الفصل الرابع

الطريقة البيانية

تستخدم الطريقة البيانية Graphical Method لحل المشاكل التى لا يزيد فيها عدد المجاهيل عن مجهولين حيث يمكن تصوير المتباينات الخطية Inequalities بمساحات محدودة بالخطوط المستقيمة تحتها او فوقها. ويمكن حل جميع المتباينات الممثلة بين هذه المساحات المختلفة، ويتكون حل المتباينات من مجموعة من النقط يمثل كل منها حلا ممكنا للمشكلة ويتميز استخدام هذه الطريقة باختيار افضل الحلول من بين البدائل المختلفة للوصول الى الحل الامثل. ويمكن توضيح الطريقة البيانية فى الامثلة الاتية :

أولا : تمثيل القيود الخطية الهيكلية والقيود اللاسالبة ودالة الهدف على الرسم البيانى (الخطة المثلى لنقل شحنات على سفينتين – مشكلة تعظيم) :

بفرض انه يوجد ثلاثة انواع من الشحنات أ ، ب ، جـ يراد نقلها على سفينتين ويوضح الجدول الاتى البيانات الخاصة بهذه المشكلة .

انواع الشحنات	كمية الشحنات المنقولة فى الرحلة الواحدة (بوحدات الحمولة)		الكمية العامة المطلوب نقلها (بوحدات الحمولة)
	السفينة الاولى	السفينة الثانية	
الشحنة أ	٣٠٠٠	٣٠٠٠	٢١٠٠٠
الشحنة ب	١٠٠٠	٢٠٠٠	١٠٠٠٠
الشحنة جـ	٤٥٠٠	٣٠٠٠	٢٧٠٠٠
الربح للرحلة الواحدة (بالوحدات النقدية)	١٢٠٠٠	١٦٠٠٠	

ويكون المطلوب تحديد عدد الرحلات لكل سفينة لنقل الشحنات الثلاثة

باكبر مجموع ربح كلى ممكن.وواضح ان الربح سيتوقف على عدد الرحلات التى ستنجزها كل سفينة. فاذا رمزنا للربح الكلى بالرمز ف(س) ولعدد رحلات السفينة الاولى بالرمز (س١) ولعدد رحلات السفينة الثانية بالرمز (س٢) فاننا نحصل على الدالة الخطية الاتية :

$$ف(س) = ١٢٠٠٠ س_١ + ١٦٠٠٠ س_٢ \qquad (١)$$

ويلاحظ ان هذه الدالة تربط معيار التغير (الربح) ف(س) بالمتغيرات القرارية Decision Variables س١ ،س٢ . وبالنسبة لقيود المشكلة فهى تتمثل فى الشحنات المطلوب نقلها بالسفينتين وهذه الكميات ثابتة خلال فترة حل المشكلة.ومعنى ذلك انه توجد لدينا موارد محدودة يعبر عنها بالقيود الخطية الهيكلية Linear Structural Constraints الاتية :

$$٣٠٠٠ س_١ + ٣٠٠٠ س_٢ \geq ٢١٠٠٠$$
$$١٠٠٠ س_١ + ٢٠٠٠ س_٢ \geq ١٠٠٠٠ \qquad (٢)$$
$$٤٥٠٠ س_١ + ٣٠٠٠ س_٢ \geq ٢٧٠٠٠$$
$$س_١ ، س_٢ \leqslant صفر \qquad (٣)$$

ويلاحظ على هذه القيود الاتى :

١ — تسمى المتغيرات الواردة فى دالة الهدف الخطية (س١ ،س٢)بالمتغيرات القرارية.

٢ — كما تسمى معاملات المتغيرات القرارية فى دالة الهدف التى تعبر عنها بالربح اذا كانت المشكلة تعظيم او بالتكلفة اذا كانت المشكلة تقليل بمعاملات دالة الهدف Objective Function Coefficients .

٣ — وتسمى معاملات المتغيرات القرارية فى القيود الهيكلية بمعاملات المدخلات والمخرجات Input/Output Coefficients وتمثلها مجموعة القيود رقم (٢).

ونوضح فيما يلى كيفية تمثيل القيود الخطية الهيكلية والقيود اللاسالبية ودالة الهدف الخطية على الرسوم البيانية الاتية :

فبالنسبة للمتباينة الخاصة بالشحنة (أ) نلاحظ انها ٣ س١ + ٣ س٢ ≥ ٢١ ومعنى هذه المتباينة ان السفينة الاولى يشحن عليها (٣) وحدات حمولة من

الشحنة (أ). والسفينة الثانية يشحن عليها (٣) وحدات حمولة من الشحنة (أ) وبذلك فان الناتج لايجب ان يزيد عن ٢١ وحدة حمولة اى ان ٣ س١ + ٣س٢ ≥ ٢١ ومعنى ذلك اننا يمكننا الحصول على حل ممكن Feasible Solution فى حدود هذه الامكانيات ويمكن التعبير عن هذا القيد بالرسم البيانى رقم (١) حيث س١ = ٧ ، س٢ = ٧ فاذا قمنا بتوصيل النقاط ك ، ل بخط مستقيم نحصل على المعادلة ٣ س١ + ٣ س٢ = ٢١ .

كما يمكن تمثيل الشحنة (ب) التى تمثل المتباينة ١ س١ + ٢ س٢ ≥ ١٠ على الرسم البيانى رقم (٢) حيث س١ = ١٠ ، س٢ = ٥ وبتوصيل النقاط م ، ن بخط مستقيم نحصل على المعادلة ١ س١ + ٢ س٢ ≥ ١٠ وبالنسبة للشحنة (جـ) حيث ٤,٥ س١ + ٣ س٢ ≥ ٢٧ ومنها نحصل على الرسم البيانى رقم (٣) حيث س١ = ٦ ، س٢ = ٩ وبتوصيل النقاط ر ، ص نحصل على المعادلة ٤,٥ س١ + ٣ س٢ = ٢٧ ويمكن جمع الرسوم ١ ، ٢ ، ٣ فى الرسم المجمع وبذلك تكون قد عبرنا عن مجموعة القيود الهيكلية فى الاشكال البيانية السابقة وجمعناها فى الرسم البيانى المجمع.

تمثيل دالة الهدف على الرسم البيانى :

واضح فى هذه المشكلة ان دالة الهدف عبارة عن تعظيم ف(س) = ١٢ س١ + ١٦,٠ س٢ وهذه الدالة يمكن تصويرها لقيم مختلفة فى الارباح الكلية بالوحدة النقدية مثل ١٩٢ ، ٣٨٤ ويلاحظ ان الرسم الخاص بدالة الهدف الخطية لمبلغ محدد من الارباح يكون فى صورة خط مستقيم يسمى خط الربح المتساوى Isoprofit Line، وكل نقطة على هذا الخط تنتمى الى برنامج كما ان كل نقطة تعطينا نفس الربح مثلها مثل اى نقطة اخرى على هذا الخط . ويكون السؤال هنا هو كيف يمكن رسم خط الربح المتساوى ؟ والاجابة هى انه يتم ذلك باختيار مستوى رقم معين وايجاد قيم س١ ، س٢ التى تعطينا هذا المستوى من الربح ثم نوصل هذه النقاط بخط مستقيم وعلى سبيل المثال ما هى كمية الشحنات التى ستنقلها السفينة الاولى فقط وما هى كمية الشحنات التى تنقلها السفينة الثانية فقط لكى نحصل على ربح يعادل ١٩٢ وحدة نقدية ؟

وحيث ان ربح الرحلة للسفينة الاولى ١٢ فاننا نحتاج الى ١٦ وحدة حمولة تنقلها على السفينة الاولى حيث $س_١$ = ١٦ وبالمثل اذا كان ربح الرحلة للسفينة الثانية ١٦ فاننا نحتاج الى ١٢ وحدة حمولة لنقلها حيث $س_٢$ = ١٢ وتكون النقاط على خط الربح المتساوى كالآتى : اذا كانت $س_١$ = ١٦ فان $س_١$ = صفر. واذا كانت $س_١$ = صفر فان $س_٢$ = ١٢ وهكذا بالنسبة لبقية النقاط وبذلك نحصل على :

ف(س) = ١٢ $س_١$ + ١٦ $س_٢$

= ١٢ × ١٦ + صفر = ١٩٢

ف(س) = ١٢ $س_١$ + ١٦ $س_٢$

= صفر + ١٦ × ١٢ = ١٩٢

ف(س) = ١٢ $س_١$ + ١٦ $س_٢$

= ١٢ × ١٦ + ١٦ × ١٢ = ٣٨٤

تمثيل القيود اللاسالبة على الرسم البيانى :

يلاحظ ان القيود اللاسالبة فى هذه المشكلة هى $س_١$ ≥ صفر ، $س_٢$ ≥ صفر ويمثل المحور الافقى فى الرسم ($س_١$) كما يمثل المحور الرأسى ($س_٢$) حيث يتقاطعان فى نقطة (صفر) ويلاحظ انه بالنسبة الى $س_٢$ ≥ صفر تمثلها جميع النقط التى تقع على المحور ($س_٢$) وكذلك محور ($س_١$) وكذلك النقاط التى تقع اعلى منه وتصبح المنطقة المشتركة هى المنطقة المظللة بخطوط عرضية وطولية ويطلق عليها الربع الاول بما فيها صفر $س_١$ ، صفر $س_٢$ وهى التى تمثل كل من $س_١$ ≥ صفر ، $س_٢$ ≥ صفر وتصبح كما فى الرسم الموضح بعد الرسم المجمع .

الوصول الى الحل الامثل :

يتم الوصول الى الحل الامثل كالاتى :

١ - يعتبر اى حل يحقق القيود الهيكلية والقيود اللاسالبة حلا ممكنا .

٢ - من نقاط الحلول الممكنة فان الحل الامثل يوجد عند النقط المتطرفة Extreme Points ومن ثم يستلزم الامر اختيار مثل هذه النقاط

الاساسية للوصول الى الحل الامثل.وتسمى اى نقطة نهائية الحل الاساسى الممكن Basic feasible solution تتمثل فى النقاط OMHL ومن هذه النقاط نختار نقطة الحل النهائية التى تعطينا اكبر ربح وهذه النقطة هى (هـ)٠

وواضح من الرسم البيانى المجمع ان منطقة الحلول الممكنة تمر بالنقطة (هـ) التى تمثل الحل الامثل من بين عدد من الحلول غير المحدودة Infinite والتى تمثلها المنطقة المظللة فى الرسم.ويمكن تحديد احداثيات النقطة (هـ) مباشرة من الرسم البيانى او من تقاطع خطين يمران بالنقطة (هـ) ومعادلات هذه الشروط التى تمثلها عدد الرحلات بالنسبة للسفينة الاولى والسفينة الثانية بالنسبة للحنة (أ) ٠

$$٣\,\text{س}_{١} + ٣\,\text{س}_{٢} = ٢١$$

وبالقسمة على (٣) نحصل على

$$\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} = ٧$$

$$\text{س}_{٢} = ٧ - \text{س}_{١} \qquad (٥)$$

كما انه بالنسبة للشحنة (ب)

$$\text{س}_{١} + ٢\,\text{س}_{٢} = ١٠$$

وبالقسمة على (٢) نحصل على

$$\frac{١}{٢}\,\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} = ٥$$

$$\text{س}_{٢} = ٥ - \frac{١}{٢}\,\text{س}_{١} \qquad (٦)$$

ومن المعادلة ٥ ، ٦ نحصل على :

$$٧ - \text{س}_{١} = ٥ - \frac{١}{٢}\,\text{س}_{١}$$

$$٧ - ٥ = - \frac{١}{٢}\,\text{س}_{١} + \text{س}_{١}$$

$$٢ = \frac{١}{٢}\,\text{س}_{١}$$

$$\text{س}_{١} = ٤$$

وباحلال قيمة (س١) في المعادلة (٥) نحصل على :

$$\text{س}_{٢} = ٧ - \text{س}_{١}$$

س١ ٢ ـ ٤ ١٠

ومعنى ذلك انه بالنسبة للسفينة الاولى يتم انجاز (٤) رحلات وبالنسبة للسفينة الثانية يتم انجاز (٣) رحلات وتصبح دالة الهدف (بالالف وحدة نقدية)

ف(س) = ١٢ $س_{١}$ + ١٦ $س_{٢}$

= ١٢ × ٤ + ١٦ × ٣ = ٩٦

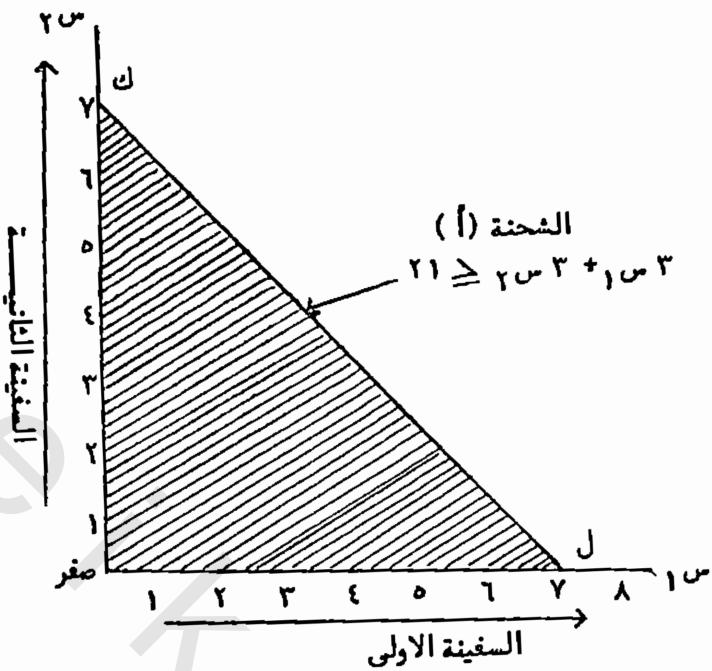
وبالتعويض فى المتباينات نحصل على :

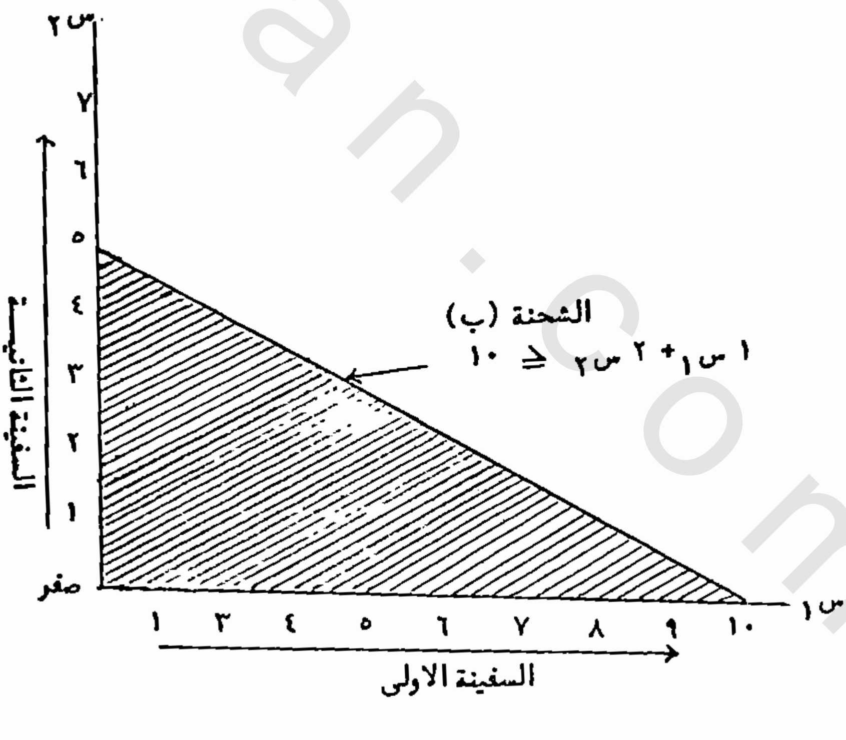
٣ $س_{١}$ + ٣ $س_{٢}$ ≤ ٢١   ٣ × ٤ + ٣ × ٣ = ٢١

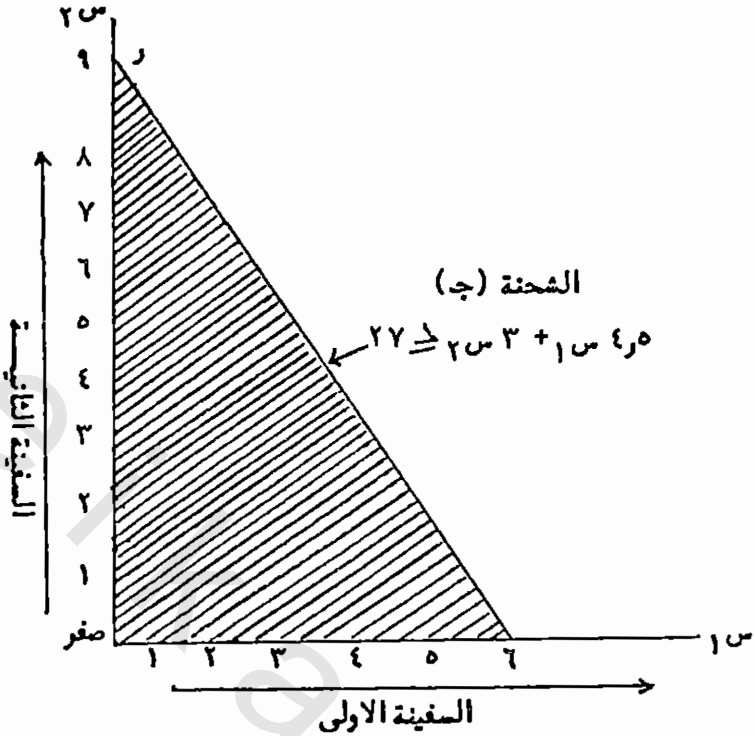
$س_{١}$ + ٢ $س_{٢}$ ≤ ١٠   ١ × ٤ + ٢ × ٣ = ١٠

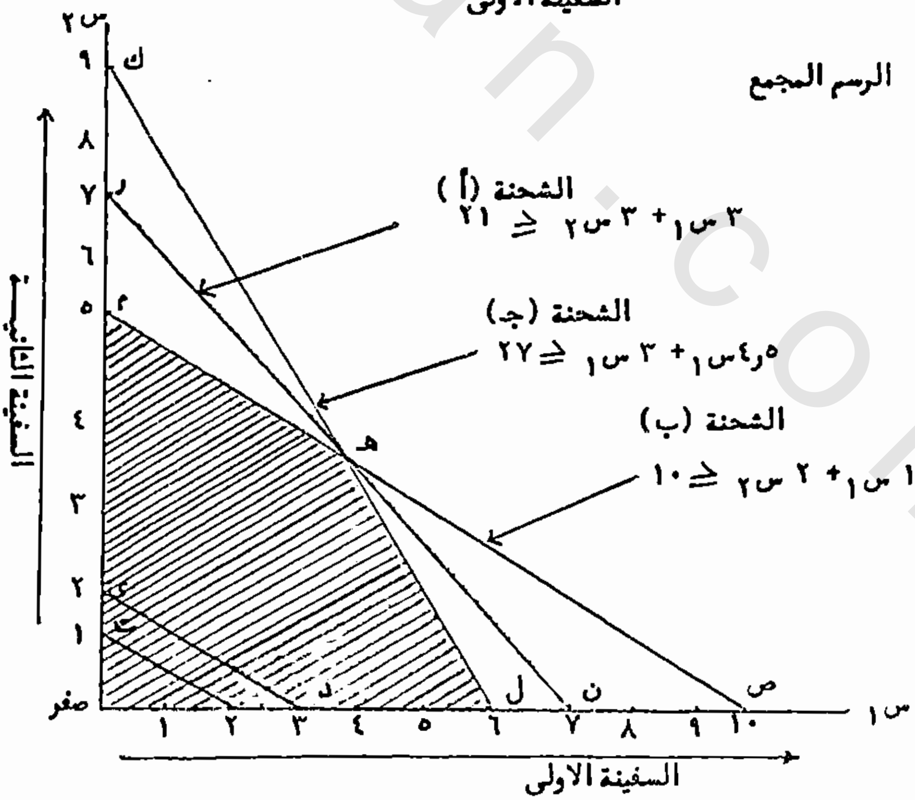
٤ر٥ $س_{١}$ + ٣ $س_{٢}$ ≤ ٢٧   ٤ر٥ × ٤ + ٣ × ٣ = ٢٧

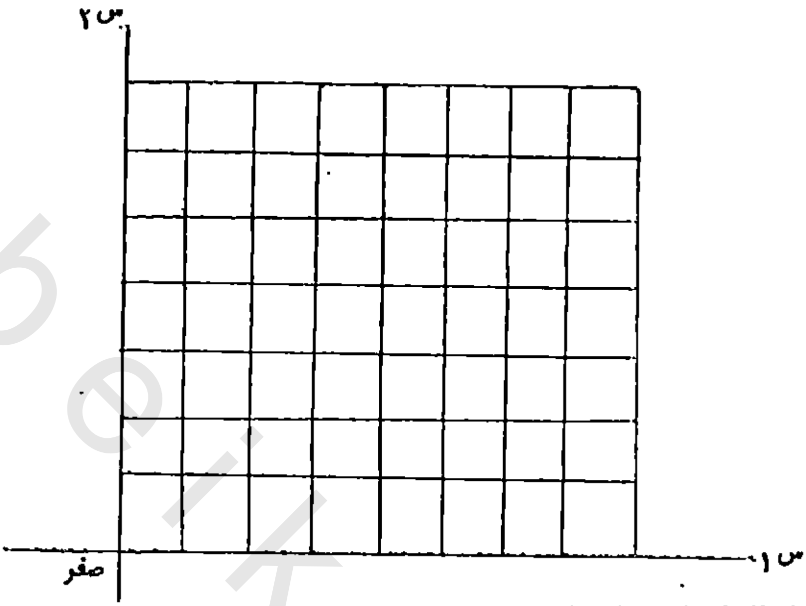
وواضح من الرسم البيانى المجمع ايضا ان $س_{١}$ = ٤ ، $س_{٢}$ = ٣


س٢
ك
٧
٦
٥
٤
٣
٢
١
صفر
السفينة الثانية
الشحنة (أ)
٣ س١ + ٣ س٢ ≤ ٢١
ل
س١
١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨
السفينة الاولى


س٢
٧
٦
٥
٤
٣
٢
١
صفر
السفينة الثانية
الشحنة (ب)
١ س١ + ٢ س٢ ≤ ١٠
س١
١ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠
السفينة الاولى


س ٢
ر
السفينة الثانية
الشحنة (جـ)
٤٫٥ س ١ + ٣ س ٢ ≥ ٢٧
صفر
س ١
السفينة الاولى


س ٢
ك
الرسم المجمع
ر
الشحنة (أ)
٣ س ١ + ٣ س ٢ ≥ ٢١
م
الشحنة (جـ)
٤٫٥ س ١ + ٣ س ١ ≥ ٢٧
الشحنة (ب)
هـ
١ س ١ + ٢ س ٢ ≥ ١٠
السفينة الثانية
صفر
د
ل
ن
ص
س ١
السفينة الاولى



الخطة المثلى لتوزيع الصنادل بالميناء على خطين (مشكلة تعظيم) :

بفرض وجود اربعة انواع من الصنادل أ ، ب ، جـ ، د ضمن اسطول الميناء للنقل على خطين ويشترط الاستخدام الامثل لهذه الصنادل ، والمطلوب توزيع هذه الصنادل على الخطين ، بحيث تكون الشحنات المنقولة اكبر ما يمكن ، وفيما يلى البيانات الخاصة بهذه المشكلة .

نوع الصنادل	حمولة الصنادل	عدد الصنادل	نظام قطر الصنادل للخط أ	نظام قطر الصنادل للخط ب
أ	٣٠٠	٢٠	٢	٢
ب	٥٠٠	١٤	١	٢
جـ	٦٠٠	٣٢	٤	صفر
د	٨٠٠	٢٤	صفر	٤

طريقـة الحـل :

[illegible] (أ) تكون

وعلى الخط (ب) تكون :

$$٢ \times ٣٠٠ + ٢ \times ٥٠٠ + صفر \times ٦٠٠ + ٤ \times ٨٠٠ = ٤٨٠٠$$

فاذا رمزنا بالرمز ($س_{١}$) للحمولة على الخط (أ) بالرمز ($س_{٢}$) للحمولة على الخط (ب) فان دالة الهدف تصبح

$$ف(س) = ٣٥٠٠\, س_{١} + ٤٨٠٠\, س_{٢} \qquad (١)$$

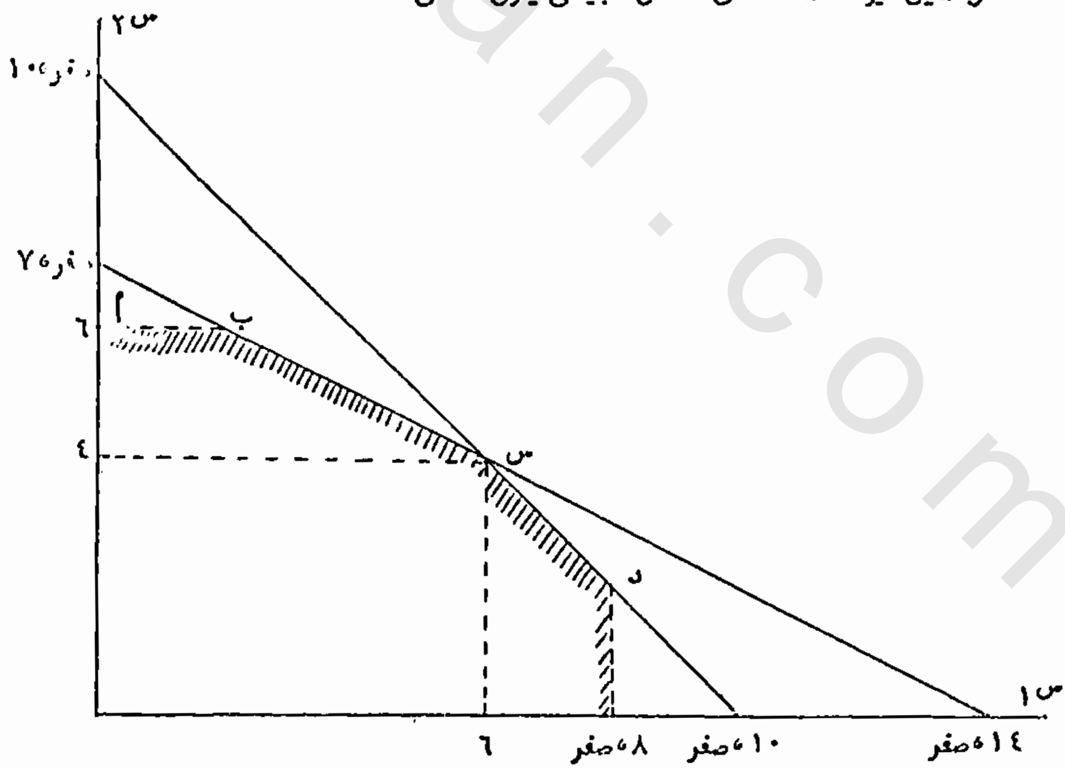
حيث $س_{١}$ ، $س_{٢}$ يمثلان عدد مرات النقل على الخط

وتصبح قيود المشكلة كالآتى :

$$\left.\begin{array}{l} ٢\, س_{١} + ٢\, س_{٢} \geqq ٢٠ \\ س_{١} + ٢\, س_{٢} \geqq ١٤ \\ ٤\, س_{١} + صفر\, س_{٢} \geqq ٣٢ \\ صفر\, س_{١} + ٤\, س_{٢} \geqq ٢٤ \end{array}\right\} \qquad (٢)$$

وكذلك فان $س_{١} \leqslant$ صفر ، $س_{٢} \leqslant$ صفر (٣)

وبتمثيل قيود المشكلة على الشكل البيانى يكون كالاتى :



وواضح من الرسم البيانى السابق ان الحل الامثل هو س$_1$ = ٦ ، س$_2$ = ٤ وتصبح
دالة الهدف ف(س) = ٣٥٠٠ س$_1$ + ٤٨٠٠ س$_2$

= ٢١٠٠٠ + ١٩٢٠٠ = ٤٠٢٠٠

ولبرهنة هذا الحل على المتباينات نلاحظ الاتى :

٢ س$_1$ + ٢ س$_2$ ≤ ٢٠ = ٢ × ٦ + ٢ × ٤ = ٢٠

س$_1$ + ٢ س$_2$ ≤ ١٤ = ٦ + ٨ = ١٤

٤ س$_1$ ≤ ٣٢ = ٤ × ٦ = ٢٤ < ٣٢

٤ س$_2$ ≤ ٢٤ = ٤ × ٤ = ١٦ < ٢٤

ومعنى ذلك ان الصنادل من النوع أ ، ب يتم تشغيلها بالكامل اما الصنادل من النوع (جـ) فان الموجود منها ٣٢ صندل يتم تشغيل (٢٤) منها فقط كما ان الصنادل من النوع (د) موجود منها (٢٤) صندل لايتم تشغيل الا (١٦) فقط ٠

ثالثا : الخطة المثلى لنقل شحنات مختلفة على سفينتين (مشكلة تقليل) :

المطلوب نقل الشحنات أ ، ب ، جـ ، د على سفينتين باقل مجموع تكلفة نقل ممكنة ويوضح الجدول الاتى البيانات الخاصة بهذه المشكلة ٠

انواع الشحنات	كمية الشحنات المنقولة فى الرحلة الواحدة (بوحدات الحمولة)		كمية الشحنات المطلوب نقلها (بوحدات الحمولة)
	السفينة الاولى	السفينة الثانية	
الشحنة أ	٣٠٠٠	٣٠٠٠	٢١٠٠٠
الشحنة ب	١٠٠٠	٢٠٠٠	١٠٠٠٠
الشحنة جـ	—	٤٠٠٠	٤٠٠٠
الشحنة د	٢٠٠٠	—	٤٠٠٠
تكلفة النقل المرحلة الواحدة (بالوحدات النقدية)	١٢٠٠٠	١٦٠٠٠	—

فاذا رمزنا لعدد الرحلات للسفينة الاولى بالرمز س$_1$ ولعدد رحلات السفينة الثانية بالرمز س$_2$ تصبح دالة الهدف على النحو الاتى (الارقام بالالف وحدة)

المطلوب تقليل الدالة

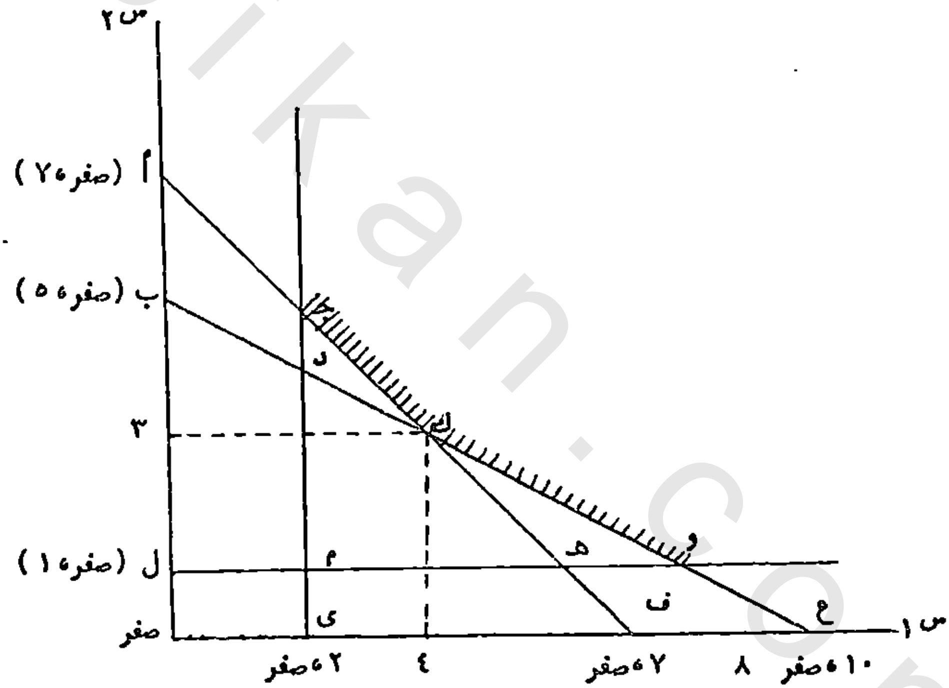
ف(س) = ١٢ س$_1$ + ١٦ س$_2$ (١)

بشرط تحقيق القيود الاتية :

٣ س$_1$ + ٣ س$_2$ ≥ ٢١
١ س$_1$ + ٢ س$_2$ ≥ ١٠
٤ س$_2$ ≥ ٤
٢ س$_1$ ≥ ٤ (٢)

س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفر (٣)

ويصبح الشكل البيانى كالاتى :



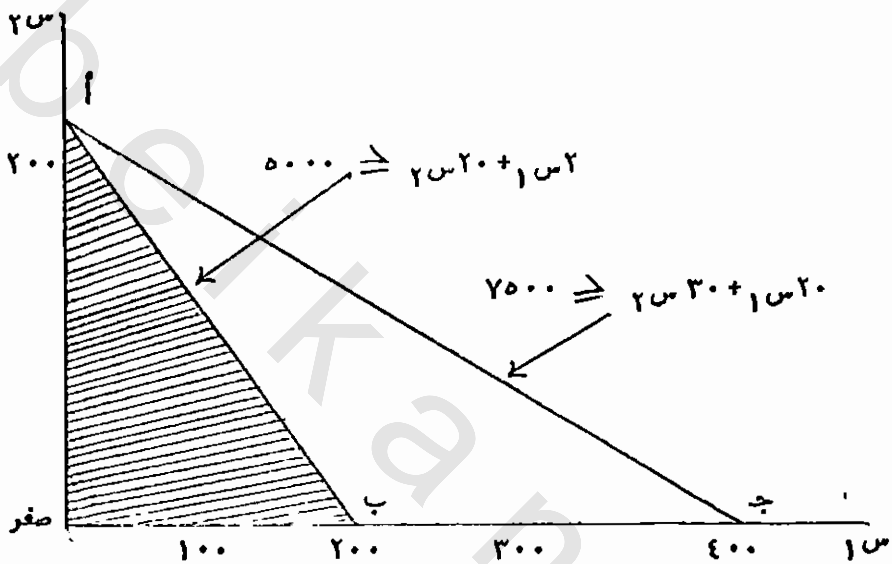
ويصبح الحل الامثل هو س$_1$ = ٤ ،س$_2$ = ٣ كما تصبح دالة الهـــــدف

ف(س) = ١٢ × ٤ + ١٦ × ٣ = ٩٦

<u>بعض الحالات الخاصة للطريقة البيانية :</u>

هناك بعض الحالات الخاصة للطريقة البيانية نذكر منها الاتى :

١ – حالة عدم انتظام الحلول الاساسية الممكنة : Degenerate Basic Feasible solutions وهذه الحالة لها خاصية ان عدد المتغيرات الموجبة التى تكون الحل تكون اقل من عدد القيود الهيكلية (م) ويوضح الرسم البيانى الاتى هذه الحالة عند النقطة (أ) ٠



وذلك بافتراض الاتى :

عظم الدالة الاتية :

$$ف(س) = ٤٠ س_١ + ٥٠ س_٢ \qquad (١)$$

بشرط تحقيق القيود الاتية :

$$\left.\begin{array}{l} ٢٥ س_١ + ٢٠ س_٢ \leq ٥٠٠٠ \\ ٢٠ س_١ + ٣٠ س_٢ \leq ٧٥٠٠ \end{array}\right\} \qquad (٢)$$

$$س_١ ، س_٢ \geq صفر \qquad (٣)$$

وفى الرسم السابق يصبح الحل الامثل عند النقطة (أ) والتى عندها تصبح $س_١$ = صفر ، $س_٢$ = ٢٥٠ وهو عدد المتغيرات الموجبة فى الحل الامثل (١) بينما عدد القيود الهيكلية (م) يساوى (٢) ومن ثم نحصل على حالة عدم انتظام الحلول الاساسية الممكنة ٠

٢ ـ مشكلة بدون حل امثل نهائى Unbounded solution يلاحظ ان مجموعة قيود البرمجة الخطية اما ان تعطى حل امثل نهائى كما فى الرسم البيانى قبل الاخير او لا تعطى حلا امثلا نهائيا . ولكى نصور مشكلة بدون حل امثل نهائى نفرض الاتى :

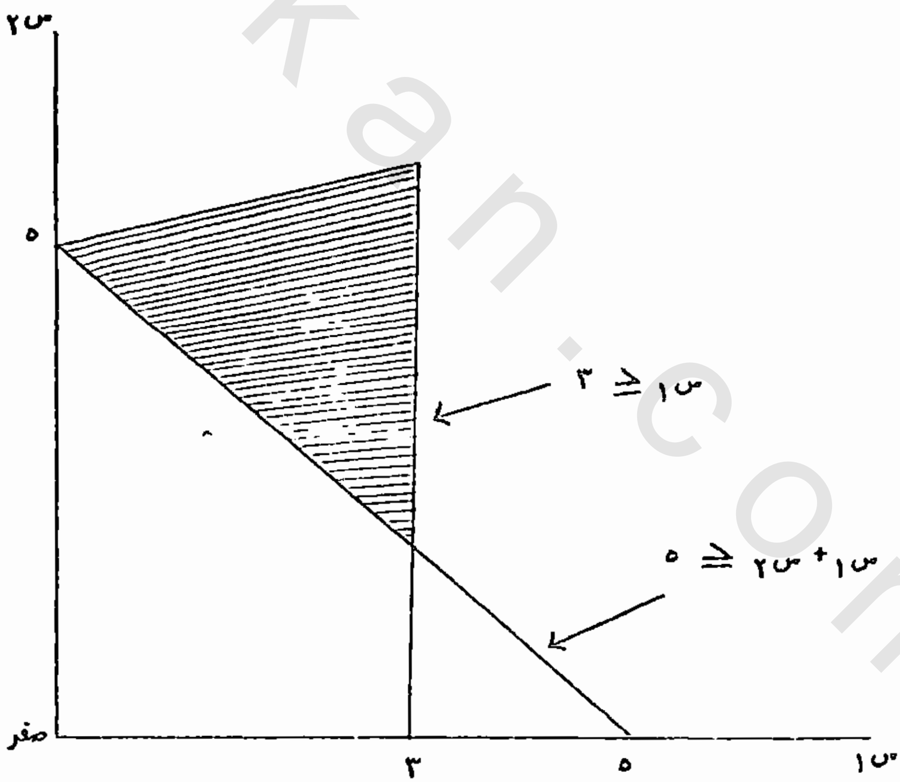
عظم الدالة الاتية ف(س) = ٣ س$_١$ + ٢ س$_٢$ (١)

بشرط تحقيق القيود الاتية :

س$_١$ ≥ ٣ ⎫
س$_١$ + س$_٢$ ≥ ٥ ⎭ (٢)

س$_١$ ، س$_٢$ ≤ صفر (٣)

ويوضح الرسم البيانى الاتى هذه المشكلة



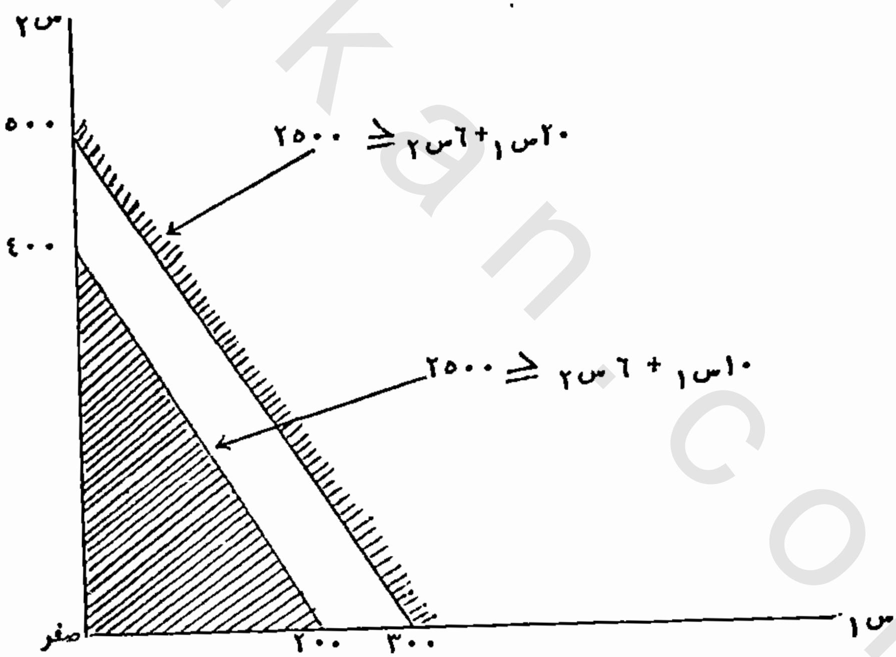
٣ ـ مشكلة ليس لها حل امثل No Feasible Solution بفرض المثال الاتى :

عظم دالة الهدف : ف(س) = ١٠ س١ + ٢٠ س٢ (١)

بشرط تحقيق القيود الاتية ١٠ س١ + ٦ س٢ ≧ ٢٥٠٠
١٠ س١ + ٦ س٢ ≧ ٣٠٠٠ (٢)

١٠ س١ ، ٢ س٢ ≧ صفر (٣)

ويمكن تصوير هذه المشكلة على الرسم البيانى الاتى :



وواضح ان هذه المشكلة ليس لها حل امثل .