الفصل الثالث

مشاكل البرمجة الخطية

يناقش هذا الفصل مشاكل البرمجة الخطية التى تشتمل على المشاكل الاربعة الآتية :

المشكلة الاولى : مشكلة النقل :

تعتبر مشكلة النقل احدى الحالات الخاصة من المشكلة العامة للبرمجة الخطية وهى تختص بتصميم برنامج امثل للنقل عندما يراد نقل بعض السلع من عدة مصادر Origins الى مجموعة من اماكن الوصول Destinations .

وتظهر مشاكل النقل عند تكوين الخطة المثلى لنقل الشحنات من مراكز التجميع الى مراكز التوزيع فى حالة ما اذا كانت دولة من الدول تتجمع فى موانيها بضائع واردة من الخارج يراد نقلها الى مراكز الاستهلاك او اماكن التخزين داخل الدولة (داخل المحافظات) .والعكس صحيح ففى حالة البضائع المراد تصديرها للخارج عن طريق عدد من الموانى الموجودة بالدولة فان مجموع كمية البضائع الموجودة بمراكز النقل (المحافظات) يراد نقلها الى هذه الموانى لتصديرها .

وقبل شرح مشكلة النقل يستلزم الامر تكوين مصفوفة النقل يوضح فيها الموانى المختلفة والشحنات المتجمعة فيها والمطلوب نقلها الى المحافظات داخل الدولة والتى ستنقل اليها كميات معينة من هذه البضائع وكذا المسافات (او تكلفة النقل) بين كل ميناء وبين المحافظات المختلفة .

لذلك نفرض ان :

ر١ ، ر٢ ، ..... رم — ترمز الى عدد الموانى بحيث يعادل العدد العام (م) من الموانى .

ب١ ، ب٢ ، ..... بن — ترمز الى العدد العام (ن) من المحافظات .

أ١ ، أ٢ ، ..... أم — ترمز الى كمية البضائع بالموانى (م) .

ع١ ، ع٢ ، ..... عن — ترمز الى احتياجات المحافظة (ن) من البضائع .

ص ى ج — ترمز الى تكلفة النقل لنقل الطن الواحد من الميناء (ى) الى المحافظة (ح) .

$س_{ى ج}$ — ترمز الى كمية البضاعة المطلوب نقلها من الميناء (ى) الى المحافظة(ج) .

وتصبح مصفوفة النقل على الشكل الآتى :

الموانى \ المحافظات	ب ١	ب ٢	ب ٣	...	ب ن	أ ى
ر ١	ص ١١ / س ١١	ص ١٢ / س ١٢	ص ١٣ / س ١٣	... / ...	ص ى ن / س ى ن	أ ١
ر ٢	ص ٢١ / س ٢١	ص ٢٢ / س ٢٢	ص ٢٣ / س ٢٣	... / ...	ص ٢ ن / س ٢ ن	أ ٢
...	...	...	...	...	...	...
ر م	ص م ١ / س م ١	ص م ٢ / س م ٢	ص م ٣ / س م ٣	... / ...	ص م ن / س م ن	أ م
ع ج	ع ١	ع ٢	ع ٣	...	ع ن	

ويكون عدد الخلايا المشغولة فى مشكلة النقل م + ن — ١

ونناقش فيما يلى بعض نماذج النقل .

أولا : النموذج المغلق لمشكلة النقل :

تتلخص المشكلة فى وجود عدد من الموانى للدولة سنرمز لها بالرمز (ى) حيث (ى = ١ ، ٢ ، ... م) يراد نقل بضائع منها الى المحافظات (مراكز التوزيع) داخل هذه الدولة وسنرمز لها بالرمز (ج) حيث (ج = ١ ، ٢ ، ... ن)

ونفرض ان المعلوم الآتى :

$أ_{ى}$ — كمية البضائع الموجودة بالموانى (ى) والمطلوب نقلها الى مراكز التوزيع داخل الدولة .

$ع_{ج}$ — كمية البضائع المطلوبة لكل مركز توزيع (ج) داخل الدولة .

$ص_{ى ج}$ — تكلفة نقل الطن من الميناء (ى) الى مركز التوزيع (ج) .

$س_{ى ج}$ — كمية البضائع المطلوب نقلها من الميناء (ى) الى مركز التوزيع (ج) (المجهول المطلوب معرفته).

ويمكن تصوير المشكلة كما فى الجدول الآتى :

مراكز التوزيع / الموانى	مراكز التوزيع المحافظات (ج)						كمية البضاعة الموجودة بكل ميناء
	١	٢	..	ج	..	ن	
١				$\frac{ص_{ى ج}}{س_{ى ج}}$			$أ_{١}$
٢				$\frac{ص_{٢ ج}}{س_{٢ ج}}$			$أ_{٢}$
..							..
ى				$\frac{ص_{ى ج}}{س_{ى ج}}$			$أ_{ى}$
..				..			..
م				$\frac{ص_{م ج}}{س_{م ج}}$			$أ_{م}$
المطلوب نقله لكل مركز توزيع ($ع_{ج}$) محافظة بالطن	$ع_{١}$	$ع_{٢}$	..	$ع_{ج}$	..	ن	

ويكون المطلوب هو نقل البضائع المختلفة من الموانى الى مراكز التوزيع المختلفة باقل تكلفة نقل .

الصياغة الرياضية للمشكلة :

دالة الهدف : التكلفة الكلية لنقل البضائع من الموانى المختلفة الى مراكز التوزيع المختلفة (المحافظات) ويمكن الحصول عليها من مجموع حواصل ضرب البضائع المنقولة فى تكلفة النقل المناظرة ويعبر عنها رياضيا .

$$ف(س) = \text{مجـ}_{ى=1}^{م} \text{مجـ}_{ج=1}^{ن} ص_{ى ج} \, س_{ى ج} \qquad (١)$$

القيود :

بالنسبة للموانى فان مجموع البضائع الموجودة بها يعادل مجموع الموزع على مراكز التوزيع اى ان :

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} س_{ى ج} = أ_{ى} \qquad (ى = ١، ٢، ٠٠٠ م) \qquad (٢)$$

وبالنسبة لمجموع الموزع على مراكز التوزيع يجب ان يتساوى مع مجموع البضائع الموجودة بالموانى اى ان :

$$\text{مجـ}_{ى=1}^{م} س_{ى ج} = ع_{ج} \qquad (ج = ١، ٢، ٠٠٠ ن) \qquad (٣)$$

كما ان مجموع كمية البضائع بالموانى يجب ان تتساوى مع مجموع كمية البضائع المنقولة الى مركز التوزيع اى ان :

$$\text{مجـ}_{ى=1}^{م} أ_{ى} = \text{مجـ}_{ج=1}^{ن} ع_{ج} \qquad (٤)$$

وبذلك تأخذ المشكلة الصورة الرياضية الآتية :

ايجاد قيم $س_{ى ج}$ (ى = ١، ٢، ٠٠٠ م و ج = ١، ٢، ٠٠٠ ن) التى تجعل الدالة ف (س) = $\text{مجـ}_{ى=1}^{م} \text{مجـ}_{ج=1}^{ن} ص_{ى ج} \, س_{ى ج}$ أقل ما يمكن (١) مع العلم بأنه

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} س_{ى ج} = أ_{ى} \qquad (ى = ١، ٢، ٠٠٠ ن) \qquad (٢)$$

$$\text{مجـ}_{ى=1}^{م} س_{ى ج} = ع_{ج} \qquad (ج = ١، ٢، ٠٠٠ ن) \qquad (٣)$$

obeikan.com

$$\text{مجـــ}_{\text{ى = ١}}^{\text{م}} \text{أ}_{\text{ى}} = \text{مجـــ}_{\text{ج = ١}}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ج}} \quad \text{و} \quad \text{س}_{\text{ى ج}} \leq \text{صفر} \qquad (٤)$$

النموذج المفتوح لمشكلة النقل :

مع افتراض نفس الرموز الواردة فى النموذج المفتوح فان المشكلة تكون اما ان مجموع كمية البضائع الموجودة بالموانى المختلفة اكبر او اقل من مجموع كمية البضائع المنقولة الى مراكز التوزيع وتصبح المشكلة بالشكل الرياضى معبرا عنها كالآتى :

$$\text{ف (س)} = \text{مجـــ}_{\text{ى = ١}}^{\text{م}} \text{مجـــ}_{\text{ج = ١}}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ى ج}} \text{س}_{\text{ى ج}} \qquad (١)$$

أقل ما يمكن مع العلم بانه :ـ

$$\text{مجـــ}_{\text{ج = ١}}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ى ج}} \leqslant \text{أ}_{\text{ى}} \quad (\text{ى = ١، ٢، ٠٠ م}) \qquad (٢)$$

$$\text{مجـــ}_{\text{ى = ١}}^{\text{م}} \text{س}_{\text{ى ج}} \geqslant \text{ع}_{\text{ج}} \quad (\text{ج = ١، ٢، ٠٠ ن}) \qquad (٣)$$

$$\text{مجـــ}_{\text{ى = ١}}^{\text{م}} \text{أ}_{\text{ى}} > \text{مجـــ}_{\text{ج = ١}}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ج}} \qquad (٤)$$

$$\text{س}_{\text{ى ج}} \geqslant \text{صفر} \qquad (٥)$$

مثـال :

بفرض وجود ثلاث موانى أ ، ب ، جـ توزع الواردات على خمسة مراكز توزيـــع (محافظات) داخل الدولة ١، ٢، ٣، ٤، ٥ وموضح فى الجدول الآتى الـــواردات الموجودة بكل ميناء وحاجة كل مركز توزيع (محافظة) بالطن من هذه الـــواردات وتكلفة النقل بالجنيه .

مراكز التوزيع / الموانئ	المحافظات					الواردات الموجودة بكل ميناء (بالطن)
	الاولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة	
أ	ـ ر٦ س١١	ـ ر٥ س١٢	ـ ر٨ س١٣	ـ ر٧ س١٤	ـ ر٦ س١٥	٤٠ ٠٠٠
ب	ـ ر٤ س٢١	ـ ر٧ س٢٢	ـ ر٦ س٢٣	ـ ر٥ س٢٤	ـ ر٨ س٢٥	٧٠ ٠٠٠
جـ	ـ ر٨ س٣١	ـ ر٦ س٣٢	ـ ر٧ س٣٣	ـ ر٩ س٣٤	ـ ر١٠ س٣٥	٤٠ ٠٠٠
حاجة كل محافظة بالطن	٢٠٠٠٠	٣٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	١٥٠ ٠٠٠

و يكون المطلوب نقل الحمولات س ى ج بأقل تكلفة نقل

فاذا رمزنا بالرمز س ى ج للحمولة المنقولة لكل مركز توزيع حيث :

(ى = ١، ٢، ٣) و (ج = ١، ٢، ٣، ٤، ٥)

فطبقا لهذا التوزيع تصبح الصورة الرياضية كالآتى :

ايجاد قيمة س ى ج التى تجعل التكلفة الكلية للنقل

$$ف(س) = ٦ س_{١١} + ٢ س_{١٢} + ٠٠٠ + ١٠ س_{٣٥} \quad (١)$$

أقل ما يمكن مع العلم بأنه :

بالنسبة للواردات الموجودة بكل ميناء

$$\begin{cases} س_{١١} + س_{١٢} + س_{١٣} + س_{١٤} + س_{١٥} = ٤٠ ٠٠٠ \\ س_{٢١} + س_{٢٢} + س_{٢٣} + س_{٢٤} + س_{٢٥} = ٧٠ ٠٠٠ \\ س_{٣١} + س_{٣٢} + س_{٣٣} + س_{٣٤} + س_{٣٥} = ٤٠ ٠٠٠ \end{cases} \quad (٢)$$

وبالنسبة للمطلوب للمحافظات فان

$$\begin{cases} س_{١١} + س_{٢١} + س_{٣١} = ٢٠ ٠٠٠ \\ س_{١٢} + س_{٢٢} + س_{٣٢} = ٣٠ ٠٠٠ \end{cases} \quad (٣)$$

obeikan.com

$$\begin{cases} س_{١٣} + س_{٢٣} + س_{٣٣} = ٤٠٠٠٠ \\ س_{١٤} + س_{٢٤} + س_{٣٤} = ١٠٠٠٠ \\ س_{١٥} + س_{٢٥} + س_{٣٥} = ٥٠٠٠٠ \end{cases} \quad (٣)$$

وحيث $س_{ى ج} \geq$ صفر اى ان: (ى = ١، ٢، ٣) و (ج = ١، ٢، ٣، ٤، ٥) (٤)

ثانيا : سفن نقل الركاب وتشغيلها على الخطوط الملاحية :

عرض المشكلة :

تتلخص المشكلة فى وجود انواع سفن ركاب تعمل على خطوط ملاحية لذلك نفرض ان سفن الركاب هى (ى) حيث ى = ١، ٢، ٠٠٠ م وان الخطوط الملاحية سنرمز اليها بالرمز (ج) حيث ج = ١، ٢، ٠٠٠ ن ويكون المطلوب توزيع سفن الركاب على الخطوط الملاحية المختلفة باقل تكلفة تشغيل كلية .

ونفرض ان المعلوم ما يلى :

عدد السفن من النوع (ى) وسنرمز اليها بالرمز $أ_{ى}$

عدد الركاب الذين يتم نقلهم على الخطوط (ج) وسنرمز اليه بالرمز $ع_{ج}$

متوسط طاقة النقل اليومية على السفن (ى) للخطوط (ج) $ب_{ى ج}$

تكلفة التشغيل اليومية للسفينة (ى) على الخط (ج) وسنرمز لها بالرمز $ص_{ى ج}$.

ويكون المطلوب هو تحديد عدد السفن وسنرمز لها بالرمز $س_{ى ج}$ اللازمة لنقل الركاب على الخطوط الملاحية المختلفة باقل تكلفة تشغيل، ويمكن تصوير المشكلة كما فى الجدول الآتى :

الخطوط الملاحية / انواع السفن	١	٢	..	ج	..	ن	عدد السفن من كل نوع
١				ص١ج س٢ج / ب١ج			أ١
٢				ص٢ج س٢ج / ب٢ج			أ٢
..				..			..
ى				ص ى ج س ى ج / ب ى ج			أ ى
..				..			..
م				ص م ج س م ج / ب م ج			أ م
حجم النقل للركاب (بالراكب)	ع١	ع٢	..	عج	..	عم	

الصياغة الرياضية للمشكلة :

دالة الهدف :

التكلفة الكلية لتشغيل السفن ويمكن الحصول عليها من حواصل ضرب تكلفة التشغيل لكل نوع من انواع السفن على الخطوط المختلفة فى عدد السفن من كل نوع وعلى كل خط ويمكن التعبير عنها رياضيا .

$$\text{مجـ}_{ى=١}^{م} \ \text{مجـ}_{ج=١}^{ن} \ ص_{ى ج} \ س_{ى ج} \qquad (١)$$ أقل ما يمكن مع العلم بأن

مجموع عدد السفن من النوع (ى) لابد ان يتساوى مع العدد الكلى للسفن

ويمكن التعبير عنها رياضيا

$$\text{مجـــ}_{ج=1}^{ن} \text{س}_{ى ج} = \text{أ}_{ى} \quad \text{حيث } (ى = 1، 2، 3، \ldots م) \qquad (٢)$$

كما أن مجموع متوسط طاقة النقل لكل السفن على كل الخطوط مضروبا فى عدد السفن من كل نوع وعلى كل خط تتعادل مع العدد الكلى للركاب على كل الخطوط اى ان :

$$\text{مجـــ}_{ى=1}^{م} \text{ب}_{ى ج} \text{س}_{ى ج} = \text{ع}_{ج} \quad \text{حيث} (ى = 1، 2، 3، \ldots ن) \qquad (٢)$$

وبذلك تأخذ المشكلة الصورة الرياضية الآتية :

ايجاد قيمة $\text{س}_{ى ج}$ (ى = 1، 2، 3، ... م) و (ج = 1، 2، 3، ... ن) التى تجعل الدالة

$$\text{ف}(\text{س}) = \text{مجـــ}_{ى=1}^{م} \text{مجـــ}_{ج=1}^{ن} \text{ص}_{ى ج} \text{س}_{ى ج} \qquad (١)$$

اقل ما يمكن مع العلم بان :

$$\text{مجـــ}_{ج=1}^{ن} \text{س}_{ى ج} = \text{أ}_{ى} \quad (ى = 1، 2، 3، \ldots م) \qquad (٢)$$

$$\text{مجـــ}_{ى=1}^{م} \text{ب}_{ى ج} \text{س}_{ى ج} = \text{ع}_{ج} \quad (ج = 1، 2، 3، \ldots ن) \qquad (٣)$$

$$\text{س}_{ى ج} \geq \text{صفر} \quad \text{حيث } (ى = 1، 2، 3، \ldots م) \text{ و } (ج = 1، 2، 3، \ldots ن) \qquad (٤)$$

مثال عن توزيع سفن الركاب على الخطوط الملاحية المختلفة :

بفرض وجود اربعة انواع من السفن أ ، ب ، جـ تعمل على اربعة خطوط ملاحية 1، 2، 3، 4 وان كل نوع من انواع السفن يقوم بنقل عدد معين من الركاب على كل خط بتكلفة نقل موضحة مع باقى البيانات فى الجدول الآتى :

(الارقام بالالف ما عدا عدد السفن بالوحدة)

الخطوط الملاحية / انواع السفن	طاقة النقل بالالف راكب وتكلفة التشغيل بالالف جنيه								عدد السفن
	الخط الاول		الخط الثانى		الخط الثالث		الخط الرابع		
	التكلفة	عدد المسافرين	التكلفة	عدد المسافرين	التكلفة	عدد المسافرين	التكلفة	عدد المسافرين	
أ	١٨٠ س ١١	١٤	١٦٠ س ١٢	٢٥	٩٠ س ١٣	٣٥	٩٠ س ١٤	٣٤	٢٤
ب	٢٣٠ س ٢١	٢٥	٢٢٠ س ٢٢	٣٣	٢٠٠ س ٢٣	٢١	١٩٠ س ٢٤	٢٦	١٦
جـ	١٢٠ س ٣١	١٨	١٣٠ س ٣٢	٥٢	١٣٠ س ٣٣	١٧	١٠٠ س ٣٤	١٩	١٥
د	١٣٠ س ٤١	١٢	١٠٠ س ٤٢	١٩	١٠٠ س ٤٣	٢٣	٨٠ س ٤٤	١١	٩
حجم النقل بالالف راكب	٣٠		١٧		١٨		١٧		

ويكون المطلوب توزيع السفن س ى ج على الخطوط المختلفة باقل تكلفة تشغيل كلية.فاذا رمزنا بالرمز س ى ج حيث(ى = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ و ج = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)لعدد السفن من كل نوع وعلى كل خط فطبقا للنموذج تصبح الصورة الرياضية كما يلى :

ايجاد قيم س ى ج التى تجعل قيمة التكلفة الكلية للتشغيل :

ف (س) = ١٨٠ س١١ + ١٦٠ س١٢ + ٠٠ + ٨٠ س٤٤ (١)

اقل ما يمكن ، مع العلم بانه بالنسبة للعدد السفن

$$\begin{cases} س_{11} + س_{12} + س_{13} + س_{14} = 24 \\ س_{21} + س_{22} + س_{23} + س_{24} = 16 \\ س_{31} + س_{32} + س_{33} + س_{34} = 15 \\ س_{41} + س_{42} + س_{43} + س_{44} = 9 \end{cases} \quad (٢)$$

وبالنسبة لنقل الركاب على الخطوط المختلفة فان

$$\begin{cases} 14 س_{11} + 25 س_{21} + 18 س_{31} + 12 س_{41} = 30 \\ 25 س_{12} + 33 س_{22} + 52 س_{32} + 19 س_{42} = 17 \\ 35 س_{13} + 21 س_{23} + 17 س_{33} + 23 س_{43} = 18 \\ 34 س_{14} + 26 س_{24} + 19 س_{34} + 11 س_{44} = 17 \end{cases} \quad (٣)$$

س ى ج ≥ صفر اى ان ج = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كما ان ى = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ (٤)

المشكلة الثانية مشكلة التخصيص The Assignment Problem

تعتبر مشكلة التخصيص احدى الحالات الخاصة لمشكلة النقل وتسمى احيانا مشكلة الاختيار.وتوضح فى المثال الآتى كيفية تخصيص العمالة على الوظائف المختلفة.لذلك نفرض انه مطلوب توزيع عدد (م) ميكانيكى او عامل على عدد (ن) وظيفة بحيث يجب ان يكون لكل ميكانيكى عمل واحد فقط كما انه بالنسبة لكل عمل تخصص عاملا واحدا فقط وبحيث تكون مجموع الانتاجية لكل العمال اكبر ما يمكن.

وتكون انتاجية كل عامل فى كل عمل مقاومة فاذا فرضنا ان $ص_{ى ج}$ ترمز الى انتاجية العامل (ى) فى العمل (ج) فان المشكلة تصبح اختيار (ن) عنصر من المصفوفة $\| ص_{ى ج} \|$ $\sum_{ى=1}^{ن} \cdot ج = 1$ لكل سطر من السطور ولكل عمود من الاعمدة بحيث يكون مجموع الانتاجية اكبر ما يمكن ٠

لذلك ندخل المجهول $س_{ى ج}$ بحيث يكون :

$$س_{ى ج} = \begin{cases} 1 & \text{اذا خصص العامل (ى) للعمل (ج)} \\ \text{صفر} & \text{اذا لم يخصص العامل (ى) للعمل (ج)} \end{cases}$$

وتصبح المشكلة ايجاد اقصى قيمة للدالة

$$ف(س) = ز = \sum_{ى=1}^{ن} \sum_{ج=1}^{م} ص_{ى ج} \, س_{ى ج} \qquad (1)$$

بشرط تحقيق القيود الآتية :

$$\sum_{ى=1}^{ن} س_{ى ج} = 1 \quad (ج = 1، 2، ... ن) \qquad (2)$$

$$\sum_{ى=1}^{ن} س_{ى ج} = 1 \quad (ى = 1، 2، ... ن) \qquad (3)$$

$$س_{ى ج} = \text{صفر، واحد} \quad (ى، ج = 1، 2، ... ن) \qquad (4)$$

مثال :

بفرض أنه فى احدى الورش الميكانيكية بالترسانة توجد خمس وظائف وخمسة ميكانيكيين يكون المطلوب تخصيص كل ميكانيكى لكل وظيفة وبحيث لا يعمل اكثر من ميكانيكى فى وظيفة واحدة كما ان الوظيفة الواحدة لا يشغلها اكثر من ميكانيكى

ويوضح الجدول الآتى البيانات الخاصة بالميكانيكيين والوظائف وانتاجية كل ميكانيكى لو شغل اى وظيفة من الوظائف وبحيث يكون المطلوب تخصيص كل ميكانيكى لكل وظيفة لكى نحصل على اكبر مجموع لانتاجية هؤلاء فى الوظائف المختلفة ٠

الوظائف / العمال	الوظائف ١	٢	٣	٤	٥	المتاح
١	(٢)	(٩)	(٢)	(٧)	(١)	١
٢	(٦)	(٨)	(٧)	(٦)	(١)	١
٣	(٤)	(٦)	(٥)	(٣)	(١)	١
٤	(٤)	(٢)	(٢)	(٣)	(١)	١
٥	(٥)	(٣)	(٩)	(٥)	(١)	١
المطلوب	١	١	١	١	١	٥

وتصبح المشكلة هى تخصيص (اختيار) الميكانيكيين لشغل الوظائف المختلفة بحيث يكون المجموع الكلى لانتاجيتهم اكبر ما يمكن.وفى هذه الحالة فاننا اذا خصصنا ميكانيكى لشغل وظيفة فمعنى ذلك اننا نضع الرقم (١) اما اذا لم تخصص ميكانيكى لوظيفة فاننا نضع الرقم صفر وذلك طبقا للشرط العام

$$س_{ى ج} = (\text{صفر}^{1}) \cdot$$

لذلك نفرض ان المتغيرات المجهولة فى هذه المشكلة بصفة عامة هى بالنسبة لكل من العمال وبالنسبة لكل من الوظائف فان المتغيرات تصبح كما فى الجدول الآتى :

الوظائف / العمال	١	٢	٣	٤	٥	المتاح
١	٢ س١١	٩ س٢١	٢ س٣١	٧ س٤١	١ س٥١	١
٢	٦ س١٢	٨ س٢٢	٧ س٣٢	٦ س٤٢	١ س٥٢	١
٣	٤ س١٣	٦ س٢٣	٥ س٣٣	٣ س٤٣	١ س٥٣	١
٤	٥ س١٤	٢ س٢٤	٧ س٣٤	٣ س٤٤	١ س٥٤	١
٥	٤ س١٥	٣ س٢٥	٩ س٣٥	٥ س٤٥	١ س٥٥	١
المطلوب	١	١	١	١	١	٥

وباشتراط ان كل عامل لا يشغل اكثر من وظيفة واحدة يكون مجموع كل سطر = ١ كما انه بالنسبة لكل وظيفة لن يشغل العامل اكثر من وظيفة ويكون مجموع كل عمود = ١ وبذلك يكون عدد السطور يساوى عدد الاعمدة .

ويكون المطلوب ايجاد دالة الهدف التى تجعل الانتاجية الكلية للعامل

ف (س) = ٢ س١١ + ٩ س٢١ + ٢ س٣١ + ٧ س٤١ + ١ س٥١ + ٦ س١٢
+ ٨ س٢٢ + ٧ س٣٢ + ٦ س٤٢ + ١ س٥٢ + ٤ س١١ + ٦ س٢٣
+ ٥ س٣٣ + ٣ س٤٣ + س٥٣ + ٥ س١٤ + ٢ س٢٤ + ٧ س٣٤
+ ٣ س٤٤ + س٥٤ + ٤ س١٥ + ٣ س٢٥ + ٩ س٣٥ + ٥ س٤٥
+ س٥٥ (١)

اكبر ما يمكن مع العلم بان :

بالنسبة للعمالة (السطور) فان :

$$\left.\begin{array}{l} س_{11} + س_{21} + س_{31} + س_{41} + س_{51} = 1 \\ س_{12} + س_{22} + س_{32} + س_{42} + س_{52} = 1 \\ س_{13} + س_{23} + س_{33} + س_{43} + س_{53} = 1 \\ س_{14} + س_{24} + س_{34} + س_{44} + س_{54} = 1 \\ س_{15} + س_{25} + س_{35} + س_{45} + س_{55} = 1 \end{array}\right\} \quad (٢)$$

وبالنسبة للوظائف (الاعمدة) فان :

$$\left.\begin{array}{l} س_{11} + س_{12} + س_{13} + س_{14} + س_{15} = 1 \\ س_{21} + س_{22} + س_{23} + س_{24} + س_{25} = 1 \\ س_{31} + س_{32} + س_{33} + س_{34} + س_{35} = 1 \\ س_{41} + س_{42} + س_{43} + س_{44} + س_{45} = 1 \\ س_{51} + س_{52} + س_{53} + س_{54} + س_{55} = 1 \end{array}\right\} \quad (٣)$$

وبشرط ان تكون $س_{ى ج} \geq$ صفر حيث $س_{ى ج}$ (واحد صفر) وان ($ى$،$ج$ = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥) (٤)

المشكلة الثالثة : مشكلة الانتاج : يلاحظ ان المشاكل الخاصة بالانتاج عديدة سنختار من بينها الآتى :

أولا : التشكيلة المثلى لحمولة السفينة :

عند تكوين خطة شحن السفينة بمعنى تجهيزها بالشحنات المختلفة تظهر المشكلة الخاصة بالوصول الى النوعيات المختلفة لهذه الشحنات والتى ستتكون منها خطة الشحن .

ولحل هذه المشكلة يجب حساب معامل التحميل Loading Factor ومعامل التستيف Stowage Factor .

ومعامل تحميل السفينة يساوى العلاقة بين كمية الشحنة المنقولة الى الحمولة الصافية للسفينة . ومعنى ذلك انه اذا كانت كمية الشحنة المنقولة على السفينة ٦٠٠٠ طن والحمولة الصافية للسفينة ٨٠٠٠ طن فان معامل التحميل يكون $\frac{٦٠٠٠}{٨٠٠٠} \times ١٠٠$ وقد يحسب معامل التحميل على أساس كمية الشحنة المنقولة على السفينة مضروبة فى المسافة المقطوعة مقسوما على الحمولة الصافية للسفينة مضروبا فى المسافة بالابحار بين الموانى المختلفة .

وبفرض ان سفينة أبحرت من ميناء (أ) الى ميناء (ب) وعليها شحنة ٣٠٠٠ طن بمسافة ٥٠٠ ميل وفى ميناء (ب) افرغت السفينة ٢٠٠٠ طن وشحنت ٢٠٠٠ طن الى الميناء (جـ) بمسافة ١٠٠٠ ميل وفى الميناء (جـ) افرغت ٢٠٠٠ طن وشحنت ٣٠٠٠ طن واتجهت الى الميناء (د) بمسافة ١٥٠٠ ميل وفى الميناء (د) افرغت ٣٠٠٠ طن وشحنت ٢٠٠٠ طن واتجهت الى ميناء (جـ) وفى الميناء (جـ) افرغت ٣٠٠٠ طن وشحنت ١٠٠٠ طن واتجهت الى الميناء (ب) وفى الميناء (ب) شحنت ١٠٠٠ طن واتجهت الى الميناء (أ) . ومعنى ذلك أن الشحنة المنقولة بين كل ميناءين مضروبا فى المسافة بين كل ميناء عبارة عن : ٣٠٠٠ × ٥٠٠ + ٣٠٠٠ × ١٠٠٠ + ٤٠٠٠ × ١٥٠٠ + ٣٠٠٠ × ١٥٠٠ + ١٠٠٠ × ١٠٠٠ + ٢٠٠٠ × ٥٠٠ = ١٧ مليون طن/ميل .

كما ان ناتج ضرب الحمولة الصافية للسفينة × المسافة الكلية للرحلة × ٢ = ٤٠٠٠ × ٦٠٠٠ × ٢ = ٤٨ مليون طن/ميل .

ويكون معامل التحميل $\frac{١٧}{٤٨}$ = ٣٥٤ر٠ وكلما ازداد هذا المعامل يكون ذلك مؤشرا على زيادة فى محمول السفينة وانها تعمل على الخط بكفاءة . كما انه يمكن حساب معامل التحميل من المثال الآتى :

أبحرت سفينة من الميناء (أ) فارغة وشحنت ٣٥٠٠ طن من ميناء (ب) واتجهت الى ميناء (جـ) حيث افرغت ١٥٠٠ طن وشحنت ١٠٠٠ طن واتجهت الى ميناء (د) حيث افرغت ٣٠٠٠ طن مع العلم بان الحمولة الصافية للسفينة ٤٠٠٠ طن .

ويكون معامل التحميل كالآتى :

(ب) = $\frac{٣٥٠٠}{٤٠٠٠}$ = ٠ر٨٧

(جـ) = $\frac{٣٠٠٠}{٤٠٠٠}$ = ٠ر٧٥

كما ان متوسط معامل التحميل $\frac{٣٥٠٠ + ٣٠٠٠}{٣ \times ٤٠٠٠}$ = ٠ر٨٤٢

اما بالنسبة لمعامل التستيف فانه يتحدد كعلاقة بين حجم الشحنات المنقولة بالمتر المكعب الى حجم فراغات السفينة بالمتر المكعب اى ان :

معامل التستيف = $\frac{\text{حجم الشحنات المنقولة بالمتر المكعب}}{\text{حجم فراغات السفينة بالمتر المكعب}}$

وبالنسبة لمعامل التستيف خلال رحلة السفينة فانه يكون عبارة عن :

$$\frac{\text{حجم الشحنات المنقولة فى ميناء (أ) × مسافة النقل من (أ) الى (ب) + ... + حجم الشحنات المنقولة فى ميناء (جـ) × مسافة النقل من (ب ــ جـ)}}{\text{سعة السفينة بالمتر المكعب فى الميناء (أ) × مسافة النقل من (أ) الى (ب) + ... + سعة السفينة بالمتر المكعب × مسافة النقل من (ب ــ جـ)}}$$

ويفرض ان سعة السفينة ٢١٠٠٠ م^٣ وحجم الشحنة المنقولة من (أ ــ ب) ٨٠٠٠ م^٣ والمسافة ٥٠٠ ميل وحجم الشحنة المنقولة من (ب ــ جـ) ٩٠٠٠ م^٣ ، والمسافة ٦٠٠ ميل فيكون معامل التستيف $\frac{٨٠٠٠ \times ٥٠٠ + ٩٠٠٠ \times ٦٠٠}{٢١٠٠٠ \times ١٣٠٠}$ = ٠ر٣٥٩

ونقدم فيما يلى النموذج الرياضى لمشكلة التشكيلة المثلى لحمولة السفينة :

نفرض ان :

د ــ ترمز الى حمولة السفينة بالطن (الحمولة الصافية) .

و ــ حجم الفراغات بالسفينة (سعة السفينة) بالمتر المكعب حيث (ج = ١ر٢٤٠٠٠ ن) .

ى$_ج$ ــ معامل التستيف للشحنة ج بالمتر المكعب حيث (ج = ١ر٢٤٠٠٠ ن)

ص$_ج$ ــ النولون الخاص بنقل الشحنة (ج) بالجنيه حيث (ج = ١ر٢٤٠٠٠ ن)

ويكون المطلوب تجهيز السفينة بالشحنات وسنرمز لها بالرمز س$_ج$ لتحقيق اكبر ايراد ممكن من الشحن .

الصياغة الرياضية للمشكلة :

دالة الهدف تحقيق اكبر ايراد ممكن من تجهيز السفينة بانواع مختلفة من الشحنات ويمكن الحصول عليها من حواصل ضرب الكميات المشحونة من الانواع المختلفة فى الايراد المناظر لها ، ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا .

$$\text{ف (س)} = \text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \text{ص}_ج \text{ س}_ج \quad (1)$$

قيود النموذج :

بالنسبة لسعة السفينة فان معامل التستيف م^3 / طن مضروبا فى الكميات المشحونة لا يجب ان يتجاوز سعة السفينة ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \text{ى}_ج \text{ س}_ج \leq \text{و} \quad (2)$$

وبالنسبة لحمولة السفينة فان مجموع الشحنات المختلفة لايجب ان يتعدى الحمولة الصافية للسفينة ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \text{س}_ج \leq \text{د} \quad (3)$$

كما ان قيم س$_ج$ لايجب ان تكون سالبة بمعنى ان : س$_ج$ $\geq$ صفر (٤)

وبذلك تاخذ المشكلة الصورة الرياضية الآتية :

ايجاد قيم س$_ج$ لجميع قيم (ج = ١ ، ٢ ، ... ن) والتى تجعل الدالة

$$\text{ف (س)} = \text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \text{ص}_ج \text{ س}_ج \quad (1)$$

اكبر ما يمكن مع العلم بان :

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \text{ى}_ج \text{ س}_ج \leq \text{و} \quad (2)$$

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \text{س}_ج \leq \text{د} \quad (3)$$

$$\text{س}_ج \geq \text{صفر} \quad (4)$$

مثال :

بفرض الحمولة الصافية لسفينة ١٠ ٠٠٠ طن وسعتها ٢١ ٠٠٠ م^3 وان نولون الشحن ومعامل التستيف موضحان فى الجدول الآتى :

انواع الشحنـــــــات س ج = ١ ، ٢ ، ٦ ، ٧٠٠٠٠٠٠	الشحنة ١ س١	الشحنة ٢ س٢	الشحنة ٣ س٣	الشحنة ٤ س٤	الشحنة ٥ س٥	الشحنة ٦ س٦	الشحنة ٧ س٧
نولون الشحن بالجنيـــه ص ج = ١ ، ٢ ، ٦ ، ٧٠٠٠٠٠٠	١٢ر١٩	١٠ر٣٣	٣٢ر٤٤	٢٥ر٨٨	٢٨ر١٥	٢١ر٥٩	١٦ر٤٤
معامل التســـــتيف ى ج م٣ / طـــــن	١ر٢	٠ر٧	٢ر٦	٢ر١	٢ر٢	١ر٦	١ر٧

والمطلوب تكوين خطة التشكيلة المثلى لشحنة السفينة •

وباستخدام الصياغة الرياضية السابقة تصبح المشكلة فى الصورة الرقمية الاتية :

تصبح دالة الهدف عبارة عن :

ف (س) = ١٨ر١٢ س١ + ١٠ر٣٣ س٢ + ٤٤ر٣٢ س٣ + ٨٨ر٢٥ س٤ +
١٥ر٢٨ س٥ + ٥٩ر٢١ س٦ + ٤٤ر١٦ س٧ (١)

بشرط تحقيق القيود الآتية :

(١) ٢ر١ س١ + ٧ر٠ س٢ + ٦ر٢ س٣ + ١ر٢ س٤ + ٢ر٢ س٥ + ٦ر١ س٦
٧ر٠ س٧ ≤ ٢١٠٠٠ (٢)

(٢) س١ + س٢ + س٣ + س٤ + س٥ + س٦ + س٧ ≤ ١٠٠٠٠

وبشرط ان تكون قيم س ج ≥ صفر اى ان : (٣)

س١ ، س٢ ، ٠٠٠ ، س٧ ≥ صفر (٤)

ثانيا : التقطيع الامثل للالواح بالترسانات :

عرض المشكلة :

تظهر مشكلة التقطيع الامثل لالواح بناء واصلاح السفن فى الحالات التى يتطلب فيها الامر تقطيع مقاسات معينة من الواح صلب موجودة بالترسانة باعداد معينة • وتكون المشكلة هى اعداد هذه الالواح للتقطيع بمقاسات معينة بحيث يكون الهالك من الالواح اقل ما يمكن •

ولكى نقوم ببناء النموذج الرياضى لتقطيع الالواح يجب ادخال الرموز الآتية :

س ج — ترمز الى المجهول والذى يشير الى عدد الواح التقطيع بالاسلوب (ج)

أ ى ج — عدد القطع بالحجم (ى) التى يحصل عليها بتقطيع الالواح بالاسلوب (ج) حيث (ج = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ن) •

ب ى — عدد الالواح المطلوبة من الحجم (ى) حيث (ى = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ م)

ص ج — مقدار الهالك نتيجة التقطيع بالاسلوب (ج) •

ويكون المطلوب تحديد افضل طريقة لتقطيع الالواح (س ج) التى تجعل الهالك اقل ما يمكن .

الصياغة الرياضية للمشكلة :

دالة الهدف الوصول الى اقل هالك من تقطيع الالواح بالاساليب المختلفة ويمكن الحصول عليها من حاصل ضرب مقدار الهالك فى اسلوب تقطيعه ، ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا كالآتى :

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \; ص_ج \; س_ج \qquad (١)$$

القيود :

بالنسبة لعدد القطع المطلوبة من الحجم (ى) والمقطعة بالاسلوب (ج) يجب ان تساوى عدد القطع المطلوبة ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا كالآتى :

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \; أ_{ىج} \; س_ج = ب_ج \qquad (ى = ١، ٢، ٠٠٠ م) \quad (٢)$$

وأن جميع قيم $س_ج \geq$ صفر لاسالبة (٣)

وبذلك تاخذ المشكلة الصورة الرياضية الآتية :

ايجاد قيم $س_ج$ (ج = ١، ٢، ٠٠٠ ن) التى تجعل الدالة

$$ف(س) = \text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \; ص_ج \; س_ج \qquad (١)$$

اقل ما يمكن مع العلم بان :

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \; أ_{ىج} \; س_ج = ب_ج \qquad (٢)$$

$س_ج \geq$ صفر لجميع قيم (ج = ١، ٢، ٠٠٠ ن) (٣)

مثال :

يوجد بترسانة الواح صلب مقاس ١٠٠ × ٦٠ سم ويتطلب الامر تقطيع الواح منها بالاشكال الثلاثة الآتية :

الشكل الاول (ن ١) ٣٠ × ٥٠ سم ومطلوب منه ٢٤٠ قطعة .

الشكل الثانى (ن ٢) ٣٠ × ٤٠ سم ومطلوب منه ١٠٠ قطعة ٠

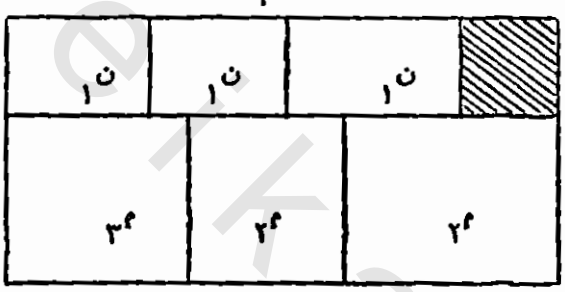
الشكل الثالث (ن ٣) ٤٠ × ٤٠ سم ومطلوب منه ٨٠ قطعة ٠

ونفرض ان هناك اربعة اساليب لتقطيع هذه الالواح للحصول على المقاسات المطلوبة هى ١ق ، ٢ق ، ٣ق ، ٤ق توضحها فى الاشكال الاربعة الاتية وحيث يمثل الجزء المظلل الهالك من استخدام كل اسلوب ٠

الاسلوب الاول ١ق :

١٠٠ سم

اسلوب التقطيع ١ق



٦٠ سم

ويتضح من استخدام اسلوب التقطيع (١ق) انه اذا كان طول اللوح ١٠٠ سم وعرضه ٦٠ سم فاننا يمكننا الحصول على القطع الاتية :

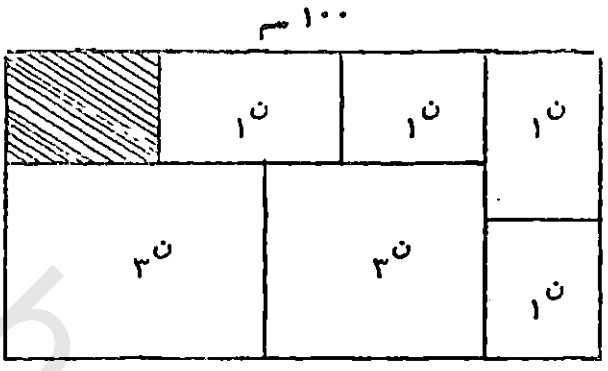
	الرمز	
٣ ألواح ٢٠ × ٣٠ سم	ن١	= ١٨٠٠ سم٢
٢ ألواح ٣٠ × ٤٠ سم	ن٢	= ٢٤٠٠ سم٢
١ لوح ٤٠ × ٤٠ سم	ن٣	= ١٦٠٠ سم٣
		٥٨٠٠ سم٣

وحيث ان مساحة اللوح تساوى ٦٠ × ١٠٠ = ٦٠٠٠ سم٢

فان الهالك يساوى ٦٠٠٠ — ٥٨٠٠ = ٢٠٠ سم٢

وبالنسبة لاسلوب التقطيع ٢ق يوضحه الرسم الآتى :

اسلوب التقطيع ٢٤

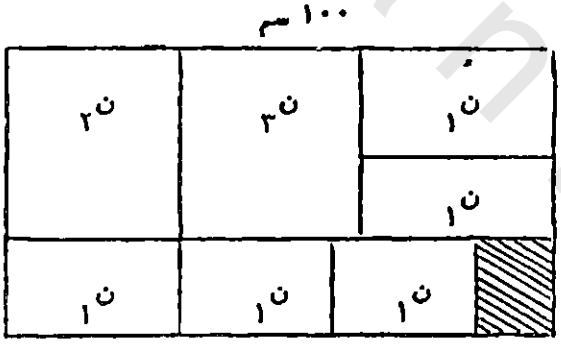


ونحصل على الالواح الاتية نتيجة استخدام هذا الاسلوب (٢٤) من التقطيع

		الرمز		
٤ ألواح	٢٠ × ٣٠	ن١	=	٢٤٠٠ سم٢
٢ لوح	٤٠ × ٤٠	ن٢	=	٣٢٠٠ سم٢
				٥٦٠٠ سم٢

ويكون الهالك من استخدام هذا الاسلوب فى التقطيع ٦٠٠٠ — ٥٦٠٠ = ٤٠٠ سم٢ . كذلك فانه بالنسبة لاسلوب التقطيع (٣٤) الذى يوضحه الرسم

اسلوب التقطيع ٣٤

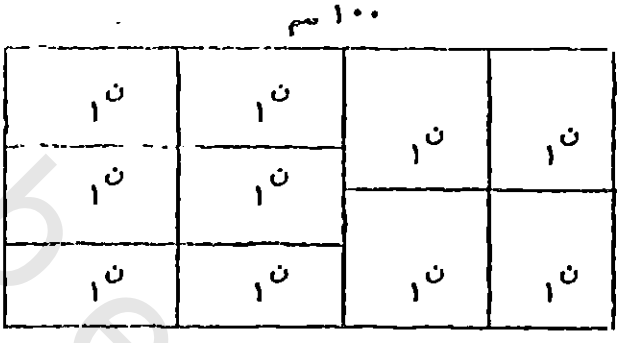


فاننا نحصل من هذا الرسم على النتائج الاتية:

		الرمز		
٥ ألواح	٢٠ × ٣٠	ن١	=	٣٠٠٠ سم٢
١ لوح	٣٠ × ٤٠	ن٢	=	١٢٠٠ سم٢
١ لوح	٤٠ × ٤٠	ن٣	=	١٦٠٠ سم٢
				٥٨٠٠ سم٢

ويصبح الهالك ٦٠٠٠ — ٥٨٠٠ = ٢٠٠ سم٢

اما بالنسبة لاستخدام اسلوب التقطيع (٤ف) كما يوضحه الرسم الاتى :



اسلوب التقطيع ٤ف

نحصل على النتيجة الاتية :

الرمز

١٠ ألواح ٢٠ × ٣٠ ن١ = ٦٠٠٠ سم٢

ولا يكون هناك هالك نتيجة استخدام هذا الاسلوب من التقطيع .

وبذلك يمكن توضيح الاساليب المختلفة فى الجدول الاتى :

احجام التقطيع	اسلوب التقطيع				عدد القطع المطلوبة من كل حجم
	١ف	٢ف	٣ف	٤ف	
ن١ (٢٠×٣٠)	٣	٤	٥	١٠	٢٤٠
ن٢ (٣٠×٤٠)	٢	صفر	١	صفر	١٠٠
ن٣ (٤٠×٤٠)	١	٢	١	صفر	٨٠
الهالك سم٢	٢٠٠	٤٠٠	٢٠٠	صفر	

ويكون المطلوب تحديد عدد القطع الواجب تقطيعها بكل اسلوب بحيث يكون الهالك من الالواح اقل ما يمكن .

فاذا رمزنا لعدد القطع بالرمز س ج حيث ج = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ القطعة بالاسلوب ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ فيمكن ترجمة الجدول السابق كالاتى :

٣ س١ + ٤ س٢ + ٥ س٣ + ١٠ س٤ = ٢٤٠

٢ س١ + س٣ = ١٠٠

س١ + ٢ س٢ + س٣ = ٨٠

وتصبح دالة الهدف ف (س) = ٢٠٠ س١ + ٤٠٠ س٢ + ٢٠٠ س٣ أقل ما يمكن

وبشرط ان تكون قيم س ج ≥ صفر حيث ج = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

المشكلة الرابعة : مشكلة التوزيع :

الغرض من معالجة مشاكل التوزيع ترشيد استخدام الموارد باقصى كفاءة ممكنة واستغلالها امثل استغلال. والموارد فى النقل البحرى كثيرة تتمثل فى سفن النقل البحرى وتسهيلات المناولة Handling Equipment كمعدات الشحن والتفريغ ووسائل النقل كما تتمثل الموارد فى المخازن والساحات والصوامع والثلاجات وتتمثل فى الترسانة فى الالات والمعدات والورش والتزقات .

وتعتبر مشكلة التوزيع احدى الحالات العامة لمشكلة النقل فى ارتباطها بالقيود كما تعتبر مشكلة النقل حالة خاصة لمشكلة التوزيع . ونوضح فيما يلى بعض مشاكل التوزيع فى مجال النقل البحرى .

أولا : التوزيع الامثل لسفن البضائع على الخطوط الملاحية :

الغرض من حل هذه المشكلة هو بيان كيفية توزيع سفن البضائع من النوعيات المختلفة على الخطوط الملاحية المختلفة بهدف تحقيق التشغيل الامثل لهذه السفن .

لذلك نفرض ان اسطول نقل البضائع لاحدى الشركات الملاحية يتكون من (ن) نوعيات مختلفة من السفن سنرمز لها بالرمز (ى) حيث (ى = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، م) تعمل جميعها على خطوط ملاحية سنرمز لها بالرمز (ج) حيث (ج = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، ن) .

ونفرض ان المعلوم الآتى :

كميات الحمولات المتاحة على الخط الملاحى (ج) وسنرمز لها بالرمز ($أ_{ج}$)، ويمكن تحديد كمية البضاعة المتاحة على الخط (ج) بتحديد صادرات الدولة الى الموانى للخط (ج) وواردات الدولة من الموانى لنفس الخط (يفرض ان هذه الصادرات والواردات تخص الدولة التى تملك السفن) .

— الانتاجية السنوية للسفينة (ى) طى الخط (ج) وسنرمز لها بالرمز ف$_{ى ج}$ وهى عبارة عن محمول السفينة الصافى مضروبا فى معامل التحميل فى ٢ مضروبا فى عدد الرحلات فى السنة .

— تكلفة التشغيل السنوية للسفينة (ى) على الخط (ج) وسنرمز لها بالرمز ص$_{ى ج}$ وتكلفة التشغيل السنوية للسفينة تتجمع من التكلفة الثابتة اثناء الابحار والمكوث فى الموانى + التكلفة المتغيرة للوقود اثناء الابحار والمكوث فى الموانى (سعر طن الوقود × الكمية المستهلكة) .

— الربح السنوى للسفينة (ى) طى الخط (ج) وسنرمز له بالرمز ب$_{ى ج}$ والربح السنوى عبارة عن ايرادات التشغيل — تكلفة التشغيل السنوية .

— عدد السفن من النوع (ى) اما سفن متجانسة او سفينة سفينة .

ويكون المطلوب هو توزيع عدد السفن الكلية وسنرمز له بالرمز س$_{ى ج}$ على الخطوط المختلفة لكى نحقق :

— اما اقل تكلفة تشغيل كلية للاسطول ، واما اكبر ربح كلى ممكن . ويمكن تصوير المشكلة كما فى الجدول الاتى :

الخطوط / انواع السفن	الخطوط الملاحية							عدد السفن
	١	٢	..	ج		..	ن	
١				$\frac{ص_{ج}}{ب_{ج}}$	$\frac{ف_{ج}}{س_{ج}}$			ك ١
٢				$\frac{ص_{ج}}{ب_{ج}}$	$\frac{ف_{ج}}{س_{ج}}$			ك ٢
..				..	..			..
ى				$\frac{ص_{ج}}{ب_{ج}}$	$\frac{ف_{ج}}{س_{ج}}$			ك ج
..				..	..			..
م				$\frac{ص_{ج}}{ب_{ج}}$	$\frac{ف_{ج}}{س_{ج}}$			ك م
الحمولة المتاحة على الخطوط المختلفة بالطن	أ ١	أ ٢	..	أ ج		..	أ ن	

الصياغة الرياضية للمشكلة :

دالة الهدف تحقيق اقل تكلفة تشغيل كلية : التكلفة الكلية لتشغيل السفن يمكن الحصول عليها من مجموع حواصل ضرب عدد السفن من كل نوع على كل خط فى تكلفة التشغيل المناظرة ويعبر عنها رياضيا

$$\text{مجـ}_{ى=1}^{م} \quad \text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \quad ص_{ى ج} \, س_{ى ج} \qquad (١)$$

تحقيق اكبر ربح كلى ممكن الربح السنوى لتشغيل السفن ويمكن الحصول عليه من مجموع حواصل ضرب عدد السفن من كل نوع على كل خط فى الربح السنوى المناظر ويعبر عنه رياضيا

$$\text{مجـ}_{ى=1}^{م} \quad \text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \; ب_{ى ج} \; س_{ى ج} \qquad (١ \text{ مكرر})$$

القيود :

بالنسبة للسفن الحالية فان مجموع السفن من النوع (ى) والتى تعمل على جميع الخطوط يساوى ($ك_ى$) اى ان

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \; س_{ى ج} = ك_ى \qquad (ى = ١، ٢، ٠٠٠ م) \quad (٢)$$

وبالنسبة لاى خط من الخطوط فان كمية البضاعة المنقولة بواسطة الانواع المختلفة من السفن لاتزيد عن الكمية المتاحة من البضائع على هذا الخط اى أن

$$\text{مجـ}_{ى=1}^{م} \; ف_{ى ج} \; س_{ى ج} \leq أ_ج \qquad (٣)$$

حيث (ج = ١، ٢، ٠٠٠ ن)

وبالنسبة للحمولة المنقولة بواسطة السفن (ى) لاتزيد عن الكمية المطلوبة نقلها لكل نوع من انواع السفن اى ان

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \; س_{ى ج} \geq ك_ى \qquad (٤)$$

حيث (ى = ١، ٢، ٠٠٠ م) وحيث $س_{ى ج} \geq$ صفر (٥)

ثانيا : التوزيع الامثل لسفن البضائع على الخطوط الملاحية على أساس عدد الرحلات:

عرض المشكلة :

يمكن توزيع السفن على الخطوط الملاحية المختلفة على اساس تحديد عدد الرحلات الواجب على السفن المختلفة انجازها على الخطوط المختلفة. لذلك نفترض ان الاسطول التجارى يتكون من سفن سنرمز لها بالرمز (ى) حيث (ى = ١، ٢، ٠٠٠ م) تعمل جميعها على الخطوط الملاحية وسنرمز لها بالرمز (ج) حيث (ج = ١، ٢، ٠٠٠ ن) ونفرض ان المعلوم ما يلى :

كمية البضاعة المتاحة على الخط (ج) وسنرمز لها بالرمز ($أ_ج$).

فترة التشغيل لنوع السفن (ى) وسنرمز لها بالرمز ($ك_ى$).

تكلفة التشغيل للرحلة الواحدة للسفينة (ى) على الخط (ج) $ص_{ى ج}$.

ربح الرحلة الواحدة للسفينة (ى) على الخط (ج) $ب_{ى ج}$.

انتاجية السفينة (ى) على الخط (ج) فى الرحلة الواحدة $ف_{ى ج}$.

عدد ايام الرحلة للسفينة (ى) على الخط (ج) $ل_{ج}$.

ويكون المطلوب تحديد عدد الرحلات لكل نوع من انواع السفن على كل خط وسنرمز لها بالرمز $س_{ى ج}$ لكى تحقق :

— اما اقل تكلفة تشغيل كلية للاسطول .

— واما اكبر ربح كلى ممكن .

ويمكن تصوير المشكلة كما فى الجدول الاتى :

obeikan.com

الخطوط / انواع السفن	١	٢	..	ج	..	ن	فترة التشغيل لكل نوع من انواع السفن باليوم
١				ص ج ف ج / س ج ل ج / ب ج			ك ١
٢				ص ج ف ج / س ج ل ج / ب ج			ك ٢
..				..			..
ى				ص ج ف ج / س ج ل ج / ب ج			ك ى
..				..			..
م				ص ج ف ج / س ج ل ج / ب ج			ك م
الحمولة المتاحة لكل خط بالطن	أ ١	أ ٢	..	أ ج	..	أ ن	

الصياغة الرياضية للمشكلة :

دالة الهدف تحقيق اقل تكلفة تشغيل كلية : التكلفة الكلية للتشغيل ويمكن الحصول عليها من حواصل ضرب تكلفة التشغيل للمرحلة الواحدة لكل نوع من انواع السفن على كل خط فى عدد الرحلات المنجزة لكل نوع من انواع السفن على كل خط ويمكن التعبير عنها رياضيا

$$\text{مجـــ}_{ى=1}^{م} \quad \text{مجـــ}_{ج=1}^{ن} \quad ص_{ى ج} \; س_{ى ج} \qquad (١)$$

تحقيق اكبر ربح كلى ممكن :

الربح الكلى ويمكن الحصول عليه من حواصل ضرب ربح المرحلة الواحدة لكل نوع من انواع السفن على كل خط فى عدد الرحلات المنجزة لكل نوع من انواع السفن على كل خط ويمكن التعبير عنها رياضيا

$$\text{مجـــ}_{ى=1}^{م} \ \text{مجـــ}_{ج=1}^{ن} \ ب_{ى ج} \ س_{ى ج} \qquad (1 \text{ مكرر})$$

القيـــود :

بالنسبة لفترة التشغيل فان طول فترة التشغيل لكل نوع من انواع السفن مضروبا فى عدد الرحلات على كل الخطوط يجب ان يكون اقل من او يتساوى مع مجموع فترة التشغيل لكل نوع من انواع السفن وعلى كل خط اى ان :

$$\text{مجـــ}_{ج=1}^{ن} \ ل_{ج} \ س_{ى ج} \leq ك_{ى} \qquad (ى = 1، 2، \ldots م) \qquad (2)$$

وبالنسبة لاى خط فان كمية البضائع المنقولة بواسطة انواع السفن (ى) فى عدد الرحلات المنجزة لاتزيد عن الكمية المتاحة من البضائع على كل خط اى أن

$$\text{مجـــ}_{ى=1}^{م} \ ف_{ى ج} \ س_{ى ج} \leq أ_{ج} \qquad (ج = 1، 2، \ldots ن) \qquad (3)$$

كما يشترط ان تكون جميع قيم $س_{ى ج}$ لا سالبة أى $س_{ى ج} \geq$ صفر (4)

وبذلك تأخذ المشكلة الصورة الرياضية الاتية :

ايجاد قيم $س_{ى ج}$ $(ج = 1، 2، \ldots ن)$ ، $(ى = 1، 2، \ldots م)$ التى تجعل الدالة

$$\text{مجـــ}_{ى=1}^{م} \ \text{مجـــ}_{ج=1}^{ن} \ ص_{ى ج} \ س_{ى ج} \qquad \text{اقل ما يمكن} \qquad (1)$$

أو

$$\text{مجـــ}_{ى=1}^{م} \ \text{مجـــ}_{ج=1}^{ن} \ ب_{ى ج} \ س_{ى ج} \qquad \text{اكبر ما يمكن} \qquad (1 \text{ مكرر})$$

مع العلم بأن :

$$\text{مجـــ}_{ج=1}^{ن} \ ل_{ى ج} \ س_{ى ج} \leq ك_{ى} \qquad \text{حيث } (ى = 1، 2، \ldots م) \qquad (2)$$

$$\text{مجـــ}_{ى=1}^{م} \ ف_{ى ج} \ س_{ى ج} \leq أ_{ج} \qquad \text{حيث } (ج = 1، 2، \ldots ن) \qquad (3)$$

$$س_{ى ج} \geq \text{صفر} \qquad (4)$$

مثال عن توزيع السفن على الخطوط حسب فترة التشغيل :

المطلوب توزيع فترة التشغيل س ى ج على انواع الدفن الاخرى او الغير ... ل الملاحية المختلفة لتحقيق اكبر ربح ممكن — وطبقا لهذا النموذج تصبح الصورة الرياضية كما يلى (البيانات بالجدول التالى) ٠

ايجاد قيم س ى ج التى تجعل مجموع الارباح الكلية اكبر ما يكـــــن (الارقام بالالاف) ٠

ف(س) = ١٢ س١١ + ١٨ س١٢ + ٨٠ س١٣ + ٩ر٥ س١٤ + ١٦ س٢١ +
١٥ س٢٢ + ١٢ س٢٣ + ١٣ س٢٤ + ٨ س٣١ + ١٣ س٣٢ +
٩ س٣٣ + ٨ س٣٤ + ١٢ س٤١ + ٩ر٥ س٤٢ + ١٤ س٤٣ +
١١ س٤٤ (١)

اكبر ما يمكن ، مع العلم بان :

$$\begin{cases} ٧٥ س_{١٢} + ٦٣ س_{١٢} + ٨٠ س_{١٣} + ٦٨ س_{١٤} \leq ٣٢٠ \\ ٤٥ س_{٢١} + ٧٢ س_{٢٢} + ٥٨ س_{٢٣} + ٦٦ س_{٢٤} \leq ٣٠٠ \\ ٦٠ س_{٣١} + ٧٥ س_{٣٢} + ٥٤ س_{٣٣} + ٧٣ س_{٣٤} \leq ٢٨٠ \\ ٨٠ س_{٤١} + ٦٦ س_{٤٢} + ٧٣ س_{٤٣} + ٦٥ س_{٤٤} \leq ٣٤٠ \end{cases}$$ (٢)

وأن القيد الخاص بالحمولة (بالآلف) :

$$٣ \begin{cases} ٣ س_{١١} + ٣ر٥ س_{١٢} + ٤ س_{١٣} + ٢ر٤ س_{١٤} \leq ٨٠ \\ ٤ر٨ س_{٢١} + ٥ س_{٢٢} + ٣ر٦ س_{٢٣} + ٥ر٤ س_{٢٤} \leq ١٢٠ \\ ٣ر٥ س_{٣١} + ٢ر٤ س_{٣٢} + ٤ر٨ س_{٣٣} + ٤ س_{٣٤} \leq ٩٦ \\ ٦ر٢ س_{٤١} + ٦ س_{٤٢} + ٦ر٥ س_{٤١} + ٨ر٥ س_{٤٤} \leq ٨٥ \end{cases}$$

وحيث س ى ج ≥ صفر لجميع قيم (ج = ١، ٢، ٤ ، ٥ و ى = ١، ٢، ٣، ٤) (٤)

ويمكن تصوير البيانات كما فى الجدول الآتى :

الخطوط / انواع السفن	١	٢	٣	٤	فترة التشغيل
أ	٣٠٠٠ س ١١ ١٢٠٠٠ ٧٥	٣٥٠٠ س ١٢ ١٨٠٠٠ ٦٣	٤٠٠٠ س ١٣ ٨٠٠٠ ٨٠	٤٢٠٠ س ١٤ ٩٥٠٠ ٦٨	٣٢٠
ب	٤٨٠٠ س ٢١ ١٦٠٠٠ ٤٥	٥٠٠٠ س ٢٢ ١٥٠٠٠ ٧٢	٣٦٠٠ س ٢٣ ١٢٠٠٠ ٥٨	٤٥٠٠ س ٢٤ ١٣٠٠٠ ٦٦	٣٠٠
جـ	٣٥٠٠ س ٣١ ٨٠٠٠ ٦٠	٤٢٠٠ س ٣٢ ١٣٠٠٠ ٧٥	٤٨٠٠ س ٣٣ ٩٠٠٠ ٥٤	٤٠٠٠ س ٣٤ ٨٠٠٠ ٧٣	٢٨٠
د	٦٢٠٠ س ٤١	٦٠٠٠ س ٤٢	٥٦٠٠ س ٤٣	٥٨٠٠ س ٤٤	٣٤٠
الحمولة المتاحة على كل خط بالطن	٨٠٠٠٠	١٢٠٠٠٠	٩٦٠٠٠	٨٥٠٠٠	

ثالثا : التوزيع الامثل للاوناش على ارصفة البضائع بالميناء :

لتكوين الخطة المثلى لتوزيع الاوناش بالميناء وعلى الارصفة المختلفة التى يوجد عليها شحنات ، نفرض الاتى :

ى — ترمز الى نوعيات الاوناش حيث (ى = ١ ، ٢ ، ... م) .

ج — ترمز الى الارصفة (انواع الشحنات) حيث (ج = ١ ، ٢ ، ... ن) .

ك ى — ترمز الى انواع الاوناش من النوع (ى) .

ع ج — ترمز الى الشحنات المتداولة على الرصيف (ج) بالطن .

ك ى ج — زمن التشغيل للونش من النوع (ى) على الرصيف (ج) .

هـ ى ج — ترمز الى انتاجية الونش من النوع (ى) على الرصيف (ج) بالطن .

وباستخدام هذه الرموز يكون المطلوب تكوين الخطة المثلى لتوزيع الاوناش على الارصفة بحيث يمكن نقل الشحنات من الارصفة باقل وقت ممكن لمجموع الاوناش.

وبهذا تكون دالة الهدف اذا رمزنا اليها بالرمز (ك) على النحو الاتى :

$$\text{ك} = \text{مجـ}_{\text{ى}=1}^{\text{م}} \ \text{مجـ}_{\text{ج}=1}^{\text{ن}} \ \text{ك}_{\text{ى ج}} \qquad \text{اقل ما يمكن} \qquad (١)$$

ولتحقيق هذا الهدف يجب الاخذ فى الاعتبار القيود الاتية :

القيد الاول : ان عدد الاوناش من النوع (ى) العاملة على الارصفة (ج) يجب ان تكون لا سالبة اى ان $\text{ك}_{\text{ى ج}} \geqslant$ صفر. (٢)

القيد الثانى : انه على كل رصيف يلزم تخصيص اوناش بالمقدار الذى يسمح فقط بنقل كل كمية الشحنة الموجودة عليه اى ان :

$$\text{مجـ}_{\text{ى}=1}^{\text{م}} \ \text{ك}_{\text{ى ج}} \ \text{هـ}_{\text{ى ج}} = \text{ع}_{\text{ج}} \qquad (\text{ج} = ١، ٢، \ldots \text{ن}) \quad (٣)$$

القيد الثالث : عدد الاوناش من النوع (ى) الموزعة على الرصيف (ج) لا يجب ان تزيد عن المتوفر منها اى ان :

$$\text{مجـ}_{\text{ج}=1}^{\text{ن}} \ \text{ك}_{\text{ى ج}} \leqslant \text{ك}_{\text{ى}} \qquad (\text{ى} = ١، ٢، \ldots \text{م}) \quad (٤)$$

وباد خال تكلفة الوحدة فان المصفوفة تشمل تكلفة النقل بالاضافة الى انتاجية الونش وتصبح دالة الهدف السابقة كالاتى :

$$\text{مجـ}_{\text{ى}=1}^{\text{م}} \ \text{مجـ}_{\text{ج}=1}^{\text{ن}} \ (\text{ص}_{\text{ى ج}} \ \text{ك}_{\text{ى ج}}) \qquad \text{اقل ما يمكن} \qquad (٥)$$

حيث $\text{ص}_{\text{ى ج}}$ تكلفة التشغيل للونش (ى) على الرصيف (ج) عن فترة التشغيل وتكون باقى القيود على ما هى عليه.

رابعا : التوزيع الامثل للشحنات الموجودة على الارصفة على المخازن داخل الميناء :

قبل القيام ببناء هذا النموذج يلزم الامر تحديد المساحة الصالحة للتخزين. لذلك نفرض ان :—

ف — ترمز الى المساحة الصالحة للتخزين ٠

ع — الشحنات الموزعة فى المخزن ٠

ك — معامل استخدام المساحة الصالحة للتخزين ٠

ب — معامل التحميل طن / م٢

$$\text{ومعادلة المساحة الصالحة للتخزين} = \frac{\text{الشحنات الموزعة فى المخزن}}{\text{معامل استخدام سعة المخزن} \cdot \text{معامل التحميل}}$$

ويفرض ان معامل التحميل = ٥ر١ طن / م٢

وان معامل استخدام سعة المخزن = ٧٥ر٠

وان الشحنات الموزعة بالمخزن ٤٥٠٠ طن

$$\text{فتكون المساحة الصالحة للتخزين} = \frac{٤٥٠٠}{٥ر١ \times ٧٥ر} = ٤٠٠٠ \text{ م}٢$$

ونفرض ان ٤٠٪ من هذه المساحة مشغولة بالشحنات ١٦٠٠م٢ (٤٠٠٠ × $\frac{٤٠}{١٠٠}$)

وانه قد دخل المخزن ٢٢٥٠ طن فيلزم لهذه الشحنة سعة $\frac{٢٢٥٠}{٥ر١}$ = ٢٠٠٠ م ٠

والمساحة الفارغة بالمخزن = ٤٠٠٠ — ٤٠٠٠ × ٤٠٪ = ٢٤٠٠ م٢

بنـاء النموذج :

نفرض ان :

ى — ترمز الى انواع الشحنات حيث ى = ١، ٢، ٠٠٠ ن

ج — ترمز الى انواع المخازن حيث ج = ١، ٢، ٠٠٠ م

ع ى — كمية الشحنات من النوع (ى)

ف ى/م٢ — ترمز الى المساحة الصالحة للتخزين للمخزن (ج) بالمتر المربع ٠

ب ى ج طن /م٢ — معامل التحميل للشحنة (ى) فى المخزن (ج) طن /م٢ ٠

ويكون المطلوب ايجاد الخطة المثلى للتخزين التى تستغل فيها سعة المخـــازن الى اقصى سعة ممكنـة ٠

لذلك نرمز بالرمز (س ى ج) بالمساحة للشحنة (ى) للمخزن (ج) ٠

دالة الهدف : عبارة عن مجموع حواصل ضرب معامل التحويل لكل الشحنات ولكل المخازن فى المساحة الصالحة للتخزين للشحنات فى المخازن المختلفة ويعبر عنها كالآتى :

$$\text{مجـــ}_{ج=1}^{م} \quad \text{مجـــ}_{ى=1}^{ن} \; ب_{ى ج} \; س_{ى ج} \quad \text{اكبر ما يمكن} \qquad (١)$$

بشرط تحقيق القيود الاتية :

القيد الاول : ان يكون مجموع المساحات الصالحة للتخزين للشحنة (ى) فى المخزن (ج) لا يتعدى المساحة الكلية للمخزن (ج) ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا كالاتى :

$$\text{مجـــ}_{ى=1}^{ن} \; ف_{ى ج} \leq ف_{ج} \qquad (ج = ١، ٢، ٠٠٠ م) \quad (٢)$$

القيد الثانى : ان مجموع الشحنات من النوع (ى) فى المخزن (ج) لا تتعدى المجموع الكلى للشحنة (ى) بمعنى ان :

$$\text{مجـــ}_{ج=1}^{م} \; ع_{ى ج} \leq ع_{ى} \qquad (ى = ١، ٢، ٠٠٠ ن) \quad (١)$$

القيد الثالث : يشترط ان تكون القيم لاسالبة اى ان $ع_{ى ج} \geq$ صفر وكذا $س_{ى ج}$

(ى = ١، ٢، ٠٠٠ ن) (ج = ١، ٢، ٠٠٠ م) (٤)

مثال :

بفرض وجود ثلاثة مخازن ١، ٢، ٣ مطلوب توزيع اربع شحنات أ، ب، جـ، د على هذه المخازن ، وموضح فى الجدول الاتى المساحة الصالحة للتخزين لكل مخزن ومعامل التحميل طن /م٢ وكمية الشحنة من كل نوع .

والمطلوب ايجاد الخطة المثلى للتخزين التى تستغل فيها سعة المخازن الى اقصى سعة ممكنة والتى يترتب عليها ان تكون كمية الشحنات المخزونة اكبر ما يمكن .

انواع الشحنات / انواع المخازن	الشحنات				مساحة كل مخزن بالمتر المربع
	أ	ب	جـ	د	
مخزن ١	٤ س١	٣ س٢	٣ س٣	١ر٥ س٤	٦٠٠
مخزن ٢	٣ س٥	٢ر٥ س٦	٢ س٧	١ر٥ س٨	٩٠٠
مخزن ٣	٢ س٩	٢ س١٠	١ر٥ س١١	١ س١٢	١٢٠٠
كمية الشحنات بالطن	١٥٠٠	٢٥٠٠	٣٠٠٠	٩٠٠	

وتصبح دالة الهدف عبارة عن مجموع حواصل ضرب معامل التحميل لكل الشحنات ولكل المخازن فى المساحات الصالحة للتخزين للشحنات فى المخازن المختلفة والتى يعبر عنها كالاتى :

ف(س) = ٤ س١ + ٣ س٢ + ٣ س٣ + ١ر٥ س٤ + ٣ س٥ + ٢ر٥ س٦
+ ٢ س٧ + ١ر٥ س٨ + ٢ س٩ + ٢ س١٠ + ١ر٥ س١١ + ١ س١٢ (١)

اكبر ما يمكن وبشرط تحقيق القيود الاتية :

بالنسبة لمساحات التخزين ان يكون مجموع المساحات الصالحة للتخزين لايتعدى المساحة الكلية لكل مخزن اى ان :

$$\begin{cases} س١ + س٢ + س٣ + س٤ \leq ٦٠٠ \\ س٥ + س٦ + س٧ + س٨ \leq ٩٠٠ \\ س٩ + س١٠ + س١١ + س١٢ \leq ١٢٠٠ \end{cases} \quad (٢)$$

وبالنسبة لكمية الشحنات بالطن من كل نوع يكون مجموع حواصل ضرب معامل التحميل لكل شحنة فى كل مخزن مضروبا فى المساحة الصالحة للتخزين بحيث لايتجاوز هذا الناتج كمية الشحنات بالطن ويعبر عن ذلك كالاتى :

$$\begin{cases} ٤ س_{١} + ٣ س_{٥} + ٢ س_{٩} \leq ١٥٠٠ \\ ٣ س_{٢} + ٢٫٥ س_{٦} + ٢ س_{١٠} \leq ٢٥٠٠ \\ ٣ س_{٣} + ٢ س_{٧} + ١٫٥ س_{١١} \geq ٣٠٠٠ \\ ٠٫٥ س_{٤} + ١٫٥ س_{٨} + ١ س_{١٢} \geq ١٢٠٠ \end{cases} \quad (١)$$

وبالنسبة للقيود اللاسالبة يشترط ان تكون $س_{١}، س_{٢}، ... س_{١٢} \geq$ صفر

وان تكون قيم $ع_{١}، ع_{٢}، ... ع_{١٢} \geq$ صفر (٢)

خامسا : التوزيع الامثل لعربات النقل داخل الميناء لنقل الشحنات المختلفة :

ان احدى المشاكل داخل الميناء عبارة عن تنظيم وترشيد عمل سيارات النقل داخل منطقة الميناء بمعنى التوزيع الامثل لعربات النقل لنقل الشحنات المختلفة الى اماكن مختلفة داخل الميناء .

لذلك نفرض ان :

$أ_{ى ج}$ — ترمز الى عدد العربات من النوع (ى) لنقل الشحنات من النوع (ج) .

$ب_{ج}$ — ترمز الى حجم الشحنات من النوع (ج) .

$ع_{ى ج}$ — ترمز الى حمولة العربة من النوع (ى) لنقل الشحنة من النوع (ج)

$ت_{ى ج}$ — معدل زمن الشحن للعربة من النوع (ى) لنقل الشحنة من النوع (ج) (دورة العربة) .

$س_{ى ج}$ — عدد العربات من النوع (ى) لنقل الشحنة من النوع (ج) .

وتصبح المشكلة هى توزيع عربات النقل لنقل الشحنات المختلفة بحيث يكون فى اقل وقت ممكن ، وبمعنى آخر فان مجموع الزمن الكلى اللازم لتشغيل العربات لنقل الشحنات المختلفة يكون اقل ما يمكن .

وبذلك يمكن صياغة المشكلة رياضيا على النحو الاتى :

المطلوب تقليل دالة الهدف

$$\text{مجـ}_{ى=١}^{م} \ \text{مجـ}_{ج=١}^{ن} \ ت_{ى ج} \ س_{ى ج} \quad (١)$$

بشرط تحقيق القيود الاتية :

$$\sum_{ج=1}^{ن} س_{ىج} \leq أ_{ى} \quad (ى = ١، ٢، ٠٠، م) \qquad (٢)$$

$$\sum_{ى=1}^{م} ع_{ىج} س_{ىج} = ب_{ج} \quad (ج = ١، ٢، ٠٠، ن) \qquad (٣)$$

$$س_{ىج} \geq \text{صفر} \quad (ى = ١، ٢، ٠٠ م) \ (ج = ١، ٢، ٠٠، ن) \qquad (٤)$$

سادسا : التوزيع الامثل للسفن المطلوب اصلاحها على ترسانات الاصلاح :

عرض المشكلة :

يمكن توزيع السفن المراد اصلاحها على الترسانات المختلفة على اساس اقل تكلفة اصلاح لمجموع السفن .

لذلك نفرض ان السفن المراد اصلاحها سنرمز لها بالرمز (ى) حيث (ى = ١، ٢، ٠٠ م) يمكن اصلاحها فى ترسانات سنرمز لها بالرمز (ج) حيث (ج = ١، ٢، ٠٠ ن) .

ونفرض ان المعلوم ما يلى :

- عدد السفن (ى) المراد اصلاحها وسنرمز لها بالرمز $أ_{ى}$
- تكلفة اصلاح السفينة من النوع (ى) فى الترسانة (ج) وسنرمز لها بالرمز $ص_{ىج}$.
- عدد الايام (او الورديات) لعمل الترسانة (ج) والمخصصة لاصلاح السفن وسنرمز لها بالرمز $ت_{ج}$.
- الزمن اللازم لاصلاح السفينة (ى) فى الترسانة (ج) وسنرمز له بالرمز $ت_{ىج}$.

ويكون المطلوب تحديد عدد السفن التى تصلح فى الترسانات المختلفة وسنرمز لها بالرمز $س_{ىج}$ لكى نحقق اقل تكلفة اصلاح كلية للسفن .

الترسانات / انواع السفن	١	٢	..	ج	..	ن	عدد السفن المراد اصلاحها من كل نوع
١				ص١ ج س١ ج ت١ ج			أ١
٢				ص٢ ج س٢ ج ت٢ ج			أ٢
..				..			..
ى				ص ى ج س ى ج ت ى ج			أ ى
..				..			..
م				ص م ج س م ج ت م ج			أ م
فترة التشغيل لكل ترسانة باليوم	ت١	ت٢		ت ج	..	ت ن	..

الصياغة الرياضية للمشكلة :

دالة الهدف تحقيق اقل تكلفة اصلاح كلية :

التكلفة الكلية للاصلاح ويمكن الحصول عليها من حواصل ضرب تكلفة الاصلاح لكل نوع من انواع السفن فى كل ترسانة مضروبا فى عدد السفن المستصلحة ويمكن التعبير عنها رياضيا

$$\text{مجـــ}_{ى=١}^{م} \quad \text{مجـــ}_{ج=١}^{ن} \; ص_{ى ج} \; س_{ى ج} \qquad (١)$$

القيـود :

ان السفن المستصلحة فى كل الترسانات تساوى عـدد السفن الكلية مـن كل نوع ويمكن التعبير عنها رياضيا :

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \; س_{ىج} = أ_{ى} \quad (ى = 1، 2، 00 م) \qquad (٢)$$

وان مجموع زمن اصلاح السفينة من النوع (ى) فى الترسانة (ج) مضروبا فى عـدد السفن المستصلحة من النوع (ى) فى الترسانة (ج) لايجب ان يتجاوز فتـرة التشغيل للترسانة ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا :

$$\text{مجـ}_{ى=1}^{م} \; ت_{ىج} \; س_{ىج} \leq ت_{ج} \qquad (٣)$$

حيث (ى = 1، 2، 00 م) (ج = 1، 2، 00 ن) وبشرط أن تكون جميع قيـم $س_{ىج}$ لا سالبة . (٤)

وبذلك تأخذ المشكلة الصورة الرياضية الآتية :

ايجاد قيم $س_{ىج}$ (ى = 1، 2، 00 م) (ج = 1، 2، 00 ن) التـى تجعل الدالة

$$ف(س) = \text{مجـ}_{ى=1}^{م} \; \text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \; ص_{ىج} \; س_{ىج} \qquad (١)$$

اقل ما يمكن مع العلم بان

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \; س_{ىج} = أ_{ى} \quad (ى = 1، 2، 00 م) \qquad (٢)$$

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن} \; ت_{ىج} \; س_{ىج} \leq ت_{ج} \quad (ج = 1، 2، 00 ن) \qquad (٣)$$

$$س_{ىج} \geq \text{صفر} \qquad (٤)$$

حيث (ى = 1، 2، 00 م) (ج = 1، 2، 00 ن)

مثـال :

بفرض وجود ثلاث ترسانات لاصلاح السفن ١ ، ٢ ، ٣ وهناك اربعة انـواع من السفن أ ، ب ، جـ ، د يراد اصلاحها بتلك الترسانات وان الجدول الآتـى موضح بـه عدد السفن المراد اصلاحها من كل نوع وتكلفة الاصلاح بالالف جنيـه وفترة تشغيل كل ترسانة والزمن اللازم لاصلاح السفينة باليوم .

الترسانات / انواع السفن	تكلفة الاصلاح بالالف جنيه (فترة الاصلاح باليد) الترسانة الاولى	الترسانة الثانية	الترسانة الثالثة	عدد السفن المراد اصلاحها من كل نوع
أ	١٢ ١٠ س١١	١٥ ١٣ س١٢	١٠ ٧ س١٣	١٩
ب	٣٥ ٢٥ س٢١	٤٣ ٣٢ س٢٢	٢٩ ٣٤ س٢٣	٢٦
جـ	٤٧ ١٥ س٣١	٥٢ ١٨ س٣٢	٦٣ ٣٦ س٣٣	١١
د	٢٤ س٤١	٢٧ ١٩ س٤٢	٣٣ ٣١ س٤٣	٩
فترة التشغيل لكل ترسانة باليوم	٣٥٠	٣٤٠	٣٣٠	

ويكون المطلوب توزيع السفن س ى ج على الخطوط المختلفة باقل تكلفة اصلاح كلية ، فاذا رمزنا بالرمز س ى ج حيث (ج = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ و ى = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤) لعدد السفن من كل نوع وفى كل ترسانة فطبقا للنموذج تصبح الصورة الرياضية كما يلى :

ايجاد قيم س ى ج التى تجعل قيمة التكلفة الكلية للاصلاح

ف(س) = ١٠ س١١ + ١٣ س١٢ + ٧ س١٣ + ٢٥ س٢١ + ٣٢ س٢٢ +
٣٤ س٢٣ + ١٥ س٣١ + ١٨ س٣٢ + ٣٦ س٣٣ + ٢٧ س٤١ +
١٩ س٤٢ + ٣١ س٤٣ (١)

اقل ما يمكن مع العلم بانه

بالنسبة لعدد السفن

$$\begin{cases} س_{11} + س_{12} + س_{13} = 19 \\ س_{21} + س_{22} + س_{23} = 26 \end{cases} \quad (٢)$$

$$\begin{cases} س_{31} + س_{32} + س_{33} = 11 \\ س_{41} + س_{42} + س_{43} = 9 \end{cases} \quad (٢)$$

وبالنسبة لفترة التشغيل فان

$$١٢ س_{11} + ٣٥ س_{21} + ٤٧ س_{31} + ٢٤ س_{41} \geq ٣٥٠$$
$$١٥ س_{12} + ٤٣ س_{22} + ٥٢ س_{32} + ٢٧ س_{42} \geq ٣٤٠ \quad (٣)$$
$$١٠ س_{13} + ٢٩ س_{23} + ٦٣ س_{33} + ٣٣ س_{43} \geq ٣٣٠$$

وحيث $س_{ى ج} \geq$ صفر وان (ج = ١، ٢، ٣) (ى = ١، ٢، ٣، ٤) (٤)

سابعا : الاستثمار فى شراء السفن الجديدة وتشغيلها على خطوط ملاحيـــة لشركة ملاحية تحت الانشاء :

قبل تقرير الاستثمار فى شراء سفن جديدة لشركة ملاحة تحت الانشـــاء يستلزم الامر تحديد نوعيات السفن والنشاط الذى ستمارسه الشركة الجـــديدة وقد يكون النشاط واحدا من الاتى :

١ ــ قد يكون النشاط خاصا بتشغيل سفن ركاب .
٢ ــ او يكون النشاط خاصا بتشغيل سفن بضائع .
٣ ــ كما قد يكون النشاط خاصا بتشغيل سفن ركاب البضائع .
٤ ــ ويمكن ان يكون النشاط خاصا بتشغيل ناقلات سواء بالنسبة لناقـــلات البترول الخام او بالنسبة للمنتجات البترولية .
٥ ــ بالاضافة الى ماسبق يمكن ان يكون النشاط خاصا بتشغيل حاويـــات Containers او تشغيل سفن الدحرجة RO/ RO او غير ذلـــك من النوعيات الكثيرة للبضائع .

ومن الطبيعى اننا نقارن بين الترسانات التى تقوم ببناء السفن من حيث السمعة الدولية لهذه الترسانات والسفن التى تتخصص فى بنائها واسعـــار البناء والتسهيلات التى تقدمها وفترات السماح واسعار الفائدة .

اما بالنسبة لمعيار الاستثمار الذى على اساسه سيتم تقرير نوعيات السفن المبنية فقد يكون واحدا من المعايير الاتية :

١ — معيار الربح ٠
٢ — معيار تكلفة التشغيل ٠
٣ — معيار اكبر ايرادات من العملات الاجنبية ٠
٤ — معيار نقل اكبر حجم من الحمولة ٠
٥ — معيار القيمة المضافة ٠

وبفرض انه يراد انشاء شركة ملاحة يكون هدفها الرئيسى تشغيل سفن لنقل البضائع على خطوط ملاحية لتحقيق اكبر ربح كلى ممكن ٠

ولتقرير صلاحية شراء انواع معينة من السفن من بين نوعيات عديدة يمكن ان يتم الاختيار باستخدام النموذج الرياضى الاتى :

نفرض ان نوعيات السفن المطلوب الاختيار من بينها هى (ى) حيث (ى = ١ ، ٢ ، ٠٠ م) وان الخطوط الملاحية المطلوب تشغيل هذه السفن عليها هى (ج) حيث (ج = ١ ، ٢ ، ٠٠ ن) ٠

$أ_{ج}$ — كمية البضاعة المتاحة على الخط (ج) ٠ ويمكن تحديد كمية البضاعة المتاحة على الخط (ج) بتحديد صادرات الدولة الى الخط (ج) وواردات الدولة من الموانى لنفس الخط ٠

$ف_{ى ج}$ — الانتاجية السنوية (او اخلال الرحلة) للسفينة (ى) على الخط (ج) وهى عبارة عن محمول السفينة الصافى مضروبا فى معامل التحميل مضروبا فى ٢ مضروبا فى عدد الرحلات فى السنة ٠

$ب_{ى ج}$ — صافى الربح السنوى للسفينة (ى) على الخط (ج) والربح الصافى عبارة عن ايرادات النقل خلال السنة ناقصا تكلفة التشغيل السنوية للسفينة (تشمل التكلفة الثابتة والمتغيرة) ٠

$ص_{ى}$ — ثمن شراء السفينة من النوع (ى) ٠

م — المبلغ الكلى للاستثمار المخصص لشراء السفن ٠

ويكون المطلوب هو توزيع السفن الجديدة وسنرمز لها بالرمز $س_{ى ج}$ على الخطوط الملاحية المختلفة لتحقيق اكبر ربح كلى صافى لمجموع السفن، وتكون الصياغة الرياضية الخاصة بهذه المشكلة على النحو الاتى :

ايجاد قيم س ى ج (ى = ١ ، ٢ ، ... م) (ج = ١ ، ٢ ، ... ن) التى تجعل الدالة

$$ف(س) = \text{مجـ}_{ى=١}^{م} \ \text{مجـ}_{ج=١}^{ن} \ ب_{ى ج} \ س_{ى ج} \qquad (١)$$

اكبر ما يمكن مع العلم بان :

$$\text{مجـ}_{ى=١}^{م} \ ف_{ى ج} \ س_{ى ج} \leq أ_{ى} \quad (ج = ١ ، ٢ ، ... ن) \qquad (٢)$$

$$\text{مجـ}_{ى=١}^{م} \ ص_{ى} \ \text{مجـ}_{ج=١}^{ن} \ س_{ى ج} \leq م \qquad (٣)$$

$$س_{ى ج} \geq \text{صفر} \qquad (٤)$$

وحيث $س_{ى ج}$ عدد صحيح

مثال رقمى :

بفرض ان احدى الشركات الملاحية تحت التأسيس خصصت مبلغ ٤٠ مليون جنيه لشراء سفن جديدة وامامها ثلاثة أنواع من السفن هى أ ، ب ، جـ على اساس ان تعمل هذه السفن على ثلاثة خطوط ملاحية . ويوضح الجدول الاتى البيانات الخاصة بهذه السفن والخطوط والتى تشمل :—

١ — كمية الحمولة المنقولة بكل سفينة من السفن الجديدة من كل نوع وعلى كل خط بالالف طن .

٢ — صافى الربح لكل نوع من انواع السفن على كل خط .

٣ — كمية الشحنات الموجودة على كل خط ملاحى .

٤ — ثمن شراء السفينة من الانواع أ ، ب ، جـ .

٥ — المبلغ الكلى المخصص لشراء السفن .

الخطوط الملاحية / انواع السفن الجديدة	الخط الاول	الخط الثانى	الخط الثالث	ثمن شراء السفينة الواحدة من كل نوع
أ	٢٣ س١١ ٢٠	٢٦ س١٢ ٣٢	١٩ س١٣ ٢٦	٧
ب	٢٤ س٢١ ٣٧	٢٥ س٢٢ ٣٩	٢٣ س٢٣ ٣٥	٩
جـ	٢٦ س٣١ ٣٠	٢٩ س٣٢ ٤٠	٢٥ س٣٣ ٢٩	٨
الحمولة المتاحة على كل خط	٤٥٠	٥٠٠	٢٠٠	

وتصبح دالة الهدف

ف(س) = ٢٩ س١١ + ٣٢ س١٢ + ٢٦ س١٣ + ٠٠٠ + ٣٠ س٣١ +
٤٠ س٣٢ + ٢٩ س٣٣ (١)

اكبر ما يمكن مع العلم بانه بالنسبة لقيود الحمولة على كل خط

٢٣ س١١ + ٢٤ س٢١ + ٢٦ س٣١ ≤ ٤٥٠
٢٦ س١٢ + ٢٥ س٢٢ + ٢٩ س٣٢ ≤ ٥٠٠ (٢)
١٩ س١٣ + ٢٣ س٢٣ + ٢٥ س٣٣ ≤ ٢٠٠

وبالنسبة لقيود الاستثمار

٧ (س١١ + س١٢ + س١٣) + ٩ (س٢١ + س٢٢ + س٢٣) +
٨ (س٣١ + س٣٢ + س٣٣) ≤ ٤٠ (٣)

حيث قيم المجاهيل عدد صحيح

س ي ج ≥ صفر لجميع قيم ى = ١، ٢، ٣ و ج = ١، ٢، ٣ (٤)

ثامنا : تدعيم سفن النقل الحالية بشراء سفن جديدة وتوزيع السفن الحالية والجديدة على الخطوط الملاحية المختلفة لشركة ملاحية دائمة :

فى قطاع النقل البحرى تظهر مشكلة رفع الكفاءة الاقتصادية للاستثمارات باختيار أكفأ انواعها وزيادة الانتاج على كل جنيه مستثمر وتخفيض فترة استرداد هذه الاستثمارات والتعجيل بادخال سفن جديدة فى التشغيل .

ومن المعروف انه توجد انواع مختلفة من السفن يكون المطلوب هو اختيار الأكفأ منها حيث يتطلب كل نوع من السفن مقادير مختلفة من الاستثمارات وتكلفة تشغيل مختلفة فأحيانا يتطلب نوع ما من السفن استثمارات قليلة وكذا نفقات تشغيل قليلة ويكون لهذا النوع من السفن اولوية اذا ما قورن بغيره ولكن يحدث احيانا ان نوعا من السفن يتطلب استثمارات قليلة ونوعا آخر تكون تكلفة تشغيله قليلة وفى هذه الحالة يتطلب الامر مقارنة النوعين مع بعضهما واختيار افضلهما .

وعلى جانب كبير من الاهمية تكون المقارنة بين بناء او شراء سفن جديدة ويكون امام الادارة ان تختار نوع السفن الاكثر كفاءة عن غيرها .

والاستثمار فى السفن يعتبر من أعلى معدلات الاستثمار حيث يحقق عائدا سريعا . ولاختيار افضل انواع السفن نستخدم معايير معينة للحكم على كفاءة الاستثمار مثل معيار الربح والتكلفة والقيمة المضافة ومعيار النقد الاجنبى ومعيار نقل اكبر حمولة سنوية ... الخ .

والهدف هنا بناء نموذج اقتصادى رياضى للتوزيع الامثل للاستثمارات على انواع السفن الجديدة واضافة السفن الجديدة الى السفن الحالية وتشغيلها على خطوط ملاحية .

لذلك نفرض ان اسطول النقل يتكون من انواع مختلفة من السفن سنرمز لها بالرمز (ى) حيث (ى = ١ ، ٢ ، ... ت) للسفن الحالية والتى عددها ($ك_{ى}$) ، (ى = ت + ١ ، ... ن) ، للسفن الجديدة المطلوب اضافتها للاسطول بحيث تعمل هذه السفن جميعها على الخطوط الملاحية المختلفة والتى نرمز لها بالرمز (ج) حيث (ج = ١ ، ٢ ، ... ن) .

ونفرض ان المعلوم ما يلى :

$أ_ج$ — ترمز الى كمية البضائع المقامة على الخط (ج) ٠

$ف_{ى ج}$ — ترمز الى انتاجية السفينة (ى) على الخط (ج) ٠

$ص_{ى ج}$ — تكلفة التشغيل السنوية للسفينة (ى) على الخط (ج) ٠

$ب_{ى ج}$ — صافى الربح السنوى للسفينة (ى) على الخط (ج) ٠

$ع_{ى}$ — ثمن شراء السفينة (ى) الجديدة حيث (ى = ت ١٠ ، ٠٠٠ م) ٠

م — المبلغ الكلى للاستثمار المخصص لشراء سفن جديدة ٠

ويكون المطلوب هو توزيع عدد السفن الحالية والجديدة وترمز لها بالرمز $س_{ى ج}$ على الخطوط المختلفة لكى تحقق :

١ — اما اقل تكلفة تشغيل كلية للاسطول ٠

٢ — واما اكبر ربح كلى ممكن ٠

ويمكن تصوير المشكلة كما فى الشكل الآتى :

obeikan.com

الخطوط الملاحية / انواع السفن	١	..	ج	..	ن	ثمن شراء السفن الجديدة
١			ص١ ج ف١ ج ب١ ج س١ ج			ك١
..			..			..
ى			ص ى ج ف ى ج ب ى ج س ى ج			ك٢
ت			ص ت ج ف ت ج ب ت ج س ت ج			ك ت
ت + ١			ص ت+١ ج ف ت+١ ج ب ت+١ ج س ت+١ ج			ع ت+١
..			..			..
م			ص م ج ف م ج ب م ج س م ج			ع م
	أ١	..	أ ج	..	أ ن	

الصياغة الرياضية للمشكلة :

الحالة الاولى : تحقيق اقل تكلفة تشغيل كلية :

دالة الهدف :

التكلفة الكلية لتشغيل السفن الحالية والجديدة ويمكن الحصول عليها من مجموع حواصل ضرب عدد السفن من كل نوع على كل خط فى تكلفة التشغيل المناظرة ويعبر عنها رياضيا :

$$\text{مجـــ}_{\text{ى}=1}^{\text{م}} \quad \text{مجـــ}_{\text{ج}=1}^{\text{ن}} \quad \text{ص}_{\text{ى ج}} \quad \text{س}_{\text{ى ج}} \qquad (1)$$

قيـود النموذج :

بالنسبة للسفن الحالية فان مجموع السفن من النوع (ج) والتى تعمل على جميع الخطوط يساوى ($ك_{ى}$) اى ان :

$$\text{مجـــ}_{\text{ج}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ى ج}} = \text{ك}_{\text{ى}} \quad (\text{ى}=1,2,\ldots,\text{ت}) \qquad (2)$$

وبالنسبة لاى خط من الخطوط فان كمية البضاعة المنقولة بواسطة الانواع المختلفة من السفن لاتزيد عن الكمية المتاحة من البضائع على هذا الخط اى ان :

$$\text{مجـــ}_{\text{ى}=1}^{\text{م}} \text{ف}_{\text{ى ج}} \text{س}_{\text{ى ج}} \leq \text{أ}_{\text{ج}} \qquad (3)$$

حيث ج $= 1,2,\ldots,$ ن

وبالنسبة للاستثمار فان المجموع الكلى لشراء السفن الجديدة الموزعة على الخطوط المختلفة لاتزيد عن (م) اى ان :

$$\text{مجـــ}_{\text{ى}=\text{ت}+1}^{\text{م}} \text{ع}_{\text{ى}} \text{مجـــ}_{\text{ج}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ى ج}} \leq \text{م} \qquad (4)$$

وبذلك تأخذ المشكلة الصورة الرياضية الاتية :

ايجاد قيم $\text{س}_{\text{ى ج}}$ (ى $= 1,2,\ldots,$ م) (ج $= 1,2,\ldots,$ ن) التى تجعل الدالة

$$\text{ف}_1(\text{س}) = \text{مجـــ}_{\text{ى}=1}^{\text{م}} \text{مجـــ}_{\text{ج}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ى ج}} \text{س}_{\text{ى ج}} \qquad (1)$$

اقل ما يمكن مع العلم بان:

$$\text{مجـــ}_{\text{ج}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ى ج}} = \text{ك}_{\text{ى}} \quad (\text{ى}=1,2,\ldots,\text{ت}) \qquad (2)$$

$$\text{مجـــ}_{\text{ى}=1}^{\text{م}} \text{ف}_{\text{ى ج}} \text{س}_{\text{ى ج}} \leq \text{أ}_{\text{ج}} \quad (\text{ج}=1,2,\ldots,\text{ن}) \qquad (3)$$

$$\text{مجـــ}_{\text{ى}=\text{ت}+1}^{\text{م}} \text{ع}_{\text{ى}} \text{مجـــ}_{\text{ج}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ى ج}} \leq \text{م} \qquad (4)$$

$$\text{س}_{\text{ى ج}} \geq \text{صفر} \qquad (5)$$

حيث $\text{س}_{\text{ى ج}}$ عدد صحيح

الحالة الثانية : تحقيق اكبر ربح كلى لجميع السفن :

فى هذه الحالة تأخذ المشكلة الصورة الرياضية الاتية :

ايجاد قيم $س_{ى ج}$ (ى = ١، ٢، ... م) و (ج = ١، ٢، ... ن) التى تجعل الدالة

$$ف_{٢}(س) = \text{مجـ}_{ى=١}^{م} \text{مجـ}_{ج=١}^{ن} ب_{ى ج} س_{ى ج} \quad (١)$$

اكبر ما يمكن مع العلم بأن

$$\text{مجـ}_{ج=١}^{ن} س_{ى ج} = ك_{ى} \quad (ى = ١، ٢، ... م) \quad (٢)$$

$$\text{مجـ}_{ى=١}^{م} ف_{ى ج} س_{ى ج} \leq أ_{ج} \quad (ج = ١، ٢، ... ن) \quad (٣)$$

$$\text{مجـ}_{ى=ت+١}^{م} ع_{ى} \text{مجـ}_{ج=١}^{ن} س_{ى ج} \geq م \quad (٤)$$

$$س_{ى ج} \geq \text{صفر}$$

وحيث $س_{ى ج}$ عدد صحيح

ملاحظات :

١ — يمكن حل هذا النموذج على اساس مجموعات مختلفة من السفن او عدد من السفن

٢ — يمكن حل هذا النموذج على اساس جميع السفن القديمة وبدائل مختلفة من السفن الجديدة فمثلا اذا كان لدينا خمسة انواع من السفن القديمة وثلاثة انواع من السفن الجديدة فان الحل يتناول البدائل التالية :

الخمسة انواع القديمة + نوع واحد من السفن الجديدة (٣ حالات)

أو الخمسة انواع القديمة + نوعين من السفن الجديدة (٣ حالات)

أو الخمسة انواع القديمة + الثلاثة الانواع الجديدة (حالة واحدة)

اى يكون لدينا سبع حالات والغرض من ذلك تخليل الحساسية

وبمقارنة الحلول لهذه الحالات المختلفة نختار افضلها .

— بالنسبة لقيم $س_{ى ج}$ الكسرية فى حالة السفن القديمة تعنى ان هذه السفن اشتغلت نسبة معينة من فترة التشغيل المقررة لها . اما بالنسبة للسفن الجديدة

فلابد وان تكون صحيحة ولذلك نطبق اسلوب البرمجة الصحيحة

وسنعرض فيما يلى مثالا يشتمل على الحالات السبعة المشار اليها • وكمثال لذلك نفرض ان شركة ملاحية لديها ٦ سفن من النوع (أ) و ٤ سفن من النوع (ب) و ٣ سفن من النوع (جـ) وتعمل هذه السفن على ثلاثة خطوط ملاحية • ورغبة من ادارة الشركة فى زيادة مساهمة الاسطول الوطنى فى نقل البضائع المتاحة على هذه الخطوط فقد خصصت مبلغ ١٥ مليون جنيه لاستثمارها فى شراء سفن جديدة من ثلاثة انواع جديدة هى (د) و (هـ) و (و) ويوضح الجدول الاتى بيانات خاصة بكل من :

١ — تكلفة التشغيل للسفينة الواحدة من كل نوع وعلى كل خط بآلاف الجنيهات •

٢ — الارباح السنوية للسفينة الواحدة من كل نوع وعلى كل خط بآلاف الجنيهات •

٣ — كمية الحمولة المنقولة بالسفينة الواحدة من كل نوع وعلى كل خط بآلاف الجنيهات •

٤ — كميات الحمولة المتاحة على كل من الخطوط الثلاثة بآلاف الجنيهات •

٥ — ثمن شراء السفينة الواحدة من الانواع الجديدة (د) و (هـ) و (و)بالمليون جنيه •

الخطوط / انواع السفن	الاول		الثانى		الثالث		عدد السفن الحالية	ثمن شراء السفينة الجديدة
	التكلفة	الحمولة بالالف	التكلفة	الحمولة بالالف	التكلفة	الحمولة بالالف		
أ	١٣٨	١٥	١٤٥	١٧	١٣٩	١٣	٦	
	الربح ٢٨	س ١١	٣٦	س ١٢	٢٧	س ١٣		
ب	١٠٩	٢٠	١٠٢	٢٤	١١٣	١٩	٤	
	٢٩	س ٢١	٣٢	س ٢٢	٣٧	س ٢٣		
جـ	١٢٠	٣٨	١١٨	٣٩	١٢٠	٣١	٣	
	٢٦	س ٣١	٣٠	س ٣٢	٢٨	س ٣٣		
د	١٥٢	١٩	١٣٢	٢١	١٤٣	٢٣		٢٫٠
	٣٥	س ٤١	٢٨	س ٤٢	٣٢	س ٤٣		
هـ	١٢٤	٢٨	١٢٩	٢٦	١٢٦	١٦		٢٫٥
	٢٩	س ٥١	٣٢	س ٥٢	٢٦	س ٥٣		
و	١٧٨	٢٤	١٦٥	٢٥	١٣٥	٢٣		٣٫٥
	٣٧	س ٦١	٣٩	س ٦٢	٢٥	س ٦٣		
الحمولة المتاحة على كل سفينة بالالف طن	٢٥٠		٣٦٠		٣٢٠			

ويكون المطلوب هو التوزيع الامثل للسفن الحالية والجديدة على الخطوط المختلفة بحيث تحقق اما اقل تكلفة تشغيل كلية واما اكبر ربح كلى .

فاذا رمزنا بالرمز س ى ج حيث ج = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ لعدد السفن الحالية والجديدة من كل نوع على كل خط وطبقا للنموذج تصبح الصورة الرياضية كما يلى :

ايجاد قيمة س ى ج التى تجعل قيمة التكلفة الكلية لتشغيل :

ف١ (س) = ١٣٨ س١١ + ١٤٥ س١٢ + ١٣٩ س١٣ + ٠٠ + ١٣٥ س٦٣ اقل ما يمكن ٠

او الربح الكلى

ف٢ (س) = ٢٨ س١١ + ٣٦ س١٢ + ٢٧ س١٣ + ٠٠ + ٢٥ س٦٣ اكبر ما يمكن

مع العلم بأنه بالنسبة لعدد السفن الحالية :

س١١ + س١٢ + س١٣ = ٦

س٢١ + س٢٢ + س٢٣ = ٤

س٣١ + س٣٢ + س٣٣ = ٣

وبالنسبة للحمولة المنقولة بالسفن

١٥ س١١ + ٢٠ س٢١ + ٣٨ س٣١ + ١٩ س٤١ + ٢٣ س٥١
+ ٢٦ س٦١ ≤ ٢٥٠

١٧ س١٢ + ٢٥ س٢٢ + ٢٩ س٣٢ + ٢١ س٤٢ + ٢٦ س٥٢
+ ٢٥ س٦٢ ≤ ٣٦٠

١٣ س١٣ + ١٩ س٢٣ + ٣١ س٣٣ + ٢٣ س٤٣ + ١٩ س٥٣
+ ٢٣ س٦٣ ≤ ٣٢٠

وبالنسبة للاستثمار

٢ (س٤١ + س٤٢ + س٤٣) + ٢ر٥ (س٥١ + س٥٢ + س٥٣)
+ ٣ر٥ (س٦١ + س٦٢ + س٦٣) ≤ ١٥

حيث قيم المجاهيل عدد صحيح ج = ١، ٢، ٣ و ى = ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ ٠

الحالة الثانية : الاخذ فى الاعتبار جميع السفن الحالية والنوع (د) فقط من السفن الجديدة ويصبح الجدول كالاتى :

الخطوط / انواع السفن	الاول		الثانى		الثالث		عدد السفن الحالية	ثمن شراء السفينة الجديدة
	التكلفة بالالف	الحمولة بالالف	التكلفة بالالف	الحمولة بالالف	التكلفة بالالف	الحمولة بالالف		
أ	١٣٨ ٢٨ س١١	١٥	١٤٥ ٣٦ س١٢	١٧	١٣٩ ٢٧ س١٣	١٣	٦	
ب	١٠٩ ٢٩ س٢١	٢٠	١٠٢ ٣٢ س٢٢	٢٤	١١٣ ٣٧ س٢٣	١٩	٤	
جـ	١٢٠ ٢٦ س٣١	٣٨	١١٨ ٣٠ س٣٢	٢٩	١٢٠ ٢٨ س٣٣	٣١	٣	
د	١٥٢ ٣٥ س٤١	١٩	١٣٢ ٢٨ س٤٢	٢١	١٤٣ ٣٢ س٤٣	٢٣		٢٫٠
الحمولة المتاحة على كل خط بالالف طن	٢٥٠		٣٦٠		٣٢٠			
المبلغ الكلى للاستثمار ١٥ مليون جنيه								

وتصبح دالة الهدف هى ايجاد التكلفة الكلية للتشغيل :

ف١ (س) = ١٣٨ س١١ + ١٤٥ س١٢ + ١٣٩ س١٣ + ٠٠٠٠٠ + ١٤٣ س٤٣

اقل مايمكن ٠

او الربح الكلى من تشغيل الاسطول

ف٢ (س) = ٢٨ س١١ + ٣٦ س١٢ + ٢٧ س١٣ + ٠٠٠ + ٣٢ س٤٣

اكبر ما يمكن

مع العلم بأنه بالنسبة لعدد السفن الحالية

س١١ + س١٢ + س١٣ = ٦

س٢١ + س٢١ + س٢٣ = ٤

س٣١ + س٣٢ + س٣٣ = ٣

وبالنسبة للحمولة المنقولة بالسفن

$$١٥ س_{١١} + ٢٠ س_{٢١} + ٣٨ س_{٣١} + ١٩ س_{٤١} \leq ٢٥٠$$

$$١٧ س_{١٢} + ٢٤ س_{٢٢} + ٢٩ س_{٣٢} + ٢١ س_{٤٢} \leq ٣٦٠$$

$$١٣ س_{١٣} + ١٩ س_{٢٣} + ٣١ س_{٣٣} + ٢٣ س_{٤٣} \leq ٣٢٠$$

وبالنسبة للاستثمار $٢ (س_{٤١} + س_{٤٢} + س_{٤٣}) \leq ١٥$

حيث قيمة المجاهيل عدد صحيح $س_{ى ج} \geq$ صفر وحيث (ج = ١ ، ٢ ، ٣ و ى = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤) .

الحالة الثالثة : الاخذ فى الاعتبار جميع السفن الحالية والنوع (هـ) من السفن الجديدة ويصبح الجدول كالاتى :

الخطوط / انواع السفن	الاول — التكلفة بالالف	الاول — الحمولة بالالف	الثانى — التكلفة بالالف	الثانى — الحمولة بالالف	الثالث — التكلفة بالالف	الثالث — الحمولة بالالف	عدد السفن الحالية	ثمن شراء السفينة الجديدة
أ	١٣٨	١٥	١٣٥	١٧	١٣٩	١٣	٦	
	٢٨	س١١	٣٦	س١٢	٢٧	س١٣		
ب	١٠٩	٢٠	١٠٢	٢٤	١١٣	١٩	٤	
	٢٩	س٢١	٣٢	س٢٢	٣٧	س٢٣		
جـ	١٢٠	٣٨	١١٨	٢٩	١٢٠	٣١	٣	
	٢٦	س٣١	٣٠	س٣٢	٢٨	س٣٣		
هـ	١٢٤	٢٨	١٢٩	٢٦	١٢٦	١٦		٢٫٥
	٢٩	س٤١	٣٢	س٥٢	٢٦	س٥٣		
الحمولة المتاحة على كل خط بالالف طن	٢٥٠		٣٦٠		٣٢٠			
المبلغ الكلى للاستثمار ١٥ مليون جنيه								

وتصبح دالة الهدف ايجاد التكلفة الكلية للتشغيل

ف١ (س) = ١٣٨ س١١ + ١٤٥ س١٢ + ١٣٩ س١٣ + ... + ١٢٦ س٥٣

اقل ما يمكن

او الربح الكلى من تشغيل الاسطول

ف٢ (س) = ٢٨ س١١ + ٣٦ س١٢ + ٢٧ س١٣ + ... + ٢٦ س٥٣

اكبر ما يمكن

مع العلم بانه بالنسبة لعدد السفن الخالية

س١١ + س١٢ + س١٣ = ٦

س٢١ + س٢٢ + س٢٣ = ٤

س٣١ + س٣٢ + س٣٣ = ٣

وبالنسبة للحمولة المنقولة بالسفن

١٥ س١١ + ٢٠ س٢١ + ٣٨ س٣١ + ٢٨ س٥١ ≤ ٢٥٠

١٧ س١٢ + ٢٤ س٢٢ + ٢٩ س٣٢ + ٢٦ س٥٢ ≤ ٣٦٠

١٣ س١٣ + ١٩ س٢٣ + ٣١ س٣٣ + ٥٣ س٥٣ ≤ ٣٢٠

وبالنسبة للاستثمار ٢٫٥ (س٥١ + س٥٢ + س٥٣) ≤ ١٥

حيث قيمة المجاهيل عدد صحيح س ى ج ≥ صفر أى ى = ١، ٢، ٣، ٤، ٥ و

ج = ١، ٢، ٣

الحالة الرابعة : الاخذ فى الاعتبار جميع السفن الحالية والنوع (و) من السفن الجديدة

ويصبح الجدول كالاتى :

الخطوط / انواع السفن	الاول: التكلفة بالالف	الاول: الحمولة بالالف	الثانى: التكلفة بالالف	الثانى: الحمولة بالالف	الثالث: التكلفة بالالف	الثالث: الحمولة بالالف	عدد السفن الحالية	ثمن شراء السفينة الواحدة
أ	١٣٨ + ٢٨ س١١	١٥	١٤٥ + ٣٦ س١٢	١٧	١٣٩ + ٢٧ س١٣	١٣	٦	
ب	١٠٩ + ٢٩ س٢١	٢٠	١٠٢ + ٣٢ س٢٢	٢٤	١١٣ + ٣٧ س٢٣	١٩	٤	
جـ	١٢٠ + ٢٦ س٣١	٣٨	١١٨ + ٣٠ س٣٢	٣٩	١٢٠ + ٢٨ س٣٣	٣١	٣	
و	١٧٨ + ٣٧ س٦١	٢٤	١٦٥ + ٣٩ س٦٢	٢٥	١٣٥ + ٢٥ س٦٣	٢٣		٣٫٥
الحمولة المتاحة على كل خط بالاف طن		٢٥٠		٣٦٠		٣٢٠		
المبلغ الكلى للاستثمار ١٥ مليون جنيه								

ف١ (س) = ١٣٨ س١١ + ١٤٥ س١٢ + ١٣٩ س١٣ + ... + ١٣٥ س ٦٣

اقل ما يمكن

او الربح الكلى من تشغيل الاسطول

ف٢ (س) = ٢٨ س١١ + ٣٦ س١٢ + ٢٧ س١٣ + ... + ٢٥ س٦٣

اكبر ما يمكن

مع العلم بأن بالنسبة لعدد السفن الحالية

س١١ + س١٢ + س١٣ = ٦

س٢١ + س٢٢ + س٢٣ = ٤

س٣١ + س٣٢ + س٣٣ = ٣

وبالنسبة للحمولة المنقولة بالسفن

$$١٥ س_{١١} + ٢٠ س_{٢١} + ٣٨ س_{٣١} + ٢٤ س_{٦١} \geq ٢٥٠$$

$$١٧ س_{١٢} + ٢٤ س_{٢٢} + ٢٩ س_{٣٢} + ٢٥ س_{٦٢} \geq ٣٦٠$$

$$١٣ س_{١٣} + ١٩ س_{٢٣} + ٣١ س_{٣٣} + ٢٣ س_{٦٣} \geq ٣٢٠$$

وبالنسبة للاستثمار $٣٫٥ (س_{٦١} + س_{٦٢} + س_{٦٣}) \leq ١٥$

حيث قيمة المجاهيل عدد صحيح حيث $س_{ى ج} \leq$ صفر لجميع قيم

ى = ١، ٢، ٣، ٦ و ج = ١، ٢، ٣

الحالة الخامسة : الاخذ فى الاعتبار جميع السفن الحالية والنوع (د) ، (هـ) من السفن الجديدة ويصبح الجدول كالاتى :

الخطوط / انواع السفن	الاول		الثانى		الثالث		عدد السفن الحالية	ثمن شراء السفينة الواحدة
	التكلفة بالالف	الحمولة	التكلفة بالالف	الحمولة	التكلفة بالالف	الحمولة		
أ	١٣٨	١٥	١٤٥	١٧	١٣٩	١٣	٦	
	٢٨ س١١		٣٦ س١٢		٢٧ س١٣			
ب	١٠٩	٢٠	١٠٢	٢٤	١١٣	١٩	٤	
	٢٩ س٢١		٣٢ س٢٢		٣٧ س٢٣			
جـ	١٢٠	٣٨	١١٨	٢٩	١٢٠	٣١	٣	
	٢٦ س٣١		٣٠ س٣٢		٢٨ س٣٣			
د	١٥٢	١٩	١٣٢	٢١	١٤٣	٢٣		٢٫٠
	٣٥ س٤١		٢٨ س٤٢		٣٢ س٤٣			
هـ	١٢٤	٢٨	١٢٩	٢٦	١٢٦	١٦		٢٫٥
	٢٩ س٥١		٣٢ س٥٢		٢٦ س٥٣			
الحمولة المتاحة على كل خط بالالف طن	٢٥٠		٣٦٠		٣٢٠			
المبلغ الكلى للاستثمار ١٥ مليون جنيه								

وتصبح دالة الهدف ايجاد التكلفة الكلية للتشغيل

ف ١ (س) = ١٣٨ س١١ + ١٤٥ س١٢ + ١٣٩ س١٣ + ... + ١٢٦ س٥٣

اقل ما يمكن

او الربح الكلى للتشغيل ف٢ (س) = ٢٨ س١١ + ٣٦ س١٢ + ٢٧ س١٣ + ... + ٢٦ س٥٣

اكبر ما يمكن

مع العلم بأنه بالنسبة لعدد السفن الحالية :

س١١ + س١٢ + س١٣ = ٦

س٢١ + س٢٢ + س٢٣ = ٤

س٣١ + س٣٢ + س٣٣ = ٣

وبالنسبة للحمولة المنقولة بالسفن

١٥ س١١ + ٢٠ س٢١ + ٣٨ س٣١ + ١٩ س٤١ + ٢٨ س٥١ ≥ ٢٥٠

١٧ س١٢ + ٢٤ س٢٢ + ٢٩ س٣٢ + ٢١ س٤٢ + ٢٨ س٥٢ ≥ ٣٦٠

١٣ س١٣ + ١٩ س٢٣ + ٣١ س٣٣ + ٢٣ س٤٣ + ١٦ س٥٣ ≥ ٣٢٠

وبالنسبة للاستثمار

٢ (س٤١ + س٤٢ + س٤٣) + ٢٫٥ (س٥١ + س٥٢ + س٥٣) ≥ ١٥

حيث قيمة المجاهيل عدد صحيح حيث س ى ج ≤ صفر وحيث : ج = ٣٦٢٤١ و ى = ١، ٢، ٣، ٤، ٥ .

الحالة السادسة : الاخذ فى الاعتبار جميع السفن الحالية والنوع (د ، و) من السفن الجديدة ويصبح الجدول كالاتى :

الخطوط / انواع السفن	الاول		الثانى		الثالث		عدد السفن الحالية	ثمن شراء السفينة الواحدة
	التكلفة بالالف	الحمولة	التكلفة بالالف	الحمولة	التكلفة بالالف	الحمولة		
أ	١٣٨ س١١	١٥ ٢٨	١٤٥ س١٢	١٧ ٣٦	١٣٩ س١٣	١٣ ٢٧	٦	
ب	١٠٩ س٢١	٢٠ ٢٩	١٠٢ س٢٢	٢٤ ٣٢	١١٣ س٢٣	١٩ ٣٧	٤	
جـ	١٢٠ س٣١	٣٨ ٢٦	١١٨ س٣٢	٢٩ ٣٠	١٢٠ س٣٣	٣١ ٢٨	٣	
د	١٥٢ س٤١	١٩ ٣٥	١٣٢ س٤٢	٢١ ٢٨	١٤٣ س٤٣	٢٣ ٣٢		٢ر٠
و	١٧٨ س٦١	٢٤ ٣٧	١٦٥ س٦٢	٢٥ ٣٩	١٣٥ س٦٣	٢٣ ٢٥		٣ر٥
الحمولة المتاحة على كل خط بالالف طن	٢٥٠		٣٦٠		٣٢٠			
المبلغ الكلى للاستثمار ١٥ مليون جنيه								

وتصبح دالة الهدف ايجاد التكلفة الكلية للتشغيل

ف ١ (س) = ١٣٨ س١١ + ١٤٥ س١٢ + ١٣٩ س١٣ + ... + ١٦٥ س٦٢ +
+ ١٣٥ س٦٣

اقل ما يمكن ٠ أو الربح الكلى للتشغيل

ف ٢ (س) = ٢٨ س١١ + ٣٦ س١٢ + ٢٧ س١٣ + ... + ٣٩ س٦٢ +
+ ٢٥ س٦٣

اكبر ما يمكن

مع العلم بأنه بالنسبة للسفن الحالية

$$س_{11} + س_{12} + س_{13} = 6$$
$$س_{21} + س_{22} + س_{23} = 4$$
$$س_{31} + س_{32} + س_{33} = 3$$

وبالنسبة للحمولة المنقولة بالسفن

$$15 س_{11} + 20 س_{21} + 38 س_{31} + 19 س_{41} + 24 س_{61} \geq 250$$
$$17 س_{12} + 24 س_{22} + 29 س_{32} + 21 س_{42} + 25 س_{62} \geq 360$$
$$13 س_{13} + 19 س_{23} + 31 س_{33} + 23 س_{43} + 23 س_{63} \geq 320$$

وبالنسبة للاستثمار

$$2 (س_{41} + س_{42} + س_{43}) + 3{,}5 (س_{61} + س_{62} + س_{63}) \geq 15$$

حيث قيمة المجاهيل عدد صحيح لقيم س ى ج $\leq$ صفر وحيث :

ج = ١ ، ٢ ، ٣ و = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦

الحالة السابعة : الاخذ فى الاعتبار جميع السفن الحالية والنوع (هـ ، و) من السفن الجديدة ويصبح الجدول كالاتى :

الخطوط / انواع السفن	الاول		الثانى		الثالث		عدد السفن الحالية	ثمن شراء السفينة الجديدة
	التكلفة	الحمولة بالالف	التكلفة	الحمولة بالالف	التكلفة	الحمولة بالالف		
أ	١٣٨	١٥	١٤٥	١٧	١٣٩	١٣	٦	
	٢٨ س ١١		٣٦ س ١٢		٢٧ س ١٣			
ب	١٠٩	٢٠	١٠٢	٢٤	١١٣	١٩	٤	
	٢٩ س ٢١		٣٢ س ٢٢		٣٧ س ٢٣			
جـ	١٢٠	٣٨	١١٨	٢٩	١٢٠	٣١	٣	
	٢٦ س ٣١		٣٠ س ٣٢		٢٨ س ٣٣			
هـ	١٢٤	٢٨	١٢٨	٢٦	١٢٦	١٦		٢٫٥
	٢٩ س ٥١		٣٢ س ٥٢		٢٦ س ٥٣			
و	١٧٨	٢٤	١٦٥	٢٥	١٣٥	٢٣		٣٫٥
	٣٧ س ٦١		٣٩ س ٦٢		٢٥ س ٦٣			
الحمولة المتاحة على كل خط بالالف طن	٢٥٠		٣٦٠		٣٢٠			
المبلغ الكلى للاستثمار ١٥ مليون جنيه								

وتصبح دالة الهدف ايجاد التكلفة الكلية للتشغيل

ف ١ (س) = ١٣٨ س ١١ + ١٤٥ س ١٢ + ١٣٩ س ١٣ + ... + ١٢٦ س ٥٣ + ...

+ ١٣٥ س ٦٣

اقل ما يمكن

او الربح الكلى للتشغيل

ف ٢ (س) = ٢٨ س١١ + ٣٦ س١٢ + ٢٧ س١٣ + ٠٠٠ + ٣٩ س٦٢ + ٢٥ س٦٣

اكبر ما يمكن

مع العلم بأنه بالنسبة لعدد السفن الحالية

س١١ + س١٢ + س١٣ = ٦

س٢١ + س٢٢ + س٢٣ = ٤

س٣١ + س٣٢ + س٣٣ = ٣

وبالنسبة للحمولة المنقولة بالسفن

١٥ س١١ + ٢٠ س٢١ + ٣٨ س٣١ + ٢٨ س٥١ + ٢٤ س٦١ ≤ ٢٥٠

١٧ س١٢ + ٢٤ س٢٢ + ٢٩ س٣٢ + ٢٦ س٥٢ + ٢٥ س٦٢ ≤ ٣٦٠

١٣ س١٣ + ١٩ س٢٣ + ٣١ س٣٣ + ١٦ س٥٣ + ٢٣ س٦٣ ≤ ٣٢٠

وبالنسبة للاستثمار

٢٥ (س١٥ + س٢٥ + س٥٣) + ٣٥ (س٦١ + س٦٢ + س٦٣) ≤ ١٥

حيث قيمة المجاهيل عدد صحيح حيث س ج ى ≥ صفر ، وحيث ج = ١ ، ٢ ، ٣ و ى = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦

obeikan.com