(رابعًا) : الحسبان : تكامل ثم تفاضل

(٤-٠) كلمة حُسبان (Calchus) مأخوذة عن كلمة لاتينية تعنى قطع الأحجار الصغيرة التى كانت تستخدم فى المعداد. وقد كان القرن السابع عشر حقبة زمنية اتسمت بالثراء الرياضى فى الاكتشافات والابتكارات... ولكن أعظم الانجازات كان فى ابتكار الحسبان مع نهاية القرن على يدى نيوتن وليبنتز وفيما حدث بينهما من مناقشات بل وتنازعات تنافسية إضافة إلى صراعات فكرية وفلسفية بشأن مفاهيم دقيقة خاصة بالنهاية والدالة ومعدل التغير وبالكميات المتناهية فى الصغر (Infinitismals) والتى شبهها الأسقف الرياضى بيركلى بالأشباح (Ghosts).

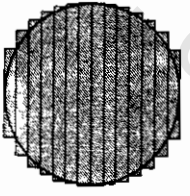
(٤-١) من هنا كانت البداية : طريقة الاستنفاد (Exhaustion)

على غير ما يحدث حاليًا فى كل المستويات وكل العالم فى دراسة الحسبان حيث تبدأ دراسته بالتفاضل ثم التكامل، فإن ابتكار هذا العلم بدأ بالتكامل ثم أتى التفاضل.

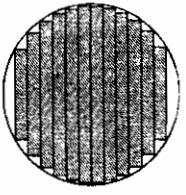
البداية – كما هو الحال – فى كل الرياضيات أو معظمها – تعود إلى الإغريق فى تناقضات زينو بالنسبة للتقسيم اللانهائى إلى جزئيات ذريرية لأى كمية وبالنسبة للحركة من حيث تقسيم الزمن إلى لحظات متناهية فى الصغر. ثم جاءت محاولات حساب مساحات وحجوم وأطوال أقواس. وقد استخدم الإغريق طريقة الاستنفاد والتى تستند إلى الفرض بأنه إذا كان يمكن حذف جزء من أى كمية لا يقل عن نصفها، ومن الباقى يحذف جزء آخر يقل عن نصفه... وهكذا، فعلى المدى الطويل يبقى جزء أقل من أى قيمة معينة من نفس النوع.. وذلك بأن يستنفدوا المساحة بين الدائرة مثلاً ومساحة مضلع منتظم داخلها.

السوفسطائى أنتيفون (٣٠٠ ق.م) المعاصر لسقراط قال بأنه إذا ضاعفنا عدد حروف مضلع داخل دائرة (بحيث رؤوسه تقع على محيط الدائرة)، فإن الفرق فى المساحة بين الدائرة والمضلع سوف يستنفذ فى النهاية... واستنتج من ذلك إمكانية تربيع الدائرة (!)، وكان ذلك يتعارض مع مبدأ أن الكميات قابلة للتقسيم بدون نهاية.. إلا أنها كانت بذرة فكرة

الاستنفاد وهى بذرة فكرة التكامل كنهاية تجميع أجزاء أو شرائح متناهية الصغر ينقسم إليها شكل يراد إيجاد طوله أو مساحته أو حجمه. وقد استخدم أرشميدس طريقة الاستنفاذ، كما استخدم طريقة أخرى أطلق عليها طريقة التوازن ولكنه لم يعتبرها برهانا مقبولاً لإيجاد حجم كرة... ولكن طريقة أرشميدس فى تقسيمه الشكل إلى شرائح أو طبقات (Layers) (مساحية أو حجمية بحسب طبيعة الشكل) متوازية و«نحيفة» جدًا.. واستخدمت بعد ذلك فى التكاملات بواسطة آخرين يمكن أن يكون ثابت بن قرة (٨٧٠ م) أحدهم.



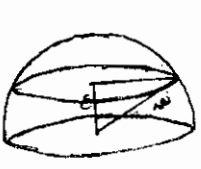
أكبر قليلاً



أقل قليلاً

(٤-٢) التكامل فى أوروبا :

نظرية التكامل وجدت حماسا قليلاً بعد أعمال أرشميدس... إلى أن تم ترجمة مخطوطات لأرشميدس وجدت فى القسطنطينية حيث ترجمت وطبعت عام (١٤٥٠م) وقد اهتم بعملية التكامل المهندس السويسرى «ستيفن» والرياضى الإيطالى فاليريو (١٥٥٢-١٦١٨) اللذين استخدما فكرة نهاية المجاميع بعد التقسيم إلى شرائط وشرائح «دقيقة» وتفاديا فكرة الاستنفاذ. الفلكى «كبلر» Kepler استخدم التكامل فى دراسة حركة الكواكب وإيجاد سعة براميل النبيذ... عن طريق تقسيم الدائرة إلى مثلثات صغيرة رأسها مركز الدائرة وتقسيم الكرة إلى مخروطات صغيرة رأسها مركز الكرة.



الإيطالى كافالـيرى (Cavalierie و١٥٩٨-١٦٤٧) استخدم طريقة أسماها طريقة "الغير القابل للانفصال (Indivisible)" فى حساب مساحات وحجوم بالتكامل.

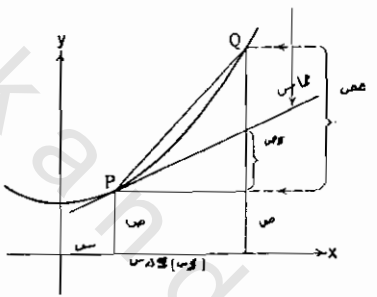
جون واليس (Wallis، ١٦١٦-١٧٠٣)، والذى كان أستاذ كرسى بجامعة أوكسفورد لمدة (٥٤) عاما أسهم فى أساسيات التكامل ودراسة العدد (ط)، كما قدم تفسيرات بيانية للجذور المركبة للمعادلة التربيعية الحقيقية.

بارو Barrow (١٦٣٠-١٦٧٧) كانت اسهاماته أكثر فى التفاضل وتنازل عن رئاسته لكرسى الرياضيات فى جامعة كامبردج لتلميذه الشاب نيوتن تقديرًا لعبقريته.

جدير بالإشارة أن نيوتن كان يرى التكامل كعملية عكسية للتفاضل ولكن ليبنتز كان يرى التكامل كنهاية مجاميع، وينسب لليبنتز أنه استخدم الحرف S للتعبير عن التكامل (من Summa) ثم تحول إلى الرمز المعروف حاليًا ∫ (أو ∫) القريب من S ... كما تقدم علم الحسبان على أيدى كثيرين لعل من أهمهم الفرنسى كوشى (Cauchy) ومن أتوا

بعده فى القرنين التاسع عشر والعشرين. كوشى كان يرى فى التفاضلات صناديق سوداء تحول مدخلات إلى مخرجات.

(٤-٣) الأشباح المتلاشية والتفاضل:



نشأ التفاضل (Differentiation) أو الاشتقاق مرتبطا بمشكلة إيجاد مماسات لمنحنيات وحساب قيم عظمى وصغرى لدوال رياضية بحتة أو دوال تنمذج مشكلات مجتمعية واقتصادية. وإذا كان نيوتن يعتبر – فى إجماع من المؤرخين – أنه مؤسس علم التفاضل، إلا أنه كان هناك منافس ومجادل كبير له هو ليبنتز... وهناك آخرون لهم

إسهامات أولية مثل فرمات (١٦٢٩) فى بحثه عن المماسات وكبلر (١٦٠٠) فى بحثه عن قيم عظمى وصغرى.

نيوتن الذى ولد فى ليلة عبد الميلاد فى عام (١٦٤٢) وهو نفس العام الذى توفى فيه جاليليو.. له إسهامات عظيمة فى الميكانيكا وقوانين الحركة ونظرية ذات الحدين والتفاضل... وتولى مناصب رفيعة وألف كتاب (Principia)... توفى عن عمر ناهز (٨٤) سنة كلها دراسة وعمل وابتكارات جادة. وكان من بين إنجازاته الهامة إرساء قواعد للتفاضل من خلال طريقته التى سماها التدفق أو السيلان (Fluxion) التى كتبها عام (١٦٧١)، وفيها يعالج منحنيا يتولد بحركة متصلة لنقطة. الإحداثى السينى والصادى للنقطة المتحركة المولدة للمنحنى هى كميات متغيرة. وأسمى الكمية المتغيرة سريان أو طلاقة (Fluent) وسمّى معدل تغيرها التدفق وهو ما نطلق عليه حاليًا الاشتقاق أو التفاضل ورمز له بالرمز ($\dot{y}$) والذى نعبر عنه حاليًا بالرمز $\frac{ء ص}{ء ن}$ ($\frac{dy}{dt}$) حيث (ن) الزمن الذى يمكن فيه التملص منها.

عالج نيوتن مسألتين إحداهما إيجاد تفاضل أو مشتقات والأخرى حل «معادلات تفاضلية» وهى العملية العكسية. كما أنه استخدم أفكاره فى تطبيقات كثيرة لإيجاد نهايات عظمى وصغرى وماسات لمنحنيات ومعاملات انحناء لمنحنيات ونقط انعطاف/ انقلاب، وتقعرات وتحدبات لمنحنيات... وأظهر قدرات فائقة فى تكاملات المعادلات التفاضلية... كما كان نيوتن محللا قديرًا وفيزيائيًا عظيمًا... رغم تواضعه الشديد واستنادا إلى تدينه القوى... لينتز ابتكر – مستقلا عن نيوتن – حسبانه بين عامى (١٦٧٣، ١٦٧٦) وهو الذى استخدم الرمز الحالى للتكامل، كما قدم الرموز ء س، ء ص (d x, dy)، δ ، ووضع كثيرًا من قواعد التفاضل والتكامل الابتدائية (مثل إيجاد المشتقة النونية لحاصل ضرب دالتين).

وقد حدث جدال (ربما وصل إلى مرحلة الشجار) بين نيوتن وليبنتز وبالتالى بين مؤيدى كل منهما فيما يتعلق بإسهامات كل منهما فى التفاضل والتكامل.

وقد ساعد ابتكار الهندسة التحليلية فى تطور الحسبان، كما حدث تقدم فى نظرياته على يدى – كما أشرنا سابقًا – دى موافر ودى لوبينال صاحب النظرية المعروفة فى إيجاد النهايات)، وكثيرين مثل لابلاس وحاوس ووايرشتراس.

اعترض الرياضى اللاهوتى بيركلى (Berkly) الذى ولد فى أيرلندا عام (١٦٨٥) على مفهوم تدفقات (Fluxions) نيوتن واتهمها بالغموض وعدم الاتساق واعتبرها ليست حقيقية كلية لأن وجودها «لحظى» يكون فيها شىء يوجد ثم يختفى. وكان بركلى يعتقد أن الكميات المتناهية فى الصغر (Infinitismals) مفاهيم مهزوزة وأشباح تظهر وتتلاشى.

وايرشتراس (Weirstrass) الذى لم يحصل على درجة جامعية عمل معلما للرياضيات فى إحدى القرى أوائل القرن التاسع عشر، ولكنه اشتغل بالنهايات. قال بأنه ليس هناك حاجة أن نكتب المتسلسلة ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ .. إلى مالانهاية، بل يكتفى بالقول أن نهاية المتسلسلة يساوى (٢) طالما أن الفرق بين المجموع والعدد (٢) أقل من أى قيمة ضئيلة إبسلون ($\in$).