١٤	صفر
صفر	س ٦	صفر	صفر	— ٤	صفر	— ٤/٧	— ٢/٧	١
ز ج — ص ج		٦٢	— ٤	— ٢	صفر	— ١	صفر	صفر

ثانيا : تحليل الحساسية :

يتم اتخاذ القرارات دائما بافتراضات معينة فيما يتعلق بالقيم وسلوك العوامل المختارة وعلى سبيل المثال فان القرارات الاستثمارية تتم عادة بتقدير التدفقات النقدية ومعدلات العائد فى المستقبل .

ولذلك فان اصطلاح الحساسية يشير الى الاستجابة التى تحدث للتغير الذى يتم فى حل المشكلة نتيجة التغيرات فى احد العوامل او كلها ، وعلى سبيل المثال يكون من المفيد ان نعرف نسبة التغير فى نقطة التعادل نتيجة بعض التغيرات فى التكاليف الثابتة والمتغيرة لكل وحدة حمولة او نتيجة التغير فى نولون وحدة الحمولة وذلك فى ظل افتراضات مشاكل البرمجة الخطية .

ولكن يلاحظ بصفة عامة ان ظروف الانتاج متغيرة دائما ولذلك يكون من المرغوب ان نحدد مدى الحساسية للحل الامثل بالنسبة للمتغيرات المختلفة فى بيانات المشكلة ، وتنحصر التغيرات التى تؤثر على الحل الامثل فيما يلى :

١ — التغير فى معاملات دالة الهدف (ص$_{ى ج}$) مثل الربح .

٢ — التغير فى معاملات المدخلات والمخرجات (أ$_{ى ج}$) مثل شحنات السفينة .

٣ — التغير فى الموارد المتاحة (ب$_{ى}$) مثل الشحنات المتاحة للنقل .

٤ — امكانية اضافة او حذف بعض المنتجات (الشحنات) او التغيير فى طرق الانتاج (النقل بالسفن) .

ومعنى ذلك ان تحليل الحساسية يجيب على الاسئلة الخاصة باخطاء التقدير كما يجيب على المتغيرات الممكن حدوثها فى المستقبل واثرها على الحل الامثل .

وتضع نتائج تحليل الحساسية حدودا عليا وحدودا دنيا للمعاملات المختلفة (ص$_{ى ج}$ ، أ$_{ى ج}$ ، ب$_{ى}$) والذى سيظل خلاله البرنامج الامثل الحالى فى حالته المثلى وذلك يصبح تحليل الحساسية دليلا للتخطيط الادارى والرقابة ، بجانب أننا نتجنب اعادة حل المشكلة من جديد اذ ان الحل الامثل الحالى يمكن استخدامه لبيان اثر التغيرات بأقل حسابات ممكنة كما يتضح من المثال الاتى :

بفرض وجود ثلاثة شحنات أ ، ب ، جـ يراد شحنها على سفينتين ويوضح الجدول الاتى البيانات الخاصة بهذه المشكلة (جدول رقم ١٠) .

جدول رقم (١٠)

انواع الشحنات	كمية الشحنة المنقولة فى الرحلة الواحدة		الكميات المطلوب نقلها (بعشر وحدات حمولة)
	السفينة الاولى (مائة طن)	السفينة الثانية (مائة طن)	
أ	١٠	٦	٢٥٠٠
ب	٥	١٠	٢٠٠٠
جـ	١	٢	٥٠٠
ربح الرحلة الواحدة بالالف طن	٢٣	٣٢	—

وبذلك تصبح المشكلة على النحو الاتى :

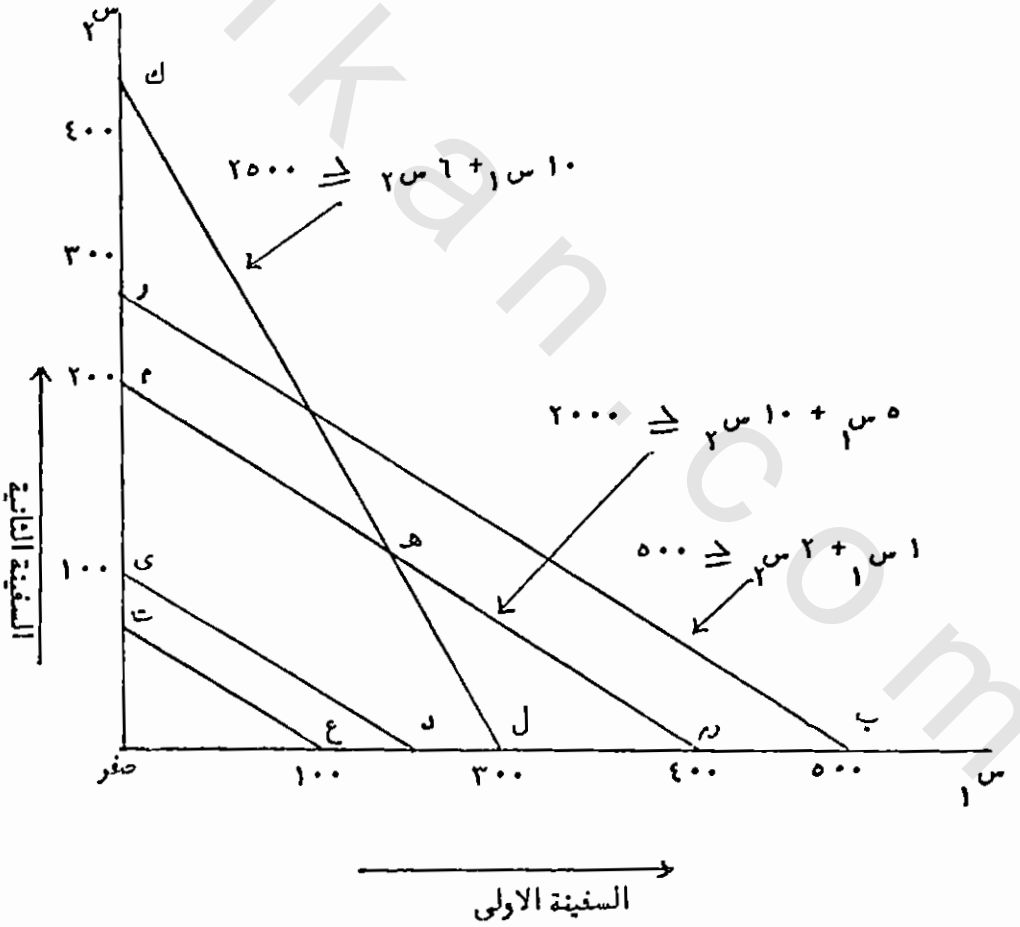
المطلوب تعظيم دالة الهدف

$$ف (س) = ٢٣ س_{١} + ٣٢ س_{٢} \quad (١)$$

بشرط تحقيق القيود الاتية :

$$\begin{cases} ١٠ س_{١} + ٦ س_{٢} \leq ٢٥٠٠ \\ ٥ س_{١} + ١٠ س_{٢} \leq ٢٠٠٠ \\ ١ س_{١} + ٢ س_{٢} \leq ٥٠٠ \\ س_{١} ، س_{٢} \geq صفر \end{cases} \quad (٢)$$

ويصبح الرسم البيانى لهذه المشكلة (رسم رقم ١)



ويكون المطلوب هو ايجاد اثر التغيير فى الاتى :

التغيير فى معاملات دالة الهدف (ص ج) :

يحتاج تحليل الحساسية لمعاملات (ص ج) فى هذه المشكلة الى تحديد المدى لكل معامل ربح وبتغيير معاملات الربح يتغير ميل خط الربح المتساوى Isoprofit Line ويصبح السؤال خاص بقيم الميل لخط الربح المتساوى والتى تنقل الحل الامثل من النقطة المتطرفة الحالية Current extreme Point (حل أساسى مسموح به) الى نقطة اخرى متطرفة ؟

وللاجابة على هذا السؤال يستلزم الامر ملاحظة الاتى من الرسم البيانى رقم (١) ميل خط الربح المتساوى يساوى

$$\frac{-ص_1}{ص_2} = \frac{-٢٣}{٣٢}$$

ونقطة الحل المتطرفة المثلى هى النقطة (هـ) كما ان هناك نقطتين مجاورتين ومتطرفتين هما النقطة (م) والنقطة (ل) ويصبح ميل الخط م هـ = $\frac{-٥}{١٠} = -\frac{١}{٢}$ كما يصبح ميل الخط هـ ل = $\frac{-١٠}{٦}$.

وحيث ان ميل اى خط ربح مستوى مثل الخط (ى ل) فى هذا الرسم والذى هو عبارة عن $\frac{-ص_1}{ص_2}$ فانه اذا أبقينا ص ٢ = ٣٢ يصبح السؤال عبارة عن الاتى : ما هى القيمة التى يجب ان تأخذها ص ١ قبل ان يتغير ميل خط الربح المتساوى حتى يجعل النقطة م نقطة مثلى ؟ والاجابة انه يتم ذلك اذا كانت ص ١ / ص ٢ $\geq -\frac{١}{٢}$ كذلك فانه بفرض ان ص ٢ = ٣٢ فما هى قيمة ص ١ قبل تغيير ميل خط الربح المتساوى لكى نجعل النقطة ل النقطة المثلى ؟ والاجابة فى حالة ما اذا كانت ص ١ / ص ٢ = $-\frac{١٠}{٦}$ كما يمكننا ان نسأل اسئلة مماثلة بالنسبة لقيمة ص ٢ اذا افترضنا ان ص ١ = ٢٣ وبذلك تصبح حدود ص ١ ، ص ٢ كالاتى :

$$-\frac{١٠}{٦} \leq -\frac{ص_1}{ص_2} \leq -\frac{١}{٢} \qquad (٣)$$

وللبحث عن قيمة ص ١ نفرض ان ص ٢ = ٣٢ وبذلك نحصل على الاتى :

$-\frac{١٠}{٦}$ $-\frac{ص_1}{٣٢}$ $-\frac{١}{٢}$ ويصبح اقل معامل للربح بالنسبة الى ص ١ (والتى يبقى عندها الحل امثلا) عبارة عن : $-\frac{ص_1}{٣٢} \geq -\frac{١}{٢}$ وبذلك يصبح الحد

الادنى لقيمة ص ١ = ١٦ حيث يتضح من المتباينة رقم (٣) ان اقصى معامل ربح (ص ١) (والتى عندها يبقى الحل امثلا) عبارة عن

$$\frac{-ص\ ١}{٣٢} \geq \frac{-١٠}{٦} \text{ أو } س\ ١ \leq ٥٣\frac{١}{٣}$$

والذى يعتبر الحد الاعلى لقيمة ص ١ = $٥٣\frac{١}{٣}$ وبذلك يصبح مدى ص ١ والذى يصبح لها الحل امثلا عبارة عن : ١٦ ≤ ص ١ ≤ $٥٣\frac{١}{٣}$ وكذلك يمكن الحصول على الحد الاعلى والحد الادنى لقيمة ص ٢ حيث تصبح كالاتى : (١٣ × ٨٠ ≤ ص ٢ ≤ ٤٦) ويمكن الوصول الى تحديد حساسية الحل الامثل للمتغيرات فى معاملات دالة الهدف (ص ج) بفحص العلاقة فى الجدول الامثل لتقييم الاعداد الجديدة (ص ج + ف) — ز ج حيث يعكس المتغير (ف) مقدار التغير فى (ص ج) سواء اكان هذا التغير موجبا ام سالب . وبالنسبة لمشاكل التعظيم Maximization nonpositive يبقى الاساس الحالى امثلا طالما بقيت قيم (ص ج + ف) — ز ج موجبة وعلى العكس فانه بالنسبة لمشاكل التدنية Minimization يبقى الاساس الحالى امثلا طالما بقيت قيم (ص ج + ف) — ز ج لاسالبة nonnegative واذا نظرنا الى المتغير غير الاساسى فى مشاكل التعظيم نلاحظ ان المتغير غير الاساسى يمكن ان يدخل فى الحل اذا زادت معاملات ربحه وراء حد معين فقط ولذلك يجب ان نحدد الحد الاعلى لمعامل الربح لكل متغير غير اساسى لما بعد هذا الحد الاعلى فاننا نهدم الحل الامثل وعلى العكس من ذلك ففى مشاكل التدنية فان تحليل الحساسية يحتاج الى حد ادنى لقيم (ص ج) للمتغير غير الاساسى مما يستلزم منا تحديد الحد الاعلى والحد الادنى لمعامل الربح .

وبالنسبة للمتغير الاساسى يجب ان نبحث الحدين الاعلى والادنى وهذا التحديد ضرورى اذ ان اى زيادة فى معامل دالة الهدف للمتغير الاساسى يعنى انه عند نقطة ما يجب تحويل الشحنات الى النقطة التى تعطينا ربح اكثر وبالمثل فان اى نقص فى معامل دالة الهدف لنقص المتغير الاساسى يعنى انه عند نقطة ما يجب ابعاد الشحنات عن النقطة التى تحقق ارباح اقل ، وبفرض اننا قمنا بتغيير معاملات دالة الربح (ص ج) كما يظهر فى السطر الاخير لنفس المثال الحالى والذى يظهر على النحو الاتى (جدول رقم ١١) .

جدول رقم (١١)

الشحنـــات	ما تنقله كل سفينة خلال الرحلة الواحدة (بوحدات الحمـــولة)		الشحنات المتاحة للنقل (بوحدات الحمـــولة
	السفينة الاولى	السفينة الثانيـة	
أ	١٠	٦	٢٥٠٠
ب	٥	١٠	٢٠٠٠
جـ	١	٢	٥٠٠
ربح الرحلة الواحـدة بالوحـدات النقديـة	٥٠	٢٥	—

ويصبح جدول السمبلكس الاخير (الجدول الامثل) باستخدام طريقة ص ج — ز ج كالاتى:

جدول رقم (١٢)

المتغيرات الاساسية	ربح الوحدة ص ب	الكميـة	ص ج — ٥٠ س	٢٥ س٢	صفر ع١	صفر ع٢	صفر ع٣
س	٥٠	٢٥٠	١	٣/٥	١/١٠	صفر	صفر
ع٢	صفر	٧٥٠	صفر	٧	—١/٢	١	صفر
ع٣	صفر	٢٥٠	صفر	صفر	٧/٥	صفر	١
ز ج			٥٠	٣٠	٥	صفر	صفر
ص ج — ز ج			صفر	—٥	—٥	صفر	صفر

وواضح من الجدول السابق رقم (١٢) ان س١، ع٢، ع٣ فى الحل الامثل هى متغيرات اساسية بينما س٢، ع١ هى متغيرات غير اساسية . وبالنسبة لقيم (ص ج) للمتغيرات غير الاساسية يلاحظ من الجدول ان المتغير غير الاساسى (للشحنات التى لن تنقل على السفينتين) له قيم سالبة (ص ج — ز ج) مما يوضح لنا ان نقل هذه الشحنات عند هذه المرحلة من الحل يقلل الربح ويصبح السؤال خاصا بمعرفة المقدار الذى سنزيد به معامل الربح للمتغير غير الاساسى لكى نهدم الحل الامثل؟ ونفرض ان هذا المقدار هو ف٢ للمتغير س٢ غير الاساسى ومعامل الربح المناظر لهذا المقدار ص̄ ٢ = ص ٢ + ف ٢ وبذلك نهدم الحل الامثل الموضح فى الجدول الاخير عندما تكون : ص̄ ٢ — ز ٢ < صفر .

(ص ٢ + ف ٢) — ز ٢ < صفر (٤)

وواضح من عمود س٢ فى الجدول الاخير ان ص ٢ = ٢٥ ، ز ٢ = ٣٠ وباحلال هذه القيم فى المتباينة الاخيرة (٤) نحصل على (٢٥ + ف ٢) — ٣٠ < صفر ، ف ٢ < ٥ وهذا هو التغير فى معامل الربح للمتغير س٢ وسيكون اكثر من (٥) لكى نهدم الحل الامثل الحالى ويصبح الحد الاعلى قيمة ص ٢ = ٢٥ + ٥ = ٣٠ فى حالة ما اذا كان معامل الربح لقيمة س٢ اعلى من ٣٠ ولهذا يلزم ان نجعل (س٢) متغيرا اساسيا .

وفى نفس المثال فان (ع١) متغير غير اساسى حيث ان هذا المتغير من المتغيرات المكملة Slack Variable .

ويلاحظ اننا فى حالة مشاكل التعظيم نهتم ببحث الحد الاعلى والذى بعده يهدم معامل الربح للمتغير غير الاساسى الحل الامثل ويتحدد هذا الحد الاعلى بالمعيار الاتى :

(ص ج + ف) — ز ج < صفر (٥)

ومعنى آخر فان الحل الحالى يبقى امثلا اذا كانت

(ص ج + ف) — ز ج ≥ صفر

وبالنسبة لمشاكل التدنية نهتم بتحديد الحد الادنى والذى بعده يهدم معامل التكلفة للمتغير غير الاساسى الامثل والذى يتحدد بالمعيار الاتى :

$$(ص_{ج} + ف) - ز_{ج} > صفر \qquad (٦)$$

وبمعنى آخر يبقى الحل امثلا اذا كانت $(ص_{ج} + ف) - ز_{ج} \geq صفر$

وبالنسبة لتحليل الحساسية للمتغيرات الاساسية $(ص_{ج})$ نلاحظ من الجدول الاخير رقم (١٢) ان المتغيرات الاساسية فى الجدول هى $س_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، $س_{٣}$ وعلى سبيل المثال فبالنسبة للمتغير الاساسى $س_{١}$ حيث $س_{١} = ٥٠$ اذا غيرنا هذا المعامل بالمقدار $٥٠ + ف_{١}$ فان هذا التغير لقيمة $س_{١}$ تنعكس فى الجدول الاتى (جدول رقم ١٣) :

جدول رقم (١٣)

المتغيرات الاساسية	ربح الوحدة $ص_{ب}$	الكمية	$ص_{ج} \leftarrow$ $٥٠ + ف_{١}$ $س$	٢٥ $س_{٢}$	صفر $ف_{١}$	صفر $ع_{٢}$	صفر $ع_{٣}$
س	$٥٠ + ف$	٢٥٠	١	$\frac{٣}{٥}$	$\frac{١}{١٠}$	صفر	صفر
$ع_{٢}$	صفر	٧٥٠	صفر	٧	$-\frac{١}{٢}$	١	صفر
$ع_{٣}$	صفر	٢٥٠	صفر	صفر	$\frac{٧}{٥}$	صفر	١
$ز_{ج}$			$٥٠ + ف_{١}$	$\frac{٣}{٥} + ٣٠$ $ف_{١}$	$\frac{٥}{١٠} + ف_{١}$	صفر	صفر
$ص_{ج} - ز_{ج}$			٥	$-٥ - \frac{٣}{٥}$ $ف_{١}$	$-\frac{٥}{١٠} - ف_{١}$	صفر	صفر

ويلاحظ ان الجدول رقم (١٣) هو نفسه الجدول رقم (٦) ما عدا ان معامل الربح تغير من (٥٠) الى $٥٠ + ف_{١}$ نتيجة التغير فى الصف $ز_{ج}$ ، $ص_{ج} - ز_{ج}$ ، وحيث ان المشكلة هى مشكلة تعظيم فان الحل فى الجدول الاخير رقم (١٣) يبقى حلا امثلا فى حالة ما اذا كانت $ص_{ج} - ز_{ج} \geq$ صفر ولكى نحدد قيمة $ف_{١}$ يلزم حل مجموعة المتباينات الخطية الاتية :

$$-\frac{٣}{٥} \text{ ف}_{١} \quad > \quad \text{صفر} \qquad (٧)$$

$$-٥ - \frac{١}{١٠} \text{ ف}_{١} \quad > \quad \text{صفر} \qquad (٨)$$

ومن المتباينة (٧) نلاحظ ان ف$_{١}$ $\geq -\frac{٢٥}{٣}$ كما انه من المتباينة (٨) نلاحظ ان ف$_{١}$ ≥ -٥٠ اى ان القيد الملزم هو ف$_{١}$ $\geq -\frac{٢٥}{٣}$ مما يعنى ان معامل الربح (س) يجب ان يتناقص باكثر من $٨\frac{١}{٣}$ لكى نهدم الحل الامثل الحالى .

ونستنتج من ذلك الاتى :

بالنسبة لمشكلة التعظيم نحصل على :

$$(\text{ص}_{ج} + \text{ف}) - \text{ز}_{ج} \leq \text{صفر} \qquad (٩)$$

وبالنسبة لمشكلة التقليل نحصل على :

$$(\text{ص}_{ج} + \text{ف}) - \text{ز}_{ج} \geq \text{صفر} \qquad (١٠)$$

التغير فى معاملات المدخلات والمخرجات أ$_{ى ج}$:

يعكس التغير فى معاملات المدخلات والمخرجات التغيرات المحتملة فى شحنات السفن ويعنى التحسن فى نقل الشحنات بالسفينتين اننا سنحتاج الى عدد اقل من الرحلات ومن ثم تقل معاملات أ$_{ى ج}$ ولذلك فانه بالنسبة للمتغير غير الاساسى اذا قلت قيمة أ$_{ى ج}$ فان ذلك سيؤثر على قيمة ص$_{ج}$ - ز$_{ج}$ لهذا المتغير غير الاساسى ويصبح السؤال بالنسبة للمتغير غير الاساسى كالاتى : أى مقدار يمكن ان تخفض قيمة أ$_{ى ١}$ للمتغير غير الاساسى قبل ان نهدم الحل الامثل الحالى؟

بالرجوع الى الرسم رقم (١) يمكن ان نتوصل الى تحليل الحساسية للمعاملات أ$_{ى ج}$ بانساء منطقة جديدة للحلول الممكنة ثم نختبر ما اذا كان الحل الامثل عند النقطة هـ تبقى مثلى ام لا .

التغير فى الموارد المتاحة (ب$_{ى}$) مثل الشحنات المعروضة للنقل :

من الاهمية بالنسبة لادارة الشركات الملاحية ان نعرف أثر تحليل الحساسية على الموارد المتاحة (الشحنات المتاحة للنقل على السفينتين) ويلاحظ ان التغير فى

قيم (ب ى) يؤثر على المتغيرات الاساسية وعلى قيمة دالة الهدف وذلك على الرغم من ان ص ج ـ ز ج = صفر لا يتأثر وعلى ذلك فان الحل الحالى يبقى امثلا الى حين ان يصبح احد المتغيرات الاساسية غير ممكن Infeasible فاذا رجعنا الى الرسم البيانى رقم (١) نلاحظ اننا اذا زدنا ب ١ من ٢٥٠٠ طن الى ٤٠٠٠ طن كما فى الجدول رقم (٤) فان منطقة الحلول الممكنة ستتغير من صفر م هـ ل فى الرسم رقم (١) الى المنطقة حلول ممكنة اكبر ، اما اذا انقصنا (ب١) من ٢٥٠٠ طن الى ١٢٠٠ طن مثلا فتصبح منطقة الحلول الممكنة اصغر من المنطقة الموضحة فى الرسم رقم (١) .

obeikan.com