الفصل الخامس

طريقة السمبلكس

فى عام ١٩٤٧ قام العالم الامريكى جورج دانتزج G.Dantzig بصياغة طريقة لحل مشكلة البرمجة الخطية سميت بطريقة السمبلكس Simplex Method و تستخدم هذه الطريقة فى حالة كون المجاهيل اكثر من مجهولين اذ ان الطريقة البيانية تستخدم فقط لحل المشاكل التى بها مجهولين فقط .

وتقوم طريقة السمبلكس فى حالة تعظيم الربح مثلا على فكرة التعظيم المضطرد للارباح حتى نصل الى اعظم ربح ممكن الحصول عليه. وفى حالة تقليل التكلفة تتم خطوات الحل على مراحل بحيث يصير الحل النهائى معبرا عن اقل تكلفة ممكنة .

وباستخدام طريقة السمبلكس يمكن ايجاد الحل الذى يعظم او يقلل دالة الهدف . ويفضل متخذ القرار ان يكون امامه عددا من البدائل يختار من بينها الحل المناسب. ولهذا تتلخص طريقة السمبلكس فى اختيار الحل من بين الحلول الاساسية التى تحقق القيمة المثلى لدالة الهدف فى الحالات الثلاثة الاتية :

<u>الحالة الاولى</u> : حالة القيود الهيكلية اقل من او تساوى حيث يستلزم الامر اضافة متغير جديد لكل متباينة لتحويلها الى معادلة تساوى الطرفين، وتسمى بالمتغيرات المكملة (او العاطلة Slack Variables) غير المستغلة. ويكون عدد المتغيرات المكملة معادلا لعدد المعادلات كما ان احلال احد المتغيرات العاطلة بمتغير عادى يتم اختياره من بين المتغيرات العادية على أساس دالة الهدف .

<u>الحالة الثانية</u> : حالة القيود الهيكلية اكبر من او تساوى نطرح المتغيرات المكملة ونضيف المتغيرات المساعدة Artifical Variables

<u>الحالة الثالثة</u> : حالة القيود الهيكلية تساوى اذ يحدث احيانا ان تكون القيود على شكل معادلات وليس على شكل متباينات ويحدث ذلك اذا كان هناك اتجاها فى استغلال الموارد المتاحة استغلالا كاملا مما يسمح باستنفاذ جميع الموارد المتاحة. اى ان الحل الامثل فى هذه الحالة لا يترك اى مورد من

الموارد المتاحة عاطلا ٠ ويمنى ذلك اننا نطرح من المتباينات المتغيرات المكملة ونضيف المتغيرات المساعدة ٠

وسنوضح هذه الحالات فى النقاط الثلاثة الاتية :

الحالة الاولى : معالجة القيود الهيكلية فى حالة اقل من او يساوى (≥):

الخطة المثلى لنقل شحنات مختلفة على سفينتين :

بفرض انه يوجد ثلاثة انواع من الشحنات أ ، ب ، ج يراد شحنها على سفينتين ، ويوضح الجدول الاتى البيانات الخاصة بهذه المشكلة ٠

انواع الشحنات	ما تنقله كل سفينة فى الرحلة الواحدة (بوحدات الحمولة)		الشحنات المطلوب نقلها (بوحدات الحمولة)
	السفينة الاولى	السفينة الثانية	
أ	١	٢	١٢
ب	٥	٤	٣٠
ج	٣	١٠	١٥
الربح لكل رحلة (بالوحدات النقدية)	٤٠	٣٠	

والمطلوب تحديد عدد الرحلات لكل سفينة لنقل الشحنات الثلاثة باكبر مجموع كلى للربح ٠

فاذا رمزنا للربح بالرمز ف(س) وعدد الرحلات للسفينة الاولى بالرمز س$_1$ وللسفينة الثانية بالرمز س$_2$ فان دالة الهدف تكون

ف(س) = ٤٠ س$_1$ + ٥٠ س$_2$

بشرط تحقيق القيود الاتية :

١ س$_1$ + ٢ س$_2$ ≥ ١٢

٥ س$_1$ + ٤ س$_2$ ≥ ٣٠

٣ س$_1$ + ١ س$_2$ ≥ ١٥

س$_1$ ، س$_2$ ≤ صفر

ولتحويل القيود الى معادلات نضيف المتغيرات المكملة س$_{3}$، س$_{4}$، س$_{5}$ وتصبح المشكلة كالاتى :

١ س$_{1}$ + ٢ س$_{2}$ + س$_{3}$ = ١٢

٥ س$_{1}$ + ٤ س$_{2}$ + س$_{4}$ = ٣٠

٣ س$_{1}$ + ١ س$_{2}$ + س$_{5}$ = ١٥

كما تصبح دالة الهدف ايجاد قيم س$_{1}$، س$_{2}$، س$_{3}$، س$_{4}$، س$_{5}$ التى تجعل الدالة

ف(س) = ٤٠ س$_{1}$ + ٥٠ س$_{2}$ + صفر س$_{3}$ + صفر س$_{4}$ + صفر س$_{5}$

اكبر ما يمكن مع العلم بان : س$_{1}$، س$_{2}$، س$_{3}$، س$_{4}$، س$_{5}$ $\geqslant$ صفر

ويحل هذا المثال بطريقتين : الطريقة الجبرية Algebraic Method والطريقة الجدولية Tabular Method.

<u>الحل بالطريقة الجبرية :</u>

واضح ان س$_{1}$ = صفر س$_{2}$ = صفر باعتبارهما من الحلول الاساسية الممكنة ويسمى هذا الحل بالحل الابتدائى، ثم نبدأ فى تغيير هذا الحل على النحو الاتى : نعيد كتابة المشكلة بحيث تظهر المتغيرات المكملة كدوال فى س$_{1}$، س$_{2}$

ف(س) = ٤٠ س$_{1}$ + ٥٠ س$_{2}$

س$_{3}$ = ١٢ – س$_{1}$ – ٢ س$_{2}$

س$_{5}$ = ١٥ – ٣س$_{1}$ – س$_{2}$

وبذلك فان س$_{1}$ = صفر، س$_{2}$ = صفر ونجد ان

ف(س) = صفر، س$_{3}$ = ١٢، س$_{4}$ = ٣٠، س$_{5}$ = ١٥

وبذلك يصبح الحل الابتدائى الاساسى الممكن Initial basic feasible solution. س = (صفر، صفر، ١٢، ٣٠، ١٥)

ويكون المطلوب البحث عن حل اساسى جديد يحقق ارباحا اكثر ولذلك نحاول ان تكون قيم س$_{1}$، س$_{2}$ اكبر من الصفر، ويسمى المتغير الذى يمكن تغيير قيمته بالمتغير الاساسى الداخل Entering basic variable لذلك نختار س$_{2}$

موجبة مع بقاء $س_{١}$ = صفر وبمقابل ذلك يصبح احد المتغيرات $س_{٣}$، $س_{٤}$، $س_{٥}$ مساويا للصفر ويسمى بالمتغير الخارج Leaving variable ولتحديد اى من هذه المتغيرات يخرج من الحل نختبر المعادلات السابقة .

وبوضع $س_{١}$ = صفر نحصل على

$$س_{٣} = ١٢ - ٢\,س_{٢}$$
$$س_{٤} = ٣٠ - ٤\,س_{٢}$$
$$س_{٥} = ١٥ - س_{٢}$$

وبذلك تصبح $س_{٣}$ = صفر عندما تكون $س_{٢} = \frac{١٢}{٢} = ٦$ كما نصبح $س_{٤}$ = صفر اذا كانت $س_{٢} = \frac{٣٠}{٤} = ٧٫٥$ وعندما تصبح $س_{٢} = ١٥$ وبذلك فان $س_{٣}$ هو المتغير الخارج . وباعادة كتابة المشكلة بحيث تظهر $س_{٢}$، $س_{٤}$، $س_{٥}$ بدلالة $س_{١}$، $س_{٣}$ وحيث امكن احلال $س_{٢}$ بدلا من $س_{٣}$ فان :

$$س_{٢} = ٦ - \frac{١}{٢}\,س_{١} - س_{٣}$$
$$س_{٤} = ٣٠ - ٥\,س_{١} - ٤\left(٦ - \frac{١}{٢}\,س_{١} - س_{٣}\right)$$
$$س_{٥} = ١٥ - ٣\,س_{١} - \left(٦ - \frac{١}{٢}\,س_{١} - س_{٣}\right)$$

اى ان

$$ف(س) = ٤٠\,س_{١} + ٥٠\left(٦ - \frac{١}{٢}\,س_{١} - س_{٣}\right)$$

$$س_{٢} = ٦ - \frac{١}{٢}\,س_{١} - س_{٣}$$
$$س_{٤} = ٦ - ٣\,س_{١} + ٤\,س_{٣}$$
$$س_{٥} = ٩ - \frac{٧}{٢}\,س_{١} + س_{٣}$$
$$ف(س) = ٣٠٠ + ١٥\,س_{١} - ٥٠\,س_{٣}$$

ومنها نجد ان الحل الاساسى الثانى هو

$س_{١}$ = صفر ، $س_{٣}$ = صفر ، $س_{٢} = ٦$ ، $س_{٤} = ٦$ ، $س_{٥} = ٩$

وتصبح دالة الهدف ف = ٣٠٠

وبالبحث عن حل اساسى جديد ومن الواضح ان الزيادة فى $س_{١}$ تزيد من قيمة دالة الهدف وتصبح $س_{١}$ هى المتغير الداخل والبحث عن المتغير الخارج من بين $س_{٢}$، $س_{٤}$، $س_{٥}$ نختبر المعادلات الاتية بوضع $س_{٣}$ = صفر وبذلك نحصل على :

$$\text{س}_{٢} = ٦ - \frac{١}{٢}\,\text{س}_{١}$$
$$\text{س}_{٤} = ٦ - ٣\,\text{س}_{١}$$
$$\text{س}_{٥} = ٩ - \frac{٧}{٢}\,\text{س}_{١}$$

ونجد ان قيمة $\text{س}_{٢}$ = صفر اذا كانت $\text{س}_{١} = \frac{٦}{\frac{١}{٢}} = ١٢$ كما تصبح $\text{س}_{٤}$ = صفر اذا كانت $\text{س}_{١} = \frac{٦}{٣} = ٢$ وتصبح $\text{س}_{٥}$ = صفر اذا كانت $\text{س}_{١} = \frac{٩}{\frac{١}{٢}} = ١٨$
وبذلك تكون $\text{س}_{٤}$ هى المتغير الخارج .

ثم نعيد المشكلة بحيث تظهر $\text{س}_{١}$، $\text{س}_{٢}$، $\text{س}_{٥}$ بدلالة $\text{س}_{٣}$، $\text{س}_{٤}$ وحيث امكن احلال $\text{س}_{١}$ بدلا من $\text{س}_{٤}$ وبذلك نحصل على :

$$\text{س}_{٢} = ٦ - \frac{١}{٢}\left(٢ - \text{س}_{٤} + \frac{٣}{٤}\,\text{س}_{٣}\right) - \text{س}_{٣}$$
$$\text{س}_{١} = \left(٢ - \text{س}_{٤} + \frac{٤}{٣}\,\text{س}_{٣}\right) - \text{س}_{٣}$$
$$\text{س}_{٥} = ٩ - \frac{٧}{٢}\left(٢ - \text{س}_{٤} + \frac{٤}{٣}\,\text{س}_{٣}\right) + \text{س}_{٣}$$
$$\text{ف(س)} = ٣٠٠ + ١٥\left(٢ - \text{س}_{٤} + \frac{٣}{٤}\,\text{س}_{٣}\right) - ٥٠\,\text{س}_{٣}$$

اى ان :

$$\text{س}_{٢} = ٥ + \frac{١}{٢} \times ٤ - \frac{١٠}{٦} \times ٣$$
$$\text{س}_{١} = ٢ - \text{س}_{٤} + \frac{٣}{٤}\,\text{س}_{٣}$$
$$\text{س}_{٥} = ٢ + \frac{٧}{٢}\,\text{س}_{٤} - ٤\,\text{س}_{٣}$$
$$\text{ف} = ٣٠٠ - ١٥\,\text{س}_{٤} - ٣٠\,\text{س}_{٣}$$

وبذلك يكون الحل الاساسى الثالث هو $\text{س}_{٥} = ٢$ ، $\text{س}_{٢} = ٥$ ، ٢ $\text{س}_{٤}$ = صفر = $\text{س}_{٣}$

$$\text{ف(س)} = ٣٣٠$$

ويتضح من دالة الهدف الاخيرة ان جميع المعادلات سالبة وبالتالى فان الحل الذى يحقق اكبر قيمة لدالة الهدف يكون $\text{س}_{١} = ٢$ ، $\text{س}_{٢} = ٥$ ، ف(س) = ٣٣٠

وبذلك تصبح خطة الشحن كالاتى : تنجز السفينة الاولى رحلتين كما تنجز السفينة الثانية خمس رحلات ويكون حجم النقل من الشحنات المختلفة كالاتى :

الشحنة (أ) ١ $س_1$ + ٢ $س_2$ ≤ ١٢ = ١ × ٢ + ٢ × ٥ = ١٢
الشحنة (ب) ٥ $س_1$ + ٤ $س_2$ ≤ ٣٠ = ٥ × ٢ + ٤ × ٥ = ٣٠
الشحنة (جـ) ٣ $س_1$ + ١ $س_2$ ≤ ١٥ = ٣ × ٢ + ١ × ٥ = ١١

ومعنى ذلك ان السفينتين تنجزان حجم النقل كاملا من الشحنــات أ ، ب اما الشحنة (جـ) فتنقل منها ١١ وحدة حمولة بدلا من ١٥ وحدة .

الحل بالطريقة الجدولية : Tabular Method

تصبح القيود هى نفسها الواردة فى الطريقة الجبرية بعد اضافـــــة المتغيرات المكملة $س_3$، $س_4$، $س_5$ على شكل معادلات كالاتى :

$س_1$ + ٢ $س_2$ + $س_3$ = ١٢
٥ $س_1$ + ٤ $س_2$ + $س_4$ = ٣٠
٣ $س_1$ + $س_2$ + $س_5$ = ١٥

كما تصبح دالة الهدف : ف(س) = ٤٠ $س_1$ + ٥٠ $س_2$ + صفر $س_3$ + صفر $س_4$ + صفر $س_5$

وتوضع القيود ودالة الهدف فى جدول السمبلكس Simplex Table الاتى :

المتغيرات الاساسية	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$س_4$	$س_5$	الثوابت
$س_3$	١	٢	١	صفر	صفر	١٢
$س_4$	٥	٤	صفر	١	صفر	١٣
$س_5$	٣	١	صفر	صفر	١	١٥
ــ ف(س)	٤٠	٥٠	صفر	صفر	صفر	صفر

ومعنى ــ ف (س) ان ف(س) = ٤٠ $س_1$ + ٥٠ $س_2$ + صفر $س_3$ + صفر $س_4$ + صفر $س_5$

فاذا نقلنا ف(س) الى الطرف الايسر فانها تصبح

٤٠ $س_1$ + ٥٠ $س_2$ + صفر $س_3$ + صفر $س_4$ + صفر $س_5$ ــ ف(س) = صفر

خطوات الحل :

١ — نختار العمود الذى به اكبر قيمة لدالة الهدف (السطر الاخير بالجدول) وواضح ان اكبر قيمة فى سطر دالة الهدف هى ٥٠ للعمود س٢ ويسمى هذا العمود بالعمود المظلل Pivatal Column . ومعنى ذلك ان هذا العمود سيدخل كمتغير اساسى فى الجدول السابق ويحل محل متغير نحدده فى الخطوة رقم (٢) .

٢ — نقسم قيم الثوابت على القيم الموجبة المناظرة فى العمود المظلل واقل ناتج قسمة يحدد السطر المظلل Pivatal row ويتم الحصول على اقل قيمة كالاتى :

بالنسبة للسطر س٣ = $\frac{١٢}{٢}$ = ٦

بالنسبة للسطر س٤ = $\frac{٣٠}{٤}$ = ٧٫٥

بالنسبة للسطر س٥ = $\frac{١٥}{١}$ = ١٥

وواضح ان اقل قيمة هى للسطر س٣ = ٦ ويعتبر السطر المظلل المتغير الخارج من الحل ومن تقاطع السطر المظلل مع العمود المظلل نحصل على العنصر المظلل Pivatal element .

٣ — نقوم بتعديل قيم السطر المظلل س٣ وذلك بقسمة كل الارقام الواردة فى هذا السطر على العنصر المظلل على النحو الاتى :

س١ = $\frac{١}{٢}$ ، س٢ = $\frac{٢}{٢}$ = ١ ، س٣ = $\frac{١}{٢}$

س٤ = صفر ، س٥ = صفر

٤ — نقوم بتعديل ارقام عمود الثوابت باستخدام القاعدة الاتية : الرقم الجديد = الرقم من الجدول السابق — $\frac{\text{المقابل فى العمود المظلل} \times \text{المقابل فى السطر المظلل}}{\text{العنصر المظلل}}$

س٤ = ٣٠ — $\frac{١٢ \times ٤}{٢}$ = ٦

س٥ = ١٥ — $\frac{١٢ \times ١}{٢}$ = ٩

٥ — تصبح باقى ارقام العمود المظلل اصفارا ما عدا العنصر المظلل .

نقوم بتعديل قيم السطر $س_٤$ بتطبيق القاعدة الواردة فى البند (٤) على النحو الاتى :

$$س_١ = ٥ - \frac{٤ \times ١}{٢} = ٣$$

$$س_٣ = \text{صفر} - \frac{٤ \times ١}{٢} = -٢$$

$$س_٥ = \text{صفر} - \frac{٤ \times \text{صفر}}{٢} = \text{صفر}$$

٧ — نقوم بتعديل قيم السطر $س_٥$ بتطبيق القاعدة الواردة فى البند (٤) على النحو الاتى :

$$س_١ = ٣ - \frac{١ \times ١}{٢} = ٢\frac{١}{٢}$$

$$س_٣ = \text{صفر} - \frac{١ \times ١}{٢} = -\frac{١}{٢}$$

$$س_٤ = \text{صفر} - \frac{١ \times \text{صفر}}{٢} = \text{صفر}$$

$$س_٥ = ١ - \frac{١ \times \text{صفر}}{٢} = ١$$

٨ — نقوم بتعديل قيم سطر دالة الهدف —ف(س) باستخدام القاعدة الواردة فى البند (٤) على النحو الاتى :

$$س_١ = ٤٠ - \frac{٥٠ \times ١}{٢} = ١٥$$

$$س_٣ = \text{صفر} - \frac{٥٠ \times ١}{٢} = -٢٥$$

$$س_٤ = \text{صفر} - \frac{٥٠ \times \text{صفر}}{٢} = \text{صفر}$$

$$س_٥ = \text{صفر} - \frac{٥٠ \times \text{صفر}}{٢} = \text{صفر}$$

وبذلك يصبح الجدول الثانى كالاتى :

المتغيرات الاساسية	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	الثوابت
س ٢	$\frac{١}{٢}$	١	$\frac{١}{٢}$	صفر	صفر	٦
س ٤	③	صفر	ـ ٢	١	صفر	٦
س ٥	٢ $\frac{١}{٢}$	صفر	ـ $\frac{١}{٢}$	صفر	١	٩
ـ ف (س)	١٥	صفر	ـ ٢٥	صفر	صفر	ـ ٣٠٠

ويصبح العمود المظلل هو س ١ حيث له اكبر قيمة موجبة فى سطر دالــة الهدف ، أما السطر المظلل فيكون السطر الذى له اقل ناتج قسمة الارقام الــواردة بعمود الثوابت على الارقام المناظرة لها فى العمود المظلل اى

$$س_٢ = \frac{٦}{\frac{١}{٢}} = ١٢ ، س_٤ = \frac{٦}{٣} = ٢ ، س_٥ = \frac{٩}{٢\frac{١}{٢}} = ٣ر٦$$

ويصبح السطر المظلل هو س ٤ = ٢ ويكون هو المتغير الخارج كما يصبح الرقم (٣) من تقاطع السطر المظلل س ٤ مع العمود المظلل س ١ هو العنصـــر المظلل .

ثم نسطر جدول جديد لوضع القيم الجديدة على النحو الاتى :

المتغيرات	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	الثوابت
س ٢	صفر	١	$\frac{٥}{٦}$	$\frac{١}{٣}$	صفر	٥
س ١	١	صفر	ـ $\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	صفر	٢
س ٥	صفر	صفر	$\frac{٧}{٦}$	ـ $\frac{٥}{٦}$	١	٤
ـ ف (س)	صفر	صفر	ـ ٣٥	ـ ٥	صفر	ـ ٣٣٠

ـ نقوم بتعديل قيم عناصر السطر المظلل فى الجدول الثانى بتطبيـــق القاعدة الواردة فى البند (٤) على النحو الاتى :

$\text{س}_{١} = \frac{٣}{٣} = ١$ ، $\text{س}_{٢} = \frac{\text{صفر}}{٣} = \text{صفر}$ ، $\text{س}_{٣} = -\frac{٢}{٣}$ ، $\text{س}_{٤} = \frac{١}{٣}$ ، $\text{س}_{٥} = \frac{\text{صفر}}{٣} = \text{صفر}$

- ونكتب هذه القيم فى سطر المتغير الداخل الجديد $\text{س}_{١}$
- نقوم بتعديل عمود الثوابت بتطبيق القاعدة الواردة فى البند (٤) على النحو الاتى :

$$\text{س}_{٢} = ٦ - \frac{\frac{١}{٢} \times ٦}{٣} = ٥$$

$$\text{س}_{٥} = ٩ - \frac{\frac{١}{٢} \times ٦}{٣} = ٤$$

ويلاحظ ـ كما سبق ان ذكرنا ـ ان قيم جميع العمود المظلل تساوى صفر ونثبتها فى الجدول الجديد (ماعدا العنصر المظلل) .

ثم نقوم بتعديل قيم السطر $\text{س}_{٢}$ بتطبيق القاعدة الواردة فى البند (٤) على النحو الاتى :

$$\text{س}_{٢} = ١ - \frac{\frac{١}{٢} - \text{صفر}}{٣} = ١$$

$$\text{س}_{٣} = \frac{١}{٢} - \frac{\frac{١}{٢} \times -٢}{٣} = \frac{٥}{٦}$$

$$\text{س}_{٤} = \text{صفر} - \frac{\frac{١}{٢} - ٢}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\text{س}_{٥} = \text{صفر} - \frac{\frac{١}{٢} \times \text{صفر}}{٣} = \text{صفر}$$

- ونثبت هذه القيم فى السطر الجديد $\text{س}_{٢}$
- نقوم بتعديل عناصر السطر $\text{س}_{٥}$ بتطبيق القاعدة الواردة فى البند (٤) على النحو الاتى :

$$\text{س}_{٢} = \text{صفر} - \frac{\frac{١}{٢}\,٢ - \text{صفر}}{٣} = \text{صفر}$$

$$\text{س}_{٣} = \frac{١}{٢} - \frac{\frac{١}{٢}\,٢ \times -٢}{٣} = \frac{٧}{٦}$$

$$\text{س}_{٤} = \text{صفر} - \frac{\frac{١}{٢}\,٢ \times ١}{٣} = -\frac{٥}{٦}$$

$$س_{٥} = ١ - \frac{٢\frac{١}{٢} - صفر}{٣} = ١$$

ونثبت هذه الارقام فى سطر $س_{٥}$

ــ وأخيرا نقوم بتعديل سطر الهدف بتطبيق القاعدة الواردة فى البند (٤) كالاتى :

$$س_{٢} = صفر - \frac{١٥ \times صفر}{٣} = صفر$$

$$س_{٣} = - ٢٥ - \frac{١٥ \times صفر}{٣} = - ٣٥$$

$$س_{٤} = صفر - \frac{١٥ \times ١}{٣} = - ٥$$

$$س_{٥} = صفر - \frac{١٥ \times صفر}{٣} = صفر$$

كما تصبح دالة الهدف فى عمود الثوابت $- ٣٠٠ - \frac{١٥ \times ٦}{٣} = - ٣٣٠$ ونثبتها فى سطر دالة الهدف،ومن شروط الحل الامثل ان تكون قيم دالة الهدف امــــا اصفارا او قيم سالبة ويصبح الحل الامثل كالاتى :

$$س_{١} = ٢ ، س_{٢} = ٥ ، س_{٥} = صفر$$

$$ف(س) = - ٣٣٠$$

الخطة المثلى لتفريغ حمولة سفينة فى عدة مخازن :

لتفريغ حمولة سفينة فى ثلاثة مخـازن رقم ١ ، ٢ ، ٣ يكون لدينا مثلا :

٥ أوناش بدورة الونش ٥ دقائق .

٣٤ سيارة نقل من مكان الونش الى المخازن الثلاثة ١ ، ٢ ، ٣ .

٤ سيارة ونش لتفريغ حمولة سيارات النقل بالمخزن رقم ١ .

وبالنسبة للمخزن الثانى والثالث فلتفريغ حمولة سيارات النقل يلزم ٨ فـرق عـمال . والجدول الاتى يوضح البيانات الخاصة بهذه المشكلة .

البيـــــــان	المخزن ١	المخزن ٢	المخزن ٣
الزمن اللازم لدورة سيارة النقل من مكان الونش الى المخــازن (بالدقيقـــة)	٣٠	٣٥	٢٥
الزمن اللازم لتفريغ سيارة النقل بواسطـــة السيارة الونش (بالدقيقـة)	١٠	—	—
الزمن اللازم لتفريغ سيارة النقل بواسطـــة العمال (بالدقيقـة)	—	١٨	١٠

والمطلوب تكوين الخطة المثلى لتفريغ السفينة ونقل الشحنات الى المخـــازن الثلاثة باكبر حمولة ، وبمعنى آخر المطلوب تحديد عـدد الدورات التى ينقلهـــا الونش وتوزيع هذه الدورات على المخازن الثلاثة — ومعلوم ان الوردية ٧ ســاعات = ٤٢٠ دقيقــة .

طريقــة الحــل :

دالة الهدف تعظيم عـدد الدورات للونش التى تنقل الى المخازن الثلاثة.

ان عــدد دورات المخزن الاول س_1 والمخزن الثانى س_2 والمخزن الثالث س_3 .

فيكون المطلوب تعظيم عـدد الدورات للمخازن الثلاثة وبمعنى آخر :

$$\text{ف(س)} = \text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3$$

بشرط تحقيق القيـود الاتية :

القيد الاول : خاص بعدد دورات الاوناش الخمسة يساوى $\frac{420}{5} \times 5 = 420$

اى ان $\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 \leq 420$

القيد الثانى : خاص بزمن سيارات النقل (٣٢ سيارة) من مكان الاوناش الـــى المخازن الثلاثة ، اى ان

$$30\,\text{س}_1 + 35\,\text{س}_2 + 25\,\text{س}_3 \leq 32 \times 420$$

القيد الثالث : خاص بزمن التفريغ من سيارات النقل بواسطة السيارات الونـــش (٤ سيارات) الموجودة بجانب المخازن ، اى ان :

$$10\,\text{س}_1 \leq 4 \times 420$$

القيد الرابع : خاص بزمن العمال الموجودين بجانب المخازن رقمى ٢ ، ٣ (٨ فرق عمال) اى ان : $١٨ س_٢ + ١٠ س_٣ \leq ٨ \times ٤٢٠$

ومن ثم تصبح المشكلة على النحو الاتى :

ايجاد $س_١ ، س_٢ ، س_٣$ التى تجعل الدالة $س_١ + س_٢ + س_٣$ أعظم ما يمكن بشرط تحقيق القيود الاتية :

$$س_١ + س_٢ + س_٣ \leq ٤٢٠$$

$$٣٠ س_١ + ٣٥ س_٢ + ٢٥ س_٣ \leq ١٣٤٤٠$$

$$١٠ س_١ \leq ١٦٨٠$$

$$١٨ س_٢ + ١٠ س_٣ \leq ٣٣٦٠$$

$$س_١ ، س_٢ ، س_٣ \nless صفر$$

وللوصول الى حل المشكلة بطريقة السمبلكس يضاف الى المتغيرات السابقة متغيرات مكملة تسمى المتغيرات العاطلة Slack variables تمثل الموارد غير المستغلة او العاطلة لكى تحول المتباينات السابقة الى معادلات كالاتى :

$$س_١ + س_٢ + س_٣ + س_٤ = ٤٢٠$$

$$٣٠ س_١ + ٣٥ س_٢ + ٢٥ س_٣ + س_٥ = ١٣٤٤٠$$

$$١٠ س_١ + س_٦ = ١٦٨٠$$

$$١٠ س_٢ + ١٠ س_٣ + س_٧ = ٣٣٦٠$$

وتصبح دالة الهدف بالصورة الاتية :

$ف(س) = س_١ + س_٢ + س_٣ + صفر س_٤ + صفر س_٥ + صفر س_٦ + صفر س_٧$ اعظم ما يمكن .

ويكون تتابع الحل كما فى الجداول الاتية :

الجدول الاول للحل

المتغيرات الاساسية	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	الثوابت
س٤	١	١	١	١				٤٢٠
س٥	٢٠	٣٥	٢٥		١			١٣٤٤٠
س٦	١٠					١		١٦٨٠
س٧	[illegible]	١٨	١٠				١	٣٣٦٠
ـ ف (س)	١	١	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر

الجدول الثانى للحل

المتغيرات الاساسية	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	الثوابت
س٤	—	١	١	١				٢٥٢
س٥	—	٣٥	٢٥		١			٨٤٠٠
س٦	١	—	—			$\frac{١}{١٠}$		١٦٨
س٧	—	١٨	١٠				١	٣٣٦٠
ـ ف (س)	—	١	١	صفر	صفر		—	ـ ١٦٨

الجدول الثالث للحل

المتغيرات الاساسية	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	الثوابت
س٤	—	—	٨/١٨	١				١٩٦/٣
س٥	—	—	١٦٠/١٨		١		-٣٥/١٨	٥٦٠٠/٣
س١	١	—	—			١		١٦٨
س٢	—	١	١٠/١٨				١	٥٦٠/٣
ـف (س)	—	—	٨/١٨	—	—	١/١٠	-١/١٠	-٦٣٨٤/٣

الجدول الرابع للحل

المتغيرات الاساسية	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	الثوابت
س٣			١	—				١٤٧
س٥					١			١٠٥
س١	١					١		١٦٨
س٢		١					١	١٠٥
ـف (س)	—	—	—	-١	—	-١/١٠	-١/١٨	-٤٢٠

ومعنى ان سطر الدالة للهدف اصبح كله بالسالب او اصفار اننا وصلنا الى الحل الامثل وهو :

س١ = ١٦٨ اى اننا نخصص للمخزن الاول ١٦٨ دورة

س٢ = ١٠٥ اى اننا نخصص للمخزن الثانى ١٠٥ دورة

س٣ = ١٤٧ اى اننا نخصص للمخزن الثالث ١٤٧ دورة

س٥ = ١٠٥ اى لا تؤخذ فى الاعتبار .

وتصبح دالة الهدف ف(س) = ١٦٨ + ١٠٥ + ١٤٧ = ٤٢٠

<u>حل نفس المثال السابق بطريقة $\text{ز}_\text{ج} - \text{ص}_\text{ج}$:</u>

المطلوب تعظيم دالة الهدف $\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3$

بشرط

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 \leq ٤٢٠$$
$$٣٠\text{س}_1 + ٣٥\text{س}_2 + ٢٥\text{س}_3 \leq ١٣٤٤٠$$
$$١٠\text{س}_1 \leq ١٦٨٠$$
$$١٨\text{س}_2 + ١٠\text{س}_3 \leq ٣٣٦٠$$
$$\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \text{س}_3 \geq \text{صفر}$$

<u>طريقة الحل</u> : نضيف متغيرات مكملة $\text{س}_4 ، \text{س}_5 ، \text{س}_6$ ومن ثم يمكن كتابة القيود السابقة بالصورة الاتية :

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \text{س}_4 = ٤٢٠$$
$$٣٠\text{س}_1 + ٣٥\text{س}_2 + ٢٥\text{س}_3 + \text{س}_5 = ١٣٤٤٠$$
$$١٠\text{س}_1 + ٦\text{س}_6 = ١٦٨٠$$
$$١٨\text{س}_2 + ١٠\text{س}_3 + \text{س}_7 = ٣٣٦٠$$
$$\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \ldots ، \text{س}_7 \geq \text{صفر}$$

وتصبح دالة الهدف : $\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \text{صفر س}_4 + \text{صفر س}_5 + \text{صفر س}_6 +$ صفر س_7

ونكون الجدول الاتى :

$\text{ص}_\text{ج}$	ب	١	١	١	١	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	س صفر	س_1	س_2	س_3	س_4	س_5	س_6	س_7
صفر	س_4	٤٧٠	١	١	١	١			
صفر	س_5	١٣٤٤٠	٣٠	٣٥	٣٥		١		
صفر	س_6	١٦٨٠	١٠					١	
صفر	س_7	٣٣٦٠		١٨	١٠				١
$\text{ز}_\text{ج} - \text{ص}_\text{ج}$									

شرح الجدول :

العمود $س_{ج}$ يعبر عن عدد الدورات العمودية للمتغيرات $س_{٤}$ ، $س_{٥}$ ، $س_{٦}$ ، $س_{٧}$ (المعاملات المناظرة فى معادلة دالة الهدف وتساوى صفر) •

$ب_{و}$ — يعبر عن المتغيرات الاساسية التى ستحل فى نهاية الحل محل المتغيرات المجهولة •

$س_{و}$ — الثوابت التى تتغير قيمتها اثناء مراحل الحل •

سطر الهدف $ز_{ج} - ص_{ج}$ يمكن الحصول عليه بالطريقة الاتية :

المعاملات المجهولة لكل سطر تضرب فى عدد الكمية المناظرة للعمود $ص_{ج}$ (عدد الدورات) ونجمع الناتج الذى نحصل عليه ومن هذا الناتج نطرح منه الرقم لهذا العمود باعلى الجدول •

ويكون الهدف جعل جميع قيم سطر الهدف $ز_{ج} - ص_{ج}$ اما موجبة او اصفار . لذلك نأخذ اكبر قيمة بالسالب فى سطر الهدف وتحدد هذه القيمة لعمود الهدف المظلل.وحيث ان هذه القيم متساوية لذا نأخذ العمود $س_{١}$ ونعتبره العمود المظلل (المتغير الاساسى الداخل) entering basic variable •

ولكى نحصل على السطر المظلل نقسم القيم الواردة فى العمود $س_{و}$ على الارقام المناظرة لها فى العمود المظلل واقل ناتج قسمة يحدد لنا السطر المظلل فمثلا :

$$\frac{٤٢٠}{١} = ٤٢٠ \quad ، \quad \frac{١٣٤٤٠}{٣٠} = ٤٤٨ \quad ، \quad \frac{١٦٨٠}{١٠} = ١٦٨$$

والسطر المظلل يسمى المتغير الخارج Leaving variable وتقاطع السطر المظلل والعمود المظلل يعطينا العنصر المظلل.وبذلك يمكن تكوين الجدول الثانى للحل وخطوات تكوينه كالاتى :

١ — تعديل السطر المظلل وذلك بقسمة كل رقم فيه على العنصر المظلل •

٢ — تعديل عمود $س_{و}$ باستخدام المعادلة الاتية :الرقم الجديد يساوى

$$\text{القيمة من الجدول السابق} - \frac{\text{المقابل فى العمود المظلل} \times \text{المقابل فى السطر المظلل}}{\text{العنصر المظلل}}$$

٣ — تعديل سطر الهدف $ز_{ج} - ص_{ج}$ باستخدام المعادلة الواردة فى قيد رقم (٢) •

٤ — تعديل قيم السطر س ٤ ، س ٥ ، س ٧ بتطبيق المعادلة الواردة فى قيد رقم (٢) .

وبذلك يصبح الجدول الثانى بالصورة الرقمية الاتية :

الجدول الثانى للحل

ص ج	ب ١	ب و	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦	س ٧
صفر	س ٤		—	١	١	١			
صفر	س ٥	٨٤٠٠	—	٣٥	٢٥		١		
١	س ١	١٦٨	١٠					١/١٠	
صفر	س ٧	٣٣٦٠		١٨	١٠				١
ز ج — ص ج		١٧٨	—	—١	—١	—	—	١/١٠	صفر

نكرر ما سبق للحصول على السطر المظلل والعمود المظلل والمنصر المظلل وبتطبيق نفس القواعد السابقة فى الجدول الثانى نحصل على الجدول الثالث كالاتى :

الجدول الثالث للحل

ص ج	ب ٢	س و	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦	س ٧
	س ٤	١٩٦/٣	—	—	٨/١٨	١			
	س ٥	٥٦٠٠/٣	—	—	١٠٠/١٨		١		
١	س ١	١٦٨	١٠					١/١٠	
١	س ٢	—		١	١٠/١٨				١/١٨
ز ج — ص ج		١٠٦٤/٣	—	—	٨/١٨				١/١٨

باتباع نفس القواعد السابقة يمكن تكوين الجدول الرابع بالصورة الاتية :

$ص_{ج}$	$ب_{٣}$	$س_{و}$	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$	$س_{٦}$	$س_{٧}$
١	$س_{٣}$	١٤٧			١	$\frac{١٨}{٨}$			
	$س_{٥}$	١٠٥					١		
١	$س_{١}$	١٦٨						$\frac{١}{١٠}$	
١	$س_{٢}$	١٠٥							$\frac{١}{١٨}$
$ز_{ج} - ص_{ج}$		٤٢٠				١			$\frac{١}{١٨}$

وتكون نتيجة الحل هى كالاتى :

$س_{١}$ = ١٦٨ ، $س_{٢}$ = ١٠٥ ، $س_{٣}$ = ١٤٧ ، $س_{٥}$ = ١٠٥

وهى نفس نتيجة الحل السابق .

الحالة الثانية : القيود الهيكلية اكبر من او يساوى ($\geq$):

الخطة المثلى لنقل شحنات مختلفة على سفينتين :

بفرض ان المطلوب نقل ثلاثة انواع من الشحنات أ ، ب ، جـ على سفينتين باقل مجموع تكلفة نقل واستخدام البيانات الواردة فى الجدول الاتى :

انواع الشحنات	ما تنقله كل سفينة فى الرحلة الواحدة بوحدات الحمولة		الشحنات المطلوب نقلها (بوحدات الحمولة)
	السفينة الاولى	السفينة الثانية	
أ	٢	١	١٢
ب	٥	٨	٧٤
جـ	١	٦	٢٤
تكلفة الرحلة لكل سفينة (بالوحدات النقدية)	١	١	ـــ

فاذا رمزنا لعدد رحلات السفينة الاولى بالرمز $س_1$ ولعدد رحلات السفينة الثانية بالرمز $س_2$ فان قيود المشكلة تصبح

$$٢\,س_1 + ١\,س_2 \geq ١٢$$

$$٥\,س_1 + ٨\,س_2 \geq ٧٤$$

$$١\,س_1 + ٦\,س_2 \geq ٢٤$$

$$س_1 \text{ ، } س_2 \geq \text{صفر}$$

كما تصبح دالة الهدف $ف(س) = ١\,س_1 + ١\,س_2$ اكبر ما يمكن

ولحل هذه المشكلة نطرح من المتباينات السابقة المتغيرات المكملـــــة $س_3$، $س_4$، $س_5$ ونضيف المتغيرات المساعدة Artificial Variables $س_6$، $س_7$، $س_8$ على النحو الاتى :

$$٢\,س_1 + س_2 - س_3 + س_6 = ١٢ \qquad (١)$$

$$٥\,س_1 + ٨\,س_2 - س_4 + ٧\,س_7 = ٧٤ \qquad (٢)$$

$$س_1 + ٦\,س_2 - س_5 + س_8 = ٢٤ \qquad (٣)$$

$$ع = س_6 + س_7 + س_8 \qquad (٤)$$

حيث تعبر (ع) عن حاصل جمع المتغيرات المساعدة ، وبجمع ١ + ٢ + ٣ وطرحها من (٤) نحصل على :

$$-٨\,س_1 - ١٥\,س_2 + س_3 + س_4 + س_5 = ع - ١١٠$$

وتصبح المشكلة ايجاد قيم $س_ى$ (ى = ١، ٢، ...، ٨) التى تجعل الدالـــة

$$ع = س_6 + س_7 + س_8$$

اقل ما يمكن اى قيمتها تساوى صفر بشرط تحقيق القيود الاتية :

$$٢\,س_1 + س_2 - س_3 + س_6 = ١٢$$

$$٥\,س_1 + ٨\,س_2 - س_4 + ٧\,س_7 = ٧٤$$

$$س_1 + ٦\,س_2 - س_5 + س_8 = ٢٤$$

$$س_1 + س_2 - ف(س) = \text{صفر}$$

$$-٨\,س_1 - ١٥\,س_2 + س_3 + س_4 + س_5 = ع - ١١٠$$

ولحل المشكلة نتبع الطريقة الجدولية السابق شرحها فى المثال رقم (١) بهدف الوصول الى اقل قيمة ع والبحث عن القيمة المثلى لدالة الهدف ، وبذلك نضع المعادلات فى الجدول الاتى :

المتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية		المتغيرات المكملة			المتغيرات المساعدة			الثوابت
	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	س٨	
س٦	٢	٦	ـ١	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١٢
س٧	٥	٨	صفر	ـ١	صفر	صفر	١	صفر	٧٤
س٨	٢	٦	صفر	صفر	ـ١	صفر	صفر	١	٢٤
ـف (س)	١	٢	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ـع	ـ ٨	ـ١٦	١	١	١	صفر	صفر	صفر	ـ ١١٠

ولتكوين الجدول الثانى نبحث عن اكبر قيمة فى سطر دالة الهدف لتحديد العمود المظلل ونجد ان اكبر قيمة هى لكل من س١ ، س٢ ونختار مثلا س٢ ليصبح العمود المظلل . وللبحث عن السطر المظلل نقسم ارقام الثوابت على الارقام المناظرة لها فى العمود المظلل واقل ناتج قسمة يحدد السطر المظلل على النحو الاتى : س٦ = $\frac{١٢}{١}$ = ١٢ ، س٧ = $\frac{٧٤}{٨}$ = ٩٫٢٥ ، س٨ = $\frac{٢٤}{٦}$ = ٤

ويكون السطر المظلل الخارج من الحل هو س٨ = ٤ ليحل محله العمود المظلل س٢ كما يصبح العنصر المظلل هو (٦) ونكون الجدول الثانى للحل حتى نثبت الارقام التى سنقوم بحسابها .

الجدول الثانى

المتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية		المتغيرات المكملة			المتغيرات المساعدة			الثوابت
	$\text{س}_{١}$	$\text{س}_{٢}$	$\text{س}_{٣}$	$\text{س}_{٤}$	$\text{س}_{٥}$	$\text{س}_{٦}$	$\text{س}_{٧}$	$\text{س}_{٨}$	
$\text{س}_{٦}$	$\frac{١١}{٦}$	صفر	ـ ١	صفر	$\frac{٢}{٦}$	١	صفر	$-\frac{٢}{٦}$	٨
$\text{س}_{٧}$	$\frac{١١}{٣}$	صفر	صفر	ـ ١	$\frac{٤}{٣}$	صفر	١	$-\frac{٤}{٣}$	٤٢
$\text{س}_{٢}$	$\frac{١}{٦}$	١	صفر	صفر	$-\frac{١}{٦}$	صفر	صفر	$\frac{١}{٦}$	٤
ـ ف (س)	$\frac{٥}{٦}$	صفر	صفر	صفر	$\frac{١}{٦}$	صفر	صفر	$-\frac{١}{٦}$	ـ ٤
ـ ع	$\frac{١١}{٢}$	صفر	١	١	$-\frac{٣}{٢}$	صفر	صفر	$\frac{٥}{٢}$	ـ ٥٠

ويتم الحساب على النحو الاتى (بالنسبة للجدول الأول) .

١ ـ يتم حساب قيم السطر المظلل $\text{س}_{٢}$ بقسمة كل رقم على العنصر المظلل

أى : $\text{س}_{١} = \frac{١}{٦} = \frac{١}{٦}$ ، $\text{س}_{٢} = \frac{٦}{٦} = ١$ ، $\text{س}_{٣} = \frac{\text{صفر}}{٦} = \text{صفر}$ ،

$\text{س}_{٤} = \frac{\text{صفر}}{٦} = \text{صفر}$ ، $\text{س}_{٥} = \frac{-١}{٦} = -\frac{١}{٦}$ ، $\text{س}_{٦} = \frac{\text{صفر}}{٦}$

$= \text{صفر}$ ، $\text{س}_{٧} = \frac{\text{صفر}}{٦} = \text{صفر}$ ، $\text{س}_{٨} = \frac{١}{٦} = \frac{١}{٦}$

٢ ـ يتم تعديل ارقام عمود الثوابت باستخدام القاعدة الاتية : الرقم الجديد =

الرقم من الجدول السابق ـ $\frac{\text{المقابل فى العمود المظلل} \times \text{المقابل فى السطر المظلل}}{\text{العنصر المظلل}}$

$\text{س}_{٦} = ١٢ - \frac{١ \times ٢٤}{٦} = ٨$

$\text{س}_{٧} = ٧٤ - \frac{٨ \times ٢٤}{٦} = ٤٢$

ويلاحظ ان باقى ارقام العمود المظلل تصبح اصفارا .

٣ ـ يتم تعديل قيم السطر $\text{س}_{٦}$ باتباع القاعدة الواردة فى بند رقم (٢)

$\text{س}_{١} = ٢ - \frac{١ \times ١}{٦} = \frac{١١}{٦}$ ، $\text{س}_{٣} = ١ - \frac{١ \times \text{صفر}}{٦} = ١$ ، $\text{س}_{٤} =$

صفر ، $\text{س}_{٥} = \text{صفر} - \frac{١ \times -١}{٦} = \frac{١}{٦}$ ، $\text{س}_{٦} = ١ - \frac{١ \times \text{صفر}}{٦} = ١$

$$س_٧ = \text{صفر} \text{ ، } س_٨ = \text{صفر} - \frac{١ \times ١}{٦} = -\frac{١}{٦}$$

٤ — تعديل قيم السطر $س_٧$ باتباع القاعدة الواردة فى البند (٢)

$$س_١ = ٥ - \frac{١ \times ٨}{٦} = \frac{١١}{٣} \text{ ، } س_٣ = \text{صفر} - \frac{٨ \times \text{صفر}}{٦} = \text{صفر}$$

$$س_٤ = -١ \text{ ، } س_٥ = \text{صفر} - \frac{٨ \times -١}{٦} = \frac{٤}{٣} \text{ ، } س_٦ = \text{صفر} \text{ ،}$$

$$س_٧ = ١ - \frac{٨ \times \text{صفر}}{٦} = ١ \text{ ، } س_٨ = \text{صفر} - \frac{٨ \times ١}{٦} = -\frac{٤}{٣}$$

ونثبت هذه الارقام فى السطر $س_٧$

٥ — نعدل سطر الهدف باتباع القاعدة الواردة فى البند (٢) وبذلك نحصل على القيود الاتية :

$$س_١ = \frac{٥}{٦} \text{ ، } س_٣ = \text{صفر} \text{ ، } س_٤ = \text{صفر} \text{ ، } س_٥ = \frac{١}{٦} \text{ ، } س_٦ = \text{صفر}$$

$$س_٧ = \frac{١}{٦} \text{ ، } س_٨ = -٢٤$$

ونثبتها فى سطر دالة الهدف.

٦ — تعديل قيم السطر —ع باتباع القاعدة الواردة فى البند (٢) وبذلك نحصل على القيم الاتية :

$$س_١ = -\frac{١١}{٢} \text{ ، } س_٣ = ١ \text{ ، } س_٤ = ١ \text{ ، } س_٥ = -\frac{٣}{٢} \text{ ، } س_٦ = \text{صفر}$$

$$س_٧ = \text{صفر} \text{ ، } س_٨ = \frac{٥}{٢}$$

$$-١١٠ - \frac{-١٥ \times ٢٤}{٦} = -٥٠$$

وباتباع القواعد السابقة نحصل على الجداول الاتية :

المتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية		المتغيرات المكملة			المتغيرات المساعدة			الثوابت
	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	س٨	
س١	١	صفر	٦/٢٢	صفر	١/١١	٦/١١	صفر	—١/١١	٤٨/١١
س٧	صفر	صفر	٢	—١	١	—٢	١	—٢	٢٠
س٢	صفر	١	١/٢٢	صفر	—٢/١١	—١/١١	صفر	٢/١١	٣٦/١١
—ف(س)	صفر	صفر	٥/٢٢	صفر	١/١١	—٥/١١	صفر	—١/١١	٨٤/١١
—ع	صفر	صفر	—٢	١	—١	٣	صفر	٢	—٢٦

الجدول الاخير

المتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية		المتغيرات المكملة			المتغيرات المساعدة			الثوابت
	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	س٨	
س١	١	صفر	صفر	—٣/١١	٤/١١	صفر	٦/٢٢	—٦/٢٢	١٢٦/١١
س٣	صفر	صفر	١	—١/٢	١/٢	—١	١/٢	—١/٢	١٣
س٢	صفر	١	صفر	١/٢٢	—٥/٢٢	صفر	—١/٢٢	٥/٢٢	٢٣/١١
—ف(س)	صفر	صفر	صفر	٥/٢٢	—٣/٢٢	صفر	—٥/٢٢	—٣/٢٢	—١٤٩/١١
—ع	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	—١	١	١	صفر

وواضح من الجدول السابق ان قيمة —ع = صفر وان جميع معاملات الدالة —ف(س) اصفارا وارقاما سالبة ماعدا الرقم $\frac{٥}{٢٢}$ تحت عمود س٤ والذى يهمنا ان تكون قيم المتغيرات الاساسية اصفارا او سالبة وبذلك نكون قد وصلنا الى الحل الامثل حيث :-

$س_{١} = \frac{١٢٦}{١١}$ ، $س_{٢} = \frac{٢٣}{١١}$ ، $س_{٣} = ١٣$ ، $\bar{ف}(س) = -\frac{١٤٩}{١١}$ ،

$\bar{ع} = $ صفر

الخطة المثلى لتوزيع السفن على الخطوط الملاحية المختلفة حسب الحمولات :

بفرض وجود ثلاثة انواع من السفن أ ، ب ، جـ تعمل على ثلاثة خطوط ملاحية وموضح المحمول بواسطة كل نوع من السفن على الخطوط المختلفة وتكلفة نقل كل مائة طن وكذا المطلوب نقله لكل خط .

والمطلوب توزيع هذه الانواع من السفن على الخطوط المختلفة لنقل الحمولات الموضحة لكل نوع من انواع السفن لانجاز خطة النقل المطلوبة لكل خط للوصول الى اقل تكلفة نقل ممكنة . وموضح بالجدول التالى البيانات الخاصة بهذه المشكلة .

الخطوط / انواع السفن	التكلفة لكل ١٠٠ طن بالجنيه – الخط الاول	الثانى	الثالث	التكلفة لكل نوع من السفن بالمائة طن – الخط الاول	الثانى	الثالث	المحمول لكل نوع من انواع السفن بالمائة طن
أ	٩٩	—	—	$س_{١}$			١٠٨٠٠
ب	٩٢	٨٨	١١٠	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	١١٥٩٢
جـ	١٠١	—	—	$س_{٥}$	—	—	٣٦٠٠٠
المطلوب نقله لكل خط بالمائة طن	—	—	—	٥٧٦٠٠	٧٢٠	٧٢	٥٨٣٩٢

وتأخذ هذه المشكلة الشكل الرياضى الاتى :

المطلوب تقليل دالة الهدف الاتية :

$$\bar{ف}(س) = ٩٩\,س_{١} + ٩٢\,س_{٢} + ٨٨\,س_{٣} + ١١٠\,س_{٤} + ١٠١\,س_{٥}$$

$$س_{١} \geq ١٠٨٠٠$$

$$س_{٢} + س_{٣} + س_{٤} \geq ١١٥٩٢$$

$$س_{٥} \geq ٣٦٠٠٠$$

$$س_{١} + س_{٢} + س_{٥} \geq ٥٧٦٠٠$$
$$س_{٣} \geq ٧٢٠$$
$$س_{٤} \geq ٧٢$$
$$س_{١}، س_{٢}، س_{٣}، س_{٤}، س_{٥} \geq \text{صفر}$$

ولحل هذه المشكلة بطريقة السمبلكس نطرح من المتباينات السابقة المتغيرات المكملة Slack variables. $س_{٦}، س_{٧}، س_{٨}، س_{٩}، س_{١٠}، س_{١١}$ ونضيف المتغيرات المساعدة Artifical variables $س_{١٢}، س_{١٣}، س_{١٤}، س_{١٥}، س_{١٦}،$ $س_{١٧}$.

وبذلك تصبح المتباينات السابقة على الصورة الاتية :

$$س_{١} - س_{٦} + س_{١٢} = ١٠٨٠٠ \qquad (١)$$
$$س_{٢} + س_{٣} + س_{٤} - س_{٧} + س_{١٣} = ١١٥٩٢ \qquad (٢)$$
$$س_{٥} - س_{٨} + س_{١٤} = ٣٦٠٠٠ \qquad (٣)$$
$$س_{١} + س_{٢} + س_{٥} + س_{٩} + س_{١٥} = ٥٧٦٠٠ \qquad (٤)$$
$$س_{٣} - س_{١٠} + س_{١٦} = ٧٢٠ \qquad (٥)$$
$$س_{٤} - س_{١١} + س_{١٧} = ٧٢ \qquad (٦)$$

ويكون المطلوب ان تكون جميع قيم ع المتغيرات المساعدة كلها اصفار أى :

$$ع = س_{١٢} + س_{١٣} + س_{١٤} + س_{١٥} + س_{١٦} + س_{١٧} \qquad (٧)$$

وبالتعويض عن $س_{١٢}، س_{١٣}، س_{١٤}، س_{١٥}، س_{١٦}، س_{١٧}$ فى المعادلة (٧) من المعادلات ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ نحصل على :

$$ع = ١٠٨٠٠ - س_{١} + س_{٦} + ١١٥٩٢ - س_{٢} - س_{٣} - س_{٤} + س_{٧} + ٣٦٠٠٠ - س_{٥} + س_{٨} + ٥٧٦٠٠ - س_{١} - س_{٢} - س_{٥} + س_{٩} + ٧٢٠ - س_{٣} + س_{١٠} + ٧٢ - س_{٤} + س_{١١} .$$

ومعنى ذلك ان : $ع = -٢س_{١} - ٢س_{٢} - ٢س_{٣} - ٢س_{٤} - ٢س_{٥} + س_{٦} + س_{٧} + س_{٨} + س_{٩} + س_{١٠} + س_{١١} + ١١٦٧٨٤$

ومعنى آخر فان : $ع - ١١٦٧٨٤ = -٢س_{١} - ٢س_{٢} - ٢س_{٣} - ٢س_{٤} - ٢س_{٥} + س_{٦} + س_{٧} + س_{٨} + س_{٩} +$ ...

وفى النهاية تصبح الصورة كالاتى :

— ١١٦٧٨٤ = ٢ س$_1$ — ٢ س$_2$ — ٢ س$_3$ — ٢ س$_4$ — ٢ س$_5$ + س$_6$ +
س$_7$ + س$_8$ + س$_9$ + س$_{10}$ + س$_{11}$ — ع

وباتباع القواعد الواردة فى المثال السابق نحصل على الحل الاتى :

س$_1$ = ١٠٨٠٠
س$_2$ = ١٠٨٠٠
س$_3$ = ٧٢٠
س$_4$ = ٧٢
س$_5$ = ٣٦٠٠٠

الحالة الثالثة : القيود الهيكلية تساوى :

مشكلة التقطيع الامثل للالواح بالترسانات :

بفرض انه يوجد باحدى الترسانات ألواح صلب بمساحات ٦٠×١٠٠ = ٦٠٠٠ سم^2 ومطلوب تقطيع الالواح الاتية :

مقاس ٢٠ × ٣٠ سم^2 والمطلوب ٢٤٠ لوح (أ)
مقاس ٣٠ × ٤٠ سم^2 والمطلوب ١٠٠ لوح (ب)
مقاس ٤٠ × ٤٠ سم^2 والمطلوب ٨٠ لوح (جـ)

وهناك اربع طرق للتقطيع هى م$_1$، م$_2$، م$_3$، م$_4$ ويكون المطلوب تقطيع هذه الالواح بالكميات المطلوبة بحيث يكون الفاقد من التقطيع اقل ما يمكن — ويوضح الجدول الاتى الارقام الخاصة بهذه المشكلة .

مساحات التقطيع	طريقة التقطيع				الكمية المطلوبة باللوح
	م$_1$	م$_2$	م$_3$	م$_4$	
(أ) ٢٠×٣٠	٣	٤	٥	١٠	٢٤٠
(ب) ٣٠×٤٠	٢	—	١	صفر	١٠٠
(جـ) ٤٠×٤٠	١	٢	١	صفر	٨٠
الفاقد سم^2	٢٠٠	٤٠٠	٢٠٠	صفر	

فاذا رمزنا للمهالك حسب الطريقة م$_١$ بالرمز س$_١$ وللطريقة م$_٢$ بالرمز س$_٢$ وللطريقة م$_٣$ بالرمز س$_٣$ وللطريقة م$_٤$ بالرمز س$_٤$ فان دالة الهدف تكون :

ف(س) = ٢٠٠ س$_١$ + ٤٠٠ س$_٢$ + ٢٠٠ س$_٣$ + صفر س$_٤$ أقل ما يمكن مع العلم بان :

٣ س$_١$ + ٤ س$_٢$ + ٥ س$_٣$ + ١٠ س$_٤$ = ٢٤٠ (١)

٢ س$_١$ + ١ س$_٣$ = ١٠٠ (٢)

س$_١$ + ٢ س$_٢$ + س$_٣$ = ٨٠ (٣)

وواضح من المعادلات ١، ٢، ٣ ان المعادلة الاولى بها ١٠ س$_٤$ ولذلك نقسم طرفى المعادلة على ١٠ ونحصل على :

$\frac{٣}{١٠}$ س$_١$ + $\frac{٢}{٥}$ س$_٢$ + $\frac{١}{٢}$ س$_٣$ + ١ س$_٤$ = ٢٤

وبادخال ١ س$_٥$، ١ س$_٦$ فى المعادلتين ٢، ٣ تصبح المعادلات كالاتى :

٢٤ = $\frac{٣}{١٠}$ س$_١$ + $\frac{٢}{٥}$ س$_٢$ + $\frac{١}{٢}$ س$_٣$ + ١ س$_٤$ + صفر س$_٥$

١٠٠ = ٢ س$_١$ + صفر س$_٢$ + ١ س$_٣$ + صفر س$_٤$ + ١ س$_٥$ + صفر س$_٦$

٨٠ = ١ س$_١$ + ٢ س$_٢$ + ١ س$_٣$ + صفر س$_٤$ + صفر س$_٥$ + ١ س$_٦$

ولحل المشكلة نستخدم معاملات مساعدة فى دالة الهدف نرمز لها بالرمز (م) بالنسبة للمتغيرات المساعدة س$_٥$، س$_٦$ وندخل المعامل س$_٤$ فى الحل بقيمة صفر وتصبح الدالة

ف(س) = ٢٠٠ س$_١$ + ٤٠٠ س$_٢$ + ٢٠٠ س$_٣$ + صفر س$_٤$ + م س$_٥$ + م س$_٦$

وبوضع هذه الدالة والقيود فى الجدول الاتى نحصل على الجداول الاتية :

ص ج	ب و	س و	٢٠٠	٤٠٠	٢٠٠	و	م	م
			س$_١$	س$_٢$	س$_٣$	س$_٤$	س$_٥$	س$_٦$
	س$_٤$	٢٤	$\frac{٣}{١٠}$	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{١}{٢}$	١	صفر	صفر
م	س$_٥$	١٠٠	٢	صفر	١	صفر	١	صفر
م	س$_٦$	٨٠	١	٢	١	صفر	صفر	١
م		١٨٠	٣	٢	٢	صفر	صفر	صفر
ز ج — ص ج		صفر	—٢٠٠	—٤٠٠	—٢٠٠	صفر	صفر	صفر

الجـــدول الثانـــى

و	س٤	٩	صفر	٢/٥	٧/٢٠	١	−٣/٢٠	صفر
٢	س١	٥٠	١	صفر	١/٢	صفر	١/٢	صفر
٤	س٢	٣٠	صفر	٢	−١/٢	صفر	−١/٢	١
م		٣٠	صفر	٢	١/٢	صفر	−٣/٢	صفر
ز ج − ص ج		١٠٠٠٠	صفر	−٤٠	−١٠٠	صفر	١٠٠	صفر

الحل الامثـل

و	س٤	٣	صفر	صفر	١/٤	١	−٢/٢٠	−١/٥
٢	س١	٥٠	١	صفر	١/٢	صفر	١/٢	صفر
٤	س٢	١٥	صفر	١	١/٤	صفر	−١/٤	١/٢
م		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	−١	−١
ز ج − ص ج		١٦٠٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٢٠٠

ويوضح هذا الحل انه يلزم تقطيع ٦٨ لوحا منها ٥٠ لوح بالاسـلوب $س_١$ ، ١٥ لوحا بالاسلوب $س_٢$ وثلاثة ألواح بالاسلوب $س_٤$.

وبذلك نحصل على :

٣ × ٥٠ + ٤ × ١٥ + ١٠ × ٣ = ٢٤٠

٢ × ٥٠ = ١٠٠

١ × ٥٠ + ٢ × ١٥ = ٨٠

ويكون اقل فاقد من التقطيع ($سم^٢$) هو :

ف(س) = ٢٠٠ × ٥٠ + ٤٠٠ × ١٥ + صفر × ٣ = ١٦٠٠٠ $سم^٢$

وقد يكون البديل الاتى :

الحـــل البديـــل

ص ج	ب و	س و	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦
٢	س ٣	١٢	صفر	صفر	١	٤	$-\frac{١}{٥}$	$-\frac{٤}{٥}$
٤	س ١	٤٤	١	صفر	صفر	ـ٢	$-\frac{٣}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$
٤	س ٢	١٢	صفر	١	صفر	ـ١	$-١\frac{١}{٥}$	$\frac{٤}{٥}$
م		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	ـ ١	ـ ١
ز ج ـ ص ج		١٦٠٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٢٠٠

ولبرهنة هذا الحل نحصل على :

٣ × ٤٤ + ٤ × ١٢ + ٥ × ١٢ = ٢٤٠ (١)

٢ × ٤٤ + ١ × ١٢ = ١٠٠ (٢)

١ × ٤٤ + ٢ × ١٢ + ١ × ١٢ = ٨٠ (٣)

ومعنى ذلك انه يلزم تقطيع ٨٨ لوحا منها ٤٤ لوحا بالاسلوب س ١ ، ١٢ لوحا بالاسلوب س ٢ ، ١٢ لوحا بالاسلوب س ٣ .

كما تصبح دالة الهدف (سم ٢)

ف(س) = ٢٠٠ × ٤٤ + ٤٠٠ × ١٢ + ٢٠٠ × ١٢ = ١٦٠٠٠ سم ٢

تخطيط حركة (جدولة) السفن بين الموانى المختلفة :

هذه المشكلة من اهم المشاكل التى تقابل ادارة الحركة فى شركات الملاحة التى تعمل سفنها على خطوط ملاحية مختلفة . وترغب ادارة الحركة فى تخطيط حركة السفن بين الموانى المختلفة التى تقع على هذه الخطوط .

ومن المعروف ان كل خط ملاحى يشتمل على عدد من الموانى يتم شحن وتفريغ بضائع بينها مما يتطلب صياغة نموذج رياضى يوضح حركة السفن بين الموانى المختلفة . وبمعنى آخر فبفرض ان هناك العديد من المسارات Routes المعروفة لادارة الحركة على الخطوط الملاحية فيكون المطلوب اختيار المسارات المثلى للسفن بين الموانى المختلفة مما يستلزم صياغة المشكلة رياضيا ثم حلها

فى صورة رقمية توضع للمسئولين القرار العلمى الامثل الواجب اتخاذه •

الصياغة الرياضية للمشكلة :

نفرض ان :

ك ١ ، ك ٢ ، ••• ، ك ص ترمز الى الشحنات المختلفة بين الموانى فى رحلة الذهاب والعودة حيث (ك = ١ ، ٢ ، ••• ع) •

ى ترمز الى عدد السفن حيث (ى = ١ ، ٢ ، ••• ن) •

ب ج ترمز الى الانواع المختلفة لخطط الحركة (المسارات) (ج) والتى سنختار من بينها المسارات المثلى حيث (ج = ١ ، ٢ ، ••• م) •

ك ج ط ترمز الى كمية الشحن من نقاط الشحن (ط) والتى ستنقل حسب المسارات (ج) خلال رحلة واحدة حيث (ج = ١ ، ٢ ، ••• م) ، (ى = ١ ، ٢ ، ••• ن) •

ت ج ى زمن رحلة السفينة (ى) حسب المسار (ج) حيث (ج = ١ ، ٢ ، ••• م) ، (ى = ١ ، ٢ ، ••• ن) •

هـ ى ميزان زمن التشغيل للسفينة (ى) خلال الفترة المخططة (ى = ١ ، ٢ ، ••• ن) •

ف ج ايرادات السفينة من التشغيل حسب المسار (ج) عن رحلة واحدة حيث (ج = ١ ، ٢ ، ••• م) •

ر ج تكلفة تشغيل السفينة حسب المسار (ج) عن رحلة واحدة •

ويكون المطلوب تحديد عدد الرحلات (أ) التى تقوم بها السفينة حسب خطة الحركة (المسار) (ج) لكى نحصل على اكبر مجموع للايرادات من تشغيل كل السفن •

وفى ظل العدد المخطط للرحلات (أ) حيث (أ ١ ، أ ٢ ، أ م) فمن الشحنات (ك ط) يتم نقل (ك ط أ ١ ، ••• ك ط) ومن ميزانية زمن التشغيل (هـ ى) تعمل السفينة (ى) زمنا هو ت ل ى أ ل ى ، ••• ت م ى أ م ى) باليوم ومن ثم فان مجموع الايرادات وسنرمز لها بالرمز (ز ١) ومجموع تكلفة التشغيل وسنرمز لها بالرمز (ز ٢) للخطة يكونان كالاتى :

$$\text{ز}_1 = \text{ف}_1\,\text{أ}_1 + \cdots + \text{ف}_\text{م}\,\text{أ}_\text{م}$$

$$\text{ز}_2 = \text{ر}_1\,\text{أ}_1 + \cdots + \text{ر}_\text{م}\,\text{أ}_\text{م}$$

وتقابلنا فى هذه المشكلة الحالتين الاتيتين :

الحالة الاولى :

عندما يتم نقل كل الشحنات من نقاط الشحن بالكامل لرحلتى الذهاب والعودة للسفينة فان زمن تشغيل السفن لا يجب ان يتجاوز ميزانية التشغيل لهذه السفن.وبذلك فان دالة الهدف اما ان تكون اقل مجموع لتكلفة التشغيل (ز_2) وأقل مجموع لزمن تشغيل السفن والذى نرمز له بالرمز (ز_3) اى أن المطلوب يكون ايجاد قيم ($\text{أ}_1 ، \cdots ، \text{أ}_\text{م}$) التى تجعل دالة الهدف :

$$\text{ز}_2 = \text{ر}_1\,\text{أ}_1 + \cdots \text{ر}_\text{م}\,\text{أ}_\text{م}$$

$$\text{ز}_3 = \text{ت}_{\text{ى}1}\,\text{أ}_1 + \cdots \text{ت}_{\text{ن م}}\,\text{أ}_\text{م}$$

اقل ما يمكن بشرط تحقيق القيود الاتية :

$$\text{ك}_{1\text{ط}}\,\text{أ}_1 + \cdots + \text{ك}_{\text{م ط}}\,\text{أ}_\text{م} = \text{ك}_\text{ط} \quad (\text{ط} = 1، 2، \cdots، \text{ع}).$$

$$\text{هـ}_{\text{ى}1}\,\text{أ}_1 + \cdots + \text{ت}_{\text{م ى}}\,\text{أ}_\text{م} \leq \text{هـ}_\text{ى} \quad (\text{ى} = 1، 2، \cdots، \text{ن})$$

الحالة الثانية :

اذا كان حجم النقل يتجاوز طاقة السفن فان النموذج الرياضى يمكن ان يكون مشكلة برمجة خطية كسرية بحيث يكون المطلوب ايجاد قيم ($\text{أ}_1 ، \cdots \text{أ}_\text{م}$) التى تعظم الدالة الكسرية .

$$\text{ز} = \frac{\text{ف}_1\,\text{أ}_1 + \cdots + \text{ف}_\text{م}\,\text{أ}_\text{م}}{\text{ر}_1\,\text{أ}_1 + \cdots + \text{ر}_\text{م}\,\text{أ}_\text{م}}$$

وبشرط تحقيق القيود الاتية :

$$\text{ك}_{1\text{ط}}\,\text{أ}_1 + \cdots + \text{ك}_{\text{م ط}}\,\text{أ}_\text{م} \leq \text{ك}_\text{ط} \quad (\text{ط} = 1، 2، \cdots، \text{ع})$$

$$\text{ت}_{\text{ى}1}\,\text{أ}_1 + \cdots + \text{ت}_{\text{م ى}}\,\text{أ}_\text{م} \leq \text{هـ}_\text{ى} \quad (\text{ى} = 1، 2، \cdots، \text{ن})$$

$$\text{أ}_\text{ج} \geq \text{صفر} \quad (\text{ج} = 1، 2، \cdots، \text{م})$$

وبالنسبة للحالة الثانية يمكن ان نحول المشكلة بنفس الشروط بحيث يمكن استيعاب بعض نقاط الشحن وبحيث تصبح القيود

$\text{ك}_{\text{اى}}\,\text{أ}_{1} + \cdots + \text{ك}_{\text{م و م}} \geqq \text{ك}_{\text{و}}$ (و = ١، ٢، ٠٠٠، ب)

$\text{ك}_{\text{اط}}\,\text{أ}_{1} + \cdots + \text{ك}_{\text{م ط}}\,\text{أ}_{\text{م}} \geqq \text{ك}_{\text{ط}}$ (ط = ١، ٠٠٠، ب+١، ٠٠٠، ع)

$\text{ت}_{\text{اى}}\,\text{أ}_{1} + \cdots + \text{ت}_{\text{م ى}}\,\text{أ}_{\text{م}} \geqq \text{هـ}_{\text{ى}}$ (ى = ١، ٠٠٠، ن)

$\text{أ}_{\text{ج}} \geqslant$ صفر (ج = ١، ٠٠٠، م)

حيث :

و — نقاط الشحن التى يجب استيعابها .

وفى الحالات غير الواضحة عندما نسأل عن المشكلة التى نختارهـا (النوع الاول او النوع الثانى) فنبدأ من جديد تحديد قيم (أ_{1}، ٠٠٠، $\text{أ}_{\text{م}}$) التى تعظم الدالة (ز_{1}) تحت قيد الشرط الاول والثانى والذين يأخذان علامة ($\geqslant$) وبذلك يصبح واضحا لنا نوعية المشكلة ويعتبر نفس الحل نهائيا للنوع الثانى الذى يعظم الدالة .

ويكون المطلوب ايجاد القيم بحساب ($\text{أ}_{\text{ج}}$) التى تستخدم لحلها البرمجة الخطية العددية Integer Linear Programming.

مثال رقمى للنموذج الرياضى :

نقدم فيما يلى مثالا رقميا عن هذه المشكلة والبيانات الخاصة بها .

١ — بيانات خاصة بنقاط الشحن وموانى القيام والوصول ونوع الشحنة وكميتهـا وتولون النقل .

نقاط الشحن	موانى القيام والوصول	نوع الشحنة	كمية الشحنة ك بالالف طن	نولون النقل ف
١	أ ــ ب	فحم	٢٩	١٠
٢	أ ــ جـ	فحم	٤٠	٧
٣	أ ــ د	أسمنت	١٢	٢٠
٤	ب ــ أ	أسمنت	١٠	١٠
٥	جـ ــ أ	أسمدة	٣٦	٧
٦	د ــ أ	أسمدة	٥	١٢

٢ ــ بيانات خاصة بالسفن وحمولاتها وميزانية زمن التشغيل وتاريخ بدء الرحلة:

رقم السفينة ن = ٣	الحمولة الصافية بالالف طن ك	ميزانية الزمن لتشغيل السفن باليوم هـ ي	الميناء الذى ستبدأ منه السفينة وتاريخ آخر رحلة سابقة لها
١	١٤	٩٠	(أ) من الشهر السابق ٣/٣١
٢	٧	٨٤	(أ) من الشهر السابق ٣/٣١
٣	٣	١٠٠	(أ) من الشهر السابق ٣/٣١

٣ ــ بيانات خاصة بانواع خطط حركة السفن :

السفينة	أنواع خطط حركة السفن				
	أ/ب/ب/أ	أ/جـ/جـ/أ	أ/د/د/أ	أ/ب/جـ/أ	أ/د/جـ/أ
١	—	ب١	ب٢	—	—
٢	ب٣	ب٤	ب٥	ب٦	ب٧
٣	ب٨	ب٩	—	ب١٠	—

ويوضح الرسم خطط حركة السفن

٤ ـ بيانات خاصة بكمية الشحنات (ك جط) لنقاط الشحن (ط) التى تنقلهـا السفن حسب خطة الحركة (ب ج) عـن الرحلة الواحدة ، ويوضحهـا الجدول التالى :

نقاط الشحن ط	كميات الشحنات ك ج ط حسب خطة الحركة ب ج بالالف طن									
	ب ١	ب ٢	ب ٣	ب ٤	ب ٥	ب ٦	ب ٧	ب ٨	ب ٩	ب ١٠
١			ك٣١ = ٧			ك٦١ = ٧		ك٨١ = ٣		ك١٠١ = ٣
٢	ك١٢ = ١٤			ك٤٢ = ٧					ك٩٢ = ٣	
٣		ك٢٣ = ١٢			ك٥٣ = ٧		ك٧٣ = ٧			
٤			ك٣٤ = ٧					ك٨٤ = ٣		
٥	ك١٥ = ١٤			ك٤٥ = ٧		ك٦٥ = ٧	ك٧٥ = ٧		ك٩٥ = ٣	
٦		ك٢٦ = ٥			ك٥٦ = ٥					ك١٠٥ = ٣

٥ — بيانات خاصة بزمن الرحلة الدائرية ($ت_{جى}$) المحسوب لتشغيل السفن باليوم حسب خطة الحركة ($ب_{ج}$) ٠

$ت_١$	$ت_٢$	$ت_٣$	$ت_٤$	$ت_٥$	$ت_٦$	$ت_٧$	$ت_٨$	$ت_٩$	$ت_{١٠}$
٣٥	٥٥	٢٥	٤٠	٧٠	٤٢	٧٥	٢٠	٣٧	٤٠

٦ — بيانات خاصة بالايرادات ($ف_{ج}$) التى تحققها السفينة عن تشغيل رحلة واحدة حسب خطة الحركة ($ب_{ج}$) ٠

$ف_١$	$ف_٢$	$ف_٣$	$ف_٤$	$ف_٥$	$ف_٦$	$ف_٧$	$ف_٨$	$ف_٩$	$ف_{١٠}$
١٩٦	٣٠٠	١٤٠	٩٨	٢٠٠	١١٩	١٨٩	٦٠	٤٢	٥١

(الارقام بالالف جنيه)

صياغة المشكلة :

واضح ان حل هذه المشكلة هو تعظيم الايرادات الكلية التى تحققها السفن ومن ثم يستلزم الامر الوصول الى قيم ($أ_١$ ، ٠٠٠ $أ_{١٠}$) التى تعظم دالة الهدف

$$ز_١ = ١٩٦ أ_١ + ٣٠٠ أ_٢ + ١٤٠ أ_٣ + ٩٨ أ_٤ + ٢٠٠ أ_٥ + ١١٩ أ_٦ + ١٨٩ أ_٧ + ٦٠ أ_٨ + ٤٢ أ_٩ + ٥١ أ_{١٠} \qquad (١)$$

وقد حصلنا على دالة الهدف من حاصل ضرب قيم ($ف_م$ $أ_م$) ونحصل على قيم ($ف_م$) من الجدول السابق مباشرة اما ($أ_م$) فهى المجهول ٠

وتتمثل قيود المشكلة فى الاتى :

١ — ان كمية الشحنات المنقولة على السفن بين الموانى لا يجب ان تتجاوز حجم الشحنة المخطط (وبدلا من قيم $ك_ط$ ، $ك_{جط}$ نأخذ قيم $ك_{جط}$ ، د و $ك_ط$ د) اى ان :

(٢)

$٧٠أ_{٣} + ٧٠أ_{٦} + ٣٠أ_{٨} + ٣٠أ_{١٠} \leq ٢٩٠$

$٩٨أ_{٢} + ٤٩أ_{٤} + ٢١أ_{٩} \leq ٢٨٠$

$٢٤٠أ_{٢} + ١٤٠أ_{٥} + ١٤٠أ_{٧} \leq ٢٤٠$

$٧٠أ_{٣} + ٣٠أ_{٨} \leq ١٠٠$

$٩٨أ_{١} + ٤٩أ_{٤} + ٤٩أ_{٧} + ٢١أ_{١٠} \leq ٢٥٢$

$٦٠أ_{٤} + ٦٠أ_{٥} \leq ٦٠$

وقد حصلنا على قيم السطر الاول كالاتى :

بالنسبة للجزء الايمن من المتباينة (٢٩٠) حصلنا على القيمة من حاصل ضرب ($ك_{ط} \times د$) ونحصل عليها من الجدول رقم (١) بالنسبة لنقطة الشحن رقم (١) اى عبارة عن حاصل ضرب (٢٩ × ١٠ = ٢٩٠) وهكذا لبقية القيم ·

وبالنسبة للجزء الايسر من المتباينة نحصل عليه من حاصل ضرب ($ك_{جط} \times د$) ونحصل على قيم ($ك_{جط}$) من الجدول رقم (١) بالنسبة للسطر الاول (نقطة الشحنة الاولى)

$ك_{٣١} = ٧$ ، $ك_{٦١} = ٧$ ، $ك_{٨١} = ٣$ ، $ك_{١٠١} = ٣$

وبضرب هذه القيم فى (د) التى نحصل عليها من الجدول رقم (١) (السطر الاول آخر عمود) نحصل على القيم الاتية :

$ك_{٣١}د_{١} + ك_{٦١}د_{١} + ك_{٨١}د_{١} + ك_{١٠١}د_{١}$

$٧ \times ١٠ + ١٠ \times ٧ + ٣ \times ١٠ + ٧ \times ١٠$

وبضرب هذه القيم فى (أ) نحصل على

$٧٠أ_{٣} + ٧٠أ_{٦} + ٣٠أ_{٨} + ٣٠أ_{١٠}$

وهكذا بالنسبة لبقية اسطر المتباينة اعلاه ·

٢ — وبالنسبة لقيود زمن التشغيل للسفينة (ى) لا يجب ان يتجاوز الزمن ميزانية التشغيل المخططة لكل سفينة اى ان

$٣٥أ_{١} + ٥٥أ_{٢} \leq ٩٠$

$٢٥أ_{١} + ٤٠أ_{٤} + ٧٠أ_{٥} + ٤٢أ_{٦} + ٧٥أ_{٧} \leq ٨٤$

$٢٠أ_{١} + ٣٧أ_{٩} + ٤٠أ_{١٠} \leq ١٠٠$

كما ان قيم $أ_{١}$، $أ_{٢}$، ... $أ_{١٠} \geq$ صفر حيث (ج = ١، ٢، ... م)

وتحل هذه المشكلة بطريقة السمبلكس وتظهر الخطة الاولية بالجدول الاول للسمبلكس على النحو الاتى :

	ـ أ١	ـ أ٢	ـ أ٣	ـ أ٤	ـ أ٥	ـ أ٦	ـ أ٧	ـ أ٨	ـ أ٩	ـ أ١٠	١
ص١ =			٧٠			٧٠		٣٠		٣٠	٢٩٠
ص٢ =	٩٨			٤٩					٢١		٢٨٠
ص٣ =		٢٤٠			١٤٠		١٤٠				٢٤٠
ص٤ =			٧٠					٣٠			١٠٠
ص٥ =	٩٨			٤٩		٤٩	٤٩		٢١	٢١	٢٥٢
ص٦ =		٦٠			٦٠						٦٠
ص٧ =	٣٥	٥٥									٩٠
ص٨ =					٧٠	٤٢	٧٥				٧٥
ص٩ =			٢٥	٤٠				٢٠	٣٥	٤٠	٨٠
ز =	ـ١٩٦	ـ٣٠٠	ـ١٤٠	ـ٩٨	ـ٢٠٠	ـ١١٩	ـ١٨٩	ـ٦٠	ـ٤٢	ـ٥١	صفر

كما يصبح الحل الامثل للمشكلة موضحا فى الجدول الاتى :

	—ص٣	—ص٧	—ع١	—أ٤	—ص٦	—أ٧	—ص٨	—أ٣	—أ٩	—ص٩	
ص١ =											٣٠ر٠
ص٢ =											١٨٢ر٠
أ١ =											١ر٠
أ٨ =											٣ر٠
ص٥ =											٣٥ر٠
أ٥ =											صفر
أ٢ =											١ر٠
أ٦ =											٢ر٠
أ١٠ =											١ر٠
ص٤ =											١٠ر٠
ز =	٠ر٠٠٨	٥ر٦	٣٣ر٦١	١٥ر١٢١	٠ر٦٥٥	١٠ر٠	٢ر٨٣٦ -	١٠ر٩٥	٥ر١٧٥	١ر٢٧٥	٩٦٥ر٠

وتصبح قيم الحل الامثل كالاتى :

$$أ_{١} = ١ ، أ_{٢} = ١ ، أ_{٦} = ٢ ، أ_{٨} = ٣ ، أ_{١٠} = ١٠$$

ولبرهنة القيود نعيد كتابة القيود رقم (٢) من الجدول رقم (٤) على النحو الاتى :

$$٧أ_{٣} + ٧أ_{٦} + ٣أ_{٨} + ٣أ_{١٠} \leqq ٢٩$$
$$١٤أ_{١} + ٧أ_{٤} + ٣أ_{٩} \leqq ٤٠$$
$$١٢أ_{٢} + ٧أ_{٥} + ٧أ_{٧} \leqq ١٢$$
$$٧أ_{٣} + ٣أ_{٨} \leqq ١٠$$
$$١٤أ_{١} + ٧أ_{٤} + ٧أ_{٦} + ٧أ_{٧} + ٣أ_{٩} + ٣أ_{١٠} \leqq ٣٦$$
$$٥أ_{٢} + ٥أ_{٥} \leqq ٥$$

حيث نحصل على قيم الجزء الايمن من المتباينة من العمود (ك) بالجدول الاول رقم (١) ولبرهنة هذه المتباينات بعد التعويض عن قيم (أ) من الحل الامثل للاسطر المختلفة نحصل على القيم الاتية :

$$١٤ + ٩ + ٣ = ٢٦ < ٢٩$$
$$١٤ = ١٤ < ٤٠$$
$$١٤ = ١٢ = ١٢$$
$$٩ = ٩ < ١٠$$
$$١٤ + ١٤ + ٣ = ٣١ < ٣٦$$
$$٥ = ٥ = ٥$$

$$٩٧ < ١٣٢$$

ومعنى ذلك ان مجموع الحمولات التى تم نقلها ٩٧ وحدة حمولة حيث الوحدة تساوى ١٠٠٠ طن وان الحمولة التى كان من الواجب نقلها ١٣٢ وحدة حمولة حيث الوحدة تساوى ١٠٠٠ طن • ونوضح فيما يلى خطط الحركة لكل سفينة والحمولات التى نقلتها •

وواضح من الحل الامثل انه :

بالنسبة للسفينة الاولى :

أ$_{١}$ = ١ ، أ$_{٢}$ = ١ وبالنظر فى جدول رقم (٣) نجد ان أ$_{١}$ = ١ تقع فى مربع ب$_{١}$ اى ان السفينة الاولى تنجز رحلة واحدة حسب خطة الحركة من والى الموانى أ/جـ/جـ/أ .

وبالنظر فى جدول رقم (٤) نجد انه تحت عمود (ب$_{١}$) هناك نقطتان للشحن نقطة الشحن رقم (٢) حيث ك ١٢ = ١٤ ونقطة الشحن رقم (٥) حيث ك ١٥ = ١٤ وبالنظر الى جدول رقم (١) نجد ان نقطة الشحن الثانية هى ان تتجه السفينة الاولى من الميناء (أ) بحمولة ١٤ ألف طن وتفرغهم فى الميناء (جـ) كما ان نقطة الشحن رقم (٥) معناها ان تتجه السفينة الاولى من الميناء (جـ) بحمولة ١٤ ألف طن وتفرغهم فى الميناء (أ) .

أما بالنسبة لقيمة أ$_{٢}$ = ١ فبالنظر فى جدول رقم (٣) نجد انها تقع فى مربع ب$_{٢}$ اى ان السفينة الاولى تبحر رحلة واحدة ويمكن الحصول على قيم ب$_{٢}$ تحت عمودها بجدول رقم (٤) حيث نجد لها نقطتى شحن هما نقطة الشحن رقم (٣) حيث ك$_{٣٢}$ = ١٢ ونقطة الشحن رقم (٦) حيث ك$_{٦٢}$ = ٥ . واذا نظرنا الى نقاط الشحن بجدول رقم (١) نجد ان السفينة الاولى تتجه من ميناء (أ) بحمولة ١٢ ألف طن حيث ك$_{٣٢}$ = ١٢ وتفرغها فى ميناء (د) كما ان نقطة الشحن رقم (٦) تعنى ان تتجه السفينة الاولى من ميناء (د) بحمولة ٥ آلاف طن حيث ك$_{٦٢}$ = ٥ الى ميناء (أ) .

بالنسبة للسفينة الثانية :

أ$_{١}$ = ٢ = ب$_{٦}$ معناها فى الجدول رقم (٣) ان السفينة الثانية تنجز رحلتين حسب خطة الحركة من والى الموانى أ/ب/جـ/أ وبالنظر الى قيمة ب$_{٦}$ تحت عمودها بجدول رقم (٤) نجد انها تشمل نقطتى شحن هما : نقطة الشحن الاولى رقم (١) حيث ك$_{١٦}$ = ٧ ونقطة الشحن رقم (٥) حيث ك$_{٥٦}$ = ٧ وبالنظر الى نقاط الشحن بجدول رقم (١) نجد ان السفينة الثانية تنجز رحلتين من الميناء (أ) بحمولة ٧ آلاف طن لتفريغهم بالميناء (ب) كما انه بالنظر الى نقطة

الشحن رقم (٥) تنجز السفينة الثانية رحلتين من الميناء (جـ) بحمولة ٧ آلاف طن لتفريغهم فى الميناء (أ) ٠

بالنسبة للسفينة الثالثة :

أ$_{٨}$ = ٣ = ب$_{٨}$ ، أ$_{١٠}$ = ١ = ب$_{١٠}$ ومعناها فى الجدول رقم (٣) ان السفينة الثالثة تنجز ٣ رحلات حسب خطة الحركة من والى الموانى أ /ب/ب/ أ ، و بالنظر الى قيمة ب$_{٨}$ تحت عمود ها بجدول رقم (٤) نجد ان لها نقطتى شحن : نقطة الشحن رقم (١) حيث ك$_{٨١}$ = ٣ ونقطة الشحن رقم (٤) حيث ك$_{٨٤}$ = ٣ واذا نظرنا لنقاط الشحن بجدول رقم (١) نجد ان السفينة الثالثة تنجز ٣ رحلات من الميناء (أ) بحمولة ٣ آلاف طن وتفرغهم فى الميناء (ب) ثم تنجز ٣ رحلات من الميناء (ب) بحمولة ٣ آلاف طن الى الميناء (أ) ٠

كما أن أ$_{١٠}$ = ١ = ب$_{١٠}$ معناها ان السفينة الثالثة تنجز رحلة واحدة على المسار من والى الموانى أ /ب/جـ/ أ وبالنظر الى قيمة ب$_{١٠}$ تحت عمود هـا بجدول رقم (٤) نجد ان لها نقطتى شحن : نقطة رقم (١) حيث ك$_{١٠١}$ = ٣ ونقطة رقم (٥) حيث ك$_{١٠٥}$ = ٣ وباستخدام الجدول رقم (١) نجد ان السفينة الثالثة تنجز رحلة واحدة من الميناء (أ) بحمولة ٣ آلاف طن الى الميناء (ب) كما تنجز هذه السفينة رحلة واحدة من نقطة الشحن الخامسة اى من الميناء (جـ) بحمولة ٣ آلاف طن الى الميناء (أ) ٠

ويمكن تلخيص هذه الحسابات فى الجدول الاتى :

نقطة الشحن الاولى	الحمولة المنقولة	موانى القيام والوصول	عدد المسارات أ	حمولة السفينة ك	المنقول الفعلى أ × ك	الحمولة المطلوب نقلها حسب الخطة	رقم السفينة
١	٢٦٠٠٠	أ ــ ب	٢ر٠	= ٧٠٠٠	١٤٠٠٠		الثانية
			١ر٠	= ٣٠٠٠	٣٠٠٠		الثالثة
			٣ر٠	= ٣٠٠٠	٩٠٠٠		
					٢٦٠٠٠	٢٩٠٠٠	
٢	١٤٠٠٠	أ ــ ب	١ر٠	=١٤٠٠٠	١٤٠٠٠	٤٠٠٠٠	الاولى
٣	١٢٠٠٠	أ ــ د	١ر٠	=١٢٠٠٠	١٢٠٠٠	١٢٠٠٠	الاولى
٤	٩٠٠٠	ب ــ أ	٣ر٠	= ٣٠٠٠	٩٠٠٠	١٠٠٠٠	الثالثة
٥	٣١٠٠٠	جـ ــ أ	١ر٠	=١٤٠٠٠	١٤٠٠٠		الاولى
			٢ر٠	= ٧٠٠٠	١٤٠٠٠		الثانية
			١ر٠	= ٣٠٠٠	٣٠٠٠		الثالثة
					٣١٠٠٠	٣٦٠٠٠	
٦	٥٠٠٠	د ــ أ	١ر٠	٥٠٠٠	٥٠٠٠	٥٠٠٠	الاولى
					٩٧٠٠٠	١٣٢٠٠٠	المجموع

السفينة الاولى تنجز خطة المسار $ب_{١}$ = ١ وخطة المسار $ب_{٢}$ = ١
السفينة الثانية تنجز خطة المسار $ب_{٦}$ = ٢
السفينة الثالثة تنجز خطة المسار $ب_{٨}$ = ٣ وخطة المسار $ب_{١٠}$ = ١

خطة التشغيل بالزمن لكل سفينة :

ولبرهنة القيود (٣) الخاصة بزمن تشغيل كل سفينة يتضح ان

$$٣٥ أ_{١} + ٥٥ أ_{٢} \leqq ٩٠$$
$$٣٥ \times ١ + ٥٥ \times ١ = ٩٠$$
$$٢٥ أ_{٣} + ٤٠ أ_{٤} + ٧٠ أ_{٥} + ٤٢ أ_{٦} + ٧٥ أ_{٧} \leqq ٨٤$$
$$٨٤ = ٨٤$$
$$٢٠ أ_{٦} + ٣٧ أ_{٩} + ٤٠ أ_{١٠} \leqq ١٠٠$$
$$٦٠ + ٤٠ = ١٠٠$$

أى أن السفن الثلاثة استغلت بالكامل فترات تشغيلها ويصبح تاريخ عمل كل سفينة كالاتى :

السفينة الاولى : لها رحلة حسب الخطة ($ب_{١}$) ورحلة حسب الخطة ($ب_{٢}$) وزمن تشغيلها ٩٠ يوم .

السفينة الثانية : لها ٢ رحلة حسب الخطة ($ب_{٦}$) وزمن تشغيلها ٨٤ يوم .

السفينة الثالثة : لها ٣ رحلات بالخطة ($ب_{٨}$) ورحلة بالخطة ($ب_{١٠}$) وزمن تشغيلها ١٠٠ يوم.

السفينة الاولى :

$ب_{١}$ = $أ_{١}$ تقع فى جدول رقم (٣) تحت خطة المسار أ/ج/ج/أ معنى ذلك ان السفينة الاولى تشحن ١٤٠٠٠ طن من ميناء (أ) وتفرغها فى (ج) من (ج) تشحن ١٤٠٠٠ طن وتفرغهم من (أ) ومدة الرحلة ٣٥ يوم . وبفرض ان آخر رحلة انجزتها كانت فى ٣/٣١ فانها فى هذه الرحلة (أ/ج/ج/أ) تبدأ فى ٤/١ وتنتهى فى ٥/٥ .

كذلك فان للسفينة الاولى $ب_{٢}$ = ٢ رحلة تقع فى جدول رقم (٣) تحت خطة أ/د /د /أ ويعنى ذلك ان السفينة الاولى تشحن من (أ) ١٢٠٠٠ طن

وتفرغهم فى (د) ثم تشحن من (د) الى (أ) ٥٠٠٠ طن تفرغهم فى هـــذا الميناء . وتبدأ رحلتها لمدة ٥٥ يوما بعد انتهاء الرحلة الاولى من ٥/٦ حتى ٦/٢٩ .

بالنسبة للسفينة الثانية لها رحلتان تقعان تحت خطة (ب$_{٦}$) فــى جدول رقم (٣) و (ب$_{٦}$) تقع تحت الخطة (أ ب جـ د) وتبدأ عملها فى ٤/١ ولمدة ٨٤ يوما تبدأ الرحلة من (أ) تحمل ٧٠٠٠ طن تفرغهم فى (ب) ثم تتجه فارغة الى (جـ) ومن (جـ) تحمل ٧٠٠٠ طن تفرغهم فى (أ) لمدة ٤٢ يومـــا تنتهى فى ٥/١٢ ثم تبدأ الرحلة الثانية يوم ٥/١٣ وتشحن من (أ) ٧٠٠٠ طن تفرغهم فى (ب) وتتجه فارغة الى (جـ) لتحمل ٧٠٠٠ طن تفرغهم فى (أ) وتنتهى رحلتها يوم ٦/٢٢ .

وبالنسبة للسفينة الثالثة لها ٣ رحلات بالخطة (ب$_{٨}$) ورحلة بالخطـــة (ب$_{١٠}$) ولها ١٠٠ يوم تشغيل .

وبالنظر الى (ب$_{٨}$) فى الجدول (٣) يتضح ان خطة المسار أ/ب/ب/أ وتعمل السفينة ثلاث رحلات ،حيث تبدأ عملها من ميناء (أ) يوم ٤/١ حيـــث تشحن ٣٠٠٠ طن من (أ) وتفرغهم فى (ب) ثم تشحن من (ب) ٣٠٠٠ طـن وتفرغهم فى (أ) وتنتهى الرحلة الاولى يوم ٤/٢٠ وتبدأ الرحلة الثانية من ٤/٢١ من ميناء (أ) حيث تشحن السفينة ٣٠٠٠ طن تفرغهم فى (ب) ثم تشحن مـــن (ب) ٣٠٠٠ طن تفرغهم فى (أ) وتنتهى الرحلة الثانية يوم ٥/١٠ ثم تبـــدأ الرحلة الثالثة يوم ٥/١١ من ميناء (أ) حيث تشحن السفينة ٣٠٠٠ طن وتفرغهم فى (ب) ثم تشحن من (ب) ٣٠٠٠ طن تفرغهم فى (أ) وتفرغهم الرحلة الثالثـة يوم ٥/٣٠ .

كما ان للسفينة الثالثة رحلة حسب الخطة (ب$_{١٠}$) اى الخطة (أ ب جـ أ) لمدة ٤٠ يوما حيث تبدأ رحلتها يوم ٥/٣١ وتشحن من ميناء (أ) ٣٠٠٠ طـــن وتتجـه الى ميناء (ب) ثم تتجه الى ميناء (جـ) وتفرغ الشحنة من (جـ) ٣٠٠٠ طن وتفرغهم فى (أ) وتنتهى الرحلة ٧/٩ .

ويوضح الجدول الاتى خطة زمن التشغيل للسفن الثلاثة :

رقم السفينة	موانى القيام والوصول	عدد الرحلات	مدة الرحلة	تاريخ بداية ونهاية الرحلة	الحمولة المنقولة بالالف طن
١	أ / ج / ج / أ	١	٣٥	٤/١ ـ ٥/٥	٢٨
١	أ / د / د / أ	١	٥٥	٦/٥ ـ ٢٩/٦	١٧
٢	أ / ب / ج / أ	١	٤٢	٤/١ ـ ١٢/٥	١٤
٢	أ / ب / ج / أ	١	٤٢	١٣/٥ ـ ٢٣/٦	١٤
٣	أ / ب / ب / أ	١	٢٠	٤/١ ـ ٢٠/٤	٦
٣	أ / ب / ب / أ	١	٢٠	٢١/٤ ـ ١٠/٥	٦
٣	أ / ب / ب / أ	١	٢٠	١١/٥ ـ ٣٠/٥	٦
٣	أ / ب / ب / أ	١	٤٠	٣١/٥ ـ ٩/٧	٦
اجمالى الحمولة					٩٧

وباستخدام معادلة دالة الهدف رقم (١)

$$\text{ز}_{١} = ١٩٦\,\text{أ}_{١} + ٣٠٠\,\text{أ}_{٢} + ١٤٠\,\text{أ}_{٣} + ٩٨\,\text{أ}_{٤} + ٢٠٠\,\text{أ}_{٥} + ١١٩\,\text{أ}_{٦} + ١٨٩\,\text{أ}_{٧} + ٦٠\,\text{أ}_{٨} + ٤٢\,\text{أ}_{٩} + ٥١\,\text{أ}_{١٠} = ٩٦٥٠٠٠$$

وهذه النتيجة ظاهرة فى الجدول رقم (٨) اسفل آخر عمود بالجدول ٠

الخطة المثلى لتشغيل سفن البضائع العامة على الخطوط الملاحية المختلفة :

تعتبر مشكلة التشغيل الامثل لسفن البضائع العامة على الخطوط الملاحية المختلفة من المشاكل الهامة فى شركات الملاحة • والمطلوب ايجاد حل علمى لها • وهناك العديد من ادارات الشركات الملاحية التى تقوم بتشغيل سفنها على خطوط ملاحية مختلفة بطريقة اجتهادية وان كانت هذه الادارات تستخدم بعض الطرق العلمية التقليدية • وفى رأينا انه لا يكفى استخدام الطرق العلمية التقليدية فى تشغيل السفن على الخطوط المختلفة بل ان الامر يتطلب ان تكون هذه الطرق العلمية حديثة ومتقدمة بجانب التوسع فى استخدام الحاسبات الالكترونية •

وتعتبر بحوث العمليات من الاساليب العلمية الحديثة والمتقدمة والتى يمكن استخدامها بنجاح كبير لحل كثير من المشاكل فى مجال النقل البحرى ومنها مشكلة التشغيل الامثل لسفن البضائع العامة على الخطوط الملاحية المختلفة •

عرض المشكلة :

تتلخص المشكلة فى وجود عدد من سفن البضائع العامة مختلفة الاحجام وتكلفة التشغيل والربح يراد تشغيلها على خطوط ملاحية مختلفة بغرض تحقيق اكبر ربح كلى ممكن •

لذلك نفرض ان سفن البضائع العامة هى (ى) حيث ى = ١، ٢، ٠٠٠ م تعمل جميعها على خطوط ملاحية ترمز لها بالرمز (ج) حيث ج = ١، ٢، ٠٠٠ ن • ونفرض ان المعلوم ما يلى :

$أ_{ج}$ ترمز الى كمية البضاعة المتاحة على الخط الملاحى (ج) •

$ك_{ى}$ فترة التشغيل السنوية للسفينة (ى) •

$ب_{ىج}$ صافى الربح للرحلة الواحدة للسفينة (ى) على الخط (ج) •

$ف_{ىج}$ ما تنقله السفينة (ى) فى الرحلة الواحدة على الخط (ج) •

$ص_{ىج}$ عدد ايام الرحلة للسفينة (ى) على الخط (ج) •

ويكون المطلوب تحديد عدد الرحلات السنوية التى تنجزها كل سفينة على كل خط ملاحى وسنرمز لها بالرمز $س_{ىج}$ وذلك لتحقيق اكبر مجموع كلى من صافى الربح •

ويمكن تصوير هذه المشكلة كما فى الجدول الاتى :

الخطوط الملاحية / انوع السفن	١	٢	..	ج	..	ن	فترة التشغيل لكل سفينة باليوم
١				ف ١ج ، ب ١ج ، ص ١ج ، س ١ج			ك ١
٢				ف ٢ج ، ب ٢ج ، ص ٢ج ، س ٢ج			ك ٢
...				...			...
ى				ف ىج ، ب ىج ، ص ىج ، س ىج			ك ى
...				...			...
م				ف مج ، ب مج ، ص مج ، س مج			ك م
الحمولة المتاحة على كل خط ملاحى بالطن	أ ١	أ ٢	..	أ ج	..	أ ن	

البيانات اللازمة لهذه المشكلة :

يحتاج حل هذه المشكلة الى البيانات الاتية :

أ ــ بيانات خاصة بالسفن من حيث :

١ ــ الحمولة الوزنية للسفينة ٠

٢ ــ الطول والعرض والغاطس لاعتبارات الموانى التى تدخلها والارصفة التى تتراكى عليها ٠

٣ ــ عدد العنابر

٤ ــ سرعة السفينة بالميل بحرى/ ساعة ٠

٥ ــ معاملات التحميل والتستيف وما تنقله كل سفينة فى الرحلة الواحدة على كل خط ملاحى (صادرات وواردات) ٠

٦ ــ استهلاك السفينة من الوقود اثناء الابحار واثناء مكوثها بالموانى بالطن / يوم ٠

٧ ــ فترة التشغيل لكل سفينة على كل خط ملاحى باليوم ٠

٨ ــ عدد ايام الرحلة الواحدة لكل سفينة على كل خط ملاحى ٠

٩ ــ معدلات الشحن والتفريغ لكل سفينة بالطن / ساعة ٠

ب ــ بيانات خاصة بالخطوط الملاحية :

١ ــ عدد الخطوط الملاحية ٠

٢ ــ مسافات الابحار بالميل البحرى بين الموانى الوطنية والموانى الاجنبية ٠

٣ ــ الحمولات المتاحة على كل خط من الخطوط الملاحية للصادرات والواردات بالطن ٠

جـ ــ بيانات خاصة بايرادات وتكلفة التشغيل وصافى الربح :

١ ــ نوالين النقل للطن الواحد لكل نوع من الشحنات وعلى كل خط من الخطوط الملاحية بالنسبة للسفن المختلفة ٠

٢ ــ تكاليف تشغيل السفينة للرحلة الواحدة على كل خط من الخطوط الملاحية (ثابتة ومتغيرة) ٠

٣ ــ صافى الربح للسفينة للرحلة الواحدة على كل خط من الخطوط الملاحية ٠

الصياغة الرياضية للمشكلة :

دالة الهدف تحقيق اكبر مجموع كلى من الارباح :

ويمكن الحصول على المجموع الكلى من الارباح من حواصل ضرب ربح الرحلة الواحدة لكل نوع من انواع السفن على كل خط فى عدد الرحلات المنجزة لكل نوع من انواع السفن على كل خط ٠ ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا ٠

$$\text{مجـ}_{ى=1}^{م}\ \text{مجـ}_{ج=1}^{ن}\ ب_{ىج}\ س_{ىج}$$

قيود المشكلة :

١ — بالنسبة لفترة التشغيل فان طول فترة التشغيل لكل نوع من انواع السفن مضروبا فى عدد الرحلات على كل الخطوط يجب ان يكون اقل من او يساوى مجموع فترة التشغيل لكل نوع من انواع السفن وعلى كل خط اى ان :

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن}\ ص_{ىج}\ س_{ىج} \leq ك_{ى} \qquad (ى = ١ ، ٢ ، ...... ، م)$$

٢ — وبالنسبة لاى خط ملاحى فان كمية البضائع المنقولة بواسطة انواع السفن المختلفة (ى) مضروبا فى عدد الرحلات المنجزة لاتزيد عن الكمية المتاحة من البضائع على كل خط اى ان :

$$\text{مجـ}_{ى=1}^{م}\ ف_{ىج}\ س_{ىج} \leq أ_{ج} \qquad (ى = ١ ، ٢ ، ...... ، ن)$$

٣ — يشترط ان تكون جميع قيم $س_{ىج}$ لا سالبة اى ان $س_{ىج} \geq$ صفر

وبذلك تأخذ المشكلة الصورة الرياضية الاتية :

المطلوب ايجاد قيم $س_{ىج}$ (ى = ١ ، ٢ ، ... ، م) و (ج = ١ ، ٢ ، ... ، ن)
التى تجعل الدالة

$$\text{مجـ}_{ى=1}^{م}\ \text{مجـ}_{ج=1}^{ن}\ ب_{ىج}\ س_{ىج}$$

اكبر ما يمكن مع العلم بأن

$$\text{مجـ}_{ج=1}^{ن}\ ص_{ىج}\ س_{ىج} \leq ك_{ى}$$

$$\text{مجـ}_{ى=1}^{م}\ ف_{ىج}\ س_{ىج} \leq أ_{ج}$$

$$س_{ىج} \geq \text{صفر}$$

وتدخل هذه المشكلة ضمن مشاكل البرمجة الخطية وتحل بطريقة السمبلكس .

مثـال رقمى :

نقدم فيما يلى مثالا رقميا لهذه المشكلة بفرض وجود ٥ سفن بضائع عامـــــة تعمل على ثلاثة خطوط ملاحيـة :

الخطوط انواع السفن	الخـــــط الملاحـــــى الاول	 الثـانى	 الثـالث	فـترة التشغيل باليوم
السفينة الاولى حمولة ٦٠٠٠ طـن	٣٠٠٠ ٦٠٠٠٠ ٣٨ س١١	٣٤٠٠ ٥٢٠٠٠ ٤٥ س١٢	٤٠٠٠ ٤٨٠٠٠ ٣٠ س١٣	٣٢٠
السفينة الثانية حمولة ٤٨٠٠ طـن	٣٦٠٠ ٥٤٠٠٠ ٤٢ س٢١	٤٠٠٠ ٣٦٠٠٠ ٥٠ س٢٢	٢٨٠٠ ٥٩٠٠٠ ٣٦ س٢٣	٣٠٠
السفينة الثالثة حمولة ٨٠٠٠ طـن	٥٨٠٠ ٧٠٠٠٠ ٢٧ س٣١	٤٨٠٠ ٩٦٠٠٠ ٣٢ س٣٢	٦٤٠٠ ٦٨٠٠٠ ٢٤ س٣٣	٢٨٠
السفينة الرابعة حمولة ٩٦٠٠ طـن	٧٠٠٠ ٦٢٠٠٠ ٣٢ س٤١	٦٨٠٠ ٤٨٠٠٠ ٣٨ س٤٢	٥٨٠٠ ٥٤٠٠٠ ٢٨ س٤٣	٣٣٠
السفينة الخامسة حمولة ٣٦٠٠ طـن	١٨٠٠ ٣٨٠٠٠ ٣٥ س٥١	٢٧٠٠ ٤٢٠٠٠ ٤٢ س٥٢	٣٢٠٠ ٢٤٠٠٠ ٣٠ س٥٣	٣١٠
الحمولـــة المتاحة على كل خـــط بالطـــن	١٤٠ ٠٠٠	١٥٠ ٠٠٠	١٨٠ ٠٠٠	

ويلاحظ ان الرقم على اليمين من اعلى داخل كل مربع يمثل صافى الربح لكل سفينة فى الرحلة على كل خط ملاحى والرقم على اليسار من اعلى داخل كل مربع يمثل ما تنقلـــه السفينة فى الرحلة الواحدة على كل خط كما يمثل الرقم اسفل كل سطر على يسار كل مربع

عدد ايام الرحلة لكل سفينة على كل خط . اما الرموز من $س_{١١}$ حتى $س_{٥٣}$ فتمثل عدد الرحلات لكل سفينة على كل خط .

دالة الهدف تحقيق اكبر مجموع كلى من الارباح :

ف(س) = ٦٠٠٠٠ $س_{١١}$ + ٥٢٠٠٠ $س_{١٢}$ + ٤٨٠٠٠ $س_{١٣}$ + ٥٤٠٠٠ $س_{٢١}$ +
٣٦٠٠٠ $س_{٢٢}$ + ٥٩٠٠٠ $س_{٢٣}$ + ٧٠٠٠٠ $س_{٣١}$ + ٩٦٠٠٠ $س_{٣٢}$ +
٦٨٠٠٠ $س_{٣٣}$ + ٦٢٠٠٠ $س_{٤١}$ + ٤٨٠٠٠ $س_{٤٢}$ + ٥٤٠٠٠ $س_{٤٣}$ +
٣٨٠٠٠ $س_{٥١}$ + ٤٢٠٠٠ $س_{٥٢}$ + ٢٤٠٠٠ $س_{٥٣}$ ⟵ اكبر ما يمكن .

قيود المشكلة :

١ — ٣٨ $س_{١١}$ + ٤٥ $س_{١٢}$ + ٣٩ $س_{١٣}$ ≧ ٣٢٠
٢ — ٤٢ $س_{٢١}$ + ٥٠ $س_{٢٢}$ + ٣٦ $س_{٢٣}$ ≧ ٣٠٠
٣ — ٢٧ $س_{٣١}$ + ٣٢ $س_{٣٢}$ + ٢٤ $س_{٣٣}$ ≧ ٢٨٠
٤ — ٣٢ $س_{٤١}$ + ٣٨ $س_{٤٢}$ + ٢٨ $س_{٤٣}$ ≧ ٣٣٠
٥ — ٣٥ $س_{٥١}$ + ٤٢ $س_{٥٢}$ + ٣٠ $س_{٥٣}$ ≧ ٣١٠
٦ — ٣٠٠٠ $س_{١١}$ + ٣٦٠٠ $س_{٢١}$ + ٥٨٠٠ $س_{٣١}$ + ٧٠٠٠ $س_{٤١}$ +
١٨٠٠ $س_{٥١}$ ≧ ١٤٠٠٠٠
٧ — ٣٤٠٠ $س_{١٢}$ + ٤٠٠٠ $س_{٢٢}$ + ٤٨٠٠ $س_{٣٢}$ + ٦٨٠٠ $س_{٤٢}$ +
٢٧٠٠ $س_{٥٢}$ ≧ ١٥٠٠٠٠
٨ — ٤٠٠٠ $س_{١٣}$ + ٢٨٠٠ $س_{٢٣}$ + ٦٤٠٠ $س_{٣٣}$ + ٥٨٠٠ $س_{٤٣}$ +
٣٢٠٠ $س_{٥٣}$ ≧ ١٨٠٠٠٠
٩ — $س_{١١}$ ، $س_{١٢}$ ، . . . ، $س_{٥٣}$ ≦ صفر

وتعتبر هذه المشكلة من مشاكل البرمجة الخطية وتحل بطريقة السمبلكس ، وتظهر النتائج كالاتى :

ف(س) = ٢٨٣٥٤١٠

$س_{١١}$ = ٨ر٤٢ ، $س_{٢٣}$ = ٩ر١٧ ، $س_{٣٢}$ = ٨ر٧٥ ،
$س_{٤١}$ = ١٠ر٣١ ، $س_{٥٢}$ = ٧ر٣٨

وطبقا لهذه النتائج تكون خطة التشغيل كالاتى :

١ ـ بالنسبة للسفينة الاولى حمولة ٦٠٠٠ طن تنجز هذه السفينة ٤٢ر٨ رحلــــة سنويا على الخط الملاحى الاول وتستغل فترة التشغيل بالكامل اى ٣٦ × ٤٢ر٨ = ٣٢٠ .

٢ ـ بالنسبة للسفينة الثانية حمولة ٤٨٠٠ طن تنجز هذه السفينة ١٧ر٩ رحلة سنويا على الخط الملاحى الثالث وتستغل فترة التشغيل بالكامل اى ٣٦ × ١٧ر٩ = ٣٣٠ .

٣ ـ بالنسبة للسفينة الثالثة حمولة ٨٠٠٠ طن تنجز هذه السفينة ٧٥ر٨ رحلة سنويا على الخط الملاحى الثانى وتستغل فترة التشغيل بالكامل اى ٣٢× ٧٥ر٨ = ٢٨٠ .

٤ ـ بالنسبة للسفينة الرابعة حمولة ٩٦٠٠ طن تنجز هذه السفينة ٣١ر١٠ رحلة سنويا على الخط الملاحى الاول وتستغل فترة تشغيل بالكامل اى ٣٢ر٣١ر١٠ = ٣٣٠ .

٥ ـ وبالنسبة للسفينة الخامسة حمولة ٣٦٠٠ طن تنجز هذه السفينة ٣٨ر٧ رحلــــة سنويا على الخط الملاحى الثانى وتستغل فترة التشغيل بالكامل اى ٤٢ ×٣٨ر ٧ = ٣١٠ .

اما بالنسبة للحمولات المنقولة من الخطوط الملاحية المختلفة فيظهر النموذج النتائج الاتيــة :

١ ـ من الخط الملاحى الاول يتم نقل ٩٧٤٣٠ طن على النحو الاتى :

أ ـ تنقل السفينة الاولى حمولة ٦٠٠٠ طن ٢٥٢٦٠ طن عبارة عن ناتج ضــــرب عدد الرحلات فى الحمولة المنقولة فى الرحلة الواحدة اى ٣٠٠٠× ٤٢ر٨ = ٢٥٢٦٠ .

ب ـ تنقل السفينة الرابعة حمولة ٩٦٠٠ طن ٧٢١٧٠ طن عبارة عن ناتج ضرب عدد الرحلات فى الحمولة المنقولة فى الرحلة الواحدة اى ٧٠٠٠ × ٣١ر١٠ = ٧٢١٧٠ .

٢ — ومن الخط الملاحى الثانى يتم نقل ٦١٩٢٦ طن على النحو الاتى :

أ — تنقل السفينة الثالثة حمولة ٨٠٠٠ طن ٤٢٠٠٠ طن عبارة عن ناتج ضـــرب عدد الرحلات فى الحمولة المنقولة فى الرحلة الواحدة اى ٤٨٠٠ × ٨و٧٥ = ٤٢٠٠٠ .

ب — تنقل السفينة الخامسة حمولة ٣٦٠٠ طن ١٩٩٢٦ طن عبارة عن ناتج ضـــرب عدد الرحلات فى الحمولة المنقولة فى الرحلة الواحدة اى ٢٧٠٠ × ٧ر٣٨ = ١٩٩٢٦ .

٣ — ومن الخط الملاحى الثالث يتم نقل ٢٥٦٧٦ طن تنقلهم السفينة الثانية حمولـــة ٤٨٠٠ طن وتنجز ١٧ر٩ رحلة سنويا اى ان حجم النقل ٢٨٠٠ × ١٧ر٩ = ٢٥٦٧٦ وبالنسبة لصافى الربح الذى تحققه كل سفينة يوضح النموذج البيـــانات الاتية :

١ — تحقق السفينة الاولى حمولة ٦٠٠٠ طن فى الرحلة الواحدة صافى ربـح ٦٠٠٠٠ جنيه على الخط الملاحى الاول وتنجز ٨ر٤٢ رحلة سنويا اى انها تحقق صـــافى ربح سنوى ٦٠٠٠٠ × ٨ر٤٢ = ٥٠٥٢٠٠ .

٢ — تحقق السفينة الثانية حمولة ٤٨٠٠ طن صافى ربح فى الرحلة الواحدة ٥٩٠٠٠ جنيه على الخط الملاحى الثالث وتنجز ١٧ر٩ رحلة سنويا اى انها تحقق صـــافى ربح سنوى ٥٩٠٠٠ × ١٧ر٩ = ٥٤١٠٣٠ .

٣ — تحقق السفينة الثالثة حمولة ٨٠٠٠ طن صافى ربح فى الرحلة الواحـــــــدة ٩٦٠٠٠ جنيه على الخط الملاحى الثانى وتنـجز ٨ر٧٥ رحلة سنويا اى انهـا تحقق صافى ربح سنوى ٩٦٠٠٠ × ٨ر٧٥ = ٨٤٠٠٠٠ .

٤ — تحقق السفينة الرابعة حمولة ٩٦٠٠ طن صافى ربح فى الرحلة الواحدة ٦٢٠٠٠ جنيه على الخط الملاحى الاول وتنجز ١٠ر٣١ رحلة سنويا اى انها تحقق صـــافى ربح سنوى ٦٢٠٠٠ × ١٠ر٣١ = ٦٣٩٢٢٠ .

٥ — تحقق السفينة الخامسة حمولة ٣٦٠٠ طن صافى ربح فى الرحلة الواحدة ٤٢٠٠٠ جنيه على الخط الملاحى الثانى وتنجز ٧ر٣٨ رحلة سنويا اى انها تحقق صـــافى ربح سنوى ٤٢٠٠٠ × ٧ر٣٨ = ٣٠٩٩٦٠ .

٦ ـ يبلغ صافى الربح السنوى الكلى من التشغيل ٢٨٣٥٤١٠ جنيه .

ويمكن استخراج معاملات التحميل للسفن المختلفة على النحو الاتى :

١ ـ بالنسبة للسفينة الاولى حمولة ٦٠٠٠ طن يلاحظ ان الحمولة الوزنية فى رحلة الذهاب ٦٠٠٠ طن وفى رحلة العودة ٦٠٠٠ طن اى ان الحمولة الوزنية فى الرحلة الكاملة ١٢٠٠٠ طن وقد قامت هذه السفينة بانجاز ٨٫٤٢ رحلة سنويا اى ان حمولتها الوزنية عبارة عن ١٢٠٠٠ × ٨٫٤٢ = ١٠١٠٤٠ وما نقلته فعلا ٢٥٢٦٠ طن أى أن معامل التحميل لها عبارة عن :

$$\frac{٢٥٢٦٠}{١٠١٠٤٠} \times ٪١٠٠ = ٪٢٥$$

٢ ـ وبالنسبة للسفينة الثانية حمولة ٤٨٠٠ طن تكون حمولتها الوزنية خلال رحلتى الذهاب والعودة ٩٦٠٠ طن وتنجز ٩٫١٧ رحلة سنويا اى ان حمولتها الوزنية السنوية ٩٦٠٠ × ٩٫١٧ = ٨٨٠٣٢ وقد قامت بنقل ٢٥٦٧٦ طن أى ان معامل تحميلها

$$\frac{٢٥٦٧٦}{٨٨٠٣٢} \times ١٠٠ = ٢٩٫٢٪$$

٣ ـ ويلاحظ ان الحمولة الوزنية للسفينة الثالثة ١٦٠٠٠ فى رحلتى الذهاب والعودة وقد قامت بانجاز ٨٫٧٥ رحلة سنويا اى ان حمولتها الوزنية السنوية ١٤٠٠٠٠ طن وقامت بنقل ٤٢٠٠٠ طن سنويا اى ان معامل تحميلها

$$\frac{٤٢٠٠٠}{١٤٠٠٠٠} \times ١٠٠ = ٪٣٠$$

٤ ـ كما أن الحمولة الوزنية للسفينة الرابعة فى رحلتى الذهاب والعودة ١٩٢٠٠ طن وانجزت هذه السفينة ١٠٫٣١ رحلة سنويا اى ان حمولتها الوزنية السنوية ١٩٧٩٥٢ طن وقامت بنقل ٧٢١٧٠ ومعنى ذلك ان معامل التحميل لها

$$\frac{٧٢١٧٠}{١٩٧٩٥٢} \times ١٠٠ = ٣٦٫٥٪$$

٥ ـ وبالنسبة للسفينة الخامسة فان حمولتها الوزنية فى رحلتى الذهاب والعودة ٧٢٠٠ طن وانجزت ٧٫٣٨ رحلة اى ان حمولتها الوزنية السنوية ٥٣١٣٦ طن وقد نقلت هذه السفينة ١٩٩٢٦ طن اى ان معامل التحميل لها

$$\frac{١٩٩٢٦}{٥٣١٣٦} \times ١٠٠ = ٣٧٫٥ ٪$$

وبصفة عامة توضح الحسابات حجم المنقول وصافى الربح من كل خط من الخطوط الملاحية وذلك على النحو التالى :

١ ـ بالنسبة للخط الملاحى الاول تم نقل ٩٧٤٨٠ طن ويحقق هذا الخط صافى ربح ١١٤٤٤٢٠ جنيه .

٢ ـ وبالنسبة للخط الملاحى الثانى تم نقل ٦١٩٢٦ طن ويحقق هذا الخط صافى ربح ١١٤٩٩٦٠ جنيه .

٣ ـ كما تم نقل ٢٥٦٧٦ طن وحقق هذا الخط صافى ربح ٥٤١٠٣٠ جنيه .

كما يصبح معامل التحميل العام لمجموع السفن الخمسة $\frac{١٨٥٠٣٢}{٥٨٠١٦٠}$ × ١٠٠ = ٣١٫٩٪ .

أو $\frac{٢٥٪ + ٢٩٫٢٪ + ٣٠٪ + ٣٦٫٥٪ + ٣٧٫٥٪}{٥}$ = ٣١٫٦ ٪

ويظهر الجدول الاتى النتيجة النهائية للحسابات :

الخطوط السفن	الخط الملاحى: الاول	الخط الملاحى: الثانى	الخط الملاحى: الثالث	فترة التشغيل: الفعلية	فترة التشغيل: المخططة	معامل التحصيل
السفينة الاولى حمولة ٦٠٠٠ طن	عدد الرحلات السنوية ٢ر٨٤ عدد ايام الرحلة ٣٨ يوم الحمولة المنقولة فى الرحلة ٣٠٠٠ طن • المنقول فى السنة ٢٥٢٦٠ طن صافى الربح السنوى ٥٠٠٥٢٠٠			٣٢٠	٣٢٠	٢٥
السفينة الثانية حمولة ٤٨٠٠ طن			عدد الرحلات السنوية ٩ر١٧ عدد ايام الرحلة ٣٨ الحمولة المنقولة فى الرحلة ٢٨٠٠ طن المنقول فى السنة ٢٥٦٧٦ طن صافى الربح السنوى ٥٤١٠٣٠	٣٠٠	٣٠٠	٢ر٢٩

الخطوط / السفن	الخط الملاحى: الاول	الخط الملاحى: الثانى	الخط الملاحى: الثالث	فترة التشغيل: الفعلية	فترة التشغيل: المخططة	معامل التحميل
السفينة الثالثة حمولة ٨٠٠٠ طن		عدد الرحلات السنوية ٨٫٧٥ عدد ايام الرحلة ٣٨ المنقول فى الرحلة ٤٨٠٠ المنقول فى السنة ٤٢٠٠٠ صافى الربح السنوى ٨٤٠٠٠٠		٢٨٠	٢٨٠	٣٠
السفينة الرابعة حمولة ٩٦٠٠٠ طن	عدد الرحلات السنوية ١٠٫٣١ عدد ايام الرحلة ٣٢ المنقول فى الرحلة ٧٠٠٠ المنقول فى السنة ٧٢١٧٠ صافى الربح السنوى ٦٣٩٢٢٠			٣٣٠	٣٣٠	٣٦٫

الخطوط / السفن	الخط الملاحى: الاول	الخط الملاحى: الثانى	الخط الملاحى: الثالث	فترة التشغيل: الفعلية	فترة التشغيل: المخططة	معامل التحميل
السفينة الخامسة حمولة ٣٦٠٠ طن		عدد الرحلات السنوية ٧٫٣٨ عدد ايام الرحلة ٤٢ المنقول فى الرحلة ٢٧٠٠ المنقول فى السنة ١٩٩٢٦ صافى الربح السنوى ٣٠٩٩٦٠		٣١٠	٣١٠	٣٧٫م
الحمولة المتاحة	١٤٠ ٠٠٠	١٥٠ ٠٠٠	١٨٠ ٠٠٠			
الحمولة المنقولة	٩٧ ٤٣٠	٦١ ٩٢٦	٢٥ ٦٧٦			
نسبة المنقول الى المتاح	٦٩٫٦ ٪	٤١٫٣٪	١٤٫٣			