الفصل التاسع

نظرية المباريات

تتعامل نظرية المباريات مع اتخاذ القرارات في ظل ظروف الصراع بين فردين او اكثر حيث تتنافس الشركات بعضها البعض كما تتنافس الشركات مع نقابات العمال على تحديد الاجور .

ويمكن تقسيم المباريات الى انواع مختلفة فاذا اعتمدنا على عدد اللاعبين تسمى المباراة مباراة شخصين Two Person Game اذا كان عدد اللاعبين اثنين واذا كان عدد اللاعبين ن (اذا كانت ن ≥ ٣) تسمى المباراة مباراة ن من اللاعبين N Person Game كما يمكن تقسيم المباراة اعتمادا على المكاسب والخسائر الى مباراة ذات مجموع صفرى Zero Sum Game اذا كان مجموع المكاسب والخسائر يساوى صفر وعلى العكس اذا كان مجموع المكاسب والخسائر لا يساوى صفر تسمى المباراة مباراة المجموع اللاصفرى Non Zero Sum Game .

وتتكون اى مباراة من العناصر الاتية :

١ — اللاعبون Players او متخذ والقرارات ويكون من المفترض ان كل لاعب (سواء اكان فرد ام مجموعة) قادرا على اتخاذ القرار .

٢ — القوانين والاجراءات التى تحكم قواعد المباراة .

٣ — استراتيجية كل لاعب والخطة المتوقعة للاعب الثانى .

٤ — المعلومات المتاحة لكل لاعب وقت المباراة .

٥ — تقييم نتائج المباراة .

مباراة الشخصين ذات المجموع الصفرى : Two Person Zero-Sum Game

فى مباريات الشخصين ذات المجموع الصفرى تكون مصالح المتنافسين متعارضة حيث ان مجموع الارباح لاحد المتنافسين هى نفسها مجموع الخسائر للآخر ، ويكون المجموع الكلى صفر كما يتضح من المثال الاتى :

بفرض ان هناك شركتين من شركات الملاحة تتنافسان على نقل شحنات من الموالح الى بعض الدول الاوربية ، وان الشركة الاولى لها استراتيجيتين ١م ، ٢م ، والشركة الثانية لها ايضا استراتيجيتين ن١ ، ن٢ كما يتضح من الجدول الاتى :

جدول رقم (١)

الشركة الثانية / الشركة الاولى	استراتيجيات الشركة الثانية		أقل رقم فى الصف
	ن١	ن٢	
١م	+ ٥	+ ٧	٥
٢م	+ ٤	+ ٦	٤
اكبر رقم فى العمود	٥	٧	ـ

ومن الطبيعى ان كل شركة تعرف نتائج استخدام اى استراتيجية ، كما انه واضح من هذه المباراة انها لصالح الشركة الاولى اذ ان كل قيمها بالزائد ، وتصبح قيم الشركة الثانية بالناقص ، وحيث ان الشركة الثانية يجب ان تلعب المباراة فانها سوف تعمل على خفض خسائرها . ويلاحظ ان الاستراتيجيات المتاحة للشركتين هما :

١ ـ ان الشركة الاولى تحقق اعلى قيم للمباراة اذا استخدمت الاستراتيجية الاولى (١م) كل الوقت حيث ان لديها قيما اعلى من قيم الاستراتيجية الثانية .

٢ ـ ان الشركة الثانية تحقق نفس الموقف وتستخدم الاستراتيجية (ن١) لكى تخفض خسائرها حيث ان القيمة (٥) اقل من القيمة (٧) للاستراتيجية (ن٢) ولذلك يجب ان تكون قيمة المباراة (٥) حيث تكسب الشركة الاولى خمس نقاط بينما تخسر الشركة الثانية خمس نقاط فى كل مرة تتم فيها المباراة .

ويمكن حل هذه المشكلة بسهولة بسبب توزيع القيم من خلال صفوفة المباراة وتتكون قواعد المباراة من الاتى :

١ ـ نبحث عن نقطة التعادل Saddle Point ويلاحظ ان التقييم الصحيح لهذه المباراة يشير الى انه توجد استراتيجية واحدة لكل من الشركة الاولى والشركة

الثانية وتسمى استراتيجية المباراة من هذا النوع بالاستراتيجية الصافية Pure Strategy كما تسمى النقطة حيث يلعب كل لاعب استراتيجية صافية بنقطة التعادل . وبالنظر الى الجدول السابق يمكن التعرف بسهولة على نقطة التعادل حيث تكون عبارة عن اقل قيمة فى الصف واكبر قيمة فى العمود ، وتسعى الشركة الاولى الى ان يكون ليدها عائد له اكبر قيمة فى اى عمود بينما تبحث الشركة الثانية عن اقل خسارة فى اى صف وحيث انه توجد قيمة واحدة هى (٥) والتى تحقق هذا الشرط فان كل شركة تلعب المباراة على اساس امثل اذا اختارت كل شركة نقطة التعادل مع ملاحظة انه قد لا يكون للمباراة نقط تعادل فى حالات كثيرة وبنظرة لمصفوفة المباريات يمكن التأكد فيما اذا كان هناك نقطة تعادل بالبحث عن اقل قيمة فى الصف واكبر قيمة فى العمود . وتوضح فيما يلى بعض الامثلة للمباريات ، واذا كانت هناك نقط تعادل سنعلمها بدائرة .

لا توجد نقطة تعادل حيث لا يوجد عائد الذى هو عبارة عن اقل قيمة فى الصف واكبر قيمة فى العمود .

$$\begin{array}{c} \\ أ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ب} & \\ \hline -٥ & \\ -٤ & \end{array} \\ \begin{pmatrix} ٤ & \\ ٨ & \end{pmatrix} \end{array}$$

الاستراتيجية (أ) بالصف (١) والاستراتيجية بالعمود (٢) وقيمة المباراة (+١) هى اقل قيمة فى الصف واعلى قيمة فى العمود .

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{س} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \text{ى} \\ & \hline \\ & \end{array} \\ \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & -٣ \\ ٦ & -٥ \end{pmatrix} \end{array}$$

الاستراتيجية (أ) الصف (ى) والاستراتيجية العمود (١) وقيمة المباراة (+٢)

$$\begin{array}{c} \\ أ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \text{ب} & \\ & \hline & \\ & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} ١٢ & ١٤ & ٢ \\ -١٠ & ٦ & -٨ \\ ١٤- & -٤ & ١ \end{pmatrix} \end{array}$$

وبالنسبة لمصفوفات العائد الكبيرة توجد طريقة سريعة لتحديد ما اذا كانت توجد نقطة تعادل عن طريق عمل دائرة لاقل قيمة فى كل صف ونضع مربعا حول اكبر قيمة فى كل عمود وحيث توجد قيمة لها مربع ودائرة توجد نقطة تعادل كما يتضح من المصفوفة الاتية :

$$\begin{pmatrix} ١٨ & ٦ & ٢ & ١٦ & \text{صفر} \\ ١٢ & ١٠ & ٨ & ١٢ & ١٤ \\ ٤ & ٨ & ٦ & ١٠ & ١٦ \\ ١٠ & ١٢ & ٤ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$$

٢ ــ تخفيض المباراة بالسيطرة (السيادة) Dominance بمعنى انه فى حالة عدم وجود استراتيجيات صافية فان الخطوة الثانية هى استبعاد استراتيجيات معينة بالاعمدة او بالصفوف بما يسمى بالسيطرة ونتيجة المباراة يمكن حلها باستراتيجية مختلطة • ويمكن توضيح السيادة بالامثلة الاتية :

$$\begin{array}{c} \\ أ \end{array} \begin{pmatrix} ب \\ \hline ٦ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

ويلاحظ ان اللاعب (أ) لا يلعب الصف (٢) حيث انه بذلك يعطى اللاعب (ب) فرصته الوحيدة ليكسب وواضح ان الصف (٢) يستبعد بالصف (١) او بالصف (٣) اذ ان هذه الصفوف ستعود باحسن عائد للاعب (أ) احسن من الاستراتيجية المستبعدة Dominated Strategy بصرف النظر عما يفعله اللاعب (ب) • وبالنسبة للصف فان قاعدة السيطرة هى : كل قيمة فى الصف المسيطر Dominating Row يجب ان تكون اكبر من او يساوى القيمة المناظرة للصف المستبعد Dominated Row وتصبح نتيجة المصفوفة هى :

$$\begin{array}{c} \\ أ \end{array} \begin{pmatrix} ب \\ \hline ٦ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

مثال : مباراة بين ادارة الميناء ونقابة العمال بهذا الميناء :

يمكن توضيح السيطرة بمثال خاص بمساومة ادارة احد الموانى مع النقابة حول رفع اجور عمال الشحن والتفريغ بالميناء وقد قامت ادارة الميناء بعمل استراتيجيات

لاستخدامها خلال المفاوضات وباستخدام الادارة لخبرتها السابقة توصلت الـــــى الاستراتيجيات الاتية :

ب١ ــ ترمز الى توقع ان تكون المفاوضات مع النقابة صعبة للغاية •

ب٢ ــ ترمز الى ان تكون طلبات النقابة صعبة الى حد ما •

ب٣ ــ ترمز الى ان تكون طلبات النقابة معقولـــة •

ب٤ ــ ترمز الى ان تكون طلبات النقابة متقلبة كثيرا •

كما توصلت النقابة الى اقتراح احدى الاستراتيجيات الاتية :

أ١ ــ ترمز الى توقع مطالبة النقابة بتكلفة كبيرة لزيادة الاجور •

أ٢ ــ ترمز الى توقع مطالبة النقابة بتكلفة كبيرة الى حد ما لزيادة الاجور •

أ٣ ــ ترمز الى توقع مطالبة النقابة بتكلفة متوسطة لزيادة الاجور •

أ٤ ــ ترمز الى توقع ان تكون الطلبات معقولة بواسطة الشركة وليس بواسطـــة النقابـــة •

ويصبح السؤال الخاص بالاستراتيجية التى تتبعها ادارة الميناء بالاخذ فـــى الاعتبار استراتيجية النقابة ومساعدة وسيط خارجى Outside mediator تم اعداد الزيادة الشرطية لتكلفة الاجور بواسطة ادارة الميناء •

جدول الزيادة الشرطية لتكلفة الاجور

صفوفة (٤ × ٤) جدول رقم (٢)

استراتيجيات النقابة	استراتيجيـــــات الميناء			
	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	+ ٠ر٢٥	+ ٠ر١٤	+ ٠ر١٥	+ ٠ر٣٢
أ٢	+ ٠ر٤٠	+ ٠ر١٧	+ ٠ر١٣	+ ٠ر١٦
أ٣	+ ٠ر٣٠	+ ٠ر٠٥	+ ٠ر١٢	+ ٠ر١٥
أ٤	ــ ٠ر٠١	+ ٠ر٠٨	+ ٠ر١١	+ ٠ر٠٣

وبالنسبة للزيادة الشرطية لتكلفة الزيادة فى الاجور يمكن تفسيرها كالاتـــى : اذا قامت ادارة الميناء باستخدام الاستراتيجية ب١ واستخدمت النقابة الاستراتيجيـــة أ١

فمعنى ذلك ان الزيادة فى الاجور عن الساعة هو ٠ر٢٥ جنيه وسيكون للبيانات فى الجدول السابق نفس المعنى ، وباستخدام هذه البيانات يكون السؤال متعلق بكيفية سير المفاوضات بين النقابة وادارة الميناء ٠

وكما ذكرنا من قبل فان اول قاعدة فى اى مشكلة فى نظرية المباريات هى البحث عن نقطة التعادل ، ويلاحظ انه لا توجد نقطة تعادل فى هذه المشكلة ، ثم نختبر المصفوفة للسيطرة ويلاحظ ان النقابة لن تستخدم الاستراتيجية $أ_4$ ولذلك نستبعد هذا الصف اذ ان هناك استراتيجيات اخرى يمكن ان تعود على النقابة بعائد احسن من الاستراتيجية المستبعدة وعند تطبيق قاعدة السيطرة للضعوف فى هذه المشكلة فان كل رقم فى الصف $أ_1$ او الصف $أ_2$ اكبر من او يساوى للرقم المناظر فى الصف $أ_4$ مما يخفض المصفوفة الاصلية (٤×٤) الى مصفوفة (٤×٣) كما يتضح من الجدول الاتى :

جدول الزيادة الشرطية لتكلفة الاجور مصفوفة ٤×٣

جدول رقم (٣)

استراتيجيات النقابة	استراتيجيات ادارة الميناء			
	$ب_1$	$ب_2$	$ب_3$	$ب_4$
$أ_1$	+ ٠ر٢٥	+ ٠ر١٤	+ ٠ر١٥	+ ٠ر٣٢
$أ_2$	+ ٠ر٤٠	+ ٠ر١٧	+ ٠ر١٣	+ ٠ر١٦
$أ_3$	+ ٠ر٣٠	+ ٠ر٠٥	+ ٠ر١٢	+ ٠ر١٥

ونلاحظ ان ادارة الميناء تقوم باستبعاد العمود $ب_4$ وتحل محله العمود $ب_3$ اذ ان الادارة تحاول خفض خسائرها ، وكل رقم فى العمود $ب_3$ يساوى او يكون اقل من الرقم المناظر له فى العمود $أ_4$ وبذلك تصبح المصفوفة الجديدة (٣×٣) كما يتضح من الجدول الاتى :

جدول الزيادة الشرطية لتكلفة الاجور (مصفوفة ٣×٣)

جدول رقم ٤)

استراتيجيات النقابة	استراتيجيات ادارة الميناء		
	$ب_1$	$ب_2$	$ب_3$
$أ_1$	+ ٠ر٢٥	+ ٠ر١٤	+ ٠ر١٥
$أ_2$	+ ٠ر٤٠	+ ٠ر١٧	+ ٠ر١٣
$أ_3$	+ ٠ر٣٠	+ ٠ر٠٥	+ ٠ر١٢

ثم نستبعد الصف الثالث $أ_3$ بالصف الثانى $أ_2$ اذ انه باستخدام قاعدة الصف فان الزيادة فى الاجور فى الصف $أ_2$ (٠ر٤٠ و ٠ر١٧ و ٠ر١٣) اكبر من او تساوى الارقام المناظرة لها فى الصف $أ_3$ (٠ر٣٠ و ٠ر٠٥ و ٠ر١٢) وتظهر المصفوفة (٣×٢) كما فى الجدول الاتى :

جدول الزيادة الشرطية لتكلفة الاجور (مصفوفة ٣×٢)

جدول رقم (٥)

استراتيجيات النقابة	استراتيجيات ادارة الميناء		
	$ب_1$	$ب_2$	$ب_3$
$أ_1$	+ ٠ر٢٥	+ ٠ر١٤	+ ٠ر١٥
$أ_2$	+ ٠ر٤٠	+ ٠ر١٧	+ ٠ر١٣

وتكون الفرصة الاخيرة لاستخدام السيطرة هى بالنسبة للعمود $ب_1$ وبتطبيق قاعدة العمود فان الزيادة المقترحة فى العمود $ب_2$ هى (٠ر١٧ و ٠ر١٤) تساوى او تكون اقل منها فى العمود ($ب_1$) (٠ر٢٥ و ٠ر٤٠) وتصبح المصفوفة النهائية (٢×٢) كما فى الجدول الاتى :

جدول رقم (٦)

استراتيجيات النقابة	استراتيجيات ادارة الميناء	
	$ب_1$	$ب_2$
$أ_1$	+ ٠ر١٤	+ ٠ر١٥
$أ_2$	+ ٠ر١٧	+ ٠ر١٣

٣ — الحل بالنسبة لاستراتيجية مختلطة :

فى المباريات التى لا يوجد بها نقطة تعادل ونستخدم السيطرة لتخفيض المباراة الى مصفوفة اصغر فان المنافسة تؤول لاستراتيجية مختلطة ، وسنوضح بعض الطرق لامثلية الربح لكل لاعب بحيث يجب ان يحدد كلا من اللاعبين س ، ى نسبة الزمن ليلعب كل صف (يطبق على س فقط) وكل عمود (يطبق على ى فقط) . ولتقييم مباراة ٢ × ٢ هناك عدة طرق للوصول الى الاستراتيجية المثلى ، نستخدم منها الطريقتين الآتيتين :

الطريقة الحسابية :

والخطوة الاولى فى الطريقة الحسابية هى ان نقوم بطرح اقل عائد فى كل صف من اكبر عائد ويطبق نفس الاجراء بالنسبة للعمود وباستخدام بيانات المثال الخاص بالنقابة وادارة الميناء تصبح النتائج كالاتى :

ادارة الميناء

النقابة

٠ر١٤	٠ر١٥	٠ر١٥ — ٠ر١٤	= ٠ر٠١
٠ر١٧	٠ر١٣	٠ر١٧ — ٠ر١٣	= ٠ر٠٤
٠ر١٧	٠ر١٥		
— ٠ر١٤	— ٠ر١٣		
٠ر٠٣	٠ر٠٢		

والخطوة الثانية هى احلال كل قيمتين من القيم المطروحة محل بعضهما بحيث تصبح كالاتى :

	ادارة الميناء	
النقابة	٠ر١٤ ٠ر١٥	٠ر٠٤
	٠ر١٧ ٠ر١٣	٠ر٠١
	٠ر٠٢ ٠ر٠٣	

ولكى نحدد استراتيجيات ادارة الميناء نضيف ٠ر٠٣ و ٠ر٠٢ بأسفل العمود ثم نقسمها على ناتج جمعهما ونقسم ناتج كل رقم على يمين المصفوفة على ناتج مجموعهما كالاتى :

	ادارة الميناء		
النقابة	٠ر١٤ ٠ر١٥	٠ر٠٤ / (٠ر٠٤ + ٠ر٠١)	
	٠ر١٧ ٠ر١٣	٠ر٠١ / (٠ر٠٤ + ٠ر٠١)	
	٠ر٠٢ ٠ر٠٣		

٠ر٠٢ + ٠ر٠٣ + ٠ر٠٢ + ٠ر٠٣

النقابة	٠ر١٤ ٠ر١٥	٤/٥	
	٠ر١٧ ٠ر١٣	١/٥	
	٢/٥ ٣/٥		

وعلى هذا الاساس تستخدم النقابة الاستراتيجية أ١ والتى تمثل ٨٠٪ من الزمن والاستراتيجية أ٢ والتى تمثل ٢٠٪ من الزمن بينما تستخدم ادارة الميناء الاستراتيجية ب٢ والتى تمثل ٤٠٪ من الزمن والاستراتيجية ب٣ والتى تمثل ٦٠٪ من الزمن. ويلاحظ ان هذه الطريقة لا تطبق على مصفوفة اكبر من ٣×٢ وهى طريقة بسيطة وان كان استخدام الطريقة الجبرية افضل منها.

الطريقة الجبرية :

نقطة البدء فى الطريقة الجبرية هى ان نفرض أن م تساوى جزء من الزمن الذى تستخدمه النقابة فى صراعها باستخدام الصف الاول وان (م — ١) الزمن الذى تستخدمه النقابة فى استخدام الصف الثانى (الاستراتيجية الثانية) ويطبق نفس الاجراء لادارة الميناء حيث ن تمثل الزمن التى تستغرقه الادارة فى استخدام العمود الاول ب ر وأن (ن — ١) الزمن الذى تستخدمه الادارة فى استخدام العمود الثانى (الاستراتيجية ب٣) كما يتضح على النحو الاتى :

	ن	١ — ن
م	٠ر١٤	٠ر١٥
١ — م	٠ر١٧	٠ر١٣

وتريد النقابة ان تقسم مباراتها بين هذين العنصرين بحيث تصبح مكاسبها من استخدام الصف الثانى ويكون من الضرورى للنقابة ان تساوى مكاسبها المتوقعة عندما تستخدم ادارة الميناء العمود ٢ للمكاسب المتوقعة للنقابة عندما تستخدم ادارة الميناء العمود ٣ لذلك تجعل (١ — م) ٠ر١٤ م + ٠ر١٧ تساوى (١ — م) ٠ر١٥ م + ٠ر١٣ لكى نحصل على قيمة م أى :

$$٠ر١٤\ م + ٠ر١٧\ (١ — م) = ٠ر١٥\ م + ٠ر١٣\ (١ — م)$$

$$٠ر١٤\ م + ٠ر١٧ — ٠ر١٧\ م = ٠ر١٥\ م + ٠ر١٣ — ٠ر١٣\ م$$

$$٠ر٠٥\ م = ٠ر٠٤$$

$$م = \frac{٤}{٥}$$

ومعنى ذلك ان النقابة تستخدم الصف الاول $\frac{٤}{٥}$ من الزمن والصف الثانى $\frac{١}{٥}$ الزمن وتستخدم نفس الاجراء بالنسبة لادارة الميناء حتى تقلل خسائرها الى ادنى حد ممكن حيث نلاحظ ان توقعاتها من استخدام العمود الثانى ن من الزمن والعمود الثالث (١ — ن) من الزمن يتساويان بنفس الطريقة وتكون الخسائر المتوقعة لادارة الميناء عندما تستخدم النقابة الصف الاول مع الخسائر المتوقعة عندما تستخدم النقابة الصف الثانى كالاتى :

$$٠ر١٤\ ن + ٠ر١٥\ (١ — ن) = ٠ر١٧\ ن + ٠ر١٣\ (١ — ن)$$

$$٠ر١٤\ ن + ٠ر١٥ — ٠ر١٥\ ن = ٠ر١٧\ ن + ٠ر١٣ — ٠ر١٣\ ن$$

$$ن = \frac{٢}{٥}$$

ومعنى ذلك ان ادارة الميناء ستستخدم العمود ٢ حيث يمثل $\frac{٢}{٥}$ الزمن والعمود ٣ حيث يمثل $\frac{٣}{٥}$ الزمن اى ١ — ن او ١ — $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٣}{٥}$ وبذلك نحصل على الاتى :

ادارة الميناء

		ب١	ب٢
		٢/٥	٣/٥
النقابة	أ١	٠ر١٤	٠ر١٥	٤/٥
	أ٢	٠ر١٧	٠ر١٣	١/٥

ومعنى ذلك انه عندما تستخدم ادارة الميناء العمود (٢) لمدة ٢/٥ من الزمن تحصل النقابة على ٠ر١٤ زيادة فى الاجور لمدة ٤/٥ من الزمن و ٠ر١٧ زيادة فى الاجور لمدة ١/٥ من الزمن وايضا عندما تستخدم ادارة الميناء العمود (٣) لمدة ٣/٥ من الزمن تحصل النقابة ٠ر١٥ زيادة فى الاجور لمدة ٤/٥ من الزمن و٠ر١٣ زيادة فى الاجور لمدة ١/٥ من الزمن . ويمكن تلخيص المكاسب الكلية للنقابة كالاتى :

قيمة المباراة تساوى

$$\frac{٢}{٥}\left[٠ر١٤\left(\frac{٤}{٥}\right)+٠ر١٧\left(\frac{١}{٥}\right)\right]+\frac{٣}{٥}\left[٠ر١٥\left(\frac{٤}{٥}\right)+٠ر١٣\left(\frac{١}{٥}\right)\right]$$

$$= \frac{٠ر٧٣}{٥} = ٠ر١٤٦ \text{ زيادة}$$

وبالنسبة لادارة الميناء فان تفسير هذه المباراة بالنسبة لها يكون كالاتى :
عندما تستخدم النقابة الصف لفترة ٤/٥ من الزمن فان الادارة تخسر ٠ر١٤ لفترة ٢/٥ من الزمن وتخسر ٠ر١٥ لفترة ٣/٥ من الزمن ،كما انه عندما تستخدم النقابة الصف ٢ لفترة ١/٥ من الزمن تخسر ادارة الميناء ٠ر١٧ لفترة ٢/٥ من الزمن و ٠ر١٣ لفترة ٣/٥ من الزمن وبوضع الارقام السابقة فى معادلة فان قيمة المباراة تساوى :

$$\frac{٤}{٥}\left[٠ر١٤\left(\frac{٢}{٥}\right)+٠ر١٥\left(\frac{٣}{٥}\right)\right]+\frac{١}{٥}\left[٠ر١٧\left(\frac{٢}{٥}\right)+٠ر١٣\left(\frac{٣}{٥}\right)\right]$$

$$= \frac{٠ر٧٣}{٥} = ٠ر١٤٦ \text{ زيادة}$$

وتصبح قيمة هذه المباراة للنقابة هى نفسها لادارة الميناء .

استخدام البرمجة الخطية فى نظرية المباريات :

يمكن استخدام بيانات المثال الاول والخاص بوجود شركتين من شركات الملاحة تتنافسان على نقل شحنات من الموالح الى بعض الدول الاوربية وان الشركة الاولى لها استراتيجية م١ ، م٢ والشركة الثانية لها الاستراتيجية ن١ ، ن٢ وأن بيانات هذه المشكلة موضحة فى الجدول الاتى :

جدول رقم (٧)

استراتيجيات الشركة الاولى	استراتيجيات الشركة الثانية		اقل قيمة بالصف
	ن١	ن٢	
م١	٢	٥	٢ اقصى ما يمكن
م٢	٦	١	١
اعظم قيمة بالعمود	٦	٥ اقل ما يمكن	

لذلك نفرض ان

ع١ ، ع٢ — ترمز الى احتمال اختيار الاستراتيجية م١ ، م٢

ر١ ، ر٢ — ترمز الى احتمال اختيار الاستراتيجية ن١ ، ن٢

وحيث ان الشركة الاولى هى التى تريد تعظيم ارباحها فانه يمكننا كتابة المكاسب المتوقعة للشركة الاولى فى صورة متباينات (اكبر من او يساوى) بمعنى ان م (الشركة الاولى) يجب ان تكسب اكبر من ف اذا استخدمت الشركة الثانية استراتيجية ضعيفة وبذلك فان المكاسب المتوقعة للشركة الاولى تكون كالاتى :

(اذا استخدمت الشركة الثانية الاستراتيجية ن١ كل الوقت ٢ ع١ + ٦ ع٢ ≥ ف (١)

(اذا استخدمت الشركة الثانية الاستراتيجية ن٢ كل الوقت ٥ ع١ + ١ ع٢ ≥ ف (١) مكرر

ومن الطبيعى ان ع١ + ع٢ = ١ وأن ف١ + ف٢ ≥ صفر

كما يمكن كتابة خسائر الشركة الثانية (ن) فى صورة متباينات (اقل من او يساوى) وبذلك فان الخسارة المتوقعة للشركة الثانية تكون :

(عند ما تستخدم الشركة الاولى الاستراتيجية م$_1$ كل الوقت) ٢ ر$_1$ + ٥ ر$_2$ ≤ ط

(عند ما تستخدم الشركة الاولى الاستراتيجية م$_2$ كل الوقت) ٦ ر$_1$ + ١ ر$_2$ ≤ ط

(٢)

وحيث ر$_1$ ، ر$_2$ ≥ صفر و ١ ر$_1$ + ر$_2$ = ١

وبقسمة كل متباينة فى ٢، ١ على ف نحصل على :

الشركة الاولى		الشركة الثانية
$\frac{٢ع_1}{ف} + \frac{٦ع_2}{ف}$	≤ ١	$\frac{٢ر_1}{ف} + \frac{٥ر_2}{ف} \geq ١$
$\frac{١ع_1}{ف} + \frac{١ع_2}{ف}$	≤ ١	$\frac{٦ر_1}{ف} + \frac{١ر_2}{ف} \geq ١$
$\frac{١ع_1}{ف} + \frac{٢ع_2}{ف}$	= $\frac{١}{ف}$	$\frac{١ر_1}{ف} + \frac{٢ر_2}{ف} = \frac{١}{ف}$

وبفرض اننا ادخلنا متغيرات جديدة هى :

$ع_1 = \frac{١ع_1}{ف}$ و $ع_2 = \frac{٢ع_2}{ف}$ (٣)

$ر_1 = \frac{١ر_1}{ف}$ و $ر_2 = \frac{\quad}{ف}$ (٤)

فانه يمكننا ان نحصل على الاتى :

الشركة الاولى		الشركة الثانية
$٢ع_1 + ٦ع_2$	≤ ١	$٢ر_1 + ٥ر_2 \geq ١$
$٥ع_1 + ١ع_2$	≤ ١	$٢ر_1 + ١ر_2 \geq ١$
$ع_1 + ع_2$	= $\frac{١}{ف}$	$ر_1 + ر_2$ = $\frac{١}{ف}$

وبذلك فان الشركة الاولى تريد تعظيم مكاسبها اى تعظيم ف التى تعادل تقليل $\frac{1}{ف}$ وحيث ان $ع_1 + ع_2 = \frac{1}{ف}$ فانه بالنسبة للشركة الاولى تصبح المشكلة مشكلة برمجة خطية كالاتى :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{المطلوب تقليل الدالة } ع_1 + ع_2 \\ \text{بشرط تحقيق القيود الاتية :} \\ ٥ع_1 + ٦ع_2 \geq ١ \\ ٥ع_1 + ١ع_2 \geq ١ \\ ع_1 \text{ و } ع_2 \geq \text{صفر} \end{array}\right. \qquad (٥)$$

وحيث ان الشركة الثانية تريد تقليل خسائرها فيكون هدفها تقليل ف اى أن الشركة الثانية يجب ان تعظم $\frac{1}{ف}$ وحيث ان $ر_1 + ر_2 = \frac{1}{ف}$ فانه بالنسبة للشركة الثانية تصبح المشكلة ايضا مشكلة برمجة خطية بالصورة الاتية :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{المطلوب تعظيم الدالة } ر_1 + ر_2 \\ \text{بشرط تحقيق القيود الاتية :} \\ ٢ر_1 + ٥ر_2 \leq ١ \\ ٦ر_1 + ١ر_2 \leq ١ \\ ر_1 \text{ و } ر_2 \geq \text{صفر} \end{array}\right. \qquad (٦)$$

ويلاحظ ان الصياغة (٥) هى مشكلة ثنائية للصياغة (٦) وبذلك يكون من الضرورى حل مشكلة واحدة منهما فقط وبذلك فان حل المشكلة الاولية Primal للصياغة (٦) باستخدام طريقة السمبلكس يعطينا الحل الامثل الموضح فى الجدول الاتى :

التغيرات الاساسية	ربح الطن ص ب	الكمية	ص ج — ١	ر ١ ٢	صفر هـ ١	صفر ب ٢
ر ١	١	١/٧	١	صفر	٣/١٤	— ١/١٤
ر ٢	١	١/٧	صفر	١	— ١/٢٨	٥/٢٨
ز ج			١	١	٥/٢٨	٣/٢٨
ص ج — ز ج			صفر	صفر	— ٥/٢٨	— ٣/٢٨

ويلاحظ ان الهدف تحديد الاحتمال التوزيعى الامثل لكل شركة ويمكن الحصول على قيمة ١/ف كالاتى :

$$\frac{١}{ف} = ع_١ + ع_٢ = \frac{٣}{٢٨} + \frac{٥}{٢٨} = \frac{٢}{٧}$$

ومن ثم فان ف = ٧/٢ = ٣ر٥ وباستخدام المعادلة رقم (٣) نحصل على :

$$\bar{ع}_١ = ف \times ع_١ = \frac{٧}{٢} \times \frac{٥}{٨} = \frac{٥}{٨} = ٠ر٦٢٥$$

$$\bar{ع}_٢ = ف \times ع_٢ = \frac{٧}{٢} \times \frac{٣}{٢٨} = \frac{٣}{٨} = ٠ر٣٧٥$$

ويعنى ذلك ان الشركة الاولى يجب ان تستخدم الاستراتيجية ($م_١$) ٥ر٦٢ ٪ من الزمن والاستراتيجية ($م_٢$) ٥ر٣٧ ٪ من الزمن ٠

كما انه باستخدام المعادلات (٤) نحصل على :

$$\bar{ر}_١ = ف \times ر_١ = \frac{٧}{٢} \times \frac{١}{٧} = \frac{١}{٢} = ٠ر٥٠$$

$$\bar{ر}_٢ = ف \times ر_٢ = \frac{٧}{٢} \times \frac{١}{٧} = \frac{١}{٢} = ٠ر٥٠$$

مما يعنى ان الشركة الثانية يجب ان تستخدم الاستراتيجية ($ن_١$) لفترة ٥٠٪ من الزمن والاستراتيجية ($ن_٢$) ايضا ٥٠٪ من الزمن ٠