أساسيات الاحتمالات

FUNDAMENTALS OF PROBABILITIES

مفاهيم أساسية BASIC CONCEPTS

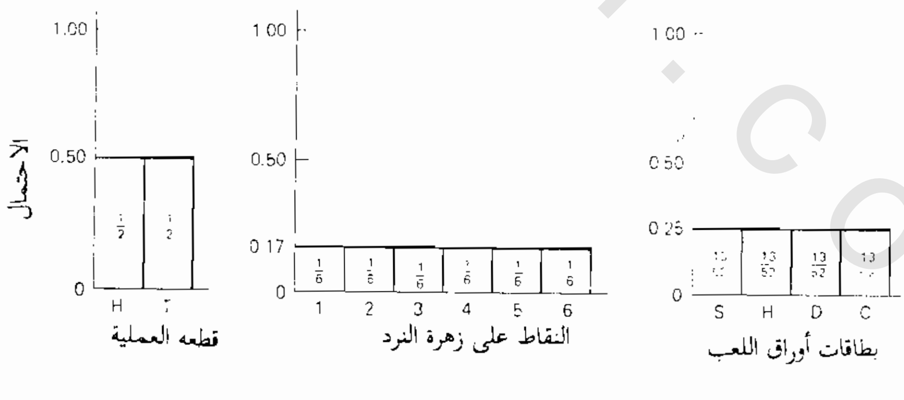
تعريف الاحتمال Definition of Probability

للاصطلاح احتمال probability العديد من المرادفات، مثل ترجيحlikelihood، وفرصة chance، وميل tendency، واتجاه trend. وبالنسبة إلى رجل الشارع، الاحتمال هو اصطلاح معروف جيدا بأنه يشير إلى فرصة حدوث شيء معين. «ربما ألعب الجولف غدا»، أو «ربما أحصل على معدل A في هذا المقرر» هى أمثلة تقليدية. عندما يبدأ المعلق فى نشرة الأخبار قائلا : «احتمال هطول المطر غدا هو25%، يكون التعريف كميا». من الممكن تعريف الاحتمال تعريفا رياضيا بحتا، إلا أننا فى هذا الكتاب نعرف الاحتمال من وجهة نظر عملية والتى تطبق على مراقبة الجودة.

إذا ما ألقيت قطعة نقدية من المعدن، فإن احتمال ظهور كل من وجهيها هو 1/2. وزهرة النرد، المستخدمة فى ألعاب التسلية، هى مكعب له ستة أسطح

ونقاط على كل سطح من أسطحه تتراوح من 1 إلى 6. وعند إلقاء زهرة النرد، فترجيح ظهور نقطة واحدة هو 1/6، واحتمال ظهور نقطتين هو 1/6، ...... ، واحتمال ظهور ست نقاط هو 1/6. مثال آخر للاحتمال يوضح عن طريق سحب بطاقة من بطاقات أوراق اللعب. احتمال أن تكون البطاقة بستونى spade هو 13/ 52 بطاقة. 52 بطاقة من هذا النوع فى المجموعة المشتملة على 13، حيث يوجد وبالنسبة للأشكال الثلاثة الأخرى : القلب، والمعين، والاسباتى، احتمال كل منها هو 13/52 أيضا.

يبين شكل ٤ ـ ١ التوزيعات الاحتمالية للأمثلة السابقة. ويلاحظ أن مساحة كل توزيع = (1.000 = 1/2 + 1/2 و 1.000 = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 و 1.000 = 13/52 + 13/52 + 13/52 + 13/52.). كما يذكر أيضا أن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعى، وهو توزيع احتمالات، تساوى 1.000 أيضا. لهذا، فإن مجموع الاحتمالات لأى موقف يساوى 1.000. ويعبر عن الاحتمال بكسر عشرى مثل (١) احتمال ظهور أحد أوجه العملة المعدنية يكون 0.500 والذى يمثل بالرموز على النحو التالى : [P (h) = 0.500]، و (٢) احتمال ظهور ثلاث نقاط لزهرة النرد يكون 0.167، أى [P (3) = 0.167]، و (٣) احتمال البستونى يكون 0.250، أى [P (s) = 0.25].



شكل ٤ـ١: التوزيعات الاحتمالية

تحدث الاحتمالات المعطاة فى المثال السابق بافتراض حدوث محاولات كافية وبافتراض ترجيح متساو لحدوث الأحداث. وفى كلمات أخرى، يكون احتمال ظهور أحد أوجه العملة 0.500 بافتراض أن فرصة ظهور كل من الوجهين متساوية (متساوية الترجيح). وفى معظم قطع العملة المعدنية يتحقق شرط الترجيح المتساوى، إلا أن إضافة معدن بسيط زيادة على أحد الجانبين ينتج عنه عملة منحازة وقد لا يتحقق شرط الترجيح المتساوى. وبالمثل، الشخص منعدم الضمير يمكنه أن يعد زهر النرد بحيث أن 3 تظهر أكثر اعتيادا عن 1/6، أو يمكن أن يرص مجموعة ورق اللعب بحيث أن الأربعة أوراق المحتوية على 1تظهر فى المقدمة.

بالعودة إلى مثال زهر النرد ذو الأسطح الستة، يكون هناك ستة مخرجات ممكنة (1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6). والحدث event هو تجميع لمخرجات. لهذا، حدوث الحدث 2 أو 4 عند إلقاء النرد له مخرجان وإجمالى عدد المخرجات يكون 6. ومن الواضح أن الاحتمال يكون 2/6 أو 0.333.

من المناقشة السابقة، يمكن تقديم تعريف مبنى على تفسير التكرار. إذا كان يمكن للحدث A أن يحدث فى عدد N من مرات المخرجات من إجمالى عدد N للمخرجات متساوية الترجيح الممكنة، فإن احتمال حدوث الحدث يكون :

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

حيث : $P(A)$ = احتمال حدوث الحدث A

N_A = عدد مرات ظهور الحدث A

N = عدد مرات المخرجات الكلية

ويمكن استخدام التعريف عندما يكون عدد مرات المخرجات معروفا أو عندما يمكن إيجاد عدد مرات المخرجات بالتجربة.

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

يتم اختيار جزء عشوائيا من حاوى لعدد 50 جزءا معروف أنه به 10 وحدات عدم مطابقة. ويعاد الجزء إلى الحاوى ويحفظ سجل بعدد المحاولات وعدد وحدات عدم المطابقة. بعد 90 محاولة، تم تسجيل 16 حالة عدم مطابقة. ما الاحتمال طبقا للمخرجات المعروفة ولمخرجات التجربة؟

المخرجات المعروفة :

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{10}{50} = 0.200$$

مخرجات التجربة :

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{16}{90} = 0.178$$

الاحتمال المحسوب باستخدام مخرجات معروفة يكون احتمالا حقيقيا والاحتمال المحسوب باستخدام مخرجات تجريبية يكون مختلفا بسبب عامل الفرصة. إذا ما حدث، على سبيل المثال، 900 محاولة، فإن الاحتمال بإستخدام المخرجات التجريبية يمكن أن يكون أقرب كثيرا للاحتمال الحقيقى حيث ان عامل الفرصة يمكن أن يقل.

فى معظم الحالات، يمكن ألا يكون عدد عدم المطابقة فى الحاوى معروفا، لهذا، لايمكن تحديد الاحتمال بمخرجات معروفة. إذا ما اعتبرنا أن الاحتمال باستخدام المخرجات التجريبية يمثل عينة وأن المخرجات المعروفة تمثل المجتمع، فيكون هناك نفس العلاقة التى سبق مناقشتها فى الفصل الثانى بين العينة والمجتمع.

التعريف السابق يكون مفيدا للمواقف المحددة حيث N_A، عدد المخرجات التى تحدث، و N ، إجمالى عدد المخرجات، تكون معروفة أو يجب أن توجد تجريبيا. وبالنسبة إلى موقف لانهائى، حيث تكون $N = \infty$، يقود التعريف دائما إلى احتمال صفر. لهذا، فى الموقف اللانهائى يكون احتمال حدوث أحد الأحداث متناسبا مع توزيع المجتمع. وتوجد مناقشة لذلك تحت مناقشة توزيعات الاحتمال المستمرة والوثابة.

نظرية الاحتمالات Theorm of Probability

نظرية ١ : يعبر عن الاحتمال بعدد يقع بين 1.000 و 0، حيث القيمة 1.000 هى التأكد أن الحدث سيحدث والقيمة 0 هى التأكد بأن الحدث لن يحدث.

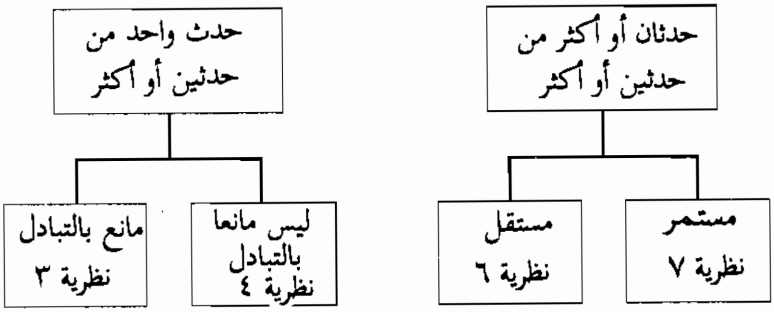
نظرية ٢ : إذا كانت P (A) هى احتمال أن الحدث A سيحدث، فإن احتمال عدم حدوث الحدث A هو $P(\not{A}) = 1.000 - P(A)$.

إذا كان احتمال إيجاد خطأ فى العائد على ضريبة الدخل هو 0.04، فما احتمال إيجاد عائد صحيح؟

$$\begin{aligned} P(\not{A}) &= 1.000 - P(A) \\ &= 1.000 - 0.040 \\ &= 0.960 \end{aligned}$$

لهذا، فإن احتمال إيجاد عائد صحيح على ضريبة الدخل هو 0.960.

قبل الاستمرار مع نظرية أخرى، يكون مناسبا معرفة أين التطبيق. فى شكل ٤ـ٢ ، نرى أنه إذا كان احتمال أحد الأحداث فقط يكون مطلوبا، فتستخدم نظرية ٣ ونظرية ٤ ، طبقا لما إذا كان الحدث مانع بالتبادل mutually exclusive أم لا. فإذا كان مطلوبا احتمال حدثين أو أكثر، فتستخدم نظرية ٦ ونظرية ٧، طبقا لما إذا كانت الأحداث مستقلة أم لا. ولاتظهر نظرية ٥ فى الشكل، حيث أنها تختص بمفهوم مختلف.



شكل ٢.٤: متى تستخدم نظرية ٣ و ٤ و ٦ و ٧

نظرية ٣ : إذا كان A و B حدثين مانعين بالتبادل، فإن احتمال حدوث الحدث A أو الحدث B هو مجموع الاحتمالين المناظرين لهما.

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$$

ويعنى المانع بالتبادل أن حدوث أحد الحدثين يجعل من حدوث الحدث الآخر مستحيلا. لهذا، إذا ما ألقى زهر النرد تحدث 3 (الحدث A)، ثم الحدث B، وليكن 5، لايمكن حدوثه.

وعندما تستخدم «أو»، تكون العملية الرياضية جمعا، أو كما سنرى فى نظرية ٤، يمكن أن تكون طرحا. وتوضح نظرية ٣ بحدثين ـ ويمكن تطبيقها على اكثر من حدثين.

$[P(A \text{ or } B \text{ or } \ldots \text{ or } F) = P(A) + P(B) + \ldots + P(F)]$.

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

إذا ما احتويت الأجزاء البالغ عددها 261 الموجودة فى جدول ٤ ـ ١ فى صندوق. ما احتمال اختيار جزء عشوائيا ينتجه المورد X أو ينتجه المورد Z ؟

$$P(X \text{ or } Z) = P(X) + P(Z)$$
$$= \frac{53}{261} + \frac{77}{261}$$
$$= 0.498$$

ما احتمال اختيار جزء عدم مطابقة من المورد X أو جزء مقبول من المورد Z ؟

$$P(\text{nc. } X \text{ or ac. } Z) = P(\text{nc. } X) + P(\text{ac. } Z)$$
$$= \frac{3}{261} + \frac{75}{261}$$
$$= 0.299$$

جدول ٤ ـ ١: نتائج الفحص طبقا للمورد

المورد	عدد المقبول	عدد عدم المطابقه	الإجمالى
X	50	3	53
Y	125	6	131
Z	75	2	77
الإجمالى	250	11	261

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

إذا كانت الأجزاء البالغ عددها 261 فى جدول ٤ ـ ١ محتواه فى صندوق، ما احتمال أن أحد الأجزاء الذى يتم اختياره عشوائيا يكون من المورد Z، أو يكون جزء عدم مطابقة من المورد X، أو يكون مقبولا من المورد Z؟

$$P(Z \text{ or nc. } X \text{ or ac. } Y) = P(Z) + P(\text{nc. } X) + P(\text{ac. } Y)$$
$$= \frac{77}{261} + \frac{3}{261} + \frac{125}{261}$$
$$= 0.785$$

وتتكرر الإشارة إلى نظرية ٣ على أنها قانون جمع الاحتمالات additive law of probability.

نظرية ٤ : إذا لم يكن الحدثان A و B مانعين بالتبادل، فإن احتمال أى من الحدث A أو الحدث B أو كلاهما يعطى بالعلاقة :

$$P(A \text{ or } B \text{ or both}) = P(A) + P(B) - P(\text{both})$$

الأحداث المانعة بالتبادل يكون لها بعض المخرجات المشتركة.

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

إذا ما وضعت الأجزاء البالغ عددها 261 الموجودة فى شكل ٤ ـ ١ فى صندوق، ما احتمال اختيار جزء عشوائيا ليكون من المورد X أو يكون وحدة عدم مطابقة ؟

$$\begin{aligned} P(X \text{ or nc. or both}) &= P(X) + P(\text{nc.}) - P(X \text{ and nc.}) \\ &= \frac{53}{261} + \frac{11}{261} - \frac{3}{261} \\ &= 0.234 \end{aligned}$$

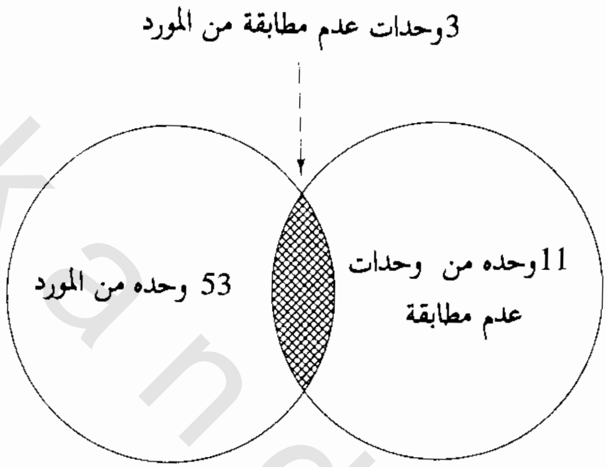
فى مثال المشكلة، هناك ثلاثة مخرجات لكل من الحدثين. ثلاث وحدات عدم المطابقة للمورد A يمكن أن تحسب كمخرجات لـ P(X) و P (nc.) مرتين، لهذا، تطرح فئة من الثلاثة. وتطبق هذه النظرية على أكثر من حدثين أيضا. ويستخدم رسم فن فى بعض الأحيان لوصف مفهوم عدم التبادل المانع كما هو مبين فى شكل ٤ ـ ٣. الدائرة اليسرى تحتوى على 53 وحدة من المورد X والدائرة اليمنى تحتوى على 11 وحدة غير مطابقة. والثلاث وحدات لعدم المطابقة من المورد X توجد عند تقاطع الدائرتين.

نظرية ٥ : مجموع الاحتمالات للأحداث لأحد المواقف تساوى 1.000 .

$$P(A) + P(B) + \cdots + P(N) = 1.000$$

لقد تم توضيح هذه النظرية فى شكل ٤ ـ ١ بالنسبة إلى مواقف إلقاء العملة المعدنية، أو إلقاء زهر النرد، او سحب بطاقة من مجموعة ورق اللعب حيث يكون مجموع الأحداث مساويا 1.000 .

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM



شكل ٤ـ٣ : رسم فن لمثال المشكلة على نظرية ٤

يفحص فاحص صحى ثلاثة منتجات فى مجموعة جزئية لتحديد ما إذا كانت مقبولة أم لا. ومن الخبرة السابقة كان معروفا أن احتمال عدم وجود وحدات عدم المطابقة فى العينة البالغ حجمها 3 هو 0.990، واحتمال أن وحدة عدم مطابقة واحدة فى العينة البالغ حجمها **3** هو 0.006، واحتمال وجود وحدتى عدم مطابقة فى العينة البالغ حجمها 3 هو 0.003. ما احتمال وجود 3 وحدات عدم مطابقة فى العينة البالغ حجمها 3 ؟

هناك 4 أحداث، وأربعة أحداث فقط لهذا الموقف : عدد 0 وحدة عدم مطابقة، وعدد 1 وحدة عدم مطابقة، وعدد 2 وحدة عدم مطابقة، وعدد 3 وحدة عدم مطابقة.

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1.000$$
$$0.990 + 0.006 + 0.003 + P(3) = 1.000$$
$$P(3) = 0.001$$

لهذا، احتمال وجود عدد 3 وحدات عدم مطابقة فى عينة من 3 وحدات هو 0.001.

نظرية ٦ : إذا كان A و Bحدثين مستقلين، فإن احتمال حدوث كل من A و B هو حاصل ضرب الاحتمال المناظر لكل منهما فى بعضهما.

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$$

الحدث المستقل هو الذى لايكون للحدوث فيه أى تأثير على احتمال الحدث أو الأحداث الأخرى. ويشار إلى هذه النظرية بقانون ضرب الاحتمالات multiplication law of probabilities. وعند ذكر «و»، تكون العملية الرياضية ضربا.

مثال لمشكلة **EXAMPLE PROBLEM**

إذا ما وضعت الأجزاء البالغ عددها 261 الموجودة فى جدول ٤ ـ ١ محتواه في صندوق، ما احتمال أن يكون جزآن يسحبان عشوائيا أنهما من المورد X؟ افرض أن الجزء المسحوب أولا يعاد إلى الصندوق قبل سحب الجزء الثانى. (تسمى مع الإحلال with replacement).

$$P(X \text{ and } Y) = P(X) \times P(Y)$$
$$= \left(\frac{53}{261}\right)\left(\frac{131}{261}\right)$$
$$= 0.102$$

من الفكرة الأولى، تبدو نتيجة مثال المشكلة أنها منخفضة جدا، إلا أنه هناك خمس إمكانيات مختلفة : XX و YY و ZZ و XZ و YZ. وتطبق هذه النظرية على أكثر من حدثين أيضا.

نظرية ٧ : إذا كان A و B حدثين معتمدين، فإن احتمال حدوث كل من A و B هو حاصل ضرب احتمال حدوث A فى احتمال أنه إذا حدث A، لايحدث B.

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B|A)$$

الرمز P (B/A) يعرف على أنه احتمال حدوث A بشرط عدم حدوث A. الحدث المعتمد هو الحدث الذى يؤثر حدوثه على احتمال حدث آخر أو أحداث أخرى. وأحيانا ما يشار إلى هذه النظرية بأنها النظرية الشرطية conditional theorem، حيث أن احتمال الحدث الثانى يعتمد على نتيجة الحدث الأول. وتطبق النظرية على أكثر من حدثين.

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

افرض أنه فى المثال السابق لم يعاد الجزء الأول بعد سحبه من الصندوق قبل سحب الجزء الثانى. ما الاحتمال؟

$$\begin{aligned} P(X \text{ and } Y) &= P(X) \times P(Y|X) \\ &= \left(\frac{53}{261}\right)\left(\frac{131}{260}\right) \\ &= 0.102 \end{aligned}$$

حيث أن أول جزء لا يعاد إلى الصندوق، فيكون هناك إجمالى 260 جزءا فقط فى الصندوق.

ما احتمال أن يكون الجزآن من المورد Z ؟

$$
\begin{aligned}
P(Z \text{ and } Z) &= P(Z) \times P(Z|Z) \\
&= \left(\frac{77}{261}\right)\left(\frac{76}{260}\right) \\
&= 0.086
\end{aligned}
$$

حيث أن الجزء الأول كان من المورد Z، فيكون هناك 76 فقط من المورد Z فى الإجمالى الجديد البالغ عدده 260.

لحل العديد من مشاكل الاحتمالات يكون من الضرورى استخدام نظريات عدة كما هو مبين فى المثال التالى، والذى يستخدم نظرية ٣، ونظرية ٦.

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

إذا ما وضعت الأجزاء البالغ عددها 261 من جدول ٤ ـ ١ فى صندوق، ما احتمال سحب جزئين عشوائيا (مع الإحلال) أن يكون واحد منهما مقبولا من المورد X والآخر مقبولا من المورد Y أو المورد Z؟

$$
\begin{aligned}
P[\text{ac. } X \text{ and } (\text{ac. } Y \text{ or ac. } Z)] &= P(\text{ac. } X)[P(\text{ac. } Y) + P(\text{ac. } Z)] \\
&= \left(\frac{50}{261}\right)\left(\frac{125}{261} + \frac{75}{261}\right) \\
&= 0.147
\end{aligned}
$$

عد الأحداث COUNTING OF EVENTS

العديد من مشاكل الاحتمالات، مثل التى يكون للأحداث فيها توزيعات

احتمالية منتظمة، يمكن أن تحل باستخدام طرق العد. وهناك ثلاث طرق تستخدم فى العادة فى حسابات الاحتمالات.

١ـ الضرب البسيط simple multiplication. إذا كان يمكن أن يحدث الحدث A بأى من الطرق أو المخرجات a، وبعد حدوثه يمكن أن يحدث حدث آخر B بعدد b من الطرق أو المخرجات، فإن عدد الطرق التى يمكن أن يحدث بها الحدثان معا هو ba.

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

تذكر شاهد لحادثة سيارة هرب سائقها أول ثلاثة أرقام من رقم اللوحة المعدنية البالغ عددها خمسة أرقام، ولاحظ أن آخر خانتين تشغلهما أرقام. ما عدد ملاك السيارات الذين يجب أن يفحص البوليس سياراتهم؟

$$\begin{aligned} ab &= (10)(10) \\ &= 100 \end{aligned}$$

إذا كان آخر رقمين، حرفين أبجديين، فما عدد السيارات التى يجب أن تفحص؟

$$\begin{aligned} ab &= (26)(26) \\ &= 676 \end{aligned}$$

٢ـ التباديل permutations. التبديل permutation هو ترتيب لفئة من الأشياء. فتباديل كلمة cup هى cup و cpu و upc و ucp و puc و pcu. فى هذه الحالة يوجد ٣ مفردات فى الفئة ونرتبها فى مجموعات من 3 للحصول على 6 تباديل. ويشار إلى ذلك بتبديل لعدد n مفردة مع أخذ r فى نفس الوقت حيث n = 3 و

$r = 3$. ما عدد التباديل الموجودة لعدد 4 مفردات تؤخذ 2 فى كل مرة؟ باستخدام كلمة شوكة fork لتمثيل الأربع مفردات، تكون التباديل هى fo و of و fr و rf و ek و ke و or و ro و ok و ko و rk و kr. وكلما ازداد عدد المفردات n وعدد المأخوذ كل مرة r، كلما أصبح سرد كل التباديل مرهقا. وصيغة إيجاد كل التباديل بسهولة أكثر هى :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث : P_r^n = عدد التباديل لعدد n مفردة تؤخذ r منها فى كل مرة

(وأحيانا يكتب هذا الرمز على النحو التالى : ${}_nP_r$)

n = إجمالى عدد المفردات

r = عدد المفردات المختارة من إجمالى عدد المفردات

التعبير: n! يقرأ «مضروب n» ويعنى : (1) . . . (n - 2) (n - 1) n. لهذا، فإن 6! = 720 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6. وبالتعريف، 0! = 1.

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

ما عدد التباديل لخمس مفردات تؤخذ كل 3 فى نفس المرة؟

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$$

$$= 60$$

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

فى مثال رقم اللوحة المعدنية للسيارة، أفرض أن الشاهد تذكر أكثر أن الرقمين الأخيرين لم يكونا متشابهين.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 1}{8 \cdot 7 \cdots 1}$$
$$= 90$$

يمكن أن تحل هذه المشكلة أيضا عن طريق الضرب البسيط حيث a = 10 و b = 9. وفى كلمات أخرى، هناك 10 طرق للرقم الأول و 9 طرق للرقم الثانى حيث أن الازدواج غير مسموح به.

يستخدم الرمز P لكل من التباديل والاحتمالات. ويجب ألا ينتج عن ذلك الاستخدام المزدوج أى خلط، حيث أنه بالنسبة إلى التباديل يستخدم الدليلان n و r.

٣ـ التوافيق combinations. إذا كانت طريقة ترتيب المفردات غير مهمة، فيكون لدينا توفيق combination. الكلمة cup لها 6 تباديل عند أخذ 3 مفردات من 3 فى كل مرة. إلا أنه يوجد توفيق واحد one فقط، حيث أن نفس الثلاثة حروف تكون فى ترتيب مختلف. والكلمة fork لها 12 من التباديل عند أخذ الأربعة حروف حرفان فى كل مرة، إلا أن عدد التوافيق يكون fo و fr و fk و or و ok و rk، والتى تعطى إجماليا مقداره 6. وصيغة حساب عدد التوافيق هى :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث C_r^n : عدد التوافيق لعدد n مفردة تؤخذ بعدد r كل مرة

(وأحيانا يكتب الرمز على النحو التالى ${}_nC_r$ أو $\binom{n}{r}$)

n = إجمالى عدد المفردات

r = عدد المفردات التى تؤخذ كل مرة من إجمالى عدد المفردات

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

لدى مصمم داخلى خمسة كراسى ملونة وسوف يستخدم ثلاثة منها فى غرفة المعيشة. ما عدد التوافيق الممكنة؟

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}$$

$$= 10$$

توجد تماثلية مصاحبة للتوافيق مثل $C_3^5 = C_2^5$ ، $C_1^4 = C_3^4$ ، و $C_2^{10} = C_8^{10}$ ، وما إلى ذلك. ويترك إثبات هذا التماثل كتمرين للقارئ.

تعريف الاحتمال، والسبع نظريات، والثلاث طرق للحل تستخدم كلها فى حل مشاكل الاحتمالات. والعديد من الآلات الحاسبة بها مفاتيح وظيفية للتباديل والتوافيق والتى تلغى أخطاء الحسابات باشتراط أنه يتم الضغط على المفاتيح الصحيحة.

توزيعات احتمالية وثابة

DESCRETE PROBABILITY DISTRIBUTION

عند استخدام قيم محددة مثل 0 أو 1 أو 2 أو 3، فتكون التوزيعات الاحتمالية وثابة. والتوزيعات الاحتمالية الوثابة التقليدية هى الهندسى الزائدىhypergeometric وذات الحدين binomial وبواسون poisson .

توزيع الاحتمال الهندسى الزائدى

Hypergeometric Probability Distribution

يحدث توزيع الاحتمالات الهندسى الزائدى hypergeometric عندما يكون المجتمع محددا وتؤخذ العينة العشوائية بدون إحلال. وتعد صيغة التوزيع الهندسى الزائدى من ثلاث توفيقات (توافيق كلية، وتوافيق عدم مطابقة، وتوافيق مقبولة) وهى كما يلى :

$$P(d) = \frac{C_d^D \, C_{n-d}^{N-D}}{C_n^N}$$

حيث : P (d) = احتمال عدد d من وحدات عدم المطابقة فى عينة حجمها n

C_n^N = توافيق كل الوحدات

C_d^D = توافيق وحدات عدم المطابقة

C_{n-d}^{N-D} = توافيق الوحدات المقبولة

N = عدد الوحدات المقبولة فى الدفعة (المجتمع)

n = عدد الوحدات فى العينة

N - D = عدد الوحدات المقبولة فى الدفعة

n - d = عدد الوحدات المقبولة فى العينة

D = عدد وحدات عدم المطابقة فى الدفعة

d = عدد وحدات عدم المطابقة فى العينة

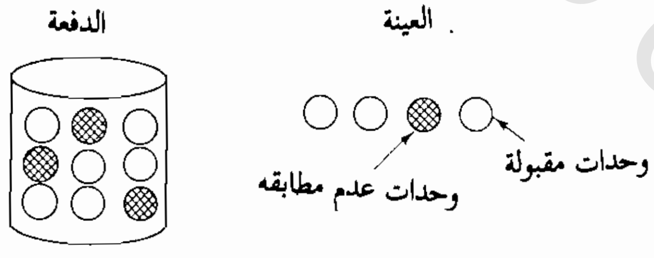
ويتم الحصول على الصيغة من تطبيق تعريف الاحتمال، والضرب البسيط، والتوافيق. وفى كلمات أخرى، يكون البسط هو طرق الحصول على وحدات عدم مطابقة (مخرجات) مضروبا فى طرق الحصول على وحدات مقبولة (مخرجات) ويكون المقام إجمالى الطرق (أو المخرجات) الممكنة. لاحظ أن الرموز فى صيغة التوافيق تغيرت لجعلها مناسبة أكثر لمراقبة الجودة.

ويجعل أحد الامثلة تطبيق هذا التوزيع أكثر معنوية.

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

دفعة من 9 ترموستات موضوعة فى حاوى بها 3 وحدات عدم مطابقة. ما احتمال سحب وحدة عدم مطابقة واحدة فى عينة عشوائية حجمها 4؟

ولأغراض التعليمات يظهر توضيح بيانى للمشكلة أدناه.



من الصورة أو من صياغة المشكلة، $N = 9$، و $D = 3$، و $n = 4$، و $d = 1$.

$$P(d) = \frac{C_d^D C_{n-d}^{N-D}}{C_n^N}.$$

$$P(1) = \frac{C_1^3 C_{4-1}^{9-3}}{C_4^9}$$

$$= \frac{\dfrac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \dfrac{6!}{3!(6-3)!}}{\dfrac{9!}{4!(9-4)!}}$$

$$= 0.476$$

وبالمثل، $P(0) = 0.119$، $P(2) = 0.357$، و $P(3) = 0.048$. حيث أنه هناك 3 وحدات عدم مطابقة فى الدفعة، فإن $P(4)$ يكون مستحيلا. فى مجموع الاحتمالات يجب أن يساوى 1.000، ويتم التحقق من ذلك كما يلى :

$$P(T) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$$
$$= 0.119 + 0.476 + 0.357 + 0.048$$
$$= 1.000$$

وتوزيع الاحتمالات الكامل معطى فى شكل ٤ ـ ٤. ومع تغير معلمات التوزيع الهندسى الزائدى، تتغير أشكال التوزيعات كما هو مبين فى شكل ٤ ـ ٥. لهذا، كل توزيع هندسى زائدى يكون له شكل فريد مبنيا على N و n و D. وتوجد جداول للتوزيع الهندسى الزائدى، إلا أنه حيث أنه يكون هناك 4 متغيرات مشمولة (بما فى ذلك d)، فإنها تكون كبيرة جدا. ومع الآلات الحاسبة وأجهزة الحاسوب الشخصية، لاتلزم هذه الجداول للحسابات الفعالة للتوزيع.

وتتطلب بعض الحلول احتمال «أو أقل». فى مثل هذه الحالات تكون الطريقة جمع الاحتمالات المناظرة. لهذا،

$$P(2 \text{ or less}) = P(2) + P(1) + P(0)$$

وبالمثل، تتطلب بعض الحلول احتمال «أو أكبر» وتستخدم الصيغة :

$$\begin{aligned} P(2 \text{ or more}) &= P(T) - P(1 \text{ or less}) \\ &= \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(3) + \cdots \end{aligned}$$

فى السلسلة الأخيرة، يتحدد عدد الحدود التى تحسب عن طريق حجم العينة، أو عدد وحدات عدم المطابقة فى الدفعة، أو عندما تقل القيمة عن 0.001.

توزيع احتمال ذو الحدين Binomial Probability Distribution

توزيع احتمال ذو الحدين binomial يطبق على مشاكل التوزيع الوثاب التى لها عدد لانهائى من العناصر أو التى لها سريان مستقر لعناصر تأتى من مركز العمل. وتطبق ذو الحدين على مشاكل لها خواص، مثل مطابقة أو عدم مطابقة، أو نجاح أو فشل، أو مرور أو فشل، أو وجه لعملة أو وجهها الآخر. وهى تناظر الحدود المتتالية فى توسع ذى الحدين، وهو :

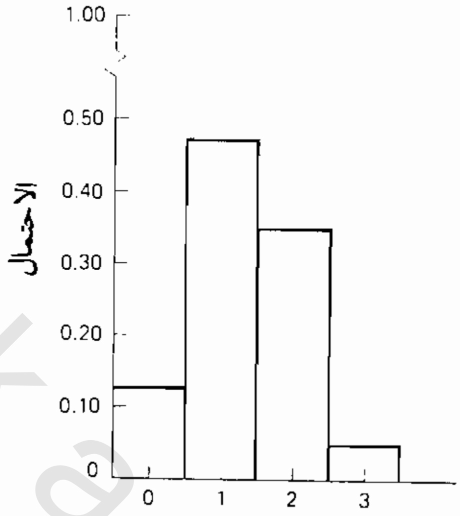
$$(p + q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2 + \cdots + q^n$$

حيث : P = احتمال حدوث أحد الأحداث مثل وحدة عدم المطابقة

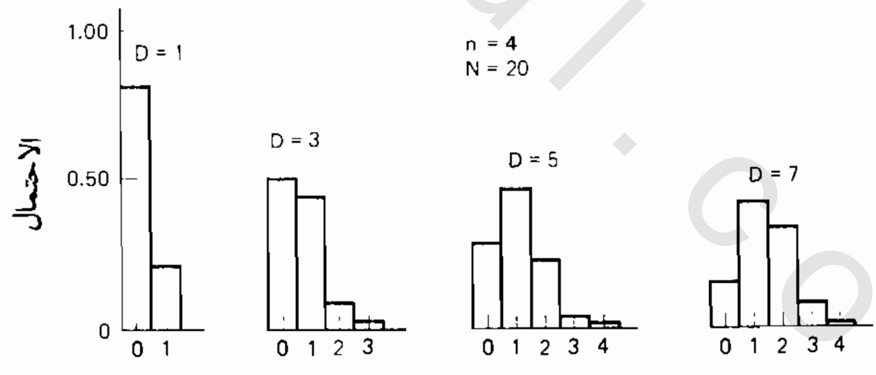
(احتمال أن عدم مطابقة مقالة فردية هو نفسه مثل نسبة عدم المطابقة)

q = هى P - 1 = احتمال عدم حدوث الحدث مثل الوحدة المطابقة (نسبة المطابق)

n = عدد المحاولات أو حجم العينة



شكل ٤.٤: توزيع هندسى زائدى لـ N = 9 و n = 4 و D = 3

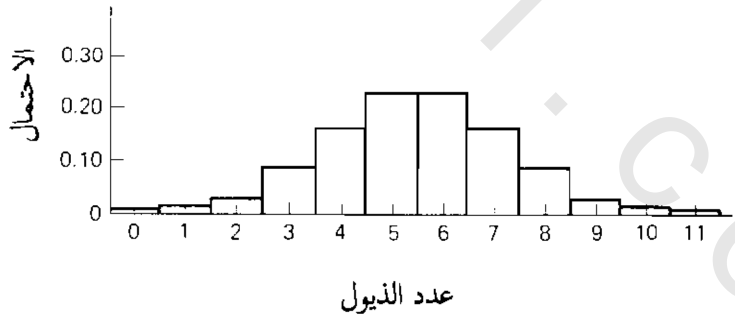


شكل ٤.٥: مقارنة توزيعات هندسية زائدة مع كسر معيب مختلف فى الدفعة

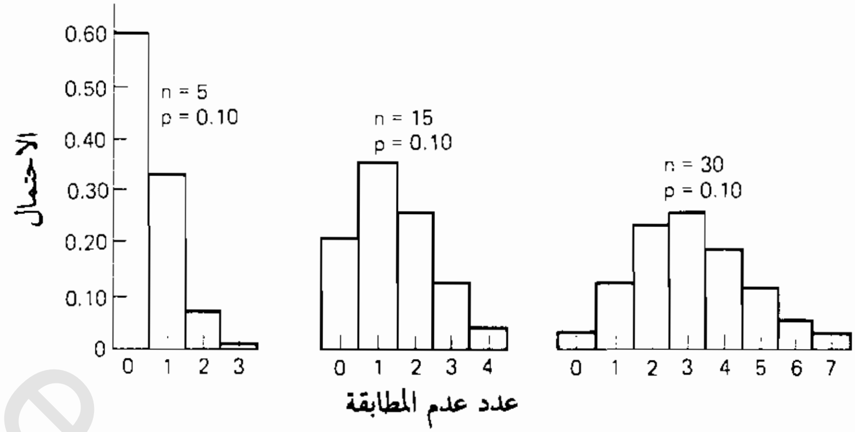
وبتطبيق التوسع على توزيع أوجه العملة المعدنية ($P = 1/2$ و $q = 1/2$) الناتج من عدد لانهائى لإلقاء 11 عملة مرة واحدة، يكون الاتساع على النحو التالى :

$$
\begin{aligned}
(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2})^{11} &= (\tfrac{1}{2})^{11} + 11(\tfrac{1}{2})^{10}(\tfrac{1}{2}) + 55(\tfrac{1}{2})^{9}(\tfrac{1}{2})^{2} + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{11} \\
&= 0.001 + 0.005 + 0.027 + 0.080 + 0.161 + \cdots + 0.001
\end{aligned}
$$

التوزيع الاحتمالى لعدد الذيول مبين فى شكل ٤ ـ ٦. حيث أن $p = q$، يكون التوزيع متماثلا بغض النظر عن قيمة n، إلا أنه عندما لا تتساوى p مع q، لايكون التوزيع متماثلا. وفى عمل مراقبة الجودة يكون P نسبة أو كسر عدم المطابقة وعادة ما يكون أقل من 0.15. ويوضح شكل ٤ ـ ٧ التغير فى التوزيع مع زيادة حجم العينة لكسر عدم المطابقة لقيمة $P = 0.10$، ويوضح شكل ٤ ـ ٨ التغير لقيمة $P = 0.05$. ومع تزايد حجم العينة، كلما أصبح شكل المنحنى متماثلا بالرغم من عدم تساوى P و q. بمقارنة توزيع $P = 0.10$ و $n = 15$ فى شكل ٤ ـ ٧ مع توزيع $P = 0,05$ و $n = 15$ فى شكل ٤ ـ ٨، يلاحظ أنه لنفس قيمة n، كلما ازدادت قيمة نسبة عدم المطابقة P، كلما ازدادت تماثلية التوزيع.



شكل ٤ـ٦: توزيع عدد الأذيال لعدد لانهائى من الإلقاء لعدد 11 قطعة عملة معدنية



شكل ٤ـ٧ : توزيع ذى الحدين لأحجام عينة مختلفة عندما تكون P = 0.10

شكل التوزيع يكون دائما دالة فى حجم العينة، n ، ونسبة عدم المطابقة، p. والتغير فى أى من هاتين القيمتين ينتج عنه توزيع مختلف.

وفى معظم الحالات فى عمل مراقبة الجودة، لانهتم بمحتوى التوزيع، وإنما نهتم بعامل واحد أو اثنين من عوامل توسع ذات الحدين. وصيغة ذات الحدين لعامل واحد هى :

$$P(d) = \frac{n!}{d!(n-d)!} p_0^d q_0^{n-d}$$

حيث : P (d) = احتمال عدد d من وحدات عدم المطابقة

n = العدد فى العينة

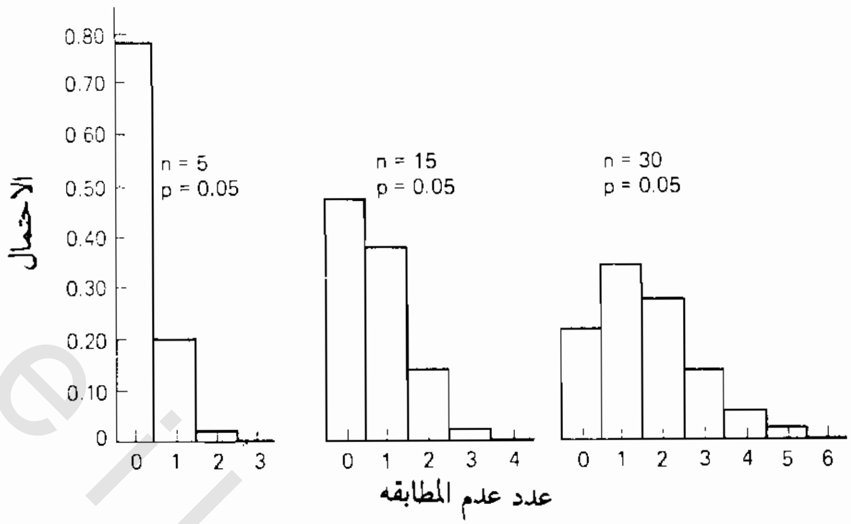
d = عدد عدم المطابقة فى العينة

P_0 = نسبة (كسر) عدم المطابقة فى المجتمع[١]

q_0 = نسبة (كسر) المطابق $(1 - P_0)$ فى المجتمع

حيث أن ذا الحدين للمواقف اللانهائية، فلايوجد حجم دفعة N فى الصيغة.

(١) كذلك قيمة نمطية أو دليلية، انظر الفصل الخامس.



شكل ٤ ـ ٨ : توزيعات دى الحدين لأحجام عينات مختلفة عندما P = 0.05

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

اختيرت عينة عشوائية من 5 مفصلات من سريان مستقر لمنتج لمكبس تثقيب وكانت نسبة عدم المطابقة 0.10. ما احتمال وجود وحدة عدم مطابقة فى العينة؟ ما احتمال وجود وحدة عدم مطابقة واحدة أو أقل؟ ما احتمال وجود وحدتين عدم مطابقة أو أكثر؟

$$q_0 = 1 - p_0 = 1.00 - 0.10 = 0.90$$

$$P(d) = \frac{n!}{d!(n-d)!} p_0^d q_0^{n-d}$$

$$P(1) = \frac{5!}{1!(5-1)!}(0.10^1)(0.90^{5-1})$$

$$= 0.328$$

ما احتمال وحدة عدم مطابقة واحدة أو أقل؟ للحل، نحتاج إلى استخدام نظرية الجمع ونجمع P (1) على P (0).

$$P(d) = \frac{n!}{d!(n-d)!} p_0^d q_0^{n-d}$$

$$P(0) = \frac{5!}{0!(5-0)!}(0.10^0)(0.90^{5-0})$$
$$= 0.590$$

لهذا،

$$P(1 \text{ or less}) = P(0) + P(1)$$
$$= 0.590 + 0.328$$
$$= 0.918$$

ما احتمال وحدتى عدم مطابقة أو أكثر؟ يمكن الوصول إلى الحل باستخدام نظرية الجمع وجمع الاحتمالات لوحدات عدم المطابقة البالغ عددها 2 و 3 و 4 و 5.

$$P(2 \text{ or more}) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$

أو يمكن تحقيق ذلك باستخدام النظرية التى تجمع الاحتمالات إلى 1 :

$$P(2 \text{ or more}) = P(T) - P(1 \text{ or less})$$
$$= 1.000 - 0.918$$
$$= 0.082$$

حسابات وحدتى عدم مطابقة أو ثلاث للبيانات الموجودة فى المثال تعطى P (2) = 0.073 و P (3) = 0.008. والتوزيع الكامل مبين بيانيا فى يسار شكل ٤ ـ ٧. وحسابات P (4) و P (5) تعطى قيما أقل من 0.001 ولذلك فلم تؤخذ فى الاعتبار فى الرسم.

وتوجد جداول لتوزيع ذى الحدين. إلا أنه حيث أنه يلزم ثلاثة متغيرات (n و p و d)، فإن ذلك يلزمه مكان كبير. ويمكن للآلة الحاسبة أو الحاسوب الشخصى أن يؤديا الحسابات اللازمة بفاعلية كبيرة، لهذا فلاحاجة إلى الجداول.

وتستخدم ذو الحدين فى الموقف اللانهائى إلا أنها تقرب التوزيع الهندسى الزائدى تحت شروط معينة تناقش فيما بعد فى هذا الفصل. ويلزم أن يكون هناك اثنان واثنان فقط من المخرجات (وحدة عدم مطابقة ووحدة مطابقة)، وإن احتمال كل من المخرجات لا يتغير. بالإضافة إلى ذلك، يتطلب استخدام ذات الحدين أن المحاولات تكون مستقلة، أى أنه إذا حدثت وحدة عدم مطابقة، فإن فرصة أن الوحدة التالية تكون عدم مطابقة لاتزيد أو لاتقل.

بالإضافة الى ذلك، فان توزيع ذات الحدين هو اساس احدى مجموعات خرائط المراقبة التى تناقش فى الفصل الخامس.

توزيع بواسون الاحتمالى Poissson Probability Distribution

توزيع احتمالى وثاب ثالث يشار إليه بتوزيع بواسون. والمسمى باسم سيمون بواسون Simeon Poisson، الذى وصفه عام ١٨٣٧م. ويطبق التوزيع فى العديد من المواقف التى تشمل ملاحظات فى وحدة الزمن. مثال ذلك، عد عدد السيارات التى تصل كشك تحصيل الرسوم على الطريق السريع فى فترات من1 دقيقة لكل منها، وعد عدد مرات تعطل ماكينة فى فترة 1 يوم، وعد عدد المشترين الذين يدخلون أحد محلات البقالة فى فترات من 5 دقائق لكل منها. كما أن التوزيع يطبق أيضا على مواقف تشمل ملاحظات فى الوحدة الواحدة من الكمية. مثال ذلك، عدد التموجات غير المطابقة فى قطعة قماش مساحتها 1000 متر مربع، وعد عدد غير المطابقات فى إحدى دفعات الإنتاج، وعد عدد مسامير البرشام غير المطابقة فى المنازل القابلة للنقل.

فى كل موقف من المواقف السابقة، يوجد العديد من الفرص المتساوية لحدوث حدث. كل مسمار برشام فى مركبة للاستجمام يكون له فرصة متساوية لعدم المطابقة، إلا أنه يكون هناك قلة فقط من غير المطابق فى مئات من مسامير البرشام. ويطبق توزيع بواسون عندما تكون n كبيرة جدا وتكون p صغيرة.

وصيغة توزيع بواسون هى :

$$P(c) = \frac{(np_0)^c}{c!} e^{-np_0}$$

حيث : c = عدد، أو رقم، الأحداث لتصنيف معطى يحدث فى العينة، مثل عدد غير المطابق، أو السيارات، أو العملاء، أو تعطل الماكينات.

np_0 = متوسط عدد، أو متوسط رقم، أحداث لتصنيف معطى يحدث فى العينة

$e = 2.718281$

عندما يستخدم توزيع بواسون كتقريب لذات الحدين (والذى يناقش فيما بعد فى هذا الفصل)، يكون للرمز c نفس المعنى مثل d الموجودفى صيغ ذات الحدين والتوزيع الهندسى الزائدى. وحيث أن c و np_0 لهما تعريفات شبيهة، فيكون هناك شيء من الخلط، والذى يمكن تصحيحه عن طريق التفكير فى c كقيمة فردية وفى np_0 كمتوسط أو قيمة مجتمع.

باستخدام الصيغة، يمكن تحديد توزيع احتمالى. أفرض أن متوسط عدد السيارات التى تصل كشك تحصيل الرسوم على الطريق السريع فى فترات من 1 دقيقة لكل منها هو 2، فتكون الحسابات كما يلى :

$$P(c) = \frac{(np_0)^c}{c!} e^{-np_0}$$

$$P(0) = \frac{(2)^0}{0!} e^{-2} = 0.135$$

$$P(1) = \frac{(2)^1}{1!} e^{-2} = 0.271$$

$$P(2) = \frac{(2)^2}{2!} e^{-2} = 0.271$$

$$P(3) = \frac{(2)^3}{3!} e^{-2} = 0.180$$

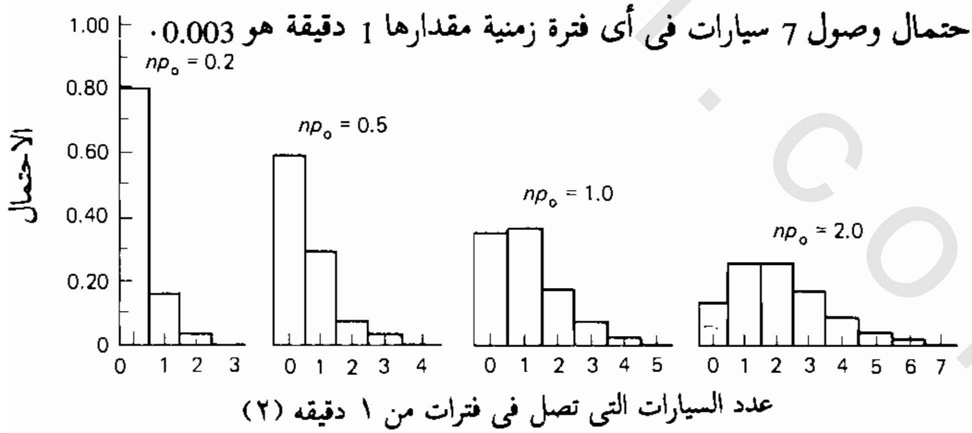
$$P(4) = \frac{(2)^4}{4!} e^{-2} = 0.090$$

$$P(5) = \frac{(2)^5}{5!} e^{-2} = 0.036$$

$$P(6) = \frac{(2)^6}{6!} e^{-2} = 0.012$$

$$P(7) = \frac{(2)^7}{7!} e^{-2} = 0.003$$

التوزيع الاحتمالى الناتج هو الموجود على يمين شكل ٤ ـ ٩. يحدد هذا التوزيع احتمال أن عدد معين للسيارات سيصل فى أى فترة زمنية طولها 1 دقيقة. لهذا، احتمال وصول 0 سيارة فى أى فترة زمنية مقدارها 1دقيقة هو 0.135، واحتمال وصول سيارة واحدة فى أى فترة زمنية طولها 1 دقيقة هو 0.271، .... ، واحتمال وصول 7 سيارات فى أى فترة زمنية مقدارها 1 دقيقة هو 0.003.



شكل ٤ ـ ٩: توزيعات بواسون احتمالية لقيم np_0 مختلفة

كما يوضح شكل ٤ـ ٩ أيضا أنه مع ازدياد قيمة np_O، يصل التوزيع إلى حالة تماثل. وخواص أخرى لمنحنى بواسون هي أن الوسط الحسابى يساوى np_O، والانحراف المعيارى السابق يساوى $\sqrt{np_O}$.

وتوجد احتمالات توزيع بواسون لقيم np_O من 0.1 إلى 5.0 بفترات قيمتها 0.1 ومن 6.0 إلى 15.0 بفترات مقدارها 1.0 فى جدول ج من الملحق. القيم الموجودة بين أقواس فى الجدول هى احتمالات متجمعة صاعدة للحصول على إجابات لـ «أو أقل من». ويسهل استخدام هذا الجدول الحسابات كما هو موضح فى المشكلة التالية.

مثال لمشكلة — EXAMPLE PROBLEM

متوسط عدد أخطاء الفواتير فى أحد البنوك المحلية فى مناوبة طولها 8 ساعات هو 0.1. ما احتمال حدوث خطأين فى فواتير؟ ما احتمال حدوث خطأ واحد أو أقل؟ وما احتمال حدوث خطأين أو أكثر؟

من جدول ج لقيمة np_O المساوية 1.0 :

$$
\begin{aligned}
P(2) &= 0.184 \\
P(1 \text{ or less}) &= 0.736 \\
P(2 \text{ or more}) &= 1.000 - P(1 \text{ or less}) \\
&= 1.000 - 0.736 \\
&= 0.264
\end{aligned}
$$

ويمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب لذات الحدين فى بعض المواقف. وفيما يلى مثال لمشكلة توضح هذا المفهوم.

مثال لمشكلة EXAMPLE PROBLEM

إذا كان احتمال أن تكون دفعة معاملة حرارية معيبة هو 0.01، ما احتمال أن توجد دفعتان معيبتان من 250؟ ما احتمال وجود 2 أو أقل معيبة؟

$$np_0 = (250)(0.01) = 2.5$$

من جدول ج، تقاطع العمود مع قيمة np المساوية 2.5 والصف الذى قيمة c مساوية 2 فيه يعطى :

$$P(2) = 0.256 \qquad P(2 \text{ or less}) = 0.543$$

والإجابة باستخدام ذات الحدين هى :

$$P(2) = 0.257 \qquad P(2 \text{ or less}) = 0.543$$

توزيع احتمالات بواسون هو أساس خرائط مراقبة الخواص لمعاينة القبول، والتى تناقش فى الفصول التالية. بالإضافة إلى تطبيقات مراقبة الجودة، يستخدم توزيع بواسون فى مواقف صناعية أخرى، مثل تكرارات الحوادث، ومحاكاة الحاسوب، وبحوث العمليات، ومعاينة العمل.

ومن وجهة النظر النظرية يجب أن يستخدم توزيع الاحتمالات الوثاب رسم الأعمدة. إلا أنه من المعتاد عمليا (الأمر المتبع فى أشكال هذا الكتاب) استخدام المدرج التكرارى.

والتوزيعات الاحتمالية الوثابة الأخرى هى المنتظم، والهندسى، وذات الحدين السالب. وقد سبق توضيح التوزيع المنتظم فى شكل ١٠٤. ومن وجهة النظر التطبيقية فهو التوزيع المستخدم فى إنتاج جدول أرقام عشوائية. وتستخدم التوزيعات الهندسية وذات الحدين السالب فى دراسات العولية للبيانات الوثابة.

توزيعات احتمالية مستمرة

CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTIONS

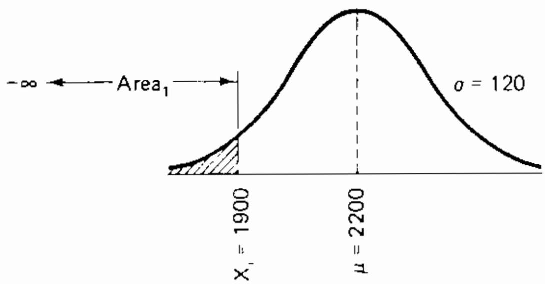
عند استخدام بيانات يمكن قياسها مثل الأمتار، والأوم، يكون التوزيع الاحتمالى مستمرا. وبينما يوجد العديد من التوزيعات الاحتمالية المستمرة، إلا أن التوزيع الطبيعى بمفرده له أهمية كافية فى مراقبة الجودة لضمان مناقشة تفصيلية فى كتاب أولى.

توزيع احتمالات طبيعى — Normal Probability Distribution

المنحنى الطبيعى normal curve هو توزيع احتمالى مستمر. وحلول مشاكل الاحتمالات التى تشمل بيانات مستمرة يمكن الوصول إليها باستخدام منحنى التوزيع الاحتمالى الطبيعى. فى الفصل الثانى، تعلمت طرقا لتحديد النسبة المئوية للبيانات التى تقع أعلى قيمة معينة، أو أسفل قيمة معينة، أو بين قيمتين. نفس هذه الطرق تطبق على مشاكل الاحتمالات، كما هو مبين فى مثال المشكلة التالى.

مثال لمشكلة — EXAMPLE PROBLEM

إذا كانت حياة عمل خلاط كهربائى، موزعة توزيعا طبيعيا، لها وسط حسابى مقداره 2200 ساعة وانحراف معيارى مقداره 120 ساعة، ما احتمال أن خلاط كهربائى واحد يفشل فى العمل عند 1900 ساعة أو أقل؟



$$Z = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1900 - 2200}{120}$$

$$= -2.5$$

من جدول أ من الملحق، لقيمة Z المساوية 2.5-، تكون $\text{area}_1 = 0.0062$. لهذا، احتمال فشل خلاط كهربائى عند 1900 ساعة أو أقل هو :

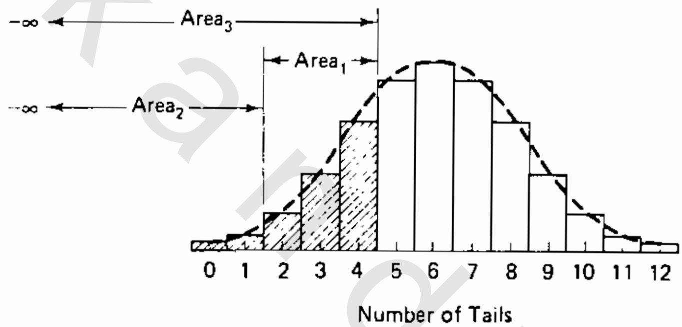
$$P(\text{failure at 1900 h or less}) = 0.0062$$

كان يمكن أن تصاغ إجابة المشكلة كما يلى : «النسبة المئوية للعناصر أقل من 1900 ساعة هى % 0.62». لهذا، يمكن أن تعامل المساحة تحت المنحنى أما كقيمة احتمال أو كقيمة تكرار نسبى.

تحت شروط معينة يقرب توزيع الاحتمالات الطبيعى توزيع ذات الحدين للاحتمالات. وتناقش هذه الشروط فيما بعد فى هذا الفصل. والآن، فإننا نهتم بطريقة حل المشكلة والتى توضح فى مشكلة المثال التالية.

EXAMPLE PROBLEM مثال لمشكلة

أوجد احتمال الحصول على 2 أو 3 أو 4 ذيول فى 12 إلقاء لعملة ممدنية بتقريب التوزيع الطبيعى لذات الحدين. وفيما يلى توضيح المشكلة بيانيا. مساحة الاحتمال المطلوب تم تهشيرها ويمكن أن تقرب بالمنحنى الطبيعى، والمبين بخط متقطع. وحيث أن البيانات يجب أن تكون متصلة للمنحنى الطبيعى، فان احتمال الحصول على من 2 إلى 4 ذيول يعتبر من 1.5 إلى 4.5.



$$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{np_0q_0}$$
$$= 12(\tfrac{1}{2}) \qquad = \sqrt{12(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})}$$
$$= 6 \qquad = 1.73$$

من جدول أ، لقيمة $Z_2 = 2.60$ تكون $area_2 = 0.0047$ ، ولقيمة $Z_3 = -0.87$ ، تكون $area_3 = 0.1922$.

$$Z_2 = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \qquad Z_3 = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1.5 - 6}{1.73} \qquad = \frac{4.5 - 6}{1.73}$$

$$= -2.60 \qquad = -0.87$$

لهذا الاحتمال المطلوب هو :

$$\text{Area}_1 = \text{Area}_3 - \text{Area}_2$$

$$= 0.1922 - 0.0047$$

$$= 0.1875$$

$$P(2, 3, \text{ or } 4 \text{ tails}) = 0.1875$$

توزيعات احتمالية مستمرة أخرى

Other Continuous Probability Distributions

من التوزيعات الاحتمالية المستمرة العديدة الأخرى يوجد اثنان فقط لهما أهمية معنوية لذكر تطبيقاتهما العملية. توزيع الاحتمالات الاسى ويستخدم فى دراسات العولية عندما يوجد معدل فشل ثابت وويبل weibull والذى يستخدم عندما لا يكون وقت الفشل ثابتا. وهذان التوزيعان يناقشان فى الفصل الثامن.

علاقات التوزيعات

DISTRIBUTION INTERRELATIONSHIP

مع هذه التوزيعات العديدة، يكون من الصعب فى بعض الأحيان معرفة متى تطبق. بالتأكيد، حيث أن توزيع بواسون يمكن حسابه ببساطة باستخدام جدول ج من الملحق، فيجب استخدامه كلما كان ذلك مناسبا. تبين الأشكال ٤ ـ ٥ و ٤ ـ ٨ و ٤ ـ ٩ تشابها عبر التوزيعات الهندسى الزائدى، وذو الحدين، وبواسون.

يستخدم التوزيع الهندسى الزائدى لدفعات محددة لحجم معين N. ويمكن تقريبها بواسطة ذات الحدين عندما تكون $n/N \le 0.10$، أو بواسطة بواسون عندما تكون $n/N \le 0.10$ ويكون $p_0 \le 0.10$، ويكون $np_0 \ge 5$، أو بواسطة الطبيعى عندما يكون $n/N \le 0.10$ ويقرب الطبيعى من ذات الحدين.

ويستخدم توزيع ذات الحدين للمواقف اللانهائية أو عندما يكون هناك سريان مستقر للمنتج بحيث يفترض وجود موقف لانهائى. ويمكن أن يقرب بواسطة بواسون عندما يكون $p_0 \le 0.10$ ويكون $np_0 \le 5$. والمنحنى الطبيعى يكون تقريبا ممتازا عندما تكون p_0 قريبة من 0.5 ويكون $n \ge 10$. ومع انحراف np_0 عن 5.0، يظل التقريب جيدا طالما أن $np_0 \ge 5$ وتزداد n إلى 50 أو أكثر لقيم p_0 التى تكون منخفضة إلى 0.10 ومرتفعة إلى 0.90. وحيث أن وقت حسابات ذات الحدين لايختلف كثيرا عن وقت حسابات الطبيعى، فلاتوجد إلا ميزة بسيطة لاستخدام الطبيعى كتقريب.

والمعلومات المعطاة عالية يمكن أن تعتبر كخطوط إرشادية تقريبية بدلا من أنها قوانين مطلقة. التقريب أفضل كلما ازدادت البيانات من القيم المحددة. وللجزء الأكبر فإن فعالية الآلات الحاسبة والحاسوب الشخصى جعلت التقريبات متقادمة.

برنامج حاسوب COMPUTER PROGRAM

برنامج الحاسوب المعطى فى شكل ٤ ـ ١٠ يحسب التوزيع الاحتمالى الهندسى الزائدى لدفعة حجمها N، وعدد عدم المطابقة فى الدفعة D، وحجم العينة n. وحيث أن الثلاث توافيق يجب أن تحسب، فقد أعد مقطع للتوافيق فى البرنامج. وقد أعد احتياطى لمضروب صفر والحالات الخاصة التى يكون فيها $r = 0$ و $r = 1$. كما أن بسط ومقام التوافيق تعمل معا لإلغاء إمكانية أى مشاكل للفائض overflow. والاحتمال محدد بواسطة D و n، وأقل احتمال، 0.001. والإجابة هى نفسها مثل المبينة فى شكل ٤ ـ ٤.

```
10 REM                  Hypergeometric Distribution
20 REM
30 REM                NL = Lot Size(N)
40 REM                NS = Sample Size(n)
50 REM                DL = Number Nonconforming in Lot(D)
60 REM                DS = Number Nonconforming in Sample(d)
70 REM                P  = Probability
80 REM                C  = Combination
90 REM                CG = Combinations Conforming
100 REM               CD = Combinations Nonconforming
110 REM               CT = Combinations Total
120 REM
130 REM DIM P(100)
140 PRINT " Enter the Lot Size." : INPUT NL
150 LPRINT TAB(5);" N = ";NL
160 PRINT " Enter the Number Nonconforming in the Lot." INPUT DL
170 LPRINT TAB(5);" D = ";DL
180 PRINT " Enter the Sample Size." : INPUT NS
190 LPRINT TAB(5):" n = ";NS : LPRINT
200 LPRINT TAB(5);" Number Nonconforming";TAB(30);" Probability"
210 DS = 0
220 K = 0
230 K = K + 1
240 IF K = 1 GOTO 270
250 IF K = 2 GOTO 280
260 N = NL : R = NS : GOTO 300
270 N = NL - DL : R = NS - DS : GOTO 300
280 N = DL : R = DS
290 REM               COMBINATION ROUTINE
300 IF R = 0 THEN C = 1
310 IF R = 1 THEN C = N
320 IF R < 2 GOTO 400
330 CS = 1
340       FOR I = N TO (N - R + 1) STEP -1
350       J = I - (R - N)
360       CS = SC * (I / J)
370       NEXT I
380 C = CS
390 REM               HYPERGEOMETRIC CALCULATION
400 IF K = 1 THEN CG = C
410 IF K = 2 THEN CD = C
420 IF K < 3 GOTO 230
430 CT = C
440 P(DS) = CG * (CD / CT)
450 LPRINT TAB (12); DS; TAB (32) ; P(DS)
460 IF DS = NS GOTO 510
470 IF DS = DL GOTO 510
480 IF P(DS) < .005 GOTO 510
490 DS = DS + 1
500 GOTO 220
510 SP = 0
520       FOR I = 0 TO DS
530       SP = SP + P(I)
540       NEXT I
550 LPRINT
560 LPRINT TAB(5);" Sum of Probabilities = ";SP
570 END
```

```
N = 20
D = 5
n = 4

Number Nonconformimg        Probability
        0                     .281734
        1                     .469556
        2                     .216718
        3                     .0309598
        4                    1.03199E-03
```

شكل ٤ـ١٠ : برنامج حاسوب بالبيسك لحساب التوزيع الهندسى الزائدى

مشاكل PROBLEM

١ ـ إذا كان حدوث أحد الأحداث مؤكدا، فما احتماله؟ إذا لم يكن ممكنا حدوث أحد الأحداث، فما احتماله؟

٢ ـ ما احتمال أن يعيش أحد الأشخاص إلى ما لانهاية؟ ما احتمال أن يطير الأخطبوط؟

٣ ـ إذا كان احتمال الحصول على الرقم 3 من إلقاء زهر نرد له 6 أسطح هو 0.167، فما احتمال الحصول على أى رقم آخر غير الرقم 3 ؟

٤ ـ حدد حدثا له احتمال حدوث 1.00 .

٥ ـ احتمال سحب رقيقة قرنفلية من صندوق به رقائق مختلفة الألوان هو 0.35، واحتمال سحب رقيقة زرقاء هو 0.46، واحتمال سحب رقيقة خضراء هو 0.15، واحتمال سحب رقيقة أرجوانية اللون هو 0.04. ما احتمال أن تكون الرقيقة المسحوبة زرقاء أو أرجوانية اللون؟ وما احتمال أن تكون زرقاء أو قرنفلية اللون؟

٦ـ فى أى ساعة فى وحدة الرعاية المركزة بأحد المستشفيات يكون احتمال الطوارئ 0.247. ما احتمال أن يكون القسم هادئا، أى بدون طوارئ؟

٧ ـ إذا كان أحد الفنادق به 20 سريرا من الحجم الفاخر جدا، و 50 سريرا من الحجم الفاخر، و 100 سرير مزدوج عريض، و 30 سريرا مزدوجا، ما احتمال أن يحصل أحد النزلاء على سرير من الحجم الفاخر أو سرير مزدوج؟

٨ ـ سحبت كرة عشوائيا من حاوى به 8 كرات صفراء اللون مرقمة من 1إلى 8، وبه 6 كرات برتقالية اللون مرقمة من 1 إلى 6، و 10 كرات رمادية اللون مرقمة من 1 إلى 10. ما احتمال الحصول على كرة برتقالية اللون أو كرة رقم 5 أو كرة

برتقالية اللون ولها الرقم 5 عند سحب كرة واحدة؟ ما احتمال سحب كرة رمادية اللون أو كرة رقم 8 أو كرة رمادية اللون ورقم 8 عند سحب كرة واحدة؟

٩ـ إذا كان احتمال الحصول على وحدة عدم مطابقة واحدة فى عينة من 2 من دفعة كبيرة من منتجات المطاط الصناعى هو 0.18 واحتمال وجود وحدتى عدم مطابقة هو 0.25، فما احتمال عدم وجود وحدات عدم مطابقة؟

١٠ـ باستخدام معلومات المشكلة السابقة، واحتمال الحصول على وحدتى عدم مطابقة فى أول عينة من 2 ووحدة عدم مطابقة واحدة فى العينة الثانية من 2. ما احتمال عدم وجود وحدات عدم مطابقة فى العينة الثانية؟ تعاد أول وحدة تسحب إلى الدفعة قبل سحب الوحدة الثانية.

١١ـ تحتوى سلة على 34 رأس خس، منها 5 غير سليمة. إذا سحبت عينة من 2 من عدم الإحلال، ما احتمال أن يكون الرأسان غير سليمين؟

١٢ـ إذا كان من الممكن سحب عينة حجمها 1من مخزن آلى(أوتوماتيكى) وأرفف استرجاع من ثلاثة أنواع أرفف مختلفة مع وجود 6 صوانى مختلفة على كل رف، ما عدد الطرق المختلفة للحصول على عينة حجمها 1 ؟

١٣ـ لنموذج موتور طائرة صغير أربعة مكونات للبدء : مفتاح، وبطارية، وسلك، وأداة كهربائية صغيرة. ما احتمال أن يعمل النظام إذا كان احتمال أن يعمل كل مكون من المكونات الأربعة كما يلى : المفتاح (0.998)، والبطارية (0.997)، والسلك (0.999)، والأداة الكهربائية (0.995) ؟

١٤ـ يقوم أحد العاملين فى الفحص فى فحص منتجات من ثلاث ماكينات فى أحد الأقسام، وخمس ماكينات من قسم آخر، وماكينتين من قسم ثالث. ويريد مدير الجودة أن يغير من مسار عامل الفحص. ما عدد الطرق المختلفة الممكنة؟

١٥ـ فى مثال مشكلة قائد السيارة الذى عمل حادثة وهرب كان فى رقم اللوحة المعدنية للسيارة رقم عددى وآخر حرفى، ما عدد السيارات التى يجب أن تفحص؟

١٦ـ يتم اختيار عينة حجمها 3 من 10 أفراد. ما عدد التباديل الممكنة؟

١٧ـ يتم اختيار 8 تذاكر من 90 تذكرة سفر. ما عدد التباديل الممكنة؟

١٨ـ يتم اختيار عينة حجمها 4 من 20 حلقة مكبس. ما عدد توافيق العينات المختلفة الممكنة؟

١٩ـ يتم اختيار عينة حجمها 3 من 100 غرفة بفندق. ما عدد توافيق العينات المختلفة الممكنة؟

٢٠ـ يتم اختيار عينة حجمها 2 من صينية بها 20 مسمار. ما عدد توافيق العينات المختلفة الممكنة؟

٢١ـ يوجد فى فاتح أوتوماتيكى لباب كراج 12 مفتاح تحويل يمكن أن يكون كل منها فى وضع on أو وضع off. وكل من الراسل والمستقبل يعدان بنفس الطريقة ويكون للمالك الخيار فى إعداد 1 لكل المفاتيح البالغ عددها 21. ما احتمال أن شخصا آخر يكون لديه نفس نموذج الراسل يفتح الباب؟

٢٢ـ قارن الإجابات C^{5}_{3} مع C^{5}_{2}، و C^{4}_{1} مع C^{4}_{3}، و C^{10}_{2} مع C^{10}_{8}. ما التعليق الذى يمكن أن تستخلصه؟

٢٣ـ احسب C^{6}_{0} و C^{10}_{0} و C^{25}_{0}. ما التعليق الذى يمكن أن تستخلصه؟

٢٤ـ احسب C^{3}_{3} و C^{9}_{9} و C^{35}_{35}. ما التعليق الذى يمكن أن تستخلصه؟

٢٥ـ احسب C^{7}_{1} و C^{12}_{1} و C^{18}_{1}. ما التعليق الذى يمكن أن تستخلصه؟

٢٦ ـ اختيرت عينة حجمها 4 من طلبات التأمين البالغ عددها 12 والتى بها 3 وحدات عدم مطابقة. باستخدام التوزيع الهندسى الزائد، ما احتمال أن العينة تحتوى على 0 عدم مطابقة بالضبط؟ و 1 عدم مطابقة؟ و 2 عدم مطابقة؟ و 3 عدم مطابقة؟ و 4 عدم مطابقة؟

٢٧ ـ دفعة محددة من الساعات الرقمية البالغ عددها 20 تبلغ عدم المطابقة بها 20% . مستخدما التوزيع الهندسى الزائدى، ما احتمال أن يوجد بعينة حجمها 3 ساعتين عدم مطابقة؟

٢٨ ـ فى المشكلة السابقة ما احتمال الحصول على 2 أو أكثر من وحدات عدم المطابقة؟ وما احتمال الحصول على 2 أو أقل من وحدات عدم المطابقة؟

٢٩ ـ تبلغ نسبة عدم المطابقة لسريان مستقر من عائد ضريبة الدخل 0.03. ما احتمال الحصول على وحدتى عدم مطابقة من عينة حجمها 20؟ استخدم توزيع ذات الحدين.

٣٠ ـ باستخدام توزيع ذات الحدين، أوجد احتمال الحصول على 2 أو أكثر من الوحدات غير المطابقة عند معاينة 5 آلات كاتبة من دفعة معروف أن بها 6% غير مطابقة؟

٣١ ـ باستخدام توزيع ذات الحدين، أوجد احتمال الحصول على مطعمى عدم مطابقة أو أقل فى عينة من 9 عندما تكون نسبة عدم المطابقة فى الدفعة 15%.

٣٢ ـ ما احتمال تخمين أربع إجابات صحيحة فى اختبار به 9 أسئلة نتيجة كل سؤال هى : صحيح أو خطأ؟ استخدم توزيع ذات الحدين.

٣٣ ـ ينتج قالب ضخ قطع المطاط التى توضع عليها كرات الجولف والتى تكون نسبة عدم المطابقة فيه 15%. باستخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لذات

الحدين، أوجد احتمال وجود 34 عدم مطابقة من قطع المطاط فى عينة من 300 قطعة مطاط.

٣٤ـ أخذت عينة من 10 من ممتص الصدمات للسيارات من سريان منتج به 5% من عدم المطابقة. باستخدام بواسون كتقريب لتوزيع ذات الحدين، حدد احتمال وجود 2 عدم مطابقة. قارن النتيجة مع النتيجة عند استخدام توزيع ذات الحدين.

٣٥ ـ إذا كان احتمال عدم مطابقة مقالة واحدة هو 0.08، فما احتمال أن تحتوى عينة من 20 على وحدتى عدم مطابقة أو أقل؟ استخدم بواسون كتقريب لتوزيع ذات الحدين.

٣٦ ـ باستخدام بيانات المشكلة السابقة، حدد احتمال وجود وحدتى عدم مطابقة أو أكثر.

٣٧ ـ يتم اختيار عينة من 10 ماكينات غسيل من دفعة محددة حجمها 100. إذا كان $p_0 = 0.08$ ، فما احتمال وجود ماكينة غسيل عدم مطابقة واحدة فى العينة؟ هل البواسون يكون تقريبا جيدا؟

٣٨ ـ بإحدى الدفعات التى حجمها 15 ثلاث وحدات عدم مطابقة. ما احتمال وجود وحدة عدم مطابقة واحدة فى عينة حجمها 3 ؟ هل يكون البواسون تقريبا جيدا؟

٣٩ ـ أخذت عينة من زجاجات طبية حجمها 3 من صينية بها 30 زجاجة. إذا كانت عدم المطابقة فى محتويات الصينية هى 10%، فما احتمال وجود زجاجة طبية عدم مطابقة واحدة فى العينة؟ هل ذات الحدين تقريب جيد؟

٤٠ ـ نسبة عدم المطابقة فى سريان مستقر للمبات كانت 0.09. فإذا أخذت عينة حجمها 67 فما احتمال وجود 3 وحدات عدم مطابقة؟ هل البواسون تقريب جيد؟

٤١ ـ اختبر، وأعد الكتابة إذا لزم الأمر، برنامج الحاسوب على الحاسوب المتاح لك استخدامه.

٤٢ ـ عدل برنامج الحاسوب لإخراج المعلومات على وحدة الرسومات المتاحة لك.

٤٣ ـ اكتب برنامجا للحاسوب لكل مما يلى :

أ ـ التوزيع الاحتمالى لذات الحدين.

ب ـ توزيع بواسون الاحتمالى.