الباب الأول

ميكانيكا لاجرانج
Lagrangian mechanics

تعريفات أولية : نورد فيما يلي بعض التعريفات المهمة فى دراستنا للميكانيكا التحليلية

١- المنظومة الميكانيكية (Mechanical systpem)

هي تجمع من عدد كبير جدا من الجسيمات ترتبط مع بعضها تحت شروط معينة.

مثال:

الجسم المتماسك (الجاسئ) Rigid Body :

وهو عبارة عن تجمع من عدد كبير جداً من الجسيمات المرتبطة مع بعضها بقوى داخليه وبحيث تكون المسافة بين أي جسيمين منها ثابتة إذ أثرت على الجسم قوى خارجية .

٢- القيود (Constraints) :

يعرف القيد بأنه علاقة رياضية تحدد الشروط المفروضة على المنظومة الميكانيكية ، وصورة هذه العلاقة هي:

$$f(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k, t) = 0$$

حيث $\vec{r}_k , \dot{\vec{r}}_k$ هما متجها موضع وسرعة الجسيم رقم k في المنظومة المكونة من عدد n من الجسيمات ، وهناك نوعان أساسيان من القيود:

(أنواع القيود)

قيد هندسي

لا تظهر السرعة $\dot{\vec{r}}_k$ في معادلته

$$f(\vec{r}_k, t) = 0$$

قيد تفاضلي

تظهر فيه $\dot{\vec{r}}_k$ (السرعة) والتي هي تفاضل $\vec{r}_k$

$$f(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k, t) = 0$$

وأحياناً لا يظهر الزمن t في معادلة القيد صراحة فيقال أن المنظومة لا تعتمد على الزمن، ويسمى القيد حينئذ بالقيد المستقر زمنياً .

٣- درجات الحرية أو الانطلاق(Degrees of Freedom) :

أي جسيم يتحرك بحرية في الفراغ [أي لا توجد قيود على حركته] يتحدد موضعه بثلاثة إحداثيات مستقلة هي (x.y.z) في الاحداثيات الكرتيزية أو، (r,θ,ϕ) فى الاحداثيات الكروية ، أو (ρ,ϕ,z) فى الاحداثيات الاسطوانية ، تسمى بدرجات الحرية أو الانطلاق .

∴ للجسيم الذي يتحرك بحرية في الفراغ توجد له ٣ درجات حرية ، وللمنظومة المكونة من عدد n من الجسيمات التي تتحرك بحرية (اى دون قيود) يوجد (3n) من درجات الحرية أو الانطلاق .

ملحوظة : إذاً وجد قيد على حركة الجسيمات فتقل درجات الحرية ، بمقدار هذا القيد فتصبح (3n-1) ، وهكذا.....

∴ القيد يقلل من درجات الحرية .

٤- الإحداثيات المعممة (Generalized coordinates):

باعتبار الجسيم k في المنظومة الميكانيكية فان إحداثياته هي: $\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$

وإذاً أخذنا الزمن t في الإعتبار فإن $\vec{r}_k$ تأخذ الصورة الآتية :

$$\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k, t) = (q_k, t)$$

حيث : $q_k = (x_k, y_k, z_k)$ تسمى بالإحداثيات المعممة أو(العامة) للجسيم k .

وبالنسبة للمنظومة الميكانيكية ككل:

عدد الجسيمات n جسيم :

بالنسبة للجسيم (١) : نكتب الإحداثيات المعممة q_1

بالنسبة للجسيم (٢) : نكتب الإحداثيات المعممة q_2

بالنسبة للجسيم (٣) : نكتب الإحداثيات المعممة q_3

:

:

بالنسبة للجسيم (k) نكتب الإحداثيات العامة q_k

وبصورة عامة يمكن كتابة : $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots\ldots, q_k, t) = \vec{r}_k(q_j, t)$

حيث : $j = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, k\ ,\ q_j = (q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_k)$

٥- <u>**القيود الهولونومية(Holonomic Constraints) :**</u>

هي نوع من أنواع القيود الهندسية ، التي تتحدد بالعلاقة : $f(\vec{r}_k, t) = 0$

حيث : $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_j, t)$

ويتحقق معها شرطان :

(١) الإحداثيات المعممة q_j $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ تكون مستقلة (غير مرتبطة ببعضها)

.

(٢) عدد الإحداثيات المعممة يساوي عدد درجات الحرية للمنظومة .

وتسمى المنظومة التي تخضع لهذا القيد بالمنظومة الهولونومية ، بينما تكون المنظومة غير الخاضعة لهذا القيد لاهولونومية (Non-holonomic).

٦- <u>**الإزاحة الافتراضية والإزاحة الحقيقية:**</u>

نعتبر الجسيم k في المنظومة الميكانيكية وسرعته هي $\vec{\upsilon}_k = \dfrac{d\vec{r}_k}{dt} = \dot{\vec{r}}_k$ فتكون

إزاحته : $d\vec{r}_k = \vec{\upsilon}_k\, dt \quad \rightarrow (1)$

وتسمى بالإزاحة الحقيقية .

وإذا كان هناك إزاحة حقيقية أخرى تتم في نفس الفترة الزمنية وصورتها :

$$d\vec{r}'_k = \vec{\upsilon}'_k\, dt \quad \rightarrow \quad (2)$$

فإن الفرق بين الإزاحتين $d\vec{r}'_k$ ، $d\vec{r}_k$ يسمى بالإزاحة الافتراضية :

$$\delta\vec{r}_k = d\vec{r}_k - d\vec{r}'_k \quad \rightarrow \quad (3)$$

قاعدة الشغل الافتراضي : (Virtual work) :

من المعلوم أن الشغل المبذول بواسطة قوة $\vec{F}$ لإزاحة $d\vec{r}$ هو: $dw = \vec{F}\cdot d\vec{r}$

تنص قاعدة الشغل الافتراضي على الآتي:

" الشغل المبذول بواسطة القوى المؤثرة على n من الجسيمات المكونة لمنظومة ميكانيكية لإزاحة افتراضية $\delta\vec{r}_k$ يساوي صفرا ".

رياضياً: تكتب تلك القاعدة بالصورة :

$$\boxed{\delta W = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k . \delta\vec{r}_k = 0}$$

يسمى δW بالشغل الافتراضي لأنه الشغل المبذول بواسطة القوى المؤثرة على المنظومة في إزاحة إفتراضية ، وتسمى القيود الهولونوميه التى تخضع لقاعدة الشغل الافتراضى بالقيود المثالية (Ideal constraints).

أمثلة محلولة

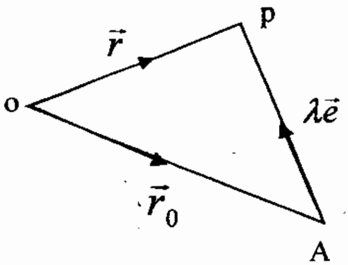
مثال (١) : أوجد معادلة القيد فى الحالات الآتيه :

(أ) جسيم يتحرك على سلك مستقيم ثابت فى الفراغ

(ب) جسيمان متصلان بساق خفيفة ذات طول ثابت (ℓ)

(ج) جسيمان متصلان بساق خفيفة يتغير طولها مع الزمن بحيث يكون $\ell = \alpha\cos wt$

الحل :



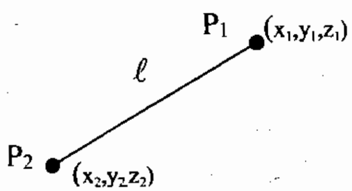
(أ) نفرض الجسيم P يتحرك على السلك ولتكن A نقطة ثابتة متجه موضعها $\vec{r}_0$ وتبعد مسافة λ عن P ، فإذا كان $\vec{e}$ متجه وحدة في اتجاه السلك فإن متجه موضع الجسم المتحرك على السلك يكون $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{e}$

وبذلك فان معادلة القيد تكون : $\vec{r} - \vec{r}_0 - \lambda\vec{e} = 0$

وهذا القيد هندسى وهو مستقر زمنيا (لايظهر الزمن t صراحة فى معادلته)

(ب) فى هذه الحالة فإن معادلة القيد تكون :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \ell^2$$



وهى مجموعة هواونوميه مستقره زمنيا .

(ج) فى هذه الحالة تكون معادلة القيد:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=\alpha^2\cos^2 wt$$

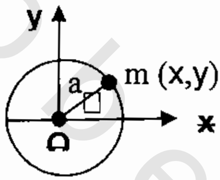
وهى مجموعة هواونوميه غير مستقره زمنيا .

مثال (٢) : عين مجموعة الاحداثيات المعممة التى تحدد المنظومات التالية :

(أ) حركة جسيم مقيد الحركة على سلك دائرى

(ب) حركة جسيم مقيد الحركة على شكل قطع ناقص

(ج) حركة جسيم فى فراغ الاحداثيات الاسطوانية

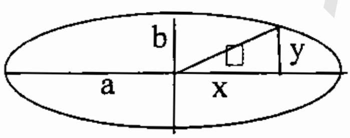


الحــل: نفرض السلك الدائرى يقع فى المستوى (xy)

فإذا كانت a نصف قطر السلك (ثابت)

فتكون إحداثيات الجسيم هى : $x=\alpha\cos\theta,\quad y=a\sin\theta$ (المعادلات البارامترية للدائرة) وعلى ذلك يمكن تحديد الحركة تماما باستخدام الاحداثى المعمم θ أى أن :

$$q=\theta$$



(ب) الجسيم P يتحرك على السلك بحيث أن إحداثياته هى : $x=\alpha\cos\theta,\quad y=b\sin\theta$ وهى المعادلات البارامترية للقطع الناقص

وبذلك يمكن تحديد الحالة تماما باستخدام الاحداثى المعمم θ أى أن : $q=\theta$

(ج) فى حالة حركة الجسيم فى فراغ الاحداثيات الاسطوانيه يكون لدينا ثلاثة إحــداثيات هى ρ ، ϕ ، z وهى الاحداثيات المعممة التى تحدد الحركة هنا تحديدا تامـــا أى أن : $q_1=\rho,\ q_2=\phi,\ q_3=z$

مثال (٣) : حدد درجات الحرية (أو الأنطلاق) في الحالاتت الآتيه :

(أ) مجموعة تتكون من n جسيم تتحرك بحرية فى الفراغ

(ب) مجموعة من ستة جسيمات تتحرك بحرية فى المستوى وفى الفراغ

(ج) جسيمان متصلان بقضيب طوله ℓ يتحرك بحرية فى المستوى

الحــل:

(أ) كل جسيم فى المجموعة يمكنه الحركة فى الفراغ فى ثلاثة اتجاهات فيكون للجسيم 3 درجات حرية ويكون للمجموعة المكونة من n جسيم عدد 3n إحداثيات لتحديد موضعها وبذلك يكون عدد درجات الحريه لها (3n) .

(ب) كل جسيم يتحرك فى المستوى يلزمه درجتان من درجات الحرية لتحديد موضعه فى المستوى وبذلك يلزم للمجموعة $6 \times 2 = 12$ أى 12 درجة حرية ، وفى حالة الفراغ يكون لكل جسيم3 درجات وللمجموعه 3 x 6 = 18 درجة حريه .

(ج) فى تلك الحالة احداثيات الجسيمين هما : (x_1, y_1) ، (x_2, y_2)أى بأربعة إحداثيات ، وحيث أن المسافة بين الجسيمين ثابتة (ℓ) فإن :

$(x_1 - y_2)^2 + (x_1 - y_2)^2 = \ell^2$ أى أنه يمكن التعبير عن درجة حرية معينة بدلالة أخرى وبذلك يقل عدد درجات الحرية بمقدار الوحدة (معادلة القيد) ويصبح عدد درجات الحرية للمجموعة هى 3 = 1 – 4 أى 3 درجات حرية .

مثال (٤) : لمنظومة ميكانيكية تتكون من عدد n من الجسيمات ، إثبت أن الإزاحات الحقيقية تحقق المعادلات : $\sum_{k=1}^{n} (\vec{\nabla}_k f).d\,\vec{r}_k + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$

بينما الإزاحات الافتراضية تحقق المعادلات : $\sum_{k=1}^{n} (\vec{\nabla}_k f).\delta\,\vec{r}_k = 0$

وذلك باعتبار أن المنظومة الميكانيكية هولونومية .

الحل:

باعتبار المنظومة هولونومية : فأن معادلة القيود المفروضة علي تلك المنظومة هي:

$$f(\vec{r}_k, t) = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

k تأخذ القيم من $1 \rightarrow n$

حيث:

$$f = f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots\ldots, \vec{r}_n, t) \qquad \rightarrow (2)$$

بتفاضل (1) بالنسبة للزمن:

$$\frac{df}{dt} = 0 \qquad \rightarrow (3)$$

ومن (2) وباعتبار أن f دالة في عدة متغيرات:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\vec{r}_1}.\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_2}.\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{d\vec{r}_n}.\frac{d\vec{r}_n}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_k} \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\vec{\nabla}_k f) \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad \rightarrow \quad (4)$$

حيث :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_k} = \vec{\nabla}_k$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_k} = \frac{\partial}{\partial r_k} \hat{r}_k$$

$\hat{r}_k$ هو متجه وحدة في إتجاه $\vec{r}_k$

من (3) و (4) :

$$\sum_{k=1}^{n} (\vec{\nabla}_k f) \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} (\vec{\nabla}_k f) \cdot d\vec{r}_k + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \qquad \rightarrow (5)$$

وهي المعادلة التي تحقق الإزاحة الحقيقية $d\vec{r}_k$ ويلاحظ فيها ظهور الحد المعتمد على الزمن .

ولإيجاد المعادلة التي تحقق الإزاحة الافتراضية:

نفرض أن هناك إزاحة حقيقية أخرى $d\vec{r}'_k$ تتم في نفس الفترة الزمنية؛ فإنها تحقق نفس العلاقة رقم (5) ، أي أن :

$$\sum_{k=1}^{n} (\vec{\nabla}_k f) \cdot d\vec{r}'_k + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \qquad \rightarrow (6)$$

من (5) و (6) بالطرح :

$$\sum_{k=1}^{n} (\vec{\nabla}_k f) \cdot (d\vec{r}_k - d\vec{r}'_k) = 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} (\vec{\nabla}_k f) \cdot \delta\vec{r}_k = 0 \qquad \rightarrow (7)$$

حيث : $\delta\vec{r}_k = (d\vec{r}_k - d\vec{r}'_k)$ هي الإزاحة الافتراضية .

المعادلة (7) هي المعادلة التي تحقق الإزاحة الافتراضية $\delta\vec{r}_k$ ويلاحظ فيها عدم ظهور الحد المعتمد على الزمن . وهو المطلوب .

مثال(٥): باعتبار عدد k من الجسيمات المكونة لمنظومة ميكانيكية، أثبت أن الازاحات الحقيقية تعطي بدلالة الإحداثيات العامة أو المعممة q_j $(j=1.2.3\ldots\ldots k)$ بالعلاقة :

$$d\vec{r}_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}dt$$

بينما الإزاحات الافتراضية تعطى بدلالة q_j بالعلاقة:

$$\delta\vec{r}_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j$$

حيث δq_j هي التغير (variation) في الإحداثيات q_j.

الحل: باعتبار عدد k من الجسيمات:

$$\vec{r}_k=\vec{r}_k(q_j,t)=\vec{r}_k(q_1,q_2,\ldots\ldots,q_k,t)$$

$$\therefore d\vec{r}_k=\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}dq_2+\ldots\ldots+\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}dt$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}dt \qquad \rightarrow (1)$$

ولإيجاد الإزاحة الافتراضية $\delta\vec{r}_k$:

حيث أن الإزاحة الافتراضية لا تعتمد على الزمن فيمكننا كتابة :

$$\vec{r}_k=\vec{r}_k(q_1,q_2,\ldots\ldots\ldots,q_k)$$

ويكون التغير (أوالتغاير ـ Variation) في $\vec{r}_k$:

$$\delta\vec{r}_k=\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2+\ldots\ldots+\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_k}\delta q_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j \quad \rightarrow (2)$$

حيث δq_j هي التغير في الإحداثيات العامة q_j . وهو المطلوب .

السرعة المعممة : Generalized Velocity

تسمى السرعة $\dot{\vec{r}}_k=\dfrac{d\vec{r}_k}{dt}$ بالسرعة العادية في المنظومة الميكانيكية ، بينما السرعة $\dot{q}_j=\dfrac{dq_j}{dt}$ تسمى بالسرعة العامة أو المعممة ($j=1.2\ldots\ldots\ldots k$) .

.: السرعة العادية $\dot{\vec{r}}_k$ هي معدل التغير الزمني للإحداثيات $\vec{r}_k$ بينما السرعة المعممة $\dot{q}_j$ هي معدل التغير الزمني للإحداثيات المعممة q_j .

ملحوظة: هناك كمية هامة تظهر في معادلات الميكانيكا التحليلية وهي معدل تغير الإحداثيا ت $\vec{r}_k$ بالنسبة للإحداثيات المعمم ة q_j أ ي $(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j})$ ، حيث $(j=1,2,\dots\dots k)$: ، ويظهر ذلك فى المثالين الآتيين :

مثال (١): أوجد العلاقة بين السرعة العادية $\dot{\vec{r}}_k$ والسرعة المعممة $\dot{q}_j$ بالصورة :

$$\dot{\vec{r}}_k=\sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$$

الحل:

حيث أن : $\vec{r}_k=\vec{r}_k(q_j,t)$

ومن مثال سابق حصلنا على العلاقة الآتية :

$$d\vec{r}_k=\sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}dt$$

بالقسمة على dt :

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt}=\sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt}+\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$$

$$\therefore \dot{\vec{r}}_k=\sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \quad \to (1)$$

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt}=\dot{\vec{r}}_k$$

$$\frac{dq_j}{dt}=\dot{q}_j$$

وهو المطلوب.

مثال(٢) : أثبت أن $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$ ، وتعرف هذه العلاقة بقاعدة إزالة النقط .

الحل: من علاقة $\dot{\vec{r}}_k$ في مثال (١) :

$$\dot{\vec{r}}_k=\sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$$

بتفاضل هذه العلاقة جزئيا بالنسبة إلى $\dot{q}_j$ واعتبار أن الكمية $\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}\right)$ لا تعتمد على $\dot{q}_j$

نحصل على :

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_j} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}}$$

وهو المطلوب .

ملحوظة: تستخدم قاعدة إزالة النقط كثيراً في إثبات مسائل الميكانيكا التحليلية كما سنرى فيما بعد.

القوة المعممة : Generalized Force

تعرف القوى المعممة المؤثرة على منظومة ميكانيكية عدد جسيماتها n جسيم بالعلاقة الآتية :

$$\boxed{Q_j = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}} \quad , \quad j=1,2,\ldots,k$$

حيث :

$\vec{F}_k$ هي القوى المؤثرة على جسيمات المنظومة (وتعرف بالقوى الاعتيادية أو العادية) .

الإثبات : من تعريف الشغل الافتراضي للقوة $\vec{F}_k$ خلال إزاحة إفتراضية $\delta \vec{r}_k$:

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k \qquad \text{———} (1)$$

و لكن $\delta \vec{r}_k$ تعطى بدلالة الإحداثيات المعممة q_j بالعلاقة الآتية (مثال سابق):

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j \qquad \text{———} (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) :

$$\delta W = \sum_k \vec{F}_k \cdot \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j\right) = \sum_j \left(\sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

وبأخذ :
$$\sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = Q_j$$

$$\therefore \delta W = \sum_j Q_j \delta q_j \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (3)$$

القوة : $\boxed{Q_j = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}}$ تعرف بالقوة المعممة (Generalized Force) .

ملاحظات :

(١) العلاقة : $\delta W = \sum_k \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k$ تعطى شغل القوة الاعتيادية $\vec{F}_k$ خلال الإزاحة الافتراضية $\delta \vec{r}_k$ ، ويعرف بالشغل الإفتراضي .

(٢) العلاقة : $\delta W = \sum_j Q_j \delta q_j$ تعطى شغل القوة المعممة Q_j خلال الإزاحة المعممة δq_j ، و يعرف بالشغل المعمم (Generalized Work) .

(٣) العلاقة : $Q_j = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$ هي علاقة بين القوة المعممة Q_j والقوة الاعتيادية $\vec{F}_k$.

طاقة الحركة المعممة : Generalized Energy

تعرف طاقة الحركة المعممة لمنظومة ميكانيكية تتكون من عدد n من الجسيمات بالعلاقة الآتية :
$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k v_k^2$$

حيث :
$$v_k{}^2 = \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k$$
$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \dot{\vec{r}}_k$$

هي سرعة الجسيم k .

و يلاحظ أن : $\dot{\vec{r}}_k$ تعطى بالعلاقة الآتية :
$$\dot{\vec{r}}_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$$

وهي العلاقة بين $\dot{\vec{r}}_k$ (السرعة المعتادة) و $\dot{q}_j$ (السرعة المعممة) .

$$\therefore T = \frac{1}{2}\sum_k m_k(\vec{v}_k \cdot \vec{v}_k) = \frac{1}{2}\sum_k m_k(\dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k)$$

كمية الحركة المعممة : Generalized Momentum

تعرف كمية الحركة المعممة p_j بالعلاقة الآتية

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

حيث T هي طاقة الحركة المعممة ، $\dot{q}_j$ هي السرعة المعممة$(\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt})$

ملحوظة : من طاقة الحركة المعتــادة (لجــسيم) $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ [باعتبــار الكميات القياسية]

بالتفاضل بالنسبة للسرعة $\dot{r}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2}m(2\dot{r}) = m\dot{r} = mv = p$$

في الميكانيكا النيوتونية :

$$\therefore p = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

العلاقة (1) هي تعميم للعلاقة (2) في حالة الميكانيكا التحليلية .

المنظومات المحافظة (Conservative Systems)

تسمى المنظومات الهولونومية محافظة إذا تحقق الشرطان الآتيان :-

(١) عدم وجود اعتماد صريح على الزمن

(٢) إذا وجدت دالة قياسية في الموضع $u(\vec{r}_k)$ تعرف بدالة الجهد و ترتبط بالقوة $\vec{F}_k$ بالعلاقة :

$$\vec{F}_k = -\frac{\partial u}{\partial \vec{r}_k} = -\vec{\nabla}_k u$$

حيث :

$$\vec{\nabla}_k = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_k} = \frac{\partial}{\partial r_k}\hat{r}_k$$

ملاحظة :

$$u = u(\vec{r}_k) = u(x_k, y_k, z_k)$$

و للمنظومات المحافظة :

$$\vec{F}_k = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial y_k}, \frac{\partial u}{\partial z_k}\right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y_k}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z_k}\hat{k}\right) = -\vec{\nabla}_k u$$

حيث :

$$\vec{\nabla}_k = \frac{\partial}{\partial x_k}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y_k}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z_k}\hat{k}$$

أمثلة محلولة

مثال (١) : إذا كانت العلاقة بين القوة الاعتيادية $\vec{F}_k$ ودالة الجهد القياسية u هي : $\vec{F}_k = -\frac{\partial u}{\partial \vec{r}_k}$ (**للمنظومات الحافظة**) . فأثبت أن : العلاقة بين القوة المعممة Q_j ودالة الجهد القياسية u لتلك المنظومات هي : $Q_j = -\frac{\partial u}{\partial q_j}$

حيث : الإحداثيات المعممة هى q_j ، الإحداثيات العادية هى $\vec{r}_k$.

الحــــل :

حيث أن : $u = u(x_k, y_k, z_k)$

$$\therefore \vec{F}_k = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial y_k}, \frac{\partial u}{\partial z_k}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

أيضاً : حيث أن : $\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \frac{\partial y_z}{\partial q_j}, \frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

و من تعريف Q_j:

$$Q_j = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

ومن (2) و (1) بالضرب القياسي تصبح Q_j بالصورة :

$$Q_j = -\sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial u}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial u}{\partial q_j}$$

وهو المطلوب.

حيث : $u = u(x_k, y_k, z_k)$

$$\frac{\partial u}{\partial q_j} = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \cdots\cdots\right)$$

<u>مثال(٢):</u> باستخدام قاعدة إزالة أو حذف النقط $\left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right)$، أوجد العلاقتين الآتيتين للتغير في طاقة الحركة المعممة T بالنسبة لـ $\dot{q}_j$ و q_j

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j} \qquad \text{——— (i)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \qquad \text{——— (ii)}$$

<u>الحـل:</u>

<u>لإيجاد (i)</u> : من تعريف طاقة الحركة المعممة

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k (\dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k) \qquad \text{——— (1)}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى q_j :

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\sum_k m_k \left[\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j} \cdot \dot{\vec{r}}_k\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\sum_k m_k \left[\cancel{2}\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j}\right] = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j} \qquad \text{——— (i)}$$

<u>لإيجاد(ii):</u> نفاضل (1) بالنسبة إلى $\dot{q}_j$:

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\sum_k m_k \left[\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{\vec{r}}_k\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\sum_k m_k\left[\cancel{2}\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j}\right] = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j}$$

و من قاعدة حذف النقط :

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \qquad \text{—————— (ii)}$$

<u>مسألة</u>: أثبت أن كمية الحركة P_j تعطى بالعلاقة : $P_j = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$

[من تعريف P_j : $P_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ ، ومن العلاقة (ii) ينتج المطلوب] .

<u>مثال(٣)</u> : إذا كانت p_j هي كمية الحركة المعممة لمنظومة ميكانيكية وكانت $\vec{p}_k = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k$ هي كمية الحركة العادية أثبت أن العلاقة بين $\vec{p}_k$ و p_j هي :

$$\sum_j p_j \delta q_j = \vec{p}_k \cdot \delta \vec{r}_k$$

حيث $\delta \vec{r}_k$ و $\vec{p}_k$ هي كمية الحركة و الإزاحة العادية بينما δq_j و P_j هي كمية الحركة و الإزاحة المعممة .

<u>الحل</u>: باستخدام العلاقات الآتية :

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k (\dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k),\ P_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\therefore \sum_j p_j \delta q_j = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j = \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left[\frac{1}{2}\sum_k m_k (\dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k)\right]\ \delta q_j$$

$$= \sum_j \left[\frac{1}{2}\sum_k m_k (2\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j})\right]\delta q_j$$

$$= \sum_j \left[\sum_k m_k (\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j}) \right] \delta q_j$$

$$= \sum_j \left[\sum_k m_k (\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_j}) \right] \delta q_j = \sum_j \left[\vec{p}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j$$

حيث :

$$\vec{p}_k = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k$$

ولكن :

$$\delta \vec{r}_k = \sum_j \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \vec{q}_j} \right) \delta q_j$$

$$\therefore \sum_j p_j \delta q_j = \vec{p}_k \cdot \left[\sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \right] = \vec{P}_k \cdot \delta \vec{r}_k$$

و هو المطلوب .

<u>مثال (٤):</u> أثبت أن طاقة الحركة المعممة لمنظومة ميكانيكية محافظة يمكن كتابتها كدالة تربيعية متجانسة في السرعات المعممة $(\dot{q}_j)$ بالصورة :

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} a_{js} \dot{q}_j \dot{q}_s}$$

حيث :

$$a_{js} = \sum_k m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}$$

$$a_{js} = a_{sj}$$

<u>الحل</u> : في حالة المنظومات المحافظة فإن معادلات التحويل لا تعتمد صراحة على الزمن أي أن :

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = 0 \qquad \text{و} \qquad \vec{r}_k = \vec{r}_k (q_j)$$

$$\therefore \dot{\vec{r}} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \qquad \text{———} \; (1)$$

[مثال سابق]

ومن تعريف طاقة الحركة المعممة للمنظومة :

$$T=\frac{1}{2}\sum_k m_k(\dot{\vec{r}}_k\cdot\dot{\vec{r}}_k)=\frac{1}{2}\sum_k m_k\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\cdot\left(\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_k m_k\sum_j\left(\sum_s\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_j\dot{q}_s\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_j\sum_s\left(\sum_k m_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}\right)\dot{q}_j\dot{q}_s$$

ويأخذ :

$$\sum_k m_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}=a_{js}$$

(ومنها يتضح أن $a_{js}=a_{sj}$)

$$\therefore T=\frac{1}{2}\sum_j\sum_s a_{js}\dot{q}_j\dot{q}_s \qquad\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

و من هذه العلاقة يتضح أن T هي دالة تربيعية متجانسة في السرعة المعممة $\dot{q}$.

و هو المطلوب .

<u>مثال (٥)</u> أثبت أن كمية الحركة المعممة لمنظومة ميكانيكية محافظة هي دالة خطية في السرعة المعممة $(\dot{q})$ بالصورة :

$$\boxed{p_j=\sum_{s=1}^{k}a_{js}\dot{q}_s}$$

حيث :

$$a_{js}=\sum_k m_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}$$

<u>الحل</u> :

حيث ان :

$$T=\frac{1}{2}\sum_k m_k(\dot{\vec{r}}_k\cdot\dot{\vec{r}}_k)$$

$$\therefore P_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left[\frac{1}{2}\sum_k m_k(\dot{\vec{r}}_k\cdot\dot{\vec{r}}_k)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_k m_k\left[2\dot{\vec{r}}_k\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_k}{\partial\dot{q}_j}\right]=\sum_k m_k\left[\dot{\vec{r}}_k\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_k}{\partial\dot{q}_j}\right]$$

$$=\sum_k m_k\left[\dot{\vec{r}}_k\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\right] \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(1)$$

وللمنظومات المحافظة فإن :

$$\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}=0$$

$$\therefore \dot{\vec{r}}_k=\sum_s\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s$$

بالتعويض في (1) :

$$\therefore p_j=\sum_k m_k\left[\sum_s\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\right]\dot{q}_s=\sum_s\left[\sum_k m_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}\right]\dot{q}_s=\sum_s a_{js}\dot{q}_s \qquad \text{\_\_\_}(3)$$

حيث :

$$a_{js}=\sum_k m_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}$$

العلاقة (3) هي العلاقة المطلوبة ومنها يتضح أن p_j هي دالة خطية متجانسة في السرعة المعممة $(\dot{q})$.

<u>مثال (٦)</u> : باستخدام نتائج المثالين (٤) و (٥) أثبت أن العلاقة بين طاقة الحركة المعممة T وكمية الحركة المعممة p_j هي :

$$T=\frac{1}{2}\sum_j p_j\dot{q}_j$$

<u>حل المثال:</u> من المثال رقم(٤) :

$$T=\frac{1}{2}\sum_j\sum_s a_{js}\dot{q}_j\dot{q}_s \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

ومن المثال رقم(٥) :

$$p_j=\sum_s a_{js}\dot{q}_s \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

من (2) بالضرب في $\dot{q}_j$ وأخذ المجموع على j :

$$\sum_j p_j\dot{q}_j=\sum_j\Big(\sum_s a_{js}\dot{q}_s\Big)\dot{q}_j=\sum_j\sum_s a_{js}\dot{q}_j\dot{q}_s \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (3)$$

وبالتعويض من (3) في (1) :

$$\therefore T=\frac{1}{2}\sum_j\sum_s p_j\dot{q}_j$$

وهو المطلوب .

مثال (٧) : إذا كانت p_j تعطى بدلالة السرعات المعممة بالعلاقة $p_j=\sum_s a_{js}\dot{q}_s$

فأثبت أن $\dot{q}_s$ تعطى بدلالة p_j بالعلاقة : $\dot{q}_s=\sum_j b_{sj}p_j$

حيث : $\sum_j b_{rj}a_{js}=\delta_{rs}$

δ_{rs} هي دلتا كرونيكر $\delta_{rs}\begin{cases}1 & (r=s)\\ 0 & (r\neq s)\end{cases} \leftarrow [\sum_s \delta_{rs}A_s=A_r]$

الحل: حيث أن : $p_j=\sum_s a_{js}\dot{q}_s$

فبالضرب في b_{rj} والجمع على j نحصل على :

$$\sum_j b_{rj}p_j=\sum_s\sum_j b_{rj}a_{js}\dot{q}_s=\sum_s\delta_{rs}\dot{q}_s=\dot{q}_r$$

وحيث أن الرموز الدليلية (الأدلة) هي رموز متحركة فبوضع $r=s$:

$$\therefore \dot{q}_s=\sum_j b_{sj}p_j$$

و هو المطلوب .

<u>مثال (٨)</u> : باستخدام العلاقة $\dot{q}_s = \sum_j b_{sj} p_j$ و العلاقة $T = \frac{1}{2}\sum_j p_j \dot{q}_j$ ، إثبت أن T (طاقة الحركة المعممة) تعطى بالعلاقة :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_j \sum_s b_{js} p_j p_s}$$

والتي تعنى أن T هي دالة تربيعية متجانسة في كميات الحركة المعممة .

<u>الحل</u> : يمكن كتابة العلاقة المعطاة بالصورة الآتية :

$$\dot{q}_j = \sum_s b_{js} p_s \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$

[باستبدال j مكان s]

ومن العلاقة :

$$T = \frac{1}{2}\sum_j p_j \dot{q}_j \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (2)$$

فبالتعويض من (1) في (2):

$$T = \frac{1}{2}\sum_j P_j (\sum_s b_{js} p_s) = \frac{1}{2}\sum_j \sum_s b_{js} p_j p_s$$

و هو المطلوب .

و يلاحظ ما يلي : أن طاقة الحركة المعممة T يمكن التعبير عنها كدالة تربيعية متجانسة في السرعات المعممة بالصورة :

$$T = \frac{1}{2}\sum_j \sum_s a_{js} \dot{q}_j \dot{q}_s$$

بينما يعبر عنها كدالة تربيعية متجانسة في كميات الحركة المعممة بالصورة :

$$T = \frac{1}{2}\sum_j \sum_s b_{js} p_j p_s$$

حيث العلاقة بين المعاملين b_{js} و a_{js} هي :

$$\sum_j a_{js} b_{rj} = \delta_{sr}$$

<u>نظرية أويلر للدوال المتجانسة :</u>

إذا كانت F دالة متجانسة من الدرجة n في المتغيرات λ_j ، أي إذا كانت $F = F(\lambda_j)$ فإن نظرية أويلر للدوال المتجانسة تنص على الآتي :

$$\sum_j \lambda_j \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = nF \_\_\_\_\_\_\_\_ (1)$$

مثال : باستخدام نظرية أويلر للدوال المتجانسة أوجد العلاقة بين P_j و T بالصورة :

$$T = \frac{1}{2}\sum_j p_j \dot{q}_j$$

[أخذت كمسألة سابقة]

الحـــل : من مثال سابق ، وجدنا أن T هي دالة تربيعية متجانسة في المتغير $\dot{q}_j$

(السرعة المعممة) أي أنها دالة متجانسة من الدرجة الثانية في $\dot{q}_j$.

$$T = T(\dot{q}_j) \quad \text{و} \quad \therefore n = 2$$

فبتطبيق نظرية أويلر للدوال المتجانسة (المعادلة (1)) :

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (2)$$

$$[F = T \quad , \; \lambda_i = \dot{q}_j \quad , \quad n = 2]$$

ولكن من تعريف كمية الحركة المعممة p_j :

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \_\_\_\_\_\_\_\_ (3)$$

بالتعويض من (3) في (2) نحصل على :

$$\sum_j \dot{q}_j p_j = 2T$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}\sum_j p_j \dot{q}_j$$

وهي العلاقة المطلوبة .

دالة لاجرانج (اللاجرانجيان) [L]

تعرف دالة لاجرانج (L) لمنظومة ميكانيكية بأنها الفرق بين طاقتي الحركة (T) والجهد (U) للمنظومة ، أي أن :

$$L = T - U \_\_\_\_\_\_\_\_ (1)$$

ويلاحظ أن :

(١) طاقة الحركة T هي دالة في السرعة $\dot{q}_j$.

$$\therefore T = T(\dot{q}_j) \_\_\_\_\_\_ (2)$$

(٢) طاقة الجهد(أو طاقة الوضع)U هي دالة في الموضع(أي الإحداثيات) q_j

$$\therefore u = u(q_j) \_\_\_\_\_\_ (3)$$

∴ من (3) و (2) و (1) يتضح أن:

$$L = L(q_j, \dot{q}_j)$$

وإذا أخذنا الزمن t في الأعتبار فإن:

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

(٣) تستخدم دالة لاجرانج (أو اللاجرانجيان – Lagrangian) في إشتقاق المعادلة الأساسية في ميكانيكا لاجرانج المعروفة بمعادلة (أو معادلات) لاجرانج للمنظومات الميكانيكية الهولونومية والمحافظة كما سنرى في الأمثلة التالية.

أمثلة محلولة:

مثال(١) : أثبت العلاقة بين المؤثرين التفاضلين : $\frac{\partial}{\partial q_j}$ و $\frac{d}{dt}$

بالصورة :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d}{dt}\right)}$$

و تعرف هذه العلاقة بقاعدة تبادل المؤثرات التفاضلية $\frac{\partial}{\partial q_j}$ و $\frac{d}{dt}$

الحــــل: المطلوب إثبات أن :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right)$$

ولإثبات ذلك: حيث أن :

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_j, t)$$

$$d\vec{r}_k = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} dt$$

[مثال سابق]

$$\therefore \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$$

وبتفاضل الطرفين جزئيا بالنسبة إلى q_j :

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_k}\dot{q}_k\right] + \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial t} \quad \text{——} (1)$$

أيضاً من قواعد التفاضل الجزئي : إذا كانت $F = F(q_1, q_2, \ldots\ldots, q_k, t)$

فإن :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t}$$

و بأخذ : $F = \dfrac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_2 \partial q_j}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial t \partial q_j}$$

$$= \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial t} \quad \text{——} (2)$$

[حيث : $\dfrac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_k} = \dfrac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_k \partial q_j}$]

بمقارنة (2) و (1) ينتج أن :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right)}$$

و هو المطلوب .

مثال (٢): معادلات لاجرانج للمنظومات الهولونومية

باستخدام قاعدة تبادل المؤثرات التفاضلية و استخدام العلاقتين :

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j} \quad \text{\_\_} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \; (1)\,, \quad \text{\_\_}(2)$$

أثبت العلاقة الآتية بين طاقة الحركة المعممة T والقوة المعممة Q_j لمنظومة هولونومية:

$$\boxed{Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

و تعرف هذه العلاقة بمعادلات لاجرانج للمنظومات الهولونومية .

الحـل : العلاقة بين القوة المعممة Q_j و القوة المعتادة $\vec{F}_k$ هي :

$$Q_j = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(4)$$

حيث $\vec{F}_k$ تخضع لقانون نيوتن الثاني وصورته :

$$\vec{F}_k = m_k \ddot{\vec{r}}_k \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(5)$$

بالتعويض من (5) في (4) نحصل على :

$$Q_j = \sum_k m_k \ddot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(6)$$

و لكن :
$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) = \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) + \ddot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

$$\therefore \ddot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(7) \qquad \left|\, \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \dot{\vec{r}}_k \right.$$

بالتعويض من (7) في (6) :

$$Q_j = \sum_k m_k \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j} \right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right] - \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j}$$

و باستخدام العلاقتين (2) و (1) نحصل على :

$$\boxed{Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}}$$

وهي معادلة لاجرانج للمنظومات الهولونومية .

<u>مثال (٣) : معادلات لاجرانج للمنظومات المحافظة</u>

باستخدام دالة لاجرانج $(L = T - u)$، أثبت أن معادلات لاجرانج للمنظومات الهولونومية المحافظة تأخذ الصورة الآتية :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

<u>الحــل:</u> حيث أن المنظومات المحافظة هي منظومات هولونومية :

$$\therefore Q_j = -\frac{\partial u}{\partial q_j} \quad \text{\_\_\_\_\_} (1)$$

حيث u هي دالة الجهد القياسية ، و هي دالة في q_j فقط ، بمعنى أن : $\dfrac{\partial u}{\partial \dot{q}_j} = 0$

وتصبح معادلات لاجرانج للمنظومات الهولونومية المحافظة بالصورة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial u}{\partial q_j}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-u) = 0 \_\_\_\_\_\_\_\_ (2)$$

وحيث أن :

$$L = T - u$$
$$\therefore T = L + u$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(L+u) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j}$$

و لكن : $\frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j} = 0 \leftarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

و تصبح المعادلة (2) :

$$\frac{d}{dt}\boxed{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

و هي معادلات لاجرانج للمنظومات المحافظة .

مثال(٤): قانون نيوتن الثاني في صورته المعممة .

باستخدام معادلات لاجرانج للمنظومات المحافظة، أثبت أن العلاقة بين القوة المعممة Q_j و كمية الحركة المعممة p_j تعطى بالصورة :

$$\boxed{Q_j = \frac{dp_j}{dt}}$$

ويعرف هذا بقانون نيوتن الثاني في الميكانيكا التحليلية (في صورته المعممة) ، وينص على أن : " **القوة المعممة تساوي معدل التغير في كمية الحركة المعممة** " .

الحـل : معادلات لاجرانج للمنظومات المحافظة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ (1)$$

حيث $L = T - u$ هي دالة لاجرانج للمنظومة .

و باعتبار أن : $T = T(\dot{q}_j) \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j}=0 \longleftarrow u=u(q_j)$$

و تصبح العلاقة (1) :

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-u)]-\frac{\partial}{\partial q_j}(T-u)=0$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j})+\frac{\partial u}{\partial q_j}=0 \qquad \text{———}(2)$$

و حيث أن المنظومات هي منظومات محافظة ، فإن :

$$p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad , \qquad Q_j=-\frac{\partial u}{\partial q_j}$$

فبالتعويض في (2) :

$$\therefore \frac{dp_j}{dt}-Q_j=0$$

$$\boxed{\therefore Q_j=\frac{dp_j}{dt}}$$

<u>**ملحوظة**</u> : هذا القانون يماثل قانون نيوتن الثاني في الميكانيكا النيوتونية هو

$$\vec{F}_k=\frac{d\vec{p}_K}{dt}$$

<u>**مثال(٥)**</u>: <u>**مبدأ ثبوت الطاقة للمنظومات المحافظة**</u> .

باعتبار أن طاقة الحركة المعممة لمنظومة هولونومية محافظة تعتمد صراحة على الموضع و السرعة . أي أن $T=T(q_j,\dot{q}_j)$ وباستخدام العلاقة: $T=\frac{1}{2}\sum_j p_j\,\dot{q}_j$

أثبت مبدأ ثبوت الطاقة لهذه المنظومة .

<u>**الحـــل**</u>: ينص مبدأ ثبوت الطاقة على أن :

" **الطاقة الكلية للمنظومة تساوي مقداراً ثابتاً** " ، أي أن $E=T+u=\text{const}$

<u>**ولإثبات ذلك**</u> : حيث أن :

$$T=T(q_j,\dot{q}_j)=T(q_1,q_2,\ldots,q_k;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots\dot{q}_k)$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial q_1}\dot{q}_1+\cdots+\frac{\partial T}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\ddot{q}_1+\cdots+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

$$=\sum_{j=1}^{k}[\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j]$$

$$=\sum_{j}(\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial q_j}+p_j\ddot{q}_j) \quad \text{———} (1) \qquad \Big| \; p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

ومن معادلات لاجرانج للمنظومات الهولونوميه : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j})-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j$

وحيث أن المنظومات محافظة : $Q_j=-\frac{\partial u}{\partial q_j} \quad , \quad p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$

$$\therefore \frac{dP_j}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial u}{\partial q_j}$$

بضرب الطرفين في $\dot{q}_j$ والجمع على j : $\sum_j \dot{q}_j[\frac{dp_j}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_j}]=-\sum_j \dot{q}_j\frac{\partial u}{\partial q_j}$

$$\therefore \sum_j[\dot{q}_j\frac{dp_j}{dt}-\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial q_j}]=-\sum_j\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} \quad \text{———}(2)$$

و لكن : $-\sum_j\frac{du}{dq_j}\frac{dq_j}{dt}=-\frac{du}{dt}$

أيضاً: $\frac{d}{dt}(p_j\dot{q}_j)=p_j\ddot{q}_j+\frac{dp_j}{dt}\dot{q}_j$

$$\therefore \frac{dp_j}{dt}\dot{q}_j=\frac{d}{dt}(p_j\dot{q}_j)-p_j\ddot{q}_j$$

و بالتعويض في (2) نجد أن:

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt}(p_j\dot{q}_j) - p_j\ddot{q}_j - \dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial q_j}\right] = -\frac{du}{dt}$$

و لكن $\sum_j p_j\dot{q}_j = 2T$ [من رأس المسألة] .

ومن المعادلة (1) :
$$\sum_j \left(p_j\ddot{q}_j + \dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial q_j}\right) = \frac{dT}{dt}$$

فنحصل على :
$$\frac{d}{dt}(2T) - \frac{dT}{dt} = -\frac{du}{dt}$$

$$\therefore 2\frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} = -\frac{du}{dt}$$

$$\therefore \frac{dT}{dt} = -\frac{du}{dt} \therefore \frac{d}{dt}(T+u) = 0$$

ولكن
$$\therefore \frac{dE}{dt} = 0 \leftarrow \quad E = T + u$$

$$\therefore \boxed{T + u = \text{const}} \longleftarrow \boxed{E = \text{const}}$$

وهو قانون ثبوت الطاقة للمنظومات الهولونومية المحافظة .   وهو المطلوب .

<u>مثال(٦):</u> جسيم كتلته m يتحرك في المستوى في مجال قوة تعطى بالعلاقة :

$$\vec{F} = -\alpha r\cos\theta\,\hat{r}$$

حيث α ثابت ، $\hat{r}$ متجه الوحدة في اتجاه نصف القطر r .

فباستخدام معادلات لاجرانج للأنظمة الهولونومية أثبت أن كمية الحركة الزاوية تكون منحفظة(ثابتة) و أوجد المعادلة التفاضلية لمسار الجسيم

<u>الحل:</u> إذا كانت الإحداثيات القطبية للجسيم هي (r,θ) فتكون طاقة حركته

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

حيث مركبتى السرعة فى الاحداثيات القطبية هما : $\dot{r}, r\dot{\theta}$

بكتابة معادلة لاجرانج للأنظمة الهولونومية بدلالة θ بالصورة :

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q_\theta$$

و لما كانت القوة $\vec{F}$ في اتجاه r فإن : $Q_\theta = 0$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

و من (1) :

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta}=0$$

بالتعويض في (2) :

$$\therefore \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0$$

ومنها:

$$mr^2\dot{\theta}=\text{const}$$

و لكن : كمية الحركة الزاوية للجسيم حول نقطة الأصل هي :

$$M = rp = r(mv) = r(mr\dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta} \qquad \Big| \; p = mv \text{ كمية الحركة الخطية}$$

ومن ذلك نرى أن: M=const أي أن كمية الحركة الزاوية تكون منحفظة .

و لإيجاد المعادلة التفاضلية للمسار(و هي علاقة بين θ ، r)

نكتب معادلة لاجرانج للأنظمة الهولونومية بدلالة r بالصورة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (3)$$

حيث :

$$Q_r = F_r = -\alpha r\cos\theta$$

و من (1) :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2$$

فبالتعويض في (3) :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r})-mr\dot{\theta}^2=-\alpha r\cos\theta$$

$$\therefore m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2+\alpha r\cos\theta=\boxed{0 \rightarrow \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\beta r}\cos\theta \;,\quad \beta=\frac{-\alpha}{m}$$

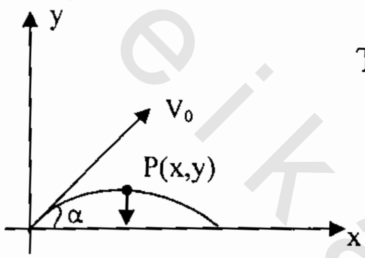
وهي المعادلة التفاضلية لمسار الجسيم .

مثال(٧) حركة المقذوفات :

قذف جسيم كتلته m بسرعة ابتدائية v_0 صانعا زاوية α مع الأفقي فبإهمال مقاومة الهواء ، استخدم معادلات لاجرانج للأنظمة المحافظة لإيجاد معادلة مسار المقذوف بالصورة [سبق إيجادهما في ميكانيكا نيوتن]:

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$$

الحل: بفرض أن $p(x,y)$ هو موضع الجسيم عند اللحظة t



∴ طاقة حركة الجسيم : $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

و بأخذ محور x كمستوى للقياس

فإن طاقة الجهد تكون: $u = mgy$

دالة لاجرانج :

$$L = T - u = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \_\_\_\_(1)$$

معادلات لاجرانج : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$

فمن (1) : $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$

وتصبح معادلات لاجرانج :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_ (2)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) - (-mg) = 0 \rightarrow \ddot{y} = -g \qquad \_\_\_\_\_\_ (3)$$

ولإيجاد معادلة المسار للمقذوف :

من (3) ، (2) بالتكامل مرتين بالنسبة للزمن نحصل على :

$$x = \mu t + \beta \qquad \_\_\_\_\_\_ (4)$$

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+\gamma t+\delta \qquad \_\_\_\_\_\_ (5)$$

حيث μ,β,γ,δ ثوابت التكامل و لإيجادها :

في البداية ($t=0$) و الجسيم قذف من نقطة الأصل : $y=0$, $x=0$.

و بتفاضل (4) ، (5) : $\dot{x}=\mu$, $\dot{y}=-gt+\gamma$

و في البداية : $\dot{x}=v_0\cos\alpha$, $\dot{y}=v_0\sin\alpha$

و بذلك فإن : $\mu=v_0\cos\alpha,\beta=0$, $\gamma=v_0\sin\alpha,\delta=0$

و تصبح (5) ، (4) :

$$x=(v_0\cos\alpha)t \qquad \_\_\_\_\_\_ (6)$$

$$y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad \_\_\_\_\_\_ (7)$$

و بحذف t بين (7) ، (6) نجد أن :

$$\boxed{y=x\tan\alpha-\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\alpha}}$$

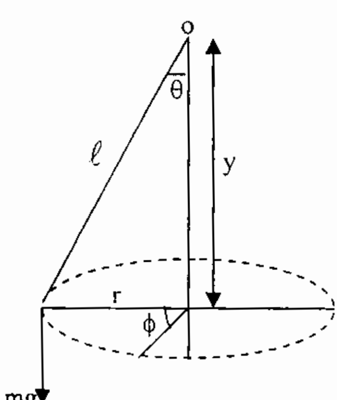
و هي معادلة مسار المقذوف المطلوبة .

مثال(٨) : البندول المخروطي (الحركة في دائرة أفقية) .

تتحرك كتلة m في دائرة أفقية مكونة بندولا مخروطيا ، فإذا كان ℓ هو طول خيط البندول ، θ زاوية ميله على الرأسي ، g عجلة الجاذبية .

فأثبت أن التردد الزاوي للحركة الدائرية للبندول هو : $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{\ell\cos\theta}}$

الحـــل:



التردد الزاوي : $\omega=\dot{\phi}=\dfrac{d\phi}{dt}$

طاقة الحركة : $T=\dfrac{1}{2}mv^2$

حيث : $v=r\omega=r\dot{\phi}$

$$\therefore T=\frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2$$

و من الشكل فإن : $r = \ell \sin\theta$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m\ell^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\phi}^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

طاقة الجهد :

$$u = -mgy = -mg\ell\cos\theta \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

[حيث أخذنا المستوى المار بالنقطة الثابتة o مستوى للقياس] .

دالة لاجرانج:

$$L = T - u = \frac{1}{2} m\ell^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\phi}^2 + mg\ell\cos\theta \qquad \text{\_\_\_\_}(3)$$

معادلة لاجرانج للمتغير ϕ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4)$$

و من (3) :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\ell^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\phi}^2, \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

بالتعويض في (4) :

$$\therefore m\ell^2 \sin^2\theta \cdot \ddot{\phi} = 0$$

و لما كانت θ ثابتة فان : $\ddot{\phi} = 0$

$$\therefore \dot{\phi} = \text{const} = \omega$$

(التردد الزاوي)

معادلة لاجرانج للمتغير θ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(5)$$

و من (3) :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = m\ell^2 \sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\phi}^2 - mg\ell\sin\theta$$

بالتعويض في (5) :

$$\therefore m\cancel{\ell}^2 \cancel{\sin}\theta\cos\theta \cdot \dot{\phi}^2 - \cancel{m}g\cancel{\ell}\cancel{\sin}\theta = 0$$

$$\therefore \ell\cos\theta\cdot\dot{\phi}^2 - g = 0$$

$$\therefore \dot{\phi}^2 = \frac{g}{\ell\cos\theta} \to \dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\theta}} = \omega$$

وهو التردد الزاوي للبندول المخروطي . و هو المطلوب .

<u>مثال(٩) :</u> إذا كانت طاقتي الحركة والجهد لمنظومة ميكانيكية هما

$$T = km(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\sin^2 x)$$
$$u = -2kg\cos x$$

حيث k , m , g ثوابت

<u>المطلوب</u>

(i) ايجاد دالة لاجرانج للمنظومة .

(ii) إيجاد معادلة الحركة للمنظومة بالصورة .

$$\ddot{x} - \alpha^2 \cot x \operatorname{cosec}^2 x + \beta\sin x = 0$$

حيث : $\beta = \dfrac{g}{m}$ و $\alpha = \dfrac{c}{2km}$ ، c ثابت .

<u>الحـــــل</u> :

(i) من تعريف دالة لاجرانج :

$$L = T - u = km\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\sin^2 x\right) + 2kg\cos x \quad \_\_\_\_ (1)$$

(ii) لإيجاد معادلات الحركة :

نطبق معادلات لاجرانج بالصورة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

حيث q هي الإحداثيات المعممة .

<u>وفي المسألة</u> : يوجد لدينا إحداثيان معممان : $q_1 = x$ ، $q_2 = y$

وبالتالي يكون لدينا معادلتان من معادلات لاجرانج

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \_\_\_\_ (2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(3)$$

ومن المعادلة (1)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2km\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=km\dot{y}^2\cdot 2\sin x\cos x-2kg\sin x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=2km\dot{y}\sin^2 x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

بالتعويض في (3) و (2) :

$$\frac{d}{dt}(2km\dot{x})-[2km\dot{y}^2\sin x\cos x-2kg\sin x]=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(4)$$

$$\frac{d}{dt}(2km\dot{y}\sin^2 x)-0=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(5)$$

من (4) بالقسمة على 2km :

$$\ddot{x}-\dot{y}^2\sin x\cos x+\frac{g}{m}\sin x=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(6)$$

و من (5) :

$$\frac{d}{dt}(2km\dot{y}\sin^2 x)=0$$

$$\therefore (2km\dot{y}\sin^2 x)=c$$

حيث c ثابت.

$$\therefore \dot{y}=\frac{c}{2km\sin^2 x} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(7)$$

بالتعويض من (7) في (6) :

$$\therefore \ddot{x}-\frac{c^2}{4k^2m^2\sin^4 x}(\sin x\cos x)+\frac{g}{m}\sin x=0$$

$$\therefore \ddot{x}-\frac{c^2}{4k^2m^2}\frac{\cos x}{\sin^3 x}+\frac{g}{m}\sin x=0$$

$$\therefore \ddot{x} - \frac{c^2}{4k^2m^2}\cot x \operatorname{cosec}^2 x + \frac{g}{m}\sin x = 0$$

$$\therefore \ddot{x} - \alpha^2 \cot x \operatorname{cosec}^2 x + \beta \sin x = 0$$

$$\frac{g}{m} = \beta \qquad \frac{c}{2km} = \alpha$$

وهو المطلوب .

مسألة: في المثال السابق أستخدم معادلة الحركة

$$\ddot{x} - \alpha^2 \cot x \operatorname{cosec}^2 x + \beta \sin x = 0 \qquad (1)$$

لإثبات العلاقة :

$$\dot{x}^2 + \alpha^2 \operatorname{cosec}^2 x - 2\beta \sin x = \gamma \qquad (2)$$

حيث γ ثابت :

الحل: لإثبات العلاقة (2) نكامل العلاقة (1) بالنسبة إلى x :

$$\therefore \int \ddot{x}dx - \alpha^2 \int \cot x \operatorname{cosec}^2 x dx + \beta \int \sin x dx = c$$

حيث c ثابت .

و لكن :

$$\int \ddot{x}dx = \int \left(\frac{d\dot{x}}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)dt = \int \dot{x}d\dot{x} = \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

$$\int \cot x \operatorname{cosec}^2 x dx = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x}$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

بالتعويض نحصل على :

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \alpha^2\left(-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x\right) + \beta(-\cos x) = c$$

بالضرب في 2 وأخذ $\gamma = 2c$:

$$\therefore \dot{x}^2 + \alpha^2 \operatorname{cosec}^2 x - 2\beta \sin x = \gamma$$

وهي المعادلة (2) المطلوبة .

مثال(١٠): الحركة الكوكبية .

إذا كانت القوة المؤثرة على كوكب أثناء حركته حول الشمس تخضع لقانون التربيع العكسي و قيمتها هي : $(\gamma \frac{m}{r^2})$ حيث γ ثابت ، m كتلة الكوكب و r هو البعد المتوسط للكوكب عن الشمس .

المطلوب :

(i) إيجاد دالة لاجرانج للمنظومة .

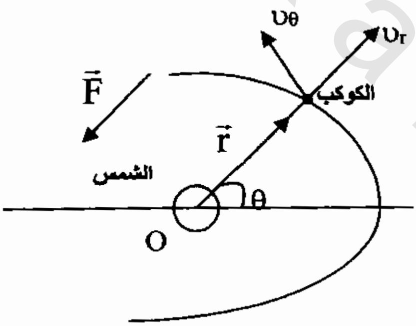
(ii) إيجاد القوى المعممة .

(iii) تطبيق معادلات لاجرانج بصورتيها (للمنظومات الهولونومية وللمنظومات المحافظة) لإيجاد معادلات حركة الكوكب بالصورة :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f \qquad\qquad r^2\,\dot{\theta} = h$$

حيث h ثابت ، f هي القوة المركزية لوحدة الكتل

الحل :



نستخدم الإحداثيات القطبية (r,θ) .

الإحداثيات المعممة $q_1 = r, q_2 = \theta$

مركبتا السرعة : $v_r = \dot{r}$ و $v_\theta = r\dot{\theta}$

القوة المؤثرة على الكوكب :

" هي قوة وحيدة (القوة المركزية) " حيث:

$F = F_r = -\gamma \frac{m}{r^2}$ [إشارة $-$ لأن F_r في الاتجاه المعاكس r]

المطلوب الأول : إيجاد دالة لاجرانج

$$L = T - u \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$$

ولحساب طاقة الحركة T :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_r^{\,2} + v_\theta^{\,2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \qquad \_\_\_\_\_\_ (2)$$

<u>ولحساب طاقة الجهد u:</u>

من تعريف طاقة الجهد " عند نقطة بأنها الشغل المبذول ضد القوة المؤثرة لنقل الجسيم من ∞ إلى النقطة " .

$$\therefore u = -\int_{\infty}^{r} F dr = -\int_{\infty}^{r} (-\gamma \frac{m}{r^2})\, dr \;= \gamma m \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = \gamma m [-\frac{1}{r}]_{\infty}^{r}$$

$$= \gamma m\, [-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty}] = -\gamma \frac{m}{r} \qquad \_\_\_\_\_\_ (3)$$

بالتعويض في (1) نحصل على دالة لاجرانج بالصورة :

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \gamma \frac{m}{r} \qquad \_\_\_\_\_\_ (4)$$

وهو المطلوب الأول .

<u>**المطلوب الثاني**</u> : إيجاد القوى المعممة (Q_j) :

حيث أن لدينا إحداثيان معممان $q_1 = r$ و $q_2 = \theta$

∴ يكون لدينا قوتان معممتان $Q_1 = Q_r$ و $Q_2 = Q_\theta$ وتكون العلاقة التي تعطى Q_j بدلالة القوى العادية $\vec{F}_k$ $\left(\vec{F}_k = \vec{F}_r, \vec{F}_\theta\right)$ هي :

$$Q_j = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

$$\therefore Q_j = \vec{F}_r \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} + \vec{F}_\theta \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \qquad \Bigg| \quad \vec{r}_k = \vec{r}$$

وحيث أنه في الحركة الكوكبية لا توجد غير قوة وحيدة هي القوة المركزية F_r .

$$\therefore F_\theta = 0$$

$$\therefore Q_r = \vec{F}_r \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \qquad \_\_\_\_\_\_ (5)$$

بالتعويض في (5) :

$$\vec{F}_r = F\hat{r} = -\gamma \frac{m}{r^2}\hat{r}$$

$$Q_r = (F\,\hat{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r\hat{r}) = (F\,\hat{r}) \cdot \hat{r} = F = -\gamma \frac{m}{r^2} \qquad \_\_\_\_\_\_ (6)$$

حيث:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\therefore \vec{r} = r\hat{r}$$

$$[\hat{r} \cdot \hat{r} = 1]$$

وحيث أن $F_\theta = 0$ فإن :

$$Q_\theta = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (7)$$

∴ القوى المعممة هي :

$$Q_r = -\gamma \frac{m}{r^2} \;, \quad Q_\theta = 0$$

وهو المطلوب ثانياً .

<u>المطلوب الثالث</u> : إيجاد معادلات حركة الكوكب .

(i) <u>باستخدام صورة معادلات لاجرانج للمنظومات الهولونومية (بدلالة</u> Q_j) :-

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (9)$$

و حيث أن :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{و} \quad \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \text{و} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

و من (7) و (6) فإن (9) و (8) تصبحان:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 = -\gamma \frac{m}{r^2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_} (10)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - 0 = 0 \qquad \_\_\_\_\_ (11)$$

من (10) بالقسمة على m :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\gamma\frac{1}{r^2} = f \qquad \_\_\_\_\_ (12)$$

حيث:

$$F = -\gamma\frac{m}{r^2}$$

$$f = \frac{F}{m} = -\gamma\frac{1}{r^2}$$

حيث f هي القوة المركزية لوحدة الكتل .

و من (11) بالقسمة على m :

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\therefore (r^2\dot{\theta}) = h \qquad \_\_\_\_\_ (13)$$

حيث h ثابت . المعادلتان (13) و (12) هما معادلتا الحركة المطلوبة .

<u>(ii) باستخدام صورة معادلات لاجرانج للمنظومات المحافظة (بدلالة L) :</u>

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad \_\_\_\_\_ (14)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \_\_\_\_\_ (15)$$

ومن (4) :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \gamma\frac{m}{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{و} \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\gamma m}{r^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \text{و} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

بالتعويض في (15) و (14) :-

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - [mr\dot{\theta}^2 - \gamma\frac{m}{r^2}] = 0 \qquad \_\_\_\_\_ (16)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - 0 = 0 \qquad \_\_\_\_\_ (17)$$

من (16) بالقسمة على m:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\gamma\frac{1}{r^2} = f \qquad \_\_\_\_\_ (18)$$

و من (17) بالقسمة على m:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \longrightarrow r^2\dot{\theta} = h \qquad \_\_\_\_\_ (19)$$

المعادلتان (19) و (18) هما نفس المعدلتين (13) و (12) و همـــا يمـــثلان معـــادلتي الحركة لمسار الكوكب ، حيث الثابت h يسمى ثابت لبمسارات المركزية .

<u>مسألة</u> : باستخدام معادلتي الحركة للكوكب (19) و (18) اثبت أن معادلة مسار الكوكب هي معادلة قطع ناقص صورتها:

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos(\theta + \varepsilon)}$$

حيث e, ℓ, ε ثوابت.

<u>الحـــل</u> : من المعادلتين

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f \; \_\_\_\_ (18) \quad , \quad r^2\dot{\theta} = h \; \_\_\_\_ (19)$$

يمكن إثبات أن معادلة مسار الكوكب هي معادلة قطع ناقص كالتالي :

من (19) : $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$ وبالتعويض في (18) و اعتبار أن $f = \frac{-\gamma}{r^2}$

$$\therefore \ddot{r} - r(\frac{h}{r^2})^2 = -\frac{\gamma}{r^2} \quad \therefore \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\gamma}{r^2} \quad \therefore \ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\gamma}{r^2} \quad \_\_\_ (20)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\frac{dr}{dt} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt}$$

ولإيجاد r : نكامل (20) مرتين كالآتى:

وتصبح (20) $\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\gamma}{r^2}$

وبفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int \dot{r}d\dot{r} = \int (\frac{h^2}{r^3} - \frac{\gamma}{r^2})dr \qquad \therefore \frac{1}{2}\dot{r}^2 = -\frac{h^2}{2r^2} + \frac{\gamma}{r} + \text{const}$$

$$\therefore \dot{r}^2 = -\frac{h^2}{r^2} + \frac{2\gamma}{r} + c \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(21)$$

ومن (19) :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r^4} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(22)$$

وبقسمة (21) على (22) :

$$\therefore \frac{\dot{r}^2}{\dot{\theta}^2} = (\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}})^2 = \frac{(\frac{dr}{dt})^2}{(\frac{d\theta}{dt})^2} = (\frac{dr}{d\theta})^2 = \frac{-\frac{h^2}{r^2} + \frac{2\gamma}{r} + c}{\frac{h^2}{r^4}}$$

$$\therefore (\frac{dr}{d\theta})^2 = \frac{r^4}{h^2}[-\frac{h^2}{r^2} + \frac{2\gamma}{r} + c] = \frac{c}{h^2}r^4 + \frac{2\gamma}{h^2}r^3 - r^2 = \alpha^2 r^4 + 2\beta r^3 - r^2$$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\alpha^2 r^4 + 2\beta r^3 - r^2} \qquad \alpha^2 = \frac{c}{h^2}$$

$$\therefore d\theta = \frac{dr}{\sqrt{\alpha^2 r^4 + 2\beta r^3 - r^2}} \qquad \beta = \frac{\gamma}{h^2}$$

لإيجاد هذا التكامل : نضع $u = \frac{1}{r} \rightarrow r = \frac{1}{u} \rightarrow dr = \frac{-1}{u^2}du$

$$\therefore d\theta = \frac{-du}{u^2\sqrt{\frac{\alpha^2}{u^4}+2\beta(\frac{1}{u^3})-\frac{1}{u^2}}}$$

$$= \frac{-du}{\sqrt{\alpha^2+2\beta u-u^2}} = \frac{-du}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-(u-\beta)^2}}$$

بإكمال المربع داخل الجذر ، و بوضع $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$:

$$\therefore d\theta = \frac{-du}{\sqrt{\delta^2-(u-\beta)^2}}$$

و بتكامل الطرفين :

$$\therefore \theta + \varepsilon = \cos^{-1}(\frac{u-\beta}{\delta}) \rightarrow \cos(\theta+\varepsilon) = \frac{u-\beta}{\delta} \quad \Big| \quad \varepsilon \text{ ثابت}$$

$$\therefore u = \beta + \delta\cos(\theta+\varepsilon) \rightarrow r = \frac{1}{u} = \frac{1}{\beta+\delta\cos(\theta+\varepsilon)} = \frac{1/\beta}{1+\frac{\delta\cos(\theta+\varepsilon)}{\beta}}$$

$$\therefore r = \frac{\ell}{1+e\cos(\theta+\varepsilon)}$$ وهي معادلة مسار الكواكب

(ومن الواضح أنها معادلة قطع ناقص) ، حيث : $\frac{1}{\beta} = \ell, \frac{\delta}{\beta} = e$

<u>مسألة أخرى:</u> أثبت أن سرعة الكوكب في مساره حول الشمس في المسألة السابقة تعطى بالعلاقة : $v^2 = \gamma(\frac{2}{r}-\frac{1}{a})$

حيث a نصف المحور الأكبر للمسار (القطع الناقص) .

<u>الحل :</u> من العلاقتين (22) و (21)

$$\therefore \dot{r}^2 = -\frac{h^2}{r^2}+\frac{2\gamma}{r}+c \;\_\_\_\_ (21) \quad \text{و} \quad \dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r^4} \;\_\_\_\_ (22)$$

و بالتعويض في معادلة السرعة :

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \left(\frac{-h^2}{r^2} + \frac{2\gamma}{r} + c\right) + r^2\left(\frac{h^2}{r^4}\right)$$

$$= \cancel{\frac{-h^2}{r^2}} + \frac{2\gamma}{r} + c + \cancel{\frac{h^2}{r^2}} = \frac{2\gamma}{r} + c \quad \_\_(23)$$

ولإيجاد c : من خواص القطع الناقص :

$$\ell = \frac{b^2}{a} \quad \text{و} \quad e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$$

حيث b ، a هما نصفا المحور الأكبر و الأصغر للقطع

و من المسألة السابقة :

$$\ell = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma/h^2} = \frac{h^2}{\gamma}$$

$$\therefore \frac{h^2}{\gamma} = \frac{b^2}{a} \qquad \_\_\_\_\_\_(24)$$

$$e = \frac{\delta}{\beta} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \sqrt{1 + \frac{ch^2}{\gamma^2}} \qquad \Bigg| \quad \alpha^2 = \frac{c}{h^2}, \quad \beta = \frac{\gamma}{h^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \longrightarrow \frac{ch^2}{\gamma^2} = -\frac{b^2}{a^2} \qquad \_\_\_\_\_\_(25)$$

من (25) و (24) بالقسمة :

$$c = -\frac{\gamma}{a} \longleftarrow \text{و منها} \qquad \therefore a = -\frac{\gamma}{c}$$

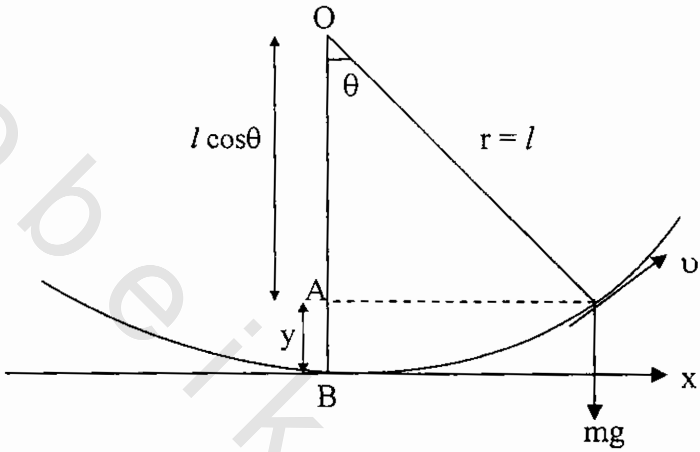
و بالتعويض في (23) :

$$v^2 = \left(\frac{2\gamma}{r} - \frac{\gamma}{a}\right) = \gamma\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

و هو المطلوب .

مثال (١١): دراسة البندول البسيط كمنظومة ميكانيكية .

يتكون البندول البسيط من :



كتلة m معلقة في طرف خيط طوله l مثبت طرفه الآخر في نقطة ثابتة O .

المطلوب :

(١) إيجاد دالة لاجرانج لحركة البندول .

(٢) تطبيق معادلات لاجرانج للحصول على معادلة حركة البندول بالصورة :

$$\ddot{\theta} + w^2 \sin\theta = 0$$

حيث θ هي الزاوية التي يصنعها الخيط مع الرأسي .

$w = \sqrt{g/\ell}$ ، g عجلة الجاذبية .

(٣) إيجاد معادلة حركة البندول في حالة الذبذبات الصغيرة (حيث θ صغيرة) والزمن الدوري للحركة ، و إثبات أن : الحل العام لمعادلة الحركة هو $\theta = \theta_0 \cos wt$ حيث θ_0 هي قيمة θ في بدء الحركة

الحل :

١) إيجاد دالة لاجرانج :

$$L = T - u \qquad \text{\_\_\_\_\_} (1)$$

لإيجاد T : نستخدم الإحداثيات القطبية (r,θ) حيث $r = \ell = const$

وهذا يعني أن الإحداثيات q يمثلها هنا الزاوية θ فقط أي أن $q = \theta$

وحيث أن حركة البندول تتم في دائرة فتكون السرعة في اتجاه المماس و قيمتها

$$v = r\dot{\theta} = \ell\dot{\theta}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \qquad \_\_\_\_\_ (2)$$

لإيجاد u : نأخذ المستوى الأفقي المار بأسفل نقطة **(B)** مستوى للقياس ، فتكون المسافة الرأسية التي تحركتها الكتلة هي :

$$y = AB = OB - OA = \ell - \ell\cos\theta = \ell(1-\cos\theta)$$

و تصبح طاقة الجهد :

$$u = mg \cdot y = mgl(1-\cos\theta) \qquad \_\_\_\_\_ (3)$$

بالتعويض من (3) , (2) في (1) نحصل عل دالة لاجرانج بالصورة:

$$\therefore L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta) \qquad \_\_\_\_\_ (4)$$

(٢) إيجاد معادلة حركة البندول :

باستخدام معادلات لاجرانج :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = 0 \qquad \text{و} \qquad q = \theta$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \qquad \_\_\_\_\_ (5)$$

ومن (4) :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl(\sin\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{\cancel{2}}m\ell^2(\cancel{2}\dot{\theta}) = m\ell^2\dot{\theta}$$

و بالتعويض في (5) :

$$\frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) - (-mg\ell\sin\theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) - (-mg\ell\sin\theta) = 0$$

بالقسمة على $m\ell^2$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

وبأخذ : $w = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \longrightarrow w^2 = \frac{g}{\ell}$

$$\ddot{\theta} + w^2 \sin\theta = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_ (6)$$

وهى معادلة حركة البندول المطلوبة .

(٣) دراسة الذبذبات الصغيرة :

هي الذبذبات التي تكون فيها θ صغيرة جدا وهذا يعنى أن $\sin\theta \cong \theta$

وتصبح معادلة الحركة [المعادلة (6)] بالصورة :

$$\ddot{\theta} = -w^2\theta \longrightarrow \ddot{\theta} + w^2\theta = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_ (7)$$

وهى معادلة الحركة للذبذبات الصغيرة ، وتمثل حركة توافقية بسيطة ، تتم في زمن دوري قدره :

$$\tau = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \_\_\_\_\_\_ (8)$$

<u>ولإثبات أن الحل العام للمعادلة (7) هو</u> $\theta = \theta_0 \cos wt$:

من المعلوم أن الحل للمعادلة (7) هو:

$$\theta = A\cos wt + B\sin wt \qquad \_\_\_\_\_\_ (9)$$

حيث B و A ثابتان ، ولإيجادهما :

بتفاضل (9) بالنسبة للزمن :

$$\dot{\theta} = -w\,A\sin wt + w\,B\cos wt \qquad \_\_\_ (10)$$

ومن الشروط الابتدائية للمسألة :

في البداية : كانت الكتلة m ساكنة ثم أزيحت لكي تتحرك :

$$\therefore t = 0 \ , \ \theta = \theta_0 \quad , \quad \dot{\theta} = w = 0$$

w هي السرعة الزاوية و θ_0 هي قيمة θ في بدء الحركة .

بالتعويض في (10) و (9) :

$$\theta_0 = A\cos 0 + B\sin 0 = A$$

$$\therefore A = \theta_0$$

$$0 = -wA\sin 0 + wB\cos 0 = wB$$

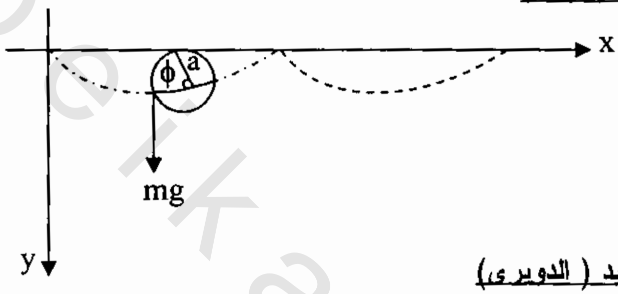
$$\therefore B = 0$$

ويصبح الحل العام (9) بالصورة :

$$\theta = \theta_0 \cos wt$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(١٢) : البندول السيكلويدى</u>



<u>يعرف منحنى السيكلويد (الدويرى)</u>

" بأنه مسار نقطة على محيط دائرة نصف قطرها a تتدحرج في اتجاه محور x " .

و يتكون البندول السيكلويدى من جسيم كتلته m ينزلق على سلك أملس على شكل منحنى السيكلويد.

المعادلات البارامترية لمنحنى السيكلويد هي: $x = a(\phi - \sin\phi)\,,\, y = a(1 - \cos\phi)$

حيث : $0 \le \phi \le 2\pi$ هي البارامتر

المطلوب في المثال :

(i) إيجاد دالة لاجرانج للبندول .

(ii) تطبيق معادلات لاجرانج لإيجاد معادلة حركة البندول بالصورة :

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \frac{g}{a})\cot\frac{\phi}{2} = 0$$

(iii) إذا كانت $u = \cos\frac{\phi}{2}$ فاثبت أن معادلة الحركة السابق تكافئ معادلة حركة توافقية بسيطة بالصورة : $\ddot{u} = -\omega^2 u$

حيث $\omega = \sqrt{g/4a}$ و من ذلك أوجد الزمن الدوري للحركة .

الحـــل :

(i) إيجاد دالة لاجرانج :

$$L = T - u \qquad \_\_\_\_\_\_\_ (1)$$

لإيجاد **T** :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

و لكن : من معادلات البندول السيكلويدي :

$$x = a(\phi - \sin\phi)$$

$$\therefore \dot{x} = a(\dot{\phi} - \cos\phi.\dot{\phi}) = a\dot{\phi}(1 - \cos\phi)$$

$$y = a(1 - \cos\phi)$$

$$\therefore \dot{y} = a(0 + \sin\phi.\dot{\phi}) = a\dot{\phi}\sin\phi$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m[a^2\dot{\phi}^2(1 - \cos\phi)^2 + a^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi]$$

$$= \frac{1}{2} ma^2\dot{\phi}^2(1 - 2\cos\phi + 1) = ma^2\dot{\phi}^2(1 - \cos\phi)$$

لإيجاد **u** : نختار مستو للقياس هو المستوى الأفقي المار بمحور x

$$u = -mg.y = -mga(1 - \cos\phi)$$

و تصبح دالة لاجرانج :

$$L = ma^2\dot{\phi}^2(1 - \cos\phi) + mga(1 - \cos\phi) \qquad \_\_\_\_ (2)$$

(ii) تطبيق معادلات لاجرانج لإيجاد معادلة الحركة للبندول :

في هذه المسألة : المتغير الوحيد هو البارامتر ϕ

$$\therefore q = \phi$$

وتكون معادلة لاجرانج بالصورة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \phi}\right) = 0 \qquad \_\_\_\_ (3)$$

و من (2) :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2ma^2\dot{\phi}(1 - \cos\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = ma^2\dot{\phi}^2 \sin\phi + mga\sin\phi$$

بالتعويض في (3) :

$$\frac{d}{dt}[2ma^2\dot{\phi}(1-\cos\phi)] - [ma^2\dot{\phi}^2 \sin\phi + mga\sin\phi] = 0$$

بالقسمة على $2ma^2$:

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{\phi}(1-\cos\phi)\right] - \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\sin\phi + \frac{g}{2a}\sin\phi\right] = 0$$

$$\therefore \dot{\phi}(\sin\phi.\dot{\phi}) + \ddot{\phi}(1-\cos\phi) - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\sin\phi - \frac{g}{2a}\sin\phi = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\sin\phi + \ddot{\phi}(1-\cos\phi) - \frac{g}{2a}\sin\phi = 0$$

بالقسمة على $\sin\phi$:

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \ddot{\phi}\frac{1-\cos\phi}{\sin\phi} - \frac{g}{2a} = 0 \qquad \_\_\_\_(4)$$

و لكن :

$$\frac{1-\cos\phi}{\sin\phi} = \tan\frac{\phi}{2}$$

$$\left[\frac{1-\cos\phi}{\sin\phi} = \frac{2\sin^2 \phi/2}{2\sin\phi/2\,\cos\phi/2} = \frac{\sin\phi/2}{\cos\phi/2} = \tan\frac{\phi}{2}\right]$$

بالتعويض في (4):

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \ddot{\phi}\tan\frac{\phi}{2} - \frac{g}{2a} = 0$$

بالضرب في $\cot\frac{\phi}{2}$ مع ملاحظة أن $\tan\frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2} = 1$:

$$\therefore \ddot{\phi} + \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \frac{g}{a})\cot\frac{\phi}{2} = 0 \qquad \_\_\_\_(5)$$

و هي معادلة حركة البندول السيكلويدى المطلوبة .

(iii) إثبات أن معادلة حركة البندول [المعادلة (5)] تكــافئ المعادلــة $\ddot{u} = -\omega^2 u$

حيث $u = \cos\frac{\phi}{2}$.

بأخذ : $u = \cos\frac{\phi}{2} \longleftarrow \dot{u} = -\sin\frac{\phi}{2}\cdot(\frac{\dot{\phi}}{2})$

$$= -\frac{1}{2}\dot{\phi}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\ddot{u} = -\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}\cdot\cos\frac{\phi}{2}\cdot\frac{\dot{\phi}}{2} + \ddot{\phi}\sin\frac{\phi}{2}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\cdot\cos\frac{\phi}{2} + \ddot{\phi}\sin\frac{\phi}{2}\right]$$

بالتعويض في المعادلة $\ddot{u} = -\omega^2 u$ أو $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ نحصل على :

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\cos\frac{\phi}{2} + \ddot{\phi}\sin\frac{\phi}{2}\right] + \omega^2\cos\frac{\phi}{2} = 0$$

بالقسمة على $-\frac{1}{2}\sin\frac{\phi}{2}$:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\cot\frac{\phi}{2} + \ddot{\phi} - 2\omega^2\cot\frac{\phi}{2} = 0$$

$$\therefore\ \ddot{\phi} + \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - 4\omega^2)\cot\frac{\phi}{2} = 0$$

وبأخذ $\omega^2 = \frac{g}{4a}$ (في رأس المسألة) :

$$\therefore\ \ddot{\phi} + \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \frac{g}{a})\cot\frac{\phi}{2} = 0$$

وهى نفس المعادلة (5) وهذا يعني أنها تكافئ المعادلــة $\ddot{u} + \omega^2 u$ أو $\ddot{u} = -\omega^2 u$

وهي معادلة تمثل حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري

$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ حيث $\omega = \sqrt{g/4a}$

$$\therefore\ \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{g/4a}} = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

وهو الزمن الدوري لحركة البندول السيكلويدى .

مثال(١٣): المتذبذب التوافقي المتجانس (الأيزوتروبي)

مقدمة : المتذبذب التوافقي البسيط :

" هو عبارة عن جسيم كتلته m يتحرك حركة توافقية بسيطة في بعد واحد (x) تحت تأثير قوة $F = -kx$ حيث k ثابت

طاقة الحركة : $$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

طاقة الجهد: $$u = \frac{1}{2}kx^2$$

[طاقة الجهد هي الشغل المبذول عكس اتجاه قوة الحركة

$$[u = -\int_0^x F dx = -\int_0^x(-kx)dx = k\int_0^x x dx = \frac{1}{2}kx^2$$

المتذبذب التوافقي المتجانس : هو متذبذب توافقي في الفراغ (أي في ٣ أبعاد)

طاقة الحركة :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad \text{\_\_\_\_\_}(1)$$

طاقة الجهد :

$$u = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{\_\_\_\_\_}(2)$$

المطلوب في المثال :

(i) إيجاد دالة لاجرانج للمتذبذب .

(ii) تطبيق معادلات لاجرانج لإيجاد معادلات حركة المتذبذب .

(iii) حل معادلات الحركة و الحصول على الحل بالصورة :

$$r = r_0\cos(\omega t + \varepsilon_i)$$

حيث :

$$r = (x, y, z) \quad , \quad r_0 = (x_0, y_0, z_0), \varepsilon_i = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

(iv) إثبات قانون ثبوت الطاقة للمتذبذب .

الحـل :

(i) إيجاد دالة لاجرانج للمتذبذب :

من تعريف دالة لاجرانج و استخدام العلاقتين (2) و (1)

$$\therefore L = T - u = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \qquad (3)$$

(ii) تطبيق معادلات لاجرانج :

لدينا ٣ إحداثيات معممة $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$

∴ يكون لدينا ٣ معادلات من معادلات لاجرانج :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \qquad (6)$$

وباستخدام العلاقة (3):

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - (-kx) = 0 \rightarrow m\frac{d\dot{x}}{dt} + kx = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) - (-ky) = 0 \rightarrow m\frac{d\dot{y}}{dt} + ky = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) - (-kz) = 0 \rightarrow m\frac{d\dot{z}}{dt} + kz = 0 \qquad (9)$$

من (7) بالقسمة على m :

$$\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\therefore \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (10)$$

حيث : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \longleftarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$

و بالمثل من (9) و (8) :

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad \text{\_\_\_\_} (11)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \qquad \text{\_\_\_} (12)$$

المعادلات (12) و (11) و (10) هي معادلات الحركة للمتذبذب المتجانس .

(iii) <u>حل معادلات الحركة :</u> [أي إيجاد x,y,z]

من (10) :

$$\frac{d\dot{x}}{dt} + \omega^2 x = 0$$

بالضرب في $\dot{x}$:

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} + \omega^2 x\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} + \omega^2 x\frac{dx}{dt} = 0 \qquad \Big| \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \dot{x}d\dot{x} + \omega^2 x dx = 0 \qquad \text{\_\_\_\_} (13)$$

$$\therefore \dot{x}d\dot{x} = -\omega^2 x dx$$

وبالمثل من (12) و (11) :

$$\dot{y}d\dot{y} = -\omega^2 y dy \qquad \text{\_\_\_\_} (14)$$

$$\dot{z}d\dot{z} = -\omega^2 z dz \qquad \text{\_\_\_\_} (15)$$

وبتكامل المعادلات (15) و (14) و (13) نحصل على :

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = -\omega^2(\frac{1}{2}x^2) + \text{const}$$

بالضرب في 2 :

$$\therefore \dot{x}^2 = -\omega^2 x^2 + c_1 \qquad \text{\_\_\_\_} (16)$$

و بالمثل يمكن إثبات أن:

$$\dot{y}^2 = -\omega^2 y^2 + c_2 \qquad \text{\_\_\_\_} (17)$$

$$\dot{z}^2 = -\omega^2 z^2 + c_3 \qquad \text{\_\_\_\_} (18)$$

ولإيجاد c_1, c_2, c_3 :

في البداية: " نعتبر أن الجسيم تحرك من السكون من النقطة (x_0, y_0, z_0) "

$$\dot{x} = 0 \quad , \quad \dot{y} = 0 \quad , \quad \dot{z} = 0$$

$$\mathbf{x = x_0} \quad , \quad \mathbf{y = y_0} \quad , \quad \mathbf{z = z_0}$$

فمن (18) و (17) و (16):

$$0 = -\omega^2 x_0^{\ 2} + c_1 \longrightarrow c_1 = \omega^2 x_0^{\ 2}$$

$$0 = -\omega^2 y_0^{\ 2} + c_2 \longrightarrow c_2 = \omega^2 y_0^{\ 2}$$

$$0 = -\omega^2 z_0^{\ 2} + c_3 \longrightarrow c_3 = \omega^2 z_0^{\ 2}$$

و تصبح المعادلات (18) و (17) و (16) بالصوره الاتية التي تمثل التكامل الأول :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \omega^2 (x_0^{\ 2} - x^2) \qquad &(19) \\ \dot{y}^2 &= \omega^2 (y_0^{\ 2} - y^2) \qquad &(20) \\ \dot{z}^2 &= \omega^2 (z_0^{\ 2} - z^2) \qquad &(21) \end{aligned}\right\}$$

و لإيجاد التكاملات الثانية :

من (19) :

$$\dot{x}^2 = \omega^2 (x_0^{\ 2} - x^2)$$

$$\therefore \ \dot{x} = \pm\omega^2 \sqrt{x_0^{\ 2} - x^2} \qquad (22)$$

نأخذ إشارة – لأنه في الحركة التوافقية تكون x متناقصة :

$$\dot{x} = -\omega\sqrt{x_0^{\ 2} - x^2} = \frac{dx}{dt} \qquad (23)$$

و بالمثل :

$$\dot{y} = -\omega\sqrt{y_0^{\ 2} - y^2} = \frac{dy}{dt} \qquad (24)$$

$$\dot{z} = -\omega\sqrt{z_0^{\ 2} - z^2} = \frac{dz}{dt} \qquad (24)$$

و من (22) بالتكامل بفصل المتغيرات :

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{x_0^{\ 2} - x^2}} = \int \omega dt$$

حيث ε_1 ثابت التكامل :

$$\therefore \cos^{-1}\frac{x}{x_0}=\omega t+\varepsilon_1$$

$$\therefore \frac{x}{x_0}=\cos(\omega t+\varepsilon_1)$$

$$\therefore x=x_0\cos(\omega t+\varepsilon_1) \qquad \_\_\_\_\_\_ (25)$$

و بالمثل :

$$y=y_0\cos(\omega t+\varepsilon_2) \qquad \_\_\_\_\_\_ (26)$$

$$z=z_0\cos(\omega t+\varepsilon_3) \qquad \_\_\_\_\_\_ (27)$$

المعادلات (27) و (26) و (25) هي معادلات الحركة و يمكن جمعها في معادلة واحدة

هي :

$$r=r_0\cos(\omega t+\varepsilon_i)$$

حيث :

$$r=(x,y,z) \quad , \quad r_0=(x_0,y_0,z_0)$$

$$\varepsilon_i=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$$

و هو المطلوب الثالث .

(iv) <u>إثبات قانون ثبوت (أو حفظ) الطاقة</u> :

الطاقة الكلية :

$$E=T+u=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$$

بالتعويض عن $\dot{x}^2,\dot{y}^2,\dot{z}^2$ من (21) ، (20) ، (19) ، وعن k من العلاقة

$$\omega^2=\frac{k}{m} \quad \text{حيث} \quad k=m\omega^2$$

$$\therefore E=\frac{1}{2}m\omega^2[(x_0{}^2-x^2)+(y_0{}^2-y^2)+(z_0{}^2-z^2)]$$
$$+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)$$
$$=\frac{1}{2}m\omega^2[(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2)-\cancel{(x^2+y^2}+z^2)+\cancel{(x^2+y^2}+z^2)]$$
$$=\frac{1}{2}m\omega^2[(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2)]$$

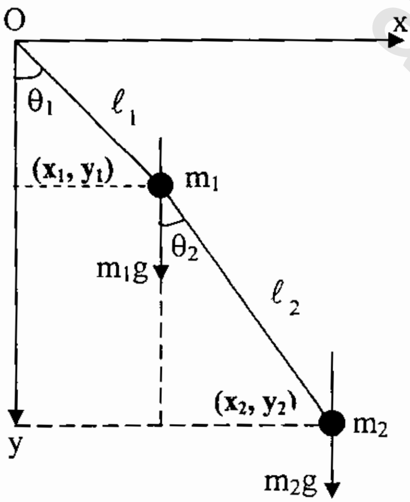
ووحيث أن m,ω ثابتان ، وكذلك فإن :

x_0, y_0, z_0 هي قيم x,y,z في بدء الحركة وهي قيم ثابتة .

$\therefore E = \text{const}$

∴ الطاقة الكلية للمتذبذب هي كمية ثابتة .

وهو قانون ثبوت الطاقة .



<u>مثال(١٤): حركة البندول المزدوج</u> :

يتكون البندول المزدوج من كتلتين $m_1,\ m_2$ متصلتين معاً بسلك (أو قضيب خفيف) طوله ℓ_2 ، و تتصل m_1 بسلك آخر طوله ℓ_1 يتحرك حول نقطة ثابتة O

θ_1, θ_2 هما زاويتا ميل ℓ_1, ℓ_2 على الرأسي.

إحداثيات m_1, m_2 هي $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

حيث:

$$x_1 = \ell_1 \sin\theta_1$$
$$y_1 = \ell_1 \cos\theta_1$$
$$x_2 = x_1 + \ell_2 \sin\theta_2 = \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2$$
$$y_2 = y_1 + \ell_2 \cos\theta_2 = \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2$$

<u>المطلوب في المثال:</u>

إذا تحركت المجموعة المكونة للبندول بحرية في مستو رأسي فالمطلوب هو :

(i) إيجاد القوى المعممة للمجموعة (Q_j).

(ii) إيجاد دالة لاجرانج (L).

(iii) تطبيق معادلات لاجرانج لإيجاد معادلات حركة المجموعة و ذلك بطريقتين مختلفتين .

(iv) دراسة الحالة الخاصة عندما $\ell_1 = \ell_2$ (تساوي الطولين)، $m_1 = m_2$ (تساوي الكتلتين)

<u>الحـل:</u> الإحداثيات المعممة هنا هي: $q_1 = \theta_1 \ , \ q_2 = \theta_2$

(لأن الإحداثيات x_1, x_2, y_1, y_2 كلها بدلالة (θ_1, θ_2)

ولذلك يكون لدينا قوتان معممتان : Q_1, Q_2

$$Q_j = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

$$\therefore Q_1 = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \sum_{k=1,2} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \theta_1} = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_1} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_1} \quad \_\_\_\_(1)$$

$$Q_2 = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} = \sum_{k=1,2} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \theta_2} = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_2} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_2} \quad \_\_\_\_(2)$$

<u>$\vec{F}_1, \vec{F}_2$</u> : هما القوتان المؤثرتان على الكتلتين m_1, m_2:

$$\vec{F}_1 = m_1 g \hat{j} \quad , \quad \vec{F}_2 = m_2 g \hat{j}$$

(محور y إلى أسفل مع الوزن mg) .

<u>$\vec{r}_1, \vec{r}_2$</u> : هما متجها موضع الكتلتين m_1, m_2 :

$$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} = \ell_1 \sin\theta_1 \hat{i} + \ell_1 \cos\theta_1 \hat{j} \quad \_\_\_\_(3)$$

$$\vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} = (\ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2)\hat{i} + (\ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2)\hat{j} \quad \_\_\_\_(4)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_1} = \ell_1 \cos\theta_1 \hat{i} - \ell_1 \sin\theta_1 \hat{j} \quad , \quad \therefore \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_1} = \ell_1 \cos\theta_1 \hat{i} - \ell_1 \sin\theta_1 \hat{j}$$

$$, \quad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_2} = 0 \quad \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_2} = \ell_2 \cos\theta_2 \hat{i} - \ell_2 \sin\theta_2 \hat{j}$$

بالتعويض في (2) ، (1) نحصل على :

$$Q_1 = \left(m_1 g\hat{j}\right)\cdot\left(\ell_1 \cos\theta_1 \hat{i} - \ell_1 \sin\theta_1 \hat{j}\right) + \left(m_2 g\hat{j}\right)\cdot\left(\ell_1 \cos\theta_1 \hat{i} - \ell_1 \sin\theta_1 \hat{j}\right)$$

$$= -m_1 g\ell_1 \sin\theta_1 - m_2 g\ell_1 \sin\theta_1 = -(m_1 + m_2) g\ell_1 \sin\theta_1 \qquad \_\_\_\_(5)$$

$$Q_2 = \left(m_1 g\hat{j}\right)\cdot(0) + \left(m_2 g\hat{j}\right)\cdot\left(\ell_2 \cos\theta_2 \hat{i} - \ell_2 \sin\theta_2 \hat{j}\right)$$

$$= -m_2 g\ell_2 \sin\theta_2 \qquad \_\_\_\_\_(6)$$

وهو المطلوب أولاً .

ثانياً : إيجاد دالة لاجرانج :

$$L = T - u$$

طاقة الحركة (T) :

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \_\_(7)$$

و لكن من معادلات x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$\dot{x}_1 = \ell_1 \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1$$
$$\dot{y}_1 = -\ell_1 \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1$$
$$\dot{x}_2 = \ell_1 \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \ell_2 \cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$$
$$\dot{y}_2 = -\ell_1 \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 - \ell_2 \sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$$

بالتعويض في (7) و الاختصار نحصل على:

$$T = \frac{1}{2}m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \_\_(8)$$

طاقة الجهد (u) : نأخذ المستوى الأفقي المار بنقطة O مستوى للقياس .

$$\therefore u = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2$$

بالتعويض عن y_1, y_2 نحصل على النتيجة:

$$u = -(m_1 + m_2) g\ell_1 \cos\theta_1 - m_2 g\ell_2 \cos\theta_2 \qquad \_\_\_\_\_(9)$$

و تصبح دالة لاجرانج بالصورة الآتية :

$$L = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right.$$
$$\left. + (m_1 + m_2) g \ell_1 \cos\theta_1 + m_2 g \ell_2 \cos\theta_2 \right] \quad \_\_\_\_ (10)$$

وهو المطلوب ثانياً .

ثالثاً : إيجاد معادلات حركة البندول :

بتطبيق معادلات لاجرانج حيث $q_j = \theta_1, \theta_2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad \_\_\_\_ (11)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad \_\_\_\_ (12)$$

و لكن من (10) :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g \ell_2 \sin\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 \ell_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

بالتعويض في (12) ، (11) :

$$\frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$
$$+ m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin\theta_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$
$$- m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \ell_2 \sin\theta_2 = 0$$

و بعد إجراء التفاضل و الاختصار نحصل على معادلتي حركة البندول المزدوج بالصورة الآتية :

$$(m_1+m_2)\ell_1^2\ddot{\theta}_1+m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$+m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+(m_1+m_2)g\ell_1\sin\theta_1=0 \quad \_\_\_\_ (13)$$

$$m_2\ell_2^2\ddot{\theta}_2+m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$-m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+m_2g\ell_2\sin\theta_2=0 \quad \_\_\_ (14)$$

<u>ملحوظة</u>: كان من الممكن إيجاد المعادلتين (14) ، (13) بتطبيـق معـادلات لاجـرانج للمنظومات الهولونومية بالصورة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_1}=Q_1 \quad \_\_\_\_\_ (15)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_2}=Q_2 \quad \_\_\_\_\_ (16)$$

حيث Q_1, Q_2 موجودتان في (6) ، (5) و التفاضلات :

$\frac{\partial T}{\partial \theta_1},\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1},\frac{\partial T}{\partial \theta_2},\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}$ يمكن إيجادها من (8)

<u>المطلوب الرابع:</u>

في الحالة الخاصة عندما:

$$\ell_1=\ell_2=\ell \qquad , \qquad m_1=m_2=m$$

فإن معادلتي الحركة (14)، (13) تصبحان:

$$2\ell\ddot{\theta}_1+\ell\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\ell\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+2g\sin\theta_1=0$$
$$\ell\ddot{\theta}_2+\ell\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-\ell\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin\theta_2=0$$

أو بالصورة :

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = -\frac{g}{\ell}\sin\theta_1 \quad \_\_\_\_ (17)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = -\frac{g}{\ell}\sin\theta_2 \quad \_\_\_\_ (18)$$

و هو المطلوب .

<u>مثال(١٥)</u> : (أ) استخدم معادلات لاجرانج لكتابة معادلات الحركة لجسيم كتلته m يتحرك في مجال جهد $V(r,\theta,\phi)$ في الإحداثيات القطبية الكروية (r,θ,ϕ).

(ب) استخدم معادلات لاجرانج لكتابة معادلات الحركة لجسيم كتلته m يتحرك في مجال جهد $V(\rho,\phi,z)$ في الإحداثيات الأسطوانية (ρ,ϕ,z).

<u>الحل:</u>

<u>الجزء(أ):</u> الحركة في الإحداثيات القطبية الكروية (r,θ,ϕ):

$$x = r\cos\theta\,\sin\phi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad , \quad z = r\cos\phi$$

نوجد $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ثم نعوض في علاقة السرعة وبعد الإختصار نحصل على:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2$$

وهي صورة السرعة في الإحداثيات القطبية الكروية.

طاقة الحركة:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)$$

طاقة الجهد:

$$V = V(r,\theta,\phi)$$

دالة لاجرانج:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) - V(r,\theta,\phi)$$

معادلات لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

وبالتعويض نحصل على العلاقات الآتية:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r})-(mr\dot{\theta}^2+mr\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)+\frac{\partial V}{\partial r}=0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\ \dot{\theta}^2)-(mr^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)+\frac{\partial V}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\theta\,\dot{\phi})+\frac{\partial V}{\partial \phi}=0$$

وهي معادلات الحركة المطلوبة، ويمكن كتابتها بالصورة:

$$m[(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)-r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2]=-\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$m[\frac{d}{dt}(r^2\ \dot{\theta})-r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2]=-\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$m\frac{d}{dt}[r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}]=-\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

وهو المطلوب.

<u>الجزء(ب)</u>: الحركة في الإحداثيات الأسطوانية (ρ,ϕ,z)

$$x=\rho\cos\phi \quad , \quad y=\rho\sin\phi \ , \quad z=z$$

$$\dot{x}=\dot{\rho}\cos\phi-\rho\sin\phi\,\dot{\phi} \quad , \quad \dot{y}=\dot{\rho}\sin\phi+\rho\cos\phi\,\dot{\phi} \ , \quad \dot{z}=\dot{z}$$

السرعة:

$$\vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$$

$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2$$

وهي صورة السرعة في الإحداثيات الاسطوانية.

طاقة الحركة:

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2)$$

طاقة الجهد

$$V=V(\rho,\phi,z)$$

دالة لاجرانج:

$$L=T-V=\frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2]-V(\rho,\phi,\ z)$$

معادلات لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \rho}=0 \quad \rightarrow \quad m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)=-\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\,\dot{\phi})=-\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z})=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

ملحوظة: إذا كان الجسيم يتحرك في المستوى (xy) وكانت طاقة الجهد تعتمد فقط على المسافة من نقطة الأصل، فإن الجهد يعتمد فقط على ρ $(z=0)$ وتصبح معـادلات لاجرانج للحركة بالصورة:

$$m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)=-\frac{\partial V}{\partial \rho} \quad , \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\,\dot{\phi})=0$$

مثال(١٦): قذف جسيم في اتجاه أفقي على السطح الداخلي لنصف كرة ملساء محورها رأسي ورأسها لأسفل ، فإذا تم القذف في البداية من نقطة على مسافة زاوية θ_0 من أسفل نقطة :

(أ) أوجد دالة لاجرانج لحركة الجسيم .

(ب) اكتب معادلات لاجرانج و استخدمها في إيجاد معادلات حركة الجسيم .

(ج) أوجد تكاملات الحركة ، واثبت أن سرعة القذف الابتدائية الكافية لكي يصعد الجسيم حتى حافة النصف كرة هي $\sqrt{2ag\sec\theta_0}$

حيث a نصف قطر الكرة .

الحـل : نعلم أن مركبات السرعة في الإحداثيات القطبية الكروية تعطي بالعلاقات الآتية:

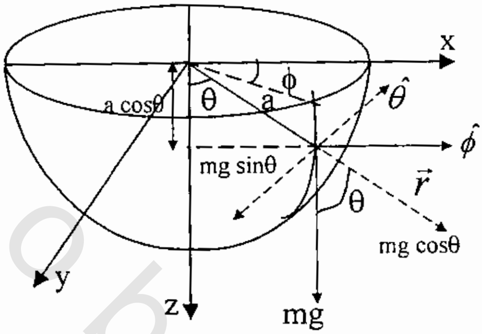
$$v_r=\dot{r} \quad , \quad v_\theta=r\dot{\theta} \quad , \quad v_\phi=r\sin\theta\cdot\dot{\phi}$$

و كحالة خاصة :

" إذا تحرك الجسيم على سطح كرة " فإن: $r=a \quad , \quad \dot{r}=0 \quad , \quad \ddot{r}=0$

و تصبح مركبات السرعة : $v_r=0 \quad , \quad v_\theta=a\dot{\theta} \quad , \quad v_\phi=a\sin\theta\cdot\dot{\phi}$

في المسألة :



توجد لدينا مركبتان فقط للسرعة

v_θ, v_ϕ فهناك إحداثيان عموميان

$q_1 = \theta, q_2 = \phi$

نأخذ المحاور كم هو مبين بالشكل :

طاقة الحركة:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_\theta^2 + v_\phi^2) = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + a^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) \qquad \_\_\_\_(1)$$

طاقة الجهد: نأخذ المستوى المار بمركز الكرة هو مستوى قياس الطاقة ، فيكون :

$$u = -w = -(mg\hat{k})\cdot(a\cos\theta\hat{k}) = -mga\cos\theta$$

فتكون دالة لاجرانج :

$$L = T - u$$

$$= \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + a^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) + mga\cos\theta \qquad \_\_\_\_(2)$$

ولكتابة معادلات لاجرانج :

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = m(a^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2) - mga\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = ma^2\sin^2\theta\cdot\dot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = 0$$

و تكون معادلات لاجرانج :

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$\therefore ma^2\ddot{\theta} - m(a^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2) + mga\sin\theta = 0$$

بالقسمة على ma^2 :

$$\therefore \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = -\frac{g}{a}\sin\theta \qquad \_\_\_\_ (I)$$

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(ma^2 \sin\theta \cdot \dot{\phi}) = 0$$

$$\therefore ma^2 \frac{d}{dt}(\sin^2\theta \cdot \dot{\phi}) = 0 \qquad \_\_\_\_ (II)$$

المعادلتان (II)، (I) هما معادلتا الحركة للجسيم .

<u>ولإيجاد تكاملات الحركة :</u> من (II) بالقسمة على ma^2 :

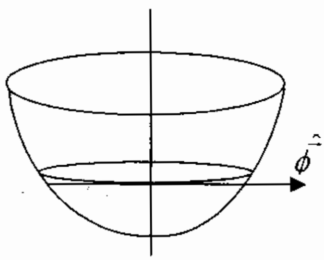
$$\therefore \frac{d}{dt}(\sin^2\theta \cdot \dot{\phi}) = 0$$

$$\therefore \sin^2\theta \cdot \dot{\phi} = \text{const} = C_1 \qquad \_\_\_\_ (3)$$

<u>و لإيجاد</u> c_1:

من الشروط الابتدائية للمسألة، حيث أن الجسيم قذف في البداية في اتجاه أفقي فتكـون

$\theta = \theta_0, \dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ و أيضاً $v_\phi = v_0$



$$\therefore v_0 = a\sin\theta_0\dot{\phi}_0 \quad \rightarrow \quad \sin\theta_0\dot{\phi}_0 = \frac{v_0}{a}$$

$$\sin^2\theta_0\dot{\phi}_0 = C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{v_0}{a}\sin\theta_0$$

بالتعويض في (3) :

$$\sin^2\theta_0\dot{\phi} = \frac{v_0}{a}\sin\theta_0$$

$$\therefore \dot{\phi} = \frac{v_0}{a}\left(\frac{\sin\theta_0}{\sin^2\theta}\right) \qquad \_\_\_\_ (4)$$

هذه المعادلة تمثل التكامل الأول للحركة .

<u>ولإيجاد التكامل الثاني :</u> بالتعويض من (4) في (I) :

$$\therefore \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{v_0\sin\theta_0}{a\sin^2\theta}\right)^2 = -\frac{g}{a}\sin\theta$$

$$\therefore \ddot{\theta} - \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{a^2}\left(\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\right) = -\frac{g}{a}\sin\theta$$

و بإجراء التكامل لهذه المعادلة نحصل على:

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{a^2}\left(-\frac{1}{2\sin^2\theta}\right) = \frac{g}{a}\cos\theta + \text{const.}$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 + \frac{v_0^2}{a^2}\frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta} = \frac{2g}{a}\cos\theta + C_2 \qquad \text{\_\_\_\_\_} (5)$$

ولإيجاد C_2 : في البداية $\dot{\theta} = 0, \theta = \theta_0$ (لأن السرعة كانت أفقية في اتجاه $\hat{\vec{\phi}}$)

$$\therefore C_2 = \frac{v_0^2}{a^2} - \frac{2g}{a}\cos\theta_0$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 + \frac{v_0^2}{a^2}\left(\frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta} - 1\right) = \frac{2g}{a}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{a^2\sin^2\theta}\left(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0\right) + \frac{2g}{a}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) \qquad \text{\_\_\_\_} (6)$$

المعادلة (6) تمثل التكامل الثاني للحركة.

ولإيجاد قيمة سرعة القذف v_0 اللازمة لجعل الجسيم يصل إلى حافة نصف الكرة فحيث أنه عند حافة نصف الكرة يكون $\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0$

فبالتعويض في المعادلة (6) :

$$0 = \frac{v_0^2}{a^2}(1 - \sin^2\theta_0) + \frac{2g}{a}(0 - \cos\theta_0)$$

$$= \frac{v_0^2}{a^2}\cos^2\theta_0 - \frac{2g}{a}\cos\theta_0$$

$$\therefore \frac{v_0^2}{a}\cos\theta_0 = 2g$$

$$\therefore v_0^2 = \frac{2ag}{\cos\theta_0}$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{2ag}{\cos\theta_0}} = \sqrt{2ag\sec\theta_0}$$

وهو المطلوب.

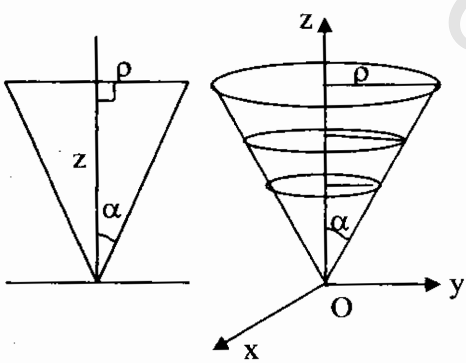
مثال(١٧) : تتحرك نقطة مادية على السطح الداخلي الأملس لمخروط دائري قائم ثابت محوره رأسي و رأسه لأسفل وزاوية رأسه 2α

(أ) أوجد دالة لاجرانج .

(ب) أوجد معادلات لاجرانج لحركة النقطة المادية .

(ج) و إذا بدأت النقطة حركتها من موضع على سطح المخروط على ارتفاع h فوق رأس المخروط بسرعة أفقية مقدارها $\sqrt{\frac{8}{3}gh}$

فأثبت أنها تمس خلال حركتها على التوالي دائرتين أفقيتين على أرتفاع h,2h فوق رأس المخروط .



الحل:

يتحدد موضع النقطة المادية بالإحداثيات الاسطوانية (ρ, ϕ, z)

فحيث أن زاوية الرأس 2α فتكون معادلة رأس المخروط (وهي معادلة القيد) هي:

$$\tan\alpha = \frac{\rho}{z}$$

$$\rho = z\tan\alpha$$

$$\rho = z\tan\alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (1)$$

وهي علاقة تربط بين ρ, z .

وبذلك فأن الإحداثيات العامة تقل بمقدار الوحدة و يصبح للنقطة المتحركة إحداثيان عامان فقط و بالتالي درجتان من درجات الحرية و يمكن اختيار هذان الإحداثيان إما (ρ,ϕ) أو (z,ϕ) . و لنختار هنا (z,ϕ) كاحداثيان عامان ، وذلك لأن المطلوب في المسألة هو إيجاد ارتفاعات معينة ، أي قيم معينة للاحداثي z ، كما نختار المستوى الأفقي المار برأس المخروط مستوى لقياس الطاقة .

<u>طاقة الحركة:</u>

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\rho = z\tan\alpha \qquad \therefore \dot{\rho} = \dot{z}\tan\alpha$$

$$\therefore \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2\tan^2\alpha + \dot{z}^2 = \dot{z}^2(1+\tan^2\alpha) = \dot{z}^2\sec^2\alpha$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2\sec^2\alpha + z^2\tan^2\alpha\cdot\dot{\phi}^2) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (1)$$

<u>طاقة الجهد :</u> $u = mgz$

<u>دالة لاجرانج :</u> $L = T - u = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2\sec^2\alpha + z^2\tan^2\alpha\cdot\dot{\phi}^2) - mgz$

<u>ولإيجاد معادلات لاجرانج</u> : لدينا معادلتان حيث أن لدينا إحداثيان عامان

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

حيث :

$$\frac{\partial L}{\partial z} = m\left(z\tan^2\alpha\dot{\phi}^2 - g\right) \quad ، \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}\sec^2\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mz^2\tan^2\alpha\dot{\phi}$$

وتصبح معادلات لاجرانج :

$$\ddot{z}\sec^2\alpha - z\dot{\phi}^2\tan^2\alpha + g = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

$$\frac{d}{dt}(z^2\dot{\phi}\tan^2\alpha) = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

المعادلتان (3) ، (2) هما معادلتا الحركة المطلوبتين .

و الآن : من (3) :

$$z^2\tan^2\alpha\dot{\phi} = \text{const} = C_1 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(4)$$

<u>**ولإيجاد**</u> C_1 : من الشروط الابتدائية للمسألة

السرعة الأفقية على ارتفاع h أي عندما كانت $z = h, \dot{z} = 0$ فإن :

$$(\rho\dot{\phi})_0 = (z\tan\alpha\dot{\phi})_0 = h\tan\alpha\dot{\phi}_0 = \sqrt{\frac{8}{3}gh}$$

$$\therefore C_1 = h^2\tan^2\alpha\dot{\phi}_0 = h(h\tan\alpha\dot{\phi}_0)\tan\alpha$$

$$= h(\sqrt{\frac{8}{3}gh})\tan\alpha = \sqrt{\frac{8}{3}gh^3}\tan\alpha$$

و بالتعويض في (4):

$$z^2\tan^2\alpha\dot{\phi} = \sqrt{\frac{8}{3}gh^3}\tan\alpha$$

$$\therefore z^2\tan\alpha\dot{\phi} = \sqrt{\frac{8}{3}gh^3}$$

$$\therefore \dot{\phi} = \frac{1}{z^2\tan\alpha}\sqrt{\frac{8}{3}gh^3} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(5)$$

المعادلة (5) هي التكامل الأول للحركة .

و **لإيجاد التكامل الثاني** : نعوض من (5) في (2) :

$$\ddot{z}\sec^2\alpha - \frac{1}{z^3}\left(\frac{8}{3}gh^3\right) + g = 0$$

و بالضرب في $2\dot{z}$ و التكامل نحصل على :

$$2\dot{z}\ddot{z}\sec^2\alpha - \frac{2\dot{z}}{z^3}\left(\frac{8}{3}gh^3\right) + 2g\dot{z} = 0$$

$$\therefore \dot{z}^2\sec^2\alpha + \frac{1}{z^2}\left(\frac{8}{3}gh^3\right) + 2gz = C_2$$

<u>و لإيجاد</u> C_2 : نستخدم الشروط الابتدائية للمسألة :

حيث $z = h, \dot{z} = 0$

$$\therefore C_2 = \frac{8}{3}gh + 2gh = \frac{14}{3}gh$$

و بالتعويض نحصل على:

$$\therefore \dot{z}^2\sec^2\alpha + \frac{1}{z^2}\left(\frac{8}{3}gh^3\right) + 2gz = \frac{14}{3}gh \qquad \text{\_\_\_\_\_} (6)$$

المعادلة (6) تمثل التكامل الثاني للحركة.

ولإيجاد متى تكون سرعة النقطة المادية أفقية و لا يكون لهما مركبة رأسية، نضع $\dot{z} = 0$ ، وتكون قيم z الناتجة هي تلك الارتفاعات التي تكون عندها السرعة أفقية .

فبوضع $\dot{z} = 0$ في (6) نحصل على

$$\frac{1}{z^2}\left(\frac{8}{3}gh^3\right) + 2gz = \frac{14}{3}gh$$

$$\therefore 3z^3 - 7z^2h + 4h^3 = 0 \qquad \therefore (z-h)(3z^2 - 3h - 4h^2) = 0$$

$$(z-h)(z-2h)(3z+2h) = 0$$

ومن تلك المعادلة نجد أن : $z = h, z = 2h, z = -\dfrac{2h}{3}$

القيمة الأخيرة $z = -\dfrac{2h}{3}$ مرفوضة

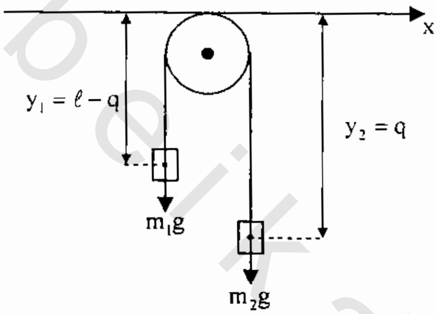
و على ذلك تكون السرعة أفقية أي أن الحركة تمس على التوالي الدائرتين الأفقيتين عند الارتفاعين $z = h, z = 2h$. وهو المطلوب .

<u>مثال(١٨)</u>: آلة أتود (Atwood Machine): تتكون آلة أتود من خيط عديم الكتلة طوله ℓ يمر خلال بكرة ملساء مثبته، وتوجد كتلة m_1 معلقة بأحد طرفي الخيط، وكتلة أخرى m_2 معلقة بالنهاية الأخرى للخيط بحيث $m_1 > m_2$، أوجد الآتي:

(أ) دالة لاجرانج لهذه المنظومة.

(ب) معادلة حركة الكتلة m_1 باستخدام معادلات لاجرانج.

<u>الحل:</u>



طول الخيط $= \ell =$ ثابت

لتكن q هي بعد الكتلة m_2 من أعلى نقطة في البكرة

(والتي يمر بها خط مبدأ القياس– محور x)

بعد الكتلة m_1 من هذا الخط هو: $\ell - q$

$$\therefore\ y_1 = \ell - q \quad , \quad y_2 = q$$

$$\dot{y}_1 = -\dot{q} \quad , \quad \dot{y}_2 = \dot{q}$$

طاقة الجهد:

$$V = -m_2 g\, q - m_1 g(\ell - q)$$

طاقة الحركة:

$$T = \frac{1}{2}m_1(-\dot{q})^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q})^2 = \frac{1}{2}\dot{q}^2(m_1 + m_2)$$

دالة لاجرانج:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\dot{q}^2(m_1 + m_2) + m_2 gq + m_1 g(\ell - q)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^2(m_1 + m_2) - gq(m_1 - m_2) + m_1 g\ell$$

معادلات لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\therefore\ (m_1 + m_2)\ddot{q} + g(m_1 - m_2) = 0$$

وهي معادلة الحركة ومنها نوجد العجلة بالصورة:

$$\ddot{q} = \frac{-g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

مثال(١٩) : كتلة m_1 تتدلى من نهاية خيط يمر على بكرة مثبتة (A) و عند الطرف الآخر للخيط توجد بكرة أخرى (B) مثبتة أيضا ، و عليها خيط يحمل في نهايتيه كتلتين m_2, m_3 ، فبإهمال كتلتي البكرتين :

(أ) أوجد دالة لاجرانج للمنظومة .

(ب) اكتب معادلات لاجرانج و منها أوجد المعادلات التفاضلية للحركة .

(ج) أوجد عجلة كل من الكتل الثلاث m_1, m_2, m_3.

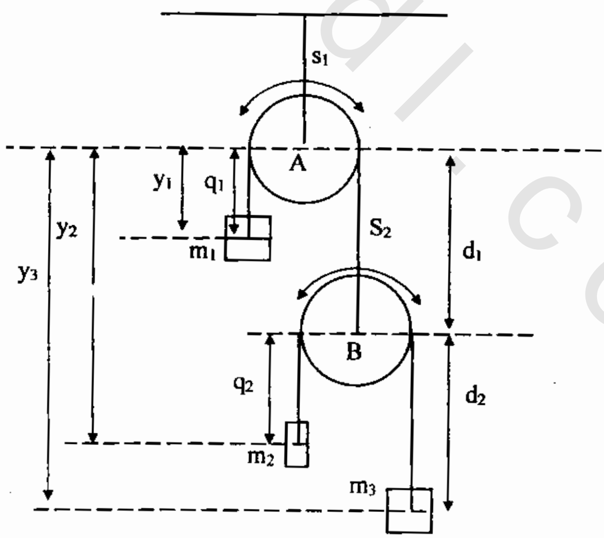
(د) اثبت مبدأ ثبوت الطاقة للمنظومة .

الحل : يطلق على هذه المسأله أحيانا اسم (الة اتود المزدوجه)

نفرض أن أبعاد الكتل m_1, m_2, m_3 عن الخط المار بمركز البكرة العليا A الذي سوف نأخذه مستوى للقياس هي y_1, y_2, y_3 ، فتكون:

سرعة $\dot{y}_1 = m_1$ و عجلتها $= \ddot{y}_1$, سرعة $\dot{y}_2 = m_2$ و عجلتها $= \ddot{y}_2$

سرعة $\dot{y}_3 = m_3$ و عجلتها $= \ddot{y}_3$



والآن : لنأخذ q_1, q_2 كإحداثيان عامان، حيث أنه توجد درجة حرية واحدة لكل بكرة وبذلك فهناك درجتان حرية فقط للمجموعة و بالتالي يكون لدينا معادلتين للحركه.

ويأخذ الاحداثيان q_1 و q_2 كالتالى :

الإحداثي q_1 هو عمق الكتلة m_1 أسفل A (مركز البكرة العليا) .

الإحداثي q_2 هو عمق الكتلة m_2 أسفل B (مركز البكرة السفلى) .

وبفرض أن طولى الخيطين العلوي و السفلي هما على الترتيب ℓ_1, ℓ_2 وهما ثابتان :

$$\ell_1 = q_1 + s_1 + d_1 \to d_1 = \ell_1 - q_1 - s_1$$

$$\ell_2 = q_2 + s_2 + d_2 \to d_2 = \ell_2 - q_2 - s_2$$

أيضاً فإن :

$$y_1 = q_1$$

$$y_2 = d_1 + q_2 = \ell_1 - s_1 - q_1 + q_2$$

$$y_3 = d_1 + d_2 = \ell_1 - q_1 - s_1 + (\ell_2 - q_2 - s_2) = (\ell_1 + \ell_2) - (s_1 + s_2) - (q_1 + q_2)$$

<u>فتكون سرعة الكتل هي :</u>

$$\dot{y}_1 = \dot{q}_1, \dot{y}_2 = -\dot{q}_1 + \dot{q}_2, \dot{y}_3 = -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

وذلك بتفاضل y_1, y_2, y_3 و اعتبار أن ℓ_1, ℓ_2, s_1, s_2 ثوابت .

<u>طاقة الحركة الكلية للمنظومة :</u>

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(-\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1^2 + 2(m_3 - m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + (m_2 + m_3)\dot{q}_2^2\right] \_\_\_ (1)$$

<u>طاقة الجهد الكلية للمنظومة :</u>

بأخذ المستوى الأفقي المار بمركز الكرة A مستوى للقياس :

$$\therefore u = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 - m_3 g y_3$$
$$= -m_1 g q_1 - m_2 g(\ell_1 - s_1 - q_1 + q_2)$$
$$- m_3 g[(\ell_1 + \ell_2) - (s_1 + s_2) - (q_1 + q_2)]$$
$$= (m_2 - m_1 + m_3) g q_1 + (m_3 - m_2) g q_2$$
$$+ \text{const.}(u_0) \qquad \_\_\_\_ (2)$$

<u>دالة لاجرانج :</u>

$$L = T - u$$
$$= \frac{1}{2}\left[(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1^2 + 2(m_3 - m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + (m_2 + m_3)\dot{q}_2^2\right]$$
$$-(m_2 - m_1 + m_3) g q_1 - (m_3 - m_2) g q_2 - (u_0) \qquad \_\_\_\_ (3)$$

معادلتا لاجرانج المناظرتان للاحداثيان q_1, q_2 :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \,\_\_\_\_ (4)$$

حيث :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1 + (m_3 - m_2)\dot{q}_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_2 - m_1 + m_3) g$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = (m_3 - m_2)\dot{q}_1 + (m_2 + m_3)\dot{q}_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -(m_3 - m_2) g$$

بالتعويض في معادلتي لاجرانج (المعادلتين 4):

$$\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2+m_3)\dot{q}_1+(m_3-m_2)\dot{q}_2\right]+(m_2-m_1+m_3)g=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[(m_3-m_2)\dot{q}_1+(m_2+m_3)\dot{q}_2\right]+(m_3-m_2)g=0$$

$$\therefore (m_1+m_2+m_3)\ddot{q}_1+(m_3-m_2)\ddot{q}_2=-(m_2-m_1+m_3)g \quad \_\_\_(5)$$

$$(m_3-m_2)\ddot{q}_1+(m_2+m_3)\ddot{q}_2=(m_2-m_3)g \quad \_\_\_(6)$$

وهى معادلات الحركة المطلوبة

ولإيجاد عجلة كل من الكتل الثلاث :

بحل المعادلتين (5) ، (6) يمكن إيجاد $\ddot{q}_{1,}\ddot{q}_2$ و بالتالي عجلة كل من الكتل الثلاث

التي هي :

$$\ddot{y}_1=\ddot{q}_{1,}\ddot{y}_2=-\ddot{q}_1+\ddot{q}_2,\ddot{y}_3=-(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)$$

بضرب (5) في (m_3+m_2) ، (6) في (m_3-m_2) و الطرح نحصل على :

$$\ddot{q}_1[(m_1+m_2+m_3)(m_2+m_3)+(m_3-m_2)^2]$$
$$=[-(m_2-m_1+m_3)(m_2+m_3)+(m_3-m_2)^2]g$$

$$\therefore \ddot{q}_1[(m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3)]=[m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3]g$$

$$\therefore \ddot{q}_1=\frac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}g \quad \_\_\_(7)$$

و من العلاقة (6) نجد أن :

$$\ddot{q}_2=\frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}(g+\ddot{q}_1) \quad \_\_\_(8)$$

و بالتعويض عن $\ddot{q}_1$ من (7) فى (8) نحصل على :

$$\ddot{q}_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\left[1 - \frac{m_1(m_2+m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}\right]g$$

$$= \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\left[\frac{m_1(m_2+m_3)}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}\right]g$$

$$= \frac{2m_1(m_2+m_3)}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}g \quad \text{———} \quad (9)$$

<u>فتكون عجلة كل من الكتل هي :</u>

$$\ddot{y}_1 = \ddot{q}_1 = \frac{m_1(m_2+m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}g \quad \text{———} (10)$$

وهي عجلة الكتلة m_1

$$\ddot{y}_2 = -\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$$

$$= \frac{1}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}\left[-m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3 + m_1(m_2 - m_3)\right]g$$

$$= \frac{m_1(m_2 - 3m_3) + 4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}g \quad \text{———} (11)$$

وهي عجلة الكتلة m_2 :

$$\ddot{y}_3 = -(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)$$

$$= -\frac{1}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}\left[m_1(m_2+m_3) - 4m_2m_3 + 2m_1(m_2 - m_3)\right]g$$

$$= \frac{m_1(m_3 - 3m_2) + 4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}g \quad \text{———} (12)$$

وهي عجلة الكتلة m_3 .

ولإثبات مبدأ ثبوت الطاقة للمنظومة :

بضرب المعادلة (5) في $\dot{q}_1$ والمعادلة (6) في $\dot{q}_2$ والجمع فنحصل على :

$$(m_1+m_2+m_3)\ddot{q}_1\dot{q}_1+(m_3-m_2)(\ddot{q}_2\dot{q}_1+\ddot{q}_1\dot{q}_2)+(m_2+m_3)\ddot{q}_2\dot{q}_2$$
$$=[-(m_2-m_1+m_3)\dot{q}_1+(m_2-m_3)\dot{q}_2]g$$

و هذه يمكن كتابتها بالصورة :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{q}_1^2+(m_3-m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}(m_3+m_2)\dot{q}_2^2\right]=$$
$$=\frac{d}{dt}\left[-(m_2-m_1+m_3)q_1+(m_2-m_3)q_2\right]g \qquad \_\_\_\_\_\_(13)$$

ولكن طاقة حركة المنظومة (معادلة (1)) هي :

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{q}_1^2+(m_3-m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}(m_2+m_3)\dot{q}_2^2 \quad \_\_\_(14)$$

وطاقة الجهد [المعادلة (2)] هي :

$$u=(m_2-m_1+m_3)q_1g+(m_3-m_2)q_2g+(u_0)$$
$$-u=\left[-(m_2-m_1+m_3)q_1+(m_2-m_3)q_2\right]g+(u_0) \quad \_\_\_(15)$$

فمن (15) ، (14) و بالتعويض في (13) نحصل على :

$$\frac{d}{dt}(T)=-\frac{du}{dt},\ \frac{d}{dt}[T+u]=0 \qquad \therefore T+u=\text{const}$$

وهو قانون (أو مبدأ) ثبوت الطاقة لهذه المنظومة .

مثال(٢٠) المتذبذب التوافقي المترابط (Coupled Harmonic Oscillator)

مقدمة : عن المنظومات المتذبذبة أو المهتزة (Oscillating Systems)

إذا وصل جسيمان (أو أكثر) بواسطة زنبرك ، فإنهما سوف يتذبذبان أو يهتزان بالنسبة لبعضهما. وفي الحالات البسيطة مثل جسيم معلق بخيط (أو زنبرك) مرن مثل المتذبذب التوافقي البسيط أو حركة البندول البسيط و غيرهما ، فإن لهذا الجسيم المتذبذب توجد درجة حرية واحدة تتميز بتردد واحد للذبذبة .

أما في حالة المنظومات (مجموعة الجسيمات) فإنه يوجد أكثر من درجة حرية ، ويكون للذبذبة الواحدة أكثر من تردد واحد .

وتسمى هذه الترددات المتعددة للذبذبة الواحدة في المنظومات المهتزة بالترددات العادية (Normal Oscillations) .

ويعرف نسق (أو نمط) الاهتزاز (mode of Oscillations) بأنه الطريقة الخاصة التي يحدث بهما الاهتزاز تحت شروط معينة و يسمى نسق الاهتزاز الذي يناظر أحد الترددات العادية بالنسق (أو النمط) العادي (normal mode) .

وسنقتصر هنا على المنظومات المهتزة ذات درجتين فقط من درجات الحرية ، و يتضح حل هذه المسائل لإيجاد التردد العادي و النسق العادي من المثال الآتي عن :

(المتذبذب التوافقي المترابط)

المثال :

يتكون المتذبذب التوافقي المترابط من كتلتين متساويتين كتلة كل منهما m متصلة بثلاثة أسلاك زنبركيه مرنه لهما نفس ثابت الزنبرك (أو ثابت المرونة k) ، بحيث تنزلق كل كتلة بحرية على منضدة ملساء AB ، وتكون الحركة حرة في المستقيم AB و يكون الزنبركان مثبتان عند A,B .

المطلوب :

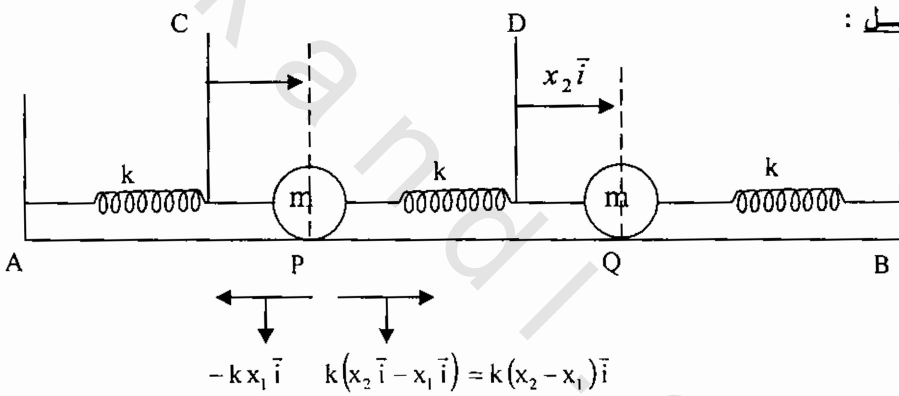
(أ) كتابة دالة لاجرانج للمتذبذب .

(ب) إيجاد المعادلات التفاضلية لحركة المتذبذب .

(جـ) إيجاد التردد العادي للمتذبذب .

(د) إيجاد النسق العادي للتذبذب .

الحل :



نعتبر أن $x_1\vec{i}, x_2\vec{i}$ يعبران عن إزاحتي الكتلتين عن موضعي إتزانهما C,D عند أي لحظة.

طاقة الحركة للمجموعة :
$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

طاقة الجهد للمجموعة : الشد في الخيوط (أو قوة الزنبرك)

في الخيط $x_1 = AP$

في الخيط $x_2 = QB$

في الخيط $x_2 - x_1 = PQ$

وذلك لأن قوة الزنبرك المؤثرة على الكتلة P إلى اليمين $= k(x_2-x_1)\vec{i}$

و تكون طاقة الجهد :

$$u=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}kx_2^2$$

و بذلك فإن دالة لاجرانج تكون :

$$L=T-u=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}kx_2^2$$

وهو المطلوب أولاً .

معادلات لاجرانج للحركة :

توجد لدينا معادلتان (لوجود درجتان من درجات الحرية) مناظرتان للاحداثيان x_1, x_2

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0$$

وحيث :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-kx_1+k(x_2-x_1)=k(x_2-2x_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m\dot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=-k(x_2-x_1)-kx_2=k(x_1-2x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=m\dot{x}_2$$

فتصبح معادلتا لاجرانج :

$$m\ddot{x}_1=k(x_2-2x_1) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (1)$$

$$m\ddot{x}_2=k(x_1-2x_2) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (2)$$

و هما المعادلتان التفاضليتان للكتلتين المتذبذبتين ، وهو المطلوب ثانياً .

و لإيجاد التردد العادي : نتبع الطريقة الآتية :

في المعادلتين (2) ، (1) نفرض أن :

$$\ddot{x}_1=-\omega^2 A_1\cos\omega t \leftarrow \dot{x}_1=-\omega A_1\sin\omega t \leftarrow x_1=A_1\cos\omega t$$

$$\ddot{x}_2=-\omega^2 A_2\cos\omega t \leftarrow \dot{x}_2=-\omega A_2\sin\omega t \leftarrow x_2=A_2\cos\omega t$$

حيث A_1, A_2 هما سعتا التذبذب .

$$\therefore m[-\omega^2 A_1 \cos\omega t] = k[A_2 \cos\omega t - 2A_1 \cos\omega t]$$

$$\therefore (2k - m\omega^2)A_1 - kA_2 = 0 \qquad \_\_\_\_\_ (3)$$

$$\therefore m[-\omega^2 A_2 \cos\omega t] = k[A_1 \cos\omega t - 2A_2 \cos\omega t]$$

$$\therefore -kA_2 + (2k - m\omega^2)A_1 = 0 \qquad \_\_\_\_\_ (4)$$

وإذا كان كل من A_1, A_2 لا يساوي صفراً ، فإن محدد المعاملات في المعادلتين (4) ، (3) .

[و يسمى بالمحدد المميز . Characteristic determ] يساوي صفراً .

$$\therefore \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (2k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - k^2 = 0$$

$$\therefore m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

و هي معادلة من الدرجة الثانية في ω^2 حلها العام هو :

$$\omega^2 = \frac{4km \pm \sqrt{16k^2m^2 - 12k^2m^2}}{2m^2} = \begin{cases} \dfrac{3k}{m} = \omega_1^2 \\[2mm] \dfrac{k}{m} = \omega_2^2 \end{cases}$$

$$\therefore \omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad ، \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

يسمى كل من ω_2 ، ω_1 بالترددات الذاتية (eigen frequencies) .

أو المميزة (characteristic freq.) و هي نفسها الترددات العادية (normal freq.) المطلوب إيجادها للمنظومة .

<u>لإيجاد النسق العادي للتذبذب</u>: يوجد لدينا حالتان :

(1) إذا كانت $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ ، فمن المعادلتين (4) ، (3) نجد أن :

$$(2k - 3k)A_1 - kA_2 = 0$$

$$-kA_2 + (2k - 3k)A_1 = 0$$

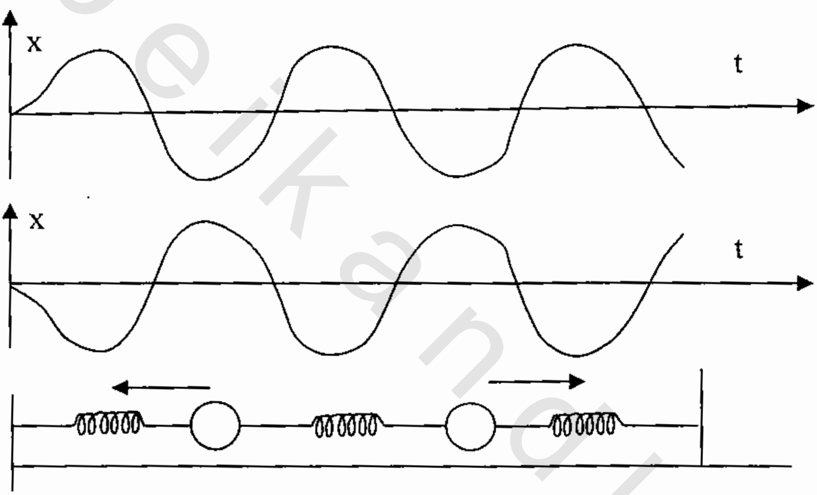
و بحل هاتين المعادلتين نحصل على : $A_1 = -A_2$

و يكون الحل هنا :

$$x_1 = A_1 \cos\omega_1 t \ , \ x_2 = A_2 \cos\omega_1 t = -A_1 \cos\omega_1 t = -x_1$$

و يسمى النسق العادي للتذبذب في هذه الحالة بالنسق غير المتماثل (Anti symmetric Mode)

[رسم (١)]



و يمثله الرسم (1) و يناظر حركة الكتلتين في اتجاهين متضادين

(٢) إذا كانت $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

فمن المعادلتين (4) ، (3) :

$$(2k - k)A_1 - kA_2 = 0$$
$$-kA_1 + (2k - k)A_2 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على :

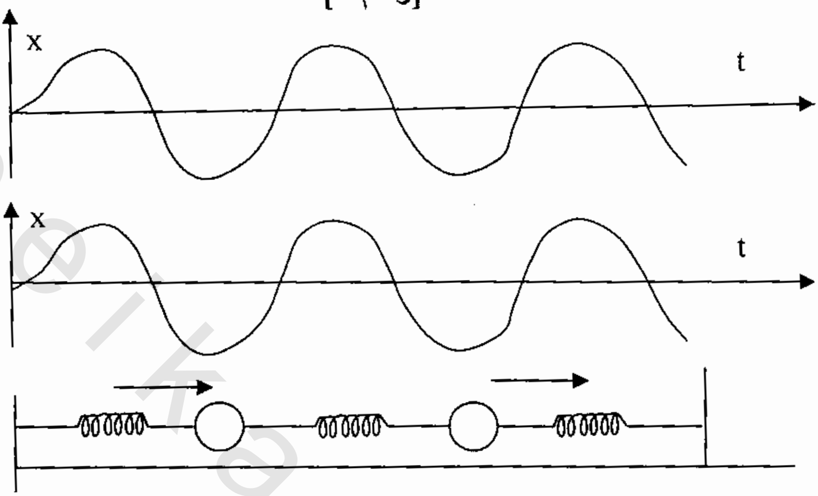
$$A_1 = A_2$$

و يكون الحل هنا :

$$x_1 = A_1 \cos\omega_2 t \ , \ x_2 = A_2 \cos\omega_2 t = A_1 \cos\omega_2 t = x_1$$

ويسمى النسق العادي للتذبذب في هذه الحالة بالنسق المتماثل (symmetric mode) ويمثله الرسم (٢) ، و يناظر حركة الكتلتين في نفس الاتجاه .

[رسم ٢]



مثال (٢١): في البندول المزدوج المستوى إذا كانت الكتلتان m_1, m_2 متساويتان و كان طولا الخيطين متساويين فإن معادلات الحركة (أنظر المسألة الخاصة بالبندول المزدوج – مثال (١٤) في هذا الباب) .

$$2\ell\ddot{\theta}_1 + \ell\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \ell\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2) = -2g\sin\theta_1$$

$$\ell\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) + \ell\ddot{\theta}_2 - \ell\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) = -g\sin\theta_2$$

(أ) أكتب معادلات الحركة للبندول في حالة الذبذبات الصغيرة

(ب) أوجد الترددات العادية للبندول في تلك الحالة.

(جـ) أوجد النسق العادي للتذبذب المناظر للذبذبات الصغيرة في البندول .

الحل : في حالة الذبذبات الصغيرة : تتميز الذبذبات الصغيرة بما يلي :

(i) إهمال الحدود المشتملة على $\dot{\theta}^2$

(ii) $\sin\theta \approx \theta$ ، $\cos\theta \approx 1$

و تصبح معادلات الحركة بالصورة :

$$\ell\ddot{\theta}_1 + \ell\ddot{\theta}_2 = -g\theta_2 \qquad (1)$$

$$2\ell\ddot{\theta}_1 + \ell\ddot{\theta}_2 = -g\theta_1 \qquad \text{\_\_\_\_\_} (2)$$

<u>لإيجاد الترددات العادية</u> :

نضع $\theta_2 = A_2 \cos\omega t$ و $\theta_1 = A_1 \cos\omega t$

حيث A_1, A_2 تمثل سعتى الذبذبتين على التوالي في المعادلين (2) ، (1).

فنحصل على :

$$2(g - \ell\omega^2)A_1 - \ell\omega^2 A_2 = 0$$

$$-\ell\omega^2 A_1 + (g - \ell\omega^2)A_2 = 0$$

حيث : $\ddot{\theta}_2 = -\omega^2 A_2 \cos\omega t$ و $\ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A_1 \cos\omega t$

و حتى لا تكون A_1, A_2 مساوية للصفر ، فإن محدد المعاملات (المحدد المميز) يجب أن يساوي صفراً .

$$\therefore \begin{vmatrix} 2(g - \ell\omega^2) & -\ell\omega^2 \\ -\ell\omega^2 & g - \ell\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \ell^2\omega^4 - 4\ell g\omega^2 + 2g^2 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في ω^2 وحلها هو :

$$\omega^2 = \frac{4\ell g \pm \sqrt{16\ell^2 g^2 - 8\ell^2 g^2}}{2\ell^2} = \frac{(2 \pm \sqrt{2})g}{\ell}$$

$$\therefore \omega_1^2 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{\ell} \quad \omega_2^2 = (2 - \sqrt{2})\frac{g}{\ell} ,$$

و بذلك فإن الترددان العاديان يعطيان من :

$$, \quad \omega_1 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})\frac{g}{\ell}} \quad \omega_2 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\frac{g}{\ell}}$$

<u>ولإيجاد النسق العادي : يوجد لدينا حالتان</u> :

(١) **بالتعويض عن** : $\omega^2 = \omega_1^2 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{\ell}$

في المعادلتين (4) ، (3) نحصل على :

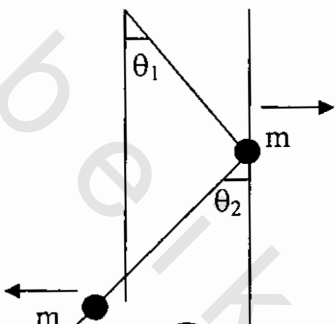
$$2[1 - (2 + \sqrt{2})]A_1 - (2 + \sqrt{2})A_2 = 0$$

$$-(2 + \sqrt{2})A_1 - [1 - (2 + \sqrt{2})]A_2 = 0$$

وبالطرح نحصل على :

$$2A_1 - (2+\sqrt{2})A_1 = A_2$$
$$\therefore A_2 = -\sqrt{2}A_1$$

وهذا يناظر النسق العادي للتذبذب الذي تكون فيه الكتلتان متحركتان في اتجاهات متضادة :(رسم رقم (1)) ، وهو النسق غير المتماثل .



1

(٢) بالتعويض عن:

$$\omega^2 = \omega_2^2 = (2-\sqrt{2})\frac{g}{\ell}$$

في المعادلتين (4) ، (3) نحصل على :

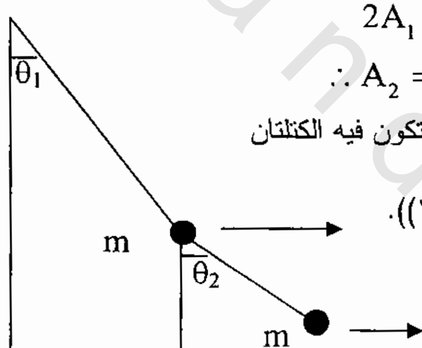
$$2[1-(2-\sqrt{2})]A_1 - (2-\sqrt{2})A_2 = 0$$
$$-(2-\sqrt{2})A_1 + [1-(2-\sqrt{2})]A_2 = 0$$

و بالطرح نحصل على :

$$2A_1 - (2-\sqrt{2})A_1 = A_2$$
$$\therefore A_2 = \sqrt{2}A_1$$

و هذا يناظر النسق العادي للتذبذب الذي تكون فيه الكتلتان متحركتان في نفس الاتجاه (رسم رقم (٢)).

و هو النسق المتماثل .



2

مثال(٢٢) : مسألة الجسيمين Two Body Problem

منظومة تتكون من جسيمين كلتاهما m_1, m_2 بينهما مسافة r ، فإذا تحركت المنظومة في مجال جهده $u(r)$

المطلوب :

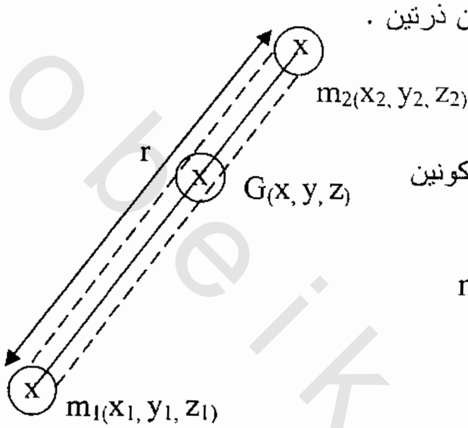
(i) إيجاد دالة لاجرانج للمنظومة .

(ii) إثبات أن مركز كتلة المنظومة يتحرك بسرعة ثابتة .

(iii) استنتاج معادلات الحركة للمنظومة من معادلات لاجرانج، واستخدام العلاقة

$\dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j}$ حيث H الطاقة الكلية للمنظومة $(j = r, \theta)$

ملحوظة : كمثال لهذه المسألة جزئ يتكون من ذرتين .



الحـــــل :

نفرض أن الإحداثيات الكرتيزية للجسيمين المكونين للمنظومة هما:

$$m_1 = (x_1, y_1, z_1), m_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

فيكون المتجه الواصل بينهما هو :

$$\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \quad \_\_\_\_ (1)$$

لتسهيل حل هذه المسألة نتبع الطريقة الآتية :

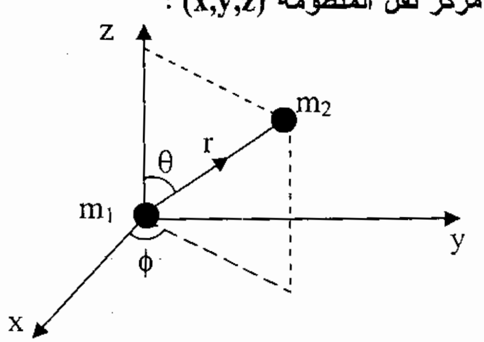
نختار بدلاً من الإحداثيات الكرتيزية لكل من الجسيمين الإحداثيات التالية :

(١) إحداثيات مركز ثقل المنظومة : $G(x,y,z)$

(٢) الإحداثيات القطبية (r, θ, ϕ) للجسيم m_2 باعتبار m_1 ثابت ، m_2 يتحرك بالنسبة إليه، فيكون لدينا بذلك ٦ إحداثيات معممة هي :

$$q_1 = x \;,\; q_2 = y \;,\; q_3 = z \;,\; q_4 = r \;,\; q_5 = \theta \;,\; q_6 = \phi$$

(١) بالنسبة لإحداثيات مركز ثقل المنظومة (x,y,z) :



لدينا من التعريف :

$$\left.\begin{aligned} m_1x_1 + m_2x_2 &= (m_1 + m_2)x \\ m_1y_1 + m_2y_2 &= (m_1 + m_2)y \\ m_1z_1 + m_2z_2 &= (m_1 + m_2)z \end{aligned}\right\} \quad \_\_\_\_ (2)$$

(٢) بالنسبة للإحداثيات (r,θ,ϕ) أي إحداثيات m_2 بالنسبة إلى m_1 فإن :

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_1 &= r\sin\theta\cos\phi \\ y_2 - y_1 &= r\sin\theta\sin\phi \\ z_2 - z_1 &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \_\_\_\_ (3)$$

وذلك لأن متجه الموضع في الإحداثيات القطبية الكروية هو :

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\hat{i} + r\sin\theta\sin\phi\hat{j} + r\cos\theta\hat{k} \quad \_\_\_\_ (4)$$

$$[\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}]$$

و <u>الآن</u> : بحذف x_2, y_2, z_2 من المعادلات (3) ، (2) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{m_2}{m_1 + m_2} r\sin\theta\cos\phi \\ y_1 &= y - \frac{m_2}{m_1 + m_2} r\sin\theta\sin\phi \\ z_1 &= z - \frac{m_2}{m_1 + m_2} r\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \_\_\_\_ (5)$$

<u>**الإثبات**</u> : من العلاقة :

$$\therefore x_1 = x_2 - r\sin\theta\cos\phi \leftarrow x_2 - x_1 = r\sin\theta\cos\phi$$

$$m_2x_2 = (m_1 + m_2)x - m_1x_1 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{(m_1 + m_2)}{m_2}x - \frac{m_1}{m_2}x_1$$

$$\therefore x_1 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)x - \frac{m_1}{m_2}x_1 - r\sin\theta\cos\phi$$

$$\therefore x_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)x - r\sin\theta\cos\phi$$

$$\therefore x_1\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)=\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)x-r\sin\theta\cos\phi$$

بالضرب في $\frac{m_2}{m_1+m_2} \leftarrow$

$$\therefore x_1 = x - \frac{m_2}{m_1+m_2} r\sin\theta\cos\phi$$

وبالمثل بالنسبة للعلاقات الخاصة بالاحداثيين y_1, z_1 في (5) .

أيضاً بحذف x_1, y_1, z_1 من المعادلات (3) ، (2) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x+\frac{m_1}{m_1+m_2} r\sin\theta\cos\phi \\ y_2 &= y+\frac{m_1}{m_1+m_2} r\sin\theta\sin\phi \\ z_2 &= z+\frac{m_1}{m_1+m_2} r\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(6)$$

(١) <u>إيجاد دالة لاجرانج للمنظومة</u>

$$L=T-u=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2)-u(r) \qquad \text{\_\_\_\_\_}(7)$$

وبتفاضل المعادلات (6) ، (5) بالنسبة للزمن نحصل على : $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$

وبالتعويض في (7) نحصل على دالة لاجرانج بالصورة الآتية :

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)-u(r) \qquad \text{\_\_\_\_\_}(8)$$

حيث μ تسمى الكتلة المختزلة للمنظومة المكونة من الجسمين m_1, m_2 ، وتعرف بالعلاقة الآتية :

$$\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

<u>والآن</u> : حيث أن u هي دالة في الإحداثيات فقط و ليست دالة في السرعة فإن كمية الحركة المعممة للمنظومة تكون:

$$p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

و منها نجد أن: مركبات كمية الحركة للمنظومة منسوبة للاحداثيات:
$(x,y,z),(r,\theta,\phi)$ هي:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} \\ p_y &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} \\ p_z &= \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = (m_1 + m_2)\dot{z} \end{aligned}\right\} \quad \_\_\_\_\_\_ (9)$$

$$\left.\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta} \\ p_\phi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \sin^2\theta\dot{\phi} \end{aligned}\right\} \quad \_\_\_\_\_\_ (10)$$

(٢) إثبات أن مركز الكتلة (أو مركز الثقل) للمنظومة يتحرك بسرعة ثابتة نكتب معادلات لاجرانج لإحداثيات مركز الكتلة :

(1) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\dot{x}\right] = 0$$

$$\therefore (m_1 + m_2)\dot{x} = \text{const} \rightarrow \boxed{\therefore \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{const}} \qquad (11)$$

(2) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\dot{y}\right] = 0$$

$$\therefore (m_1 + m_2)\dot{y} = \text{const} \rightarrow \boxed{\therefore \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{const}} \qquad (12)$$

$$(3)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\dot z\right]=0$$

$$\therefore (m_1+m_2)\dot z=\text{const} \rightarrow \boxed{\therefore \dot{\mathbf{z}}=\mathbf{const}} \qquad (13)$$

من المعادلات $(11),(12),(13)$ نجد أن:

مركبات السرعة $(\dot x,\dot y,\dot z)$ لمركز الكتلة (أو مركز الثقل) للمنظومة تساوي مقداراً ثابتاً، وهذا يعني أن مركز كتلة المنظومة يتحرك بسرعة ثابتة. وهو المطلوب ثانياً.

(٣) إيجاد معادلات حركة المنظومة:

بإستبدال الكميات $\dot r,\ \dot\theta,\ \dot\phi$ في معادلة T بالكميات الآتية [من المعادلة (10)]:

$$\dot r=\frac{p_\phi}{\mu}\ ,\ \dot\theta=\frac{p_\theta}{\mu r^2}\ ,\ \dot\phi=\frac{p_\phi}{\mu r^2\sin^2\theta}$$

نحصل على العلاقة الآتية للطاقة الكلية H:

$$H=T+u(r)=\frac{1}{2(m_1+m_2)}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+$$

$$+\frac{1}{2\mu}[p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}]+u(r)$$

وحيث أن: $\dot p_j=-\dfrac{\partial H}{\partial q_j}$ [تعرف هذه المعادلة بمعادلة هاملتون وسوف نعود لدراستهما فى الباب التالى]

$$\therefore \dot p_r=-\frac{\partial H}{\partial r}\ ،\ \dot p_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

$$\therefore \dot p_r=\frac{1}{\mu}(\frac{p_\theta^2}{r^3}+\frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta})-\frac{\partial u}{\partial r} \qquad (14)$$

$$\dot p_\theta=\frac{1}{\mu}(\frac{p_\phi^2\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}) \qquad (15)$$

من المعادلات $(9),(10),(14),(15)$ يمكن إيجاد معادلات الحركة لمنظومة الجسيمين

كما يلي :

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}_x &= \frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\dot{x}\right]=0\\ \dot{p}_y &= \frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\dot{y}\right]=0\\ \dot{p}_z &= \frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\dot{z}\right]=0\end{aligned}\right\} \quad \text{\_\_\_\_ (16)}$$

$$\dot{p}_r = \frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{p_\theta^2}{r^3}+\frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)-\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\mu\dot{r})-\mu(r\dot{\theta}^2+r\sin^2\theta\dot{\phi}^2) = -\frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{\_\_\_\_ (17)}$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{p_\phi^2\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}\right)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta})-\mu r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0 \quad \text{\_\_\_\_ (18)}$$

$$\dot{p}_\phi = \frac{d}{dt}(\mu r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0 \quad \text{\_\_\_\_ (19)}$$

المعادلات (19) , (18) ,(17) ,(16) هي معادلات الحركة المطلوبة لمنظومة الجسيمين. وهو المطلوب ثالثاً.

ملحوظة : يمثل الجزء الثالث من هذه المسألة [إيجاد معادلات الحركة] تطبيقا على معادلات هاملتون التى سندرسها بالتفصيل فى الباب القادم]

مسائل على ميكانيكا لاجرانج

(١) إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية لا تعتمد صراحة على الزمن أي أن :

$$L = L(q_j, \dot{q}_j), \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

أثبت أن :
$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = c$$

حيث c ثابت.

(٢) إذا كانت : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$ ، فأثبت أن

$$\frac{d}{dt}[\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - T] + \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_j Q_j \dot{q}_j$$

حيث $T = T(q_j, \dot{q}_j, t)$.

(٣) إذا كانت طاقة حركة منظومة ميكانيكية هي $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2)$ ، وطاقة الجهد لها هي : $u = \frac{1}{2}k^2 q_1^2$ فأكتب دالة لاجرانج ، وطبق معادلات لاجرانج لإثبات العلاقة: $q_1^2 = a\sin(2kt + b) + c$ ، حيث a,b,c,k ثوابت .

(٤) إذا كانت طاقة حركة منظومة ميكانيكية تعطى بالعلاقة :

$$2T = (1+2k)\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2$$

وطاقة الجهد تعطى بالعلاقة :
$$2U = \alpha^2[(1+k)q_1^2 + q_2^2]$$

حيث k, α ثابتان ، أكتب معادلات لاجرانج لحركة المنظومة وممن ثم أثبت العلاقة : $q_1 - q_2 = A\cos(\omega t + B)$

حيث $\omega^2 k = (1+k)\alpha^2$ ، A,B ثابتان .

(٥) إذا كانت طاقتي الحركة والجهد لمنظومة ميكانيكية يعطيان بالعلاقتين:

$$2T = \frac{\dot{x}^2}{a + by^2} + \dot{y}^2 \quad , \; 2U = c + dy^2$$

فأكتب دالة لاجرانج وطبق معادلات لاجرانج لإثبات العلاقة: $y = A\sin(wt + \varepsilon)$

(٦) الحركة على مستوى مائل أملس:

(أ) استخدم معادلات لاجرانج لوصف حركة جسيم كتلته m يتحرك على مستوى مائل أملس يميل بزاوية α على الأفقي.

(ب) تنزلق كتلة m_2 على مستوى مائل أملس زاويته α وكتلته m_1 وينزلق على سطح أفقي أملس، استخدم معادلات لاجرانج لإيجاد عجلة الكتلة m_2.

(٧) (أ) استخدم معادلات لاجرانج لكتابة معادلات الحركة لجسيم كتلته m يسقط بحرية في مجال جاذبية منتظم.

(ب) حل نفس المسألة إذا كانت قوة مجال الجاذبية تتناسب عكسياً مع مربع المسافة من نقطة ثابتة O، بفرض أن الجسيم يتحرك في خط مستقيم يمر بالنقطة O.

(٨) باستخدام معادلات لاجرانج أكتب معادلات الحركة للمتذبذب التوافقي في الحالات الآتية:

(أ) المتذبذب البسيط (في بعد واحد)

(ب) المتذبذب في بعدين

(ج) المتذبذب في ٣ أبعاد

حلول المسائل على ميكانيكا لاجرانج

حل المسألة(١): حيث أن $L = L(q_j, \dot{q}_j)$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[\sum_j \dot{q}_j (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - L\right] = \sum_j \left[\dot{q}_j \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] - \frac{dL}{dt}$$

$$= \sum_j \left[\dot{q}_j \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j}\right] - \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j}\right]$$

$$= \sum_j \dot{q}_j \left[\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right] = 0$$ (من معادلة لاجرانج)

بالتكامل نحصل على:

$$\therefore \sum_j \dot{q}_j (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - L = const. = c$$

وهو المطلوب.

حل المسألة(٢):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - T\right] \qquad \Big| \quad T = T(q_j, \dot{q}_j, t)$$

$$= \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \dot{q}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\right] - \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t}\right]$$

$$= \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\dot{q}_j - \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_j Q_j \dot{q}_j - \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - T\right] + \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_j Q_j \dot{q}_j$$

وهو المطلوب.

حل المسائلة(٣):

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+q_1^2\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}k^2q_1^2 \qquad \_\_\_\_(1)$$

معادلات لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0 \qquad \_\_\_\_(3)$$

من (1):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\dot{q}_1 \;,\; \frac{\partial L}{\partial q_1}=q_1\dot{q}_2^2-k^2q_1 \;,\; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=q_1^2\dot{q}_2 \;,\; \frac{\partial L}{\partial q_2}=0$$

بالتعويض في (2):

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_1)-q_1\dot{q}_2^2+k^2q_1=0 \rightarrow \ddot{q}_1-q_1\dot{q}_2^2+k^2q_1=0 \qquad \_\_(4)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(q_1^2\dot{q}_2)-0=0 \quad \therefore q_1^2\dot{q}_2=\text{contst}=\lambda^2 \quad \therefore \dot{q}_2=\frac{\lambda^2}{q_1^2} \qquad \_\_(5)$$

بالتعويض من (5) في (4):

$$\ddot{q}_1-\lambda^2q_1^{-3}+k^2q_1=0$$

بالضرب في $2\dot{q}_1$:

$$2\dot{q}_1\ddot{q}_1-2\lambda^2q_1^{-3}\dot{q}_1+2k^2q_1\dot{q}_1=0$$

وهذه المعادلة يمكن وضعها بالصورة: $\frac{d}{dt}(\dot{q}_1^2)+\frac{d}{dt}(\lambda^2q_1^{-2})+\frac{d}{dt}(k^2q_1^2)=0$

بالتكامل (بعد فصل التغيرات):

$$\dot{q}_1^2+\lambda^2q_1^{-2}+k^2q_1^2=c_1 \qquad \_\_\_\_(6)$$

بضرب طرفي (6) في q_1^2:

فإن: $q_1^2\dot{q}_1^2+\lambda^2+k^2q_1^4=c_1q_1^2 \leftarrow -q_1\dot{q}_1=\sqrt{c_1q_1^2-k^2q_1^4-\lambda^2}$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}q_1^2)=k\sqrt{\frac{c_1}{k^2}q_1^2-q_1^4-\frac{\lambda^2}{k^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}x)=k\sqrt{\frac{c_1}{k^2}x-x^2-\frac{\lambda^2}{k^2}} \qquad (\text{بوضع } q_1^2=x)$$

وبوضع هذه العلاقة على صورة إكمال المربع وفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2-(x-c)}} = 2k\int dt$$

$$\sin^{-1}\frac{(x-c)}{A} = (2kt+B)$$:فإن ، $c=\frac{c_1}{2k^2}$,$A^2=\frac{c_1^2}{4k^4}-\frac{\lambda^2}{k^2}$ حيث

$$\therefore \frac{x-c}{A} = \sin(2kt+B)$$

$$\therefore x = A\sin(2kt+B)+c$$

$$\therefore q_1^2 = A\sin(2kt+B)+c$$

وهو المطلوب.

<u>حل المسألة(٤):</u>

$$T=(k+\frac{1}{2})\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2$$

$$U=\frac{\alpha^2}{2}[(k+1)q_1^2+q_2^2]$$

دالة لاجرانج:

$$L=T-U=(k+\frac{1}{2})\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-\frac{\alpha^2}{2}(k+1)q_1^2-\frac{\alpha^2}{2}q_2^2 \quad \_\_(1)$$

معادلات لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0 \qquad \_\_\_\_\_\_(2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0 \qquad \_\_\_\_\_\_(3)$$

[لدينا إحداثيان معممان q_1, q_2].

<u>تطبيق المعادلة(2):</u> من (1):

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}=-\alpha^2(k+1)q_1=-w^2kq_1 \qquad \_\_\_\_(4)$$

حيث : $w^2k=\alpha^2(k+1)$ [من رأس المسألة].

أيضاً:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2(k+\frac{1}{2})\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \qquad \_\_\_\_ (5)$$

بالتعويض من (5)،(4) في (2):

$$\frac{d}{dt}[(2k+1)\dot{q}_1 + \dot{q}_2] + w^2 k q_1 = 0$$

$$\therefore (2k+1)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + w^2 k q_1 = 0 \qquad \_\_\_\_ (6)$$

<u>تطبيق المعادلة (3)</u>: من (1):

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\alpha^2 q_2 = -\frac{w^2 k}{(k+1)} q_2 \qquad \_\_\_\_ (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \qquad \_\_\_\_ (8)$$

بالتعويض من (8)،(7) في (3):

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \frac{w^2 k}{(k+1)} q_2 = 0$$

$$\therefore (k+1)(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + w^2 k q_2 = 0 \qquad \_\_\_\_ (9)$$

من (9)،(6) بالطرح:

$$(2k+1-k-1)\ \ddot{q}_1 + (1-k-1)\ \ddot{q}_2 + w^2 k(q_1 - q_2) = 0$$

$$\therefore k(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + w^2 k(q_1 - q_2) = 0$$

$$\therefore (\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + w^2 (q_1 - q_2) = 0 \qquad \_\_\_\_ (10)$$

المعادلة (10) هي معادلة حركة توافقية بسيطة حلها العام هو:

$$(q_1 - q_2) = A\cos(wt + B)$$

حيث A,B ثابتان. وهو المطلوب.

<u>**حل المسألة (٥):**</u>

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{x}^2}{a+by^2} + \dot{y}^2\right] \quad , \quad U = \frac{c}{2} + \frac{d}{2}y^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}^2}{a + by^2}\right) + \frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{c}{2} - \frac{d}{2}\,y^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (1)} \;\therefore$$

معادلات لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (3)}$$

[لدينا إحداثيان عموميان x,y].

من العلاقة (1):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{a + by^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2}\left[-\frac{2by\,\dot{x}^2}{(a + by^2)^2}\right] + d(y)$$

بالتعويض في (3) , (2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{a + by^2}\right) = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (4)}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{y}) + \frac{by\,\dot{x}^2}{(a + by^2)^2} - d(y) = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (5)}$$

من (4) بالتكامل:

$$\frac{\dot{x}}{a + by^2} = c_1 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (6)}$$

بالتعويض من (6) في (5):

$$\ddot{y} + by\,c_1^2 + dy = 0 \qquad \therefore\; \ddot{y} + (b\,c_1^2 + d)y = 0$$

وبأخذ $bc_1^2 + d = w^2$

$$\therefore \ddot{y} + w^2 y = 0 \qquad (7)$$

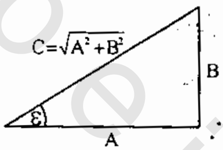
المعادلة (7) هي معادلة حركة توافقية بسيطة حلها العام هو:

$$y = C\sin(wt + \varepsilon)$$

وذلك لأن: حل المعادلة (7):

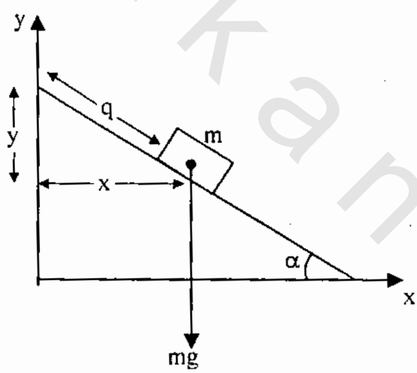
$$y = A\sin wt + B\cos wt$$

وبأخذ



$$A = C\cos\varepsilon \;,\; B = C\sin\varepsilon \;,\; C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\therefore y = C\sin wt\,\cos\varepsilon + C\cos wt\,\sin\varepsilon = C\sin(wt + \varepsilon)$$



حل المسألة(٦):

الجزء(أ): $x = q\cos\alpha \;,\; y = q\sin\alpha$

$$\vec{r} = q\cos\alpha\,\vec{i} + q\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{q}\cos\alpha\,\vec{i} + \dot{q}\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{q}^2(\cos^2\alpha + \dot{q}\sin^2\alpha) = \dot{q}^2$$

طاقة الحركة: $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$

طاقة الجهد:

$V = mgq\sin\alpha$ (وذلك بأخذ محور x مستوى القياس)

دالة لاجرانج:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - mgq\sin\alpha$$

معادلات لاجرانج:

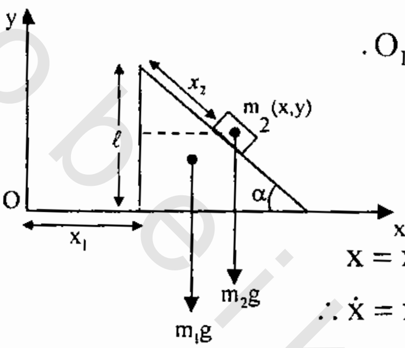
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(m\dot{q}) - (-mg\sin\alpha) = 0$$

$$\therefore\ m\ddot{q} + mg\sin\alpha = 0$$

وهي معادلة الحركة، ومنها نوجد العجلة بالصورة:

$$\ddot{q} = -g\sin\alpha$$



<u>الجزء(ب):</u> المنظومة لها درجتا حرية (x_1, x_2)

حيث x_1, x_2 بعد الكتلتين m_1, m_2 عن O_1, O_2.

سرعتا الكتلتين هما: $\dot{x}_1, \dot{x}_2$

لتكن (x, y) هما الإحداثيان المعممان

لموضع الكتلة m_2 حيث:

$$x = x_1 + x_2\cos\alpha \quad , \quad y = x_2\sin\alpha$$

$$\therefore \dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2\cos\alpha \quad , \quad \dot{y} = -\dot{x}_2\sin\alpha$$

مربع السرعة للكتلة m_2:

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\cos^2\alpha + 2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha + \dot{x}_2^2\sin^2\alpha$$

$$= \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha$$

طاقة الحركة للمنظومة:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha)$$

طاقة الجهد للكتلة m_2:

$$V = -m_2 g x_2 \sin\alpha$$

دالة لاجرانج:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha) + m_2 g x_2\sin\alpha$$

معادلات لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$\therefore m_1\ddot{x}_1 + m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2\cos\alpha) = 0$$

$$m_2(\ddot{x}_1\cos\alpha + \ddot{x}_2) - m_2 g\sin\alpha = 0$$

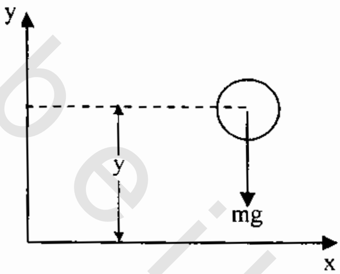
وبحل هاتين المعادلتين نحصل على عجلة الكتلة m_2 بالصورة:

$$\ddot{x}_2 = \frac{g \sin \alpha}{1 - (\frac{m_2 \cos^2 \alpha}{m_1 + m_2})}$$

وهو المطلوب.

<u>حل المسألة(٧):</u>

<u>الجزء(أ):</u>



طاقة الحركة: $T = \frac{1}{2} m \dot{g}^2$

طاقة الجهد: $V = m g y$

دالة لاجرانج: $L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - m g y$

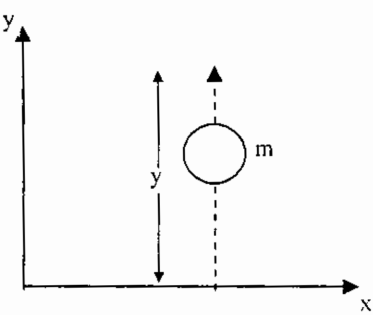
معادلة لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\therefore m\ddot{y} + mg = 0 \quad \rightarrow \quad m(\ddot{y} + g) = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y} = -g$$

وهو المطلوب.

<u>الجزء(ب):</u>



القوة $F = \frac{k}{y^2} \leftarrow F \propto \frac{1}{y^2}$

متجه القوة: $\therefore \vec{F} = -\frac{k}{y^2} \vec{j}$

ولكن العلاقة بين القوة $\vec{F}$ والجهد V هي:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad \rightarrow \quad \therefore -\frac{k}{y^2} \vec{j} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j}$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{k}{y^2} \quad \rightarrow \quad V = \int \frac{k}{y^2} dy = -\frac{k}{y} + c = -\frac{k}{y} \qquad (c = 0)$$

وتصبح دالة لاجرانج بالصورة:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{k}{y}$$

معادلة لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}})-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

$$\therefore\ m\ddot{y}-(-\frac{k}{y^2})=0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{y}+\frac{k}{y^2}=0$$

وهي معادلة الحركة، ونوجد منها العجلة بالصورة:

$$\ddot{y}=-\frac{k}{m}(\frac{1}{y^2})=-\frac{\alpha}{y^2} \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{k}{m}$$

حل المسألة(٨):

الجزء(أ): المتذبذب التوافقي البسيط:

للمتذبذب البسيط (في بعد واحد) الإزاحة = x فيكون الإحداثي المعمم: $q = x$

القوة المؤثرة: $F = kx \leftarrow F \propto x$

طاقة الجهد: $V=\frac{1}{2}k\,x^2$

طاقة الحركة:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

دالة لاجرانج: $L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$

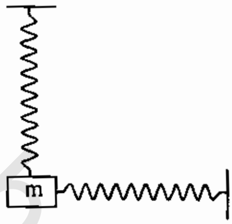
معادلة لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$$\therefore\ m\ddot{x}-(-kx)=0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{x}+kx=0$$

وهي معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي البسيط.

الجزء(ب): المتذبذب التوافقي في بعدين:



طاقتا الجهد: $V_1 = \frac{1}{2}k_1 x^2 \quad , V_2 = \frac{1}{2}k_2 y^2$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

حيث: $\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$

$\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

طاقة الحركة:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

طاقة الجهد الكلية :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2 y^2$$

دالة لاجرانج: $L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k_1x^2 - \frac{1}{2}k_2 y^2$

معادلات لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + k_1x = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{y} + k_2y = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

المعادلتان (2) ,(1) هما معادلتا الحركة للمتذبذب في بعدين.

الجزء(ج): المتذبذب التوافقي في ٣ أبعاد:

طاقات الجهد: $V_1 = \frac{1}{2}k_1x^2 \quad , V_2 = \frac{1}{2}k_2y^2 \quad , V_3 = \frac{1}{2}k_3 z^2$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad \rightarrow \quad \dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

طاقة الحركة: $T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

طاقة الجهد: $V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2)$