الباب الثاني

ميكانيكا هاملتون
Hamiltonian Mechanics

إحداثيات هاملتون و دالة هاملتون :

(١) دالة لاجرانج $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ هي دالة في الإحداثيات $(q_j, \dot{q}_j, t)$ التي تسمى بإحداثيات لاجرانج حيث q_j الإحداثيات المعممة ، $\dot{q}_j$ السرعات المعممة .

(٢) استبدل هاملتون السرعة المعممة $\dot{q}_j$ في إحداثيات لاجرانج بكمية الحركة المعممة p_j فأصبح لدينا الإحداثيات (q_j, p_j, t) والتي تسمى بإحداثيات هاملتون .

(٣) الدالة الجديدة التي تعتمد على إحداثيات هاملتون تسمى دالة هاملتون :

$$H = H(q_j, p_j, t)$$

و تعرف بالعلاقة الآتية :

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

أمثلة محلولة :

مثال (١) :

إذا كانت دالة هاملتون لا تعتمد على الزمن صراحة ، أي إذا كانت $H = H(q_j, p_j)$ فاثبت الآتي للمنظومات الميكانيكية المحافظة :

(i) H تساوي الطاقة الكلية (E) للمنظومة .

(ii) H تكون ثابتة .

(iii) مبدأ ثبوت الطاقة للمنظومات المحافظة .

الحـــل:

أولا: للمنظومات المحافظة : طاقة الجهد u هي دالة في q_j و لا تعتمد على $\dot{q}_j$

$$u = u(q_j) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

أيضاً:

$$L = T - u \longrightarrow T = L + u$$

كمية الحركة المعممة :

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(L + u) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

ومن نظرية أويلر للدوال المتجانسة ، فإن :

طاقة الحركة T تعطى بالعلاقة :

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

من (2) ، (1) :

$$\sum_j \dot{q}_j p_j = 2T \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

ومن تعريف دالة هاملتون :

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(4)$$

فباستخدام (3) و اعتبار أن : $L = T - u$

$$\therefore H = 2T - (T - u)$$
$$= T + u = E \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(5)$$

حيث $E = T + u$ هي الطاقة الكلية .

(مجموع طاقتي الحركة و الجهد). وهو المطلوب الأول .

ثانياً : أثبات أن $H = const.$ أي أن $\frac{dH}{dt} = 0$

حيث أنه لا يوجد اعتماد صريح على الزمن فإن

$$H = H(q_j, p_j) \quad \text{و} \quad L = L(q_j, \dot{q}_j)$$

و من تعريف دالة هاملتون :

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

$$\therefore \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

بالتعويض في (1) :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{dp_j}{dt}\dot{q}_j + \sum_j p_j \frac{d\dot{q}_j}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}[\sum_j p_j \dot{q}_j]$$

$$\therefore \frac{d}{dt}[\sum_j p_j \dot{q}_j - L] = 0$$

و من تعريف دالة هاملتون :

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \qquad \therefore \frac{dH}{dt} = 0$$

وهذا يعني أن H تمثل ثابتا للحركة (أو هي تكامل للحركة) . وهو المطلوب .

معادلات هاملتون القانونية :(Cannonical Hamilton's Equations)

يمكن إثبات المعادلات الآتية

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad و \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

والتي تسمى بمعادلات هاملتون القانونية للحركة أو معادلات الحركة في ميكانيكا هاملتون.

و ذلك في حالتين :

(i) إذا كانت H لا تعتمد على الزمن صراحة : $H = H(q_j, p_j)$

(ii) إذا كانت H تعتمد على الزمن صراحة : $H = H(q_j, p_j, t)$

الإثبات :

(i) **إذا كانت** $H = H(q_j, p_j)$

من تعريف دالة هاملتون :

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j)$$

$$dH = \sum_j [p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j] - dL(q_j, \dot{q}_j)$$

$$= \sum_j p_j d\dot{q}_j + \sum_j \dot{q}_j dp_j - [\sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j]$$

ولكن : $\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$ و $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

$$\therefore dH = \sum_j \cancel{p_j} d\dot{q}_j + \sum_j \dot{q}_j dp_j - [\sum_j \dot{p}_j dq_j + \sum_j \cancel{p_j} d\dot{q}_j]$$

$$= \sum_j \dot{q}_j dp_j - \sum_j \dot{p}_j dq_j \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

و لكن :

$$H = H(q_j, p_j)$$

$$\therefore dH = \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (2)$$

بمقارنة معاملات dq_j, dp_j في (2), (1) :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad , \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

وهي معادلات هاملتون القانونية .

(ii) **إذا كانت** $H = H(q_j, p_j, t)$: من تعريف دالة هاملتون :

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

$$\therefore dH = \sum_j [p_j d\dot{q}_j + \dot{q} dp_j] - dL(q_j, \dot{q}_j, t)$$

$$= \sum_j p_j d\dot{q}_j + \sum_j \dot{q}_j dp_j - \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt\right]$$

$$= \sum_j \cancel{p_j} d\dot{q}_j + \sum_j \dot{q}_j dp_j - \left[\sum_j \dot{p}_j dq_j + \sum_j \cancel{p_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt\right]$$

وحيث أن : $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{p}_j \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j$

$$\therefore dH = \sum_j \dot{q}_j dp_j - \sum_j \dot{p}_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad \text{—— (3)}$$

و لكن : $H = H(q_j, p_j, t)$

$$\therefore dH = \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad \text{—— (4)}$$

بمقارنة معاملات dq_j, dp_j, dt في (4) , (3) نحصل على :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad \text{و} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \text{و} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

(علاقة بين معدلات التغير الزمنية لكل من H,L) **(معادلات هاملتون القانونية)**

<u>ملخص مفيد في حل المسائل :</u>

(1) دالة لاجرانج $L = T - u$ تعتمد على السرعة $\dot{q}_j$

بينما دالة هاملتون $H = T + u$ [في الأنظمة المحافظة] تعتمد على p_j

مع ملاحظة أنه فى الاحداثيات القطبيه فان

$$v_r, v_\theta = (\dot{r}, r\dot{\theta}) \quad , \quad p_r,\ p_\theta = m\dot{r}\ ,\ mr\dot{\theta}$$

(٢) لإيجاد دالة هاملتون ، نستخدم إحدى العلاقتين :

(i) $H = T + u$ في حالة الأنظمة المحافظة

وغالباً ما نستخدم في الأمثلة أنظمة محافظة

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L \quad \text{(ii)}$$

حيث $p_j = p_r, p_\theta$ و $\dot{q}_j = \dot{r}, \dot{\theta}$ (فى الاحداثيات القطبية)

(٣) لإيجاد معادلات الحركة لأي منظومة نطبق معادلات هاملتون القانونية :

$\dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j}$ حيث : $q_j = r, \theta$ (فى الاحداثيات القطبية).

أمثلة محلولة :

مثال(١): إذا كانت كمية الحركة المعممة تعطى بدلالة السرعة المعممة بالعلاقة :

$$p_s = \sum_j a_{sj} \dot{q}_j$$

حيث : $a_{sj} = a_{js}$ ، $\sum_s a_{\alpha s} a_{\beta s} = \delta_{\alpha\beta}$

و باستخدام نظرية أويلر للدوال المتجانسة ، اثبت أن : دالة هاملتون تعطى بالعلاقة :

$$H = \frac{1}{2} \sum_j \sum_s a_{js} p_j p_s + u(q)$$

حيث $u(q)$ هي طاقة الجهد للمنظومة .

الحــل:

من تعريف دالة هاملتون : $H = T + u(q) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (1)$

حيث T طاقة حركة المنظومة و تعطى بالعلاقة الآتية :

(من نظرية أويلر للدوال المتجانسة)

$$T = \frac{1}{2} \sum_j p_j \dot{q}_j \qquad \text{\_\_\_\_\_} (2)$$

و حيث أن : $p_s = \sum_j a_{sj} \dot{q}_j$

فبالضرب في a_{js} و الجمع على s نحصل على :

$$\sum_s a_{js} p_s = \sum_j \sum_s a_{js} a_{sj} \dot{q}_j = \sum_j \sum_s a_{js} a_{js} \dot{q}_j$$

حيث $a_{js} = a_{sj}$

$$\sum_s a_{js} p_s = \sum_j \delta_{jj} \dot{q}_j = \sum_j \dot{q}_j = \dot{q}_j$$

و ذلك لأن : $\sum_s a_{\alpha s} a_{\beta s} = \delta_{\alpha\beta}$

$$\therefore \sum_s a_{js} a_{js} = \delta_{jj} = 1$$

$$\therefore \dot{q}_j = \sum_s a_{js} p_s \qquad \_\_\_\_\_\_ (3)$$

و هي علاقة هامة تعطي السرعة المعممة بدلالة كمية الحركة المعممة .

وبالتعويض من (3) في (2) نحصل على:

$$T = \frac{1}{2} \sum_j p_j \sum_s a_{js} p_s = \frac{1}{2} \sum_j \sum_s a_{js} p_j p_s \qquad \_\_\_\_\_\_ (4)$$

وبالتعويض في (1) نحصل على المطلوب :

$$H = \frac{1}{2} \sum_j \sum_s a_{js} p_j p_s + u(q)$$

ملحوظة : من هذا المثال يتضح أن طاقة الحركة T هي دالة تربيعية متجانسة في كمية الحركة المعممة ، وقد سبق إثبات ذلك بإستخدام معادلات لاجرانج [الباب الأول] .

مثال (٢) : الحركة الكوكبية

يتحرك كوكب حول الشمس في مسار مركزي على شكل قطع ناقص تحت تأثير قوة جاذبة قيمتها تساوي $(\gamma \frac{m}{r^2})$ حيث γ ثابت ، m كتلة الكوكب

المطلوب (١) إيجاد دالة هاملتون لحركة الكوكب .

(٢) تطبيق معادلات هاملتون لإيجاد معادلات الحركة لمسار الكوكب بالصورة .

$r^2\dot{\theta} = h$ و $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = F$

حيث $F = -\frac{\gamma}{r^2}$ [القوة المؤثرة على الكوكب لوحدة الكتلة]، h ثابت .

الحـــل :

أولاً : **إيجاد دالة هاملتون H:** يمكن حساب H بطريقتين :

الطريقة الأولى : نطبق العلاقة : $H = T + u$

حيث :

طاقة الحركة $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$

طاقة الجهد $u=-\gamma\frac{m}{r}$ ______(2)

$$\therefore H=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\gamma\frac{m}{r} \qquad (3)$$

و هي صورة دالة هاملتون بدلالة السرعة ، و المطلوب إيجادها بدلالة كمية الحركة (p_r,p_θ) حيث :

$$p_r=m\dot{r}\longrightarrow \dot{r}=\frac{p_r}{m} \qquad (4)$$

$$p_\theta=mr^2\dot{\theta}\longrightarrow \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2} \qquad (5)$$

بالتعويض في (3) :

$$H=\frac{1}{2}m[(\frac{p_r}{m})^2+r^2(\frac{p_\theta}{mr^2})^2]-\gamma\frac{m}{r}=\frac{1}{2m}[p_r^{\ 2}+\frac{p_\theta^{\ 2}}{r^2}]-\gamma\frac{m}{r} \qquad (6)$$

الطريقة الثانية : باستخدام تعريف دالة هاملتون :

$$H=\sum_j p_j\dot{q}_j-L=p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}-L \qquad (7)$$

حيث : $q_j=r,\theta \quad , \quad p_j=p_r,p_\theta$

أيضاً :

$$L=T-u=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\gamma\frac{m}{r}$$

حيث : $\dot{r}=\frac{p_r}{m} \quad , \quad \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}$

بالتعويض في (7) :

$$H = p_r(\frac{p_r}{m}) + p_\theta(\frac{p_\theta}{mr^2}) - [\frac{1}{2}m\{(\frac{p_r}{m})^2 + r^2(\frac{p_\theta}{mr^2})^2\} + \gamma\frac{m}{r}]$$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mr^2} - \gamma\frac{m}{r}$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \gamma\frac{m}{r}$$

$$= \frac{1}{2m}[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}] - \gamma\frac{m}{r}$$

وهي نفس المعادلة رقم (6) .

ثانياً : تطبيق معادلات هاملتون لإيجاد معادلات الحركة:

$$\text{(i)} \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\therefore \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \qquad \text{\_\_\_\_(8)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad \text{\_\_\_\_(9)}$$

[و قد سبق إيجادهما (المعادلة 5 و 4) من تعريف كمية الحركة] .

$$\text{(ii)} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\gamma m}{r^2} \qquad \text{\_\_\_\_(10)}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(11)}$$

المعادلتان (11) ، (10) يعطيان معادلات الحركة للكوكب .

من (11) : $\dot{p}_\theta = 0 \longrightarrow \frac{dp_\theta}{\partial t} = 0$

$$\therefore \dot{p}_\theta = \text{const.} \longrightarrow mr^2\dot{\theta} = \text{const.}$$

$$\therefore r^2\dot{\theta} = \frac{\text{const.}}{m} = h \qquad \_\_\_\_ (12)$$

حيث h ثابت ، يعرف بثابت الحركة الكوكبية .

ومن (10) : $\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\gamma m}{r^2}$

حيث : $p_r = m\dot{r} \longrightarrow \dot{p}_r = m\ddot{r}$

$p_\theta = mr^2\dot{\theta} \longrightarrow p^2_\theta = m^2r^4\dot{\theta}^2$

و تصبح المعادلة (10) بالصورة:

$$\therefore m\ddot{r} = \frac{m^2r^4\dot{\theta}^2}{mr^3} - \frac{\gamma m}{r^2} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\gamma m}{r^2}$$

وبالقسمة على m نحصل على:

$$\therefore \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{\gamma}{r^2}$$

$$\therefore \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\gamma}{r^2} = F \qquad \_\_\_\_ (13)$$

حيث $F = -\frac{\gamma}{r^2}$ هي القوة لوحدة الكتل. المعادلتان 12,13 هما معادلتا الحركة المطلوبة

<u>مثال (٣)</u> : الإحداثيات الدورية :

تعرف الإحداثيات الدورية q_i بأنها تلك التي لا تظهر في دالة لاجرانج L صراحة، والمطلوب إثبات أن كمية الحركة الخطية للنظام تكون ثابتة (أي منحفظة) فى الإحداثيات الدورية ، واذا كانت الإحداثيات دورية فى دالة لاجرانج فأنها تكون دورية أيضا فى دالة هاملتون .

<u>الحـــل</u> :من تعريف الاحداثيات الدورية q_i بأنها تلك التي لا تظهر في دالة لاجــرانج فإن :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

ومن معادلات لاجرانج للأنظمة المحافظة :
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

وباستخدام الإحداثيات الدورية :
$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

ومن تعريف كمية الحركة الخطية المعممة (للأنظمة المحافظة):
$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(p_i) = 0 \longrightarrow \dot{p}_i = 0 \longrightarrow p_i = \text{const}$$

أي أن كمية الحركة الخطية للنظام تكون ثابتة (منحفظة) في الإحداثيات الدورية .

أيضاً : إذا كانت q_i إحداثيات دورية حيث : $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

وباستخدام معادلة هاملتون القانونية الثانية : $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ فإن $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$

ومنها يتضح أن q_i لا تظهر أيضاً في دالة هاملتون H. وهو المطلوب.

وسوف نعود لدراسة الإحداثيات الدورية بالتفصيل في الباب الخامس.

<u>ملحوظة هامة</u> : " إن معظم مسائل الميكانيكا التحليلية إلي سبق حلها باستخدام ميكانيكــا لاجرانج يمكن حلها باستخدام ميكانيكا هاملتون ، و نحصل على نفس النتيجة " .

وقد أتضح ذلك من المثال(٢) الخاص بالحركة الكوكبية، ولنأخذ أمثلة آخرى على ذلك:

<u>مثـــال</u> (٤) <u>البندول السيكلويدى</u> :

سبق حل هذا المثال باستخدام معادلات لاجرانج [مثال ١٢ فى ميكانيكا لاجــرانج] ، والمطلوب هنا :

(i) إيجاد دالة هاملتون للبندول.

(ii) تطبيق معادلات هاملتون لإيجاد معادلة حركة البندول بالصورة :

$$\ddot{\theta}+\frac{1}{2}(\dot{\theta}^2-\frac{g}{a})\cot\frac{\theta}{2}=0$$

الحـل : الإحداثيات المعممة في هذا المثال هي الزاوية θ فقط $q_j \leftarrow$

(i) لإيجاد دالة هاملتون : نستخدم التعريف :

$$H=\sum_j p_j\dot{q}_j - L = p_\theta\dot{\theta} - L \qquad \_\_\_\_(1)$$

حيث $q_j=\theta$ ، $p_j=p_\theta$

حيث L هي دالة لاجرانج ، و قد سبق إيجادها بالتفصيل عند حل هذا المثال في ميكانيكا لاجرانج ، و صورتها : $L=T-u=ma^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta)+mga(1-\cos\theta)$

فبالتعويض في (1) :

$$H=p_\theta\dot{\theta}-ma^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta)-mga(1-\cos\theta) \qquad \_\_\_\_(2)$$

ولإيجاد H بدلالة كمية الحركة p_θ:

من معادلات كمية الحركة :

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=2ma^2\dot{\theta}(1-\cos\theta) \qquad \_\_\_\_(3)$$

حيث :

$$T=ma^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta) \quad \text{و} \quad p_j=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}$$

ومن (3) :

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{2ma^2(1-\cos\theta)} \qquad \_\_\_\_(4)$$

وبالتعويض في (2) نحصل على:

$$H=\frac{p_\theta^2}{2ma^2(1-\cos\theta)}-ma^2\left(\frac{p_\theta^2}{4m^2a^4(1-\cos\theta)^2}\right)(1-\cos\theta)-mga(1-\cos\theta)$$

$$=\frac{p_\theta^2}{2ma^2(1-\cos\theta)}-\frac{p_\theta^2}{4ma^2(1-\cos\theta)}-mga(1-\cos\theta)$$

$$=\frac{p_\theta^2}{4ma^2(1-\cos\theta)}-mga(1-\cos\theta) \qquad \_\_\_\_(5)$$

(ii) تطبيق معادلات هاملتون لإيجاد معادلات حركة البندول :

$$(1) \qquad \dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

حيث : $\dot{q}=\dot{\theta}, q=\theta, p=p_\theta$

$$\therefore \dot{\theta}_j=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{2ma^2(1-\cos\theta)}$$

[و قد سبق إيجادها من معادلة كمية الحركة]

$$(2) \qquad \dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=\frac{p_\theta^2}{4ma^2}\frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}+mga\sin\theta \qquad \_\_\_\_(6)$$

من المعادلة (6) يمكن إيجاد معادلة حركة البندول كالآتي :

بوضع $\dot{p}_\theta=\frac{dp_\theta}{dt}$ و التعويض عن p_θ من (3) نجد أن :

$$\frac{dp_\theta}{dt}=\frac{1}{4ma^2}[2ma^2\dot{\theta}(1-\cos\theta)]^2\frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}+mga\sin\theta$$

$$=ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta+mga\sin\theta$$

$$\therefore \frac{d}{dt}[2ma^2\dot{\theta}(1-\cos\theta)]=ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta+mga\sin\theta$$

بالقسمة على $2ma^2$:

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[\dot{\theta}(1-\cos\theta)\right] = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \sin\theta + \frac{g}{2a}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{a}\right)\sin\theta$$

$$\dot{\theta}(\sin\theta\cdot\dot{\theta}) + \ddot{\theta}(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{a}\right)\sin\theta$$

بالقسمة على $\sin\theta$:

$$\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{a}\right)$$

و لكن: $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$

$$\therefore \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{a}\right)$$

بالقسمة على $\tan\frac{\theta}{2}$:

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\cot\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{a}\right)\cot\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 - \frac{g}{a}\right)\cot\frac{\theta}{2} = 0$$

وهو المطلوب .

مثال(٥): إذا كانت طاقتي الحركة و الجهد لمنظومة ميكانيكية هما :

$$T = km(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\sin^2 x) \quad , \; u = -2kg\cos x$$

حيث k , m , g ثوابت

المطلوب :

(i) إيجاد دالة هاملتون للمنظومة .

(ii) تطبيق معادلات هاملتون لإيجاد معادلات حركة المنظومة بالصورة :

$$\ddot{x} - a^2\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{g}{m}\sin x = 0$$

حيث a ثابت .

الحـل : سبق حل هذا المثال باستخدام ميكانيكا لاجرانج (مثال رقم ٩) .

(i) **إيجاد دالة هاملتون :** من التعريف :

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$
$$= p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - L$$
$$= p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{y} - L \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

$$q_j = q_1, q_2 = x, y$$

حيث L دالة لاجرانج :

$$L = T - u = km(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \sin^2 x) + 2kg\cos x$$

بالتعويض في (1) :

$$H = p_1\dot{x} + p_2\dot{y} - km(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\sin^2 x) - 2kg\cos x \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

و لإيجاد H بدلالة كميات الحركة (p_1, p_2):

نستخدم معادلات كمية الحركة :

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

حيث :

$$T = km\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\sin^2 x\right)$$
$$\therefore p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2km\dot{x}$$
$$\therefore \dot{x} = \frac{p_1}{2km} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (3)}$$
$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = 2km\dot{y}\sin x^2$$
$$\therefore \dot{y} = \frac{p_2}{2km\sin^2 x} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (4)}$$

بالتعويض من (4) و (3) في (2) :

$$H = p_1\left(\frac{p_1}{2km}\right) + p_2\left(\frac{p_2}{2km\sin^2 x}\right) - \frac{1}{4km}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2 x}\right) - 2kg\cos x$$

$$= \frac{1}{2km}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2 x}\right) - \frac{1}{4km}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2 x}\right) - 2kg\cos x$$

$$= \frac{1}{4km}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2 x}\right) - 2kg\cos x \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(5)$$

(ii) <u>تطبيق معادلات هاملتون لإيجاد معادلة حركة المنظومة</u> :

(1) $$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\therefore \dot{q}_1 = \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{2km} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(6)$$

$$\therefore \dot{q}_2 = \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{2km\sin^2 x} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(7)$$

المعادلتان (7) ، (6) سبق إيجادهما من معادلات كمية الحركة [المعادلتان (4)، (3)] .

(2) $$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\therefore \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{p_2^2\cos x}{2km\sin^3 x} - 2kg\sin x \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(8)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(9)$$

من (9) ، (8) يمكن إيجاد معادلات الحركة للمنظومة كالآتي :

من (9) :

$$\frac{dp_2}{dt} = 0 \longleftarrow \dot{p}_2 = 0$$

$$\therefore p_2 = \text{const.} = c \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(10)$$

و تصبح المعادلة (4) أو (7) :

$$\dot{y} = \frac{c}{2km\sin^2 x} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(11)$$

أيضا من(3) أو (6) :

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}_1}{2km} \longleftarrow \dot{x} = \frac{p_1}{2km}$$

و من (8) :

$$\ddot{x} = \frac{1}{2km}\left[\frac{p_2^2 \cos x}{2km \sin^3 x} - 2kg \sin x\right]$$

و باستخدام (10) :

$$\therefore \ddot{x} = \frac{1}{2km}\left[\frac{c^2 \cos x}{2km \sin^3 x} - 2kg \sin x\right]$$

$$\therefore \ddot{x} - \frac{c^2}{4k^2m^2}\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{g}{m}\sin x = 0$$

و بوضع : $\frac{c^2}{4k^2m^2} = a^2$

و هو المطلوب

$$\therefore \ddot{x} - a^2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{g}{m}\sin x = 0$$

<u>**ملحوظة**</u> : بكتابة $\beta = \frac{g}{m}$ يمكن كتابة العلاقة السابقة بالصورة :

$$\therefore \ddot{x} - a^2 \cot x \ \mathrm{cosec}^2 x + \beta \sin x = 0$$

<u>**مثـــال (٦) :**</u>

منظومة ميكانيكية طاقة حركتها $T = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right)$ وطاقة جهدها $u = (q_1 - q_2)^2$

المطلوب :

١- إيجاد دالتى لاجرانج وهاملتون للمنظومة .

٢- تطبيق معادلات لاجرانج وكذلك معادلات هاملتون لإيجاد معالة الحركة بالصورة : $\ddot{q}_1 + 4q_1 = 2(At + B)$

حيث A و B ثابتان .

<u>**الحـــل :**</u> أولاً : <u>إيجاد دالة لاجرانج وتطبيق معادلات لاجرانج :</u>

$$L = T - u = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - (q_1 - q_2)^2 \qquad \_\_\_\_\_ (1)$$

معادلات لاجرانج : حيث أن لدينا إحداثيان عموميان q_1, q_2 فيكون لدينا معادلتين

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0 \ (i)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_1)-\left[-2(q_1-q_2)\right]=0$$

$$\therefore \ddot{q}_1+2(q_1-q_2)=0 \qquad \_\_\_\_\_ (2)$$

$$(ii) \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_2)-\left[2(q_1-q_2)\right]=0 \therefore \ddot{q}_2-2(q_1-q_2)=0 \qquad \_\_\_\_\_ (3)$$

من (3) ، (2) بالجمع : $\ddot{q}_1+\ddot{q}_2=0$

بالتكامل بالنسبة للزمن : $\dot{q}_1+\dot{q}_2=const=A$

و بالتكامل مرة ثانية : $q_1+q_2=At+B$

حيث B ثابت التكامل :

$$\therefore q_2=At+B-q_1 \qquad \_\_\_\_\_ (4)$$

بالتعويض في (2) :

$$\therefore \ddot{q}_1+2\left[q_1-(At+B-q_1)\right]=0$$

$$\therefore \ddot{q}_1+2\left[2q_1-(At+B)\right]=0$$

$$\therefore \ddot{q}_1+4q_1=2(At+B)$$

وهي معادلة الحركة المطلوبة .

ثانياً : دالة هاملتون و تطبيق معادلات هاملتون :

نوجد دالة هاملتون بإحدى الطريقتين :

$$(i) \quad H=T+u=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right)+\left(q_1-q_2\right)^2=0 \qquad \_\_\_\_\_ (5)$$

و بدلالة كمية الحركة : من معادلة كمية الحركة : $p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ نجد أن :

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 \ , \quad \therefore p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1$$

بالتعويض في (5) :

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + (q_1 - q_2)^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(6)}$$

$$\text{(ii)} \quad H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

$$= p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - L \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(7)}$$

حيث :

$$p_1 = \dot{q}_1 \quad , \quad p_2 = \dot{q}_2 \quad , \quad L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (q_1 - q_2)^2$$

بالتعويض في (7) نحصل على :

$$H = p_1(p_1) + p_2(p_2) - \left[\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - (q_1 - q_2)^2\right]$$

$$= p_1^2 + p_2^2 - \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2^2 + (q_1 - q_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (q_1 - q_2)^2$$

وهي المعادلة رقم (6) .

<u>ولتطبيق معادلات هاملتون :</u>

المجموعة الأولى : $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ تعطى معادلات كمية الحركة ، بينما المجموعة الثانية

$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$ هي التي تعطي معادلات الحركة المطلوبة

$$\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -2(q_1 - q_2) \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 2(q_1 - q_2)$$

8 9

من (8) : $p_1 = \dot{q}_1 \leftarrow \dot{p}_1 = \ddot{q}_1$

$\therefore \ddot{q}_1 + 2(q_1 - q_2) = 0$ ______ (10)

من (9) : $p_2 = \dot{q}_2 \leftarrow \dot{p}_2 = \ddot{q}_2$

$\therefore \ddot{q}_2 = 2(q_1 - q_2) \to \ddot{q}_1 - 2(q_1 - q_2) = 0$ ______ (11)

من (11) ، (10) و كما سبق يمكن الحصول على معادلة الحركة بالصورة :

$\ddot{q}_1 + 4q_1 = 2(At + B)$

<u>مثال(٧)</u>: أوجد الحل العام لمعادلة الحركة في المثال السابق و ذلك بالصورة :

$q_1 = (at + b) + c\sin(2t + \alpha)$

حيث a , b , c , α ثوابت ، $b = \frac{1}{2}B$ ، $a = \frac{1}{2}A$

و من ذلك أوجد معادلة q_2 بالصورة:

$q_2 = (at + b) - c\sin(2t + \alpha)$

أيضا أوجد معادلتين لكميتي الحركة p_1, p_2 بالصورة :

$p_{1,2} = a \pm 2c\cos(2t + \alpha)$

<u>الحل</u> : أولاً : <u>إيجاد الحل العام لمعادلة الحركة</u>

الحل العام للمعادلة : $\ddot{q}_1 + 4q_1 = 2(At + B)$

يكتب بالصورة : $q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}$

حيث : $q_1^{(1)}$ هي الحل العام للمعادلة المتجانسة .

$\ddot{q}_1 + 4q_1 = 0$

وهذا الحل يعطى بالصورة :

$q_1^{(1)} = c\sin(2t + \alpha)$

حيث : c, α ثابتان .

$q_1^{(2)}$ هي الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

$$\ddot{q}_1 + 4q_1 = 2(At + B)$$

وهذا الحل يعطى بالصورة : $q_1^{(2)} = \frac{1}{2}(At + B)$

ويصبح الحل العام لمعادلة الحركة بالصورة :

$$\begin{aligned} q_1 &= c\sin(2t+\alpha) + \frac{1}{2}(At+B) \\ &= \frac{1}{2}At + \frac{1}{2}B + c\sin(2t+\alpha) \\ &= (at+b) + c\sin(2t+\alpha) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1) \end{aligned}$$

حيث : $a = \frac{1}{2}A$ ، $b = \frac{1}{2}B$

و من العلاقة بين q_1, q_2 :-

$$q_2 = At + B - q_1 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

[سبق إيجادها في المثال] .

فبالتعويض من (1) في (2) نحصل على :

$$\begin{aligned} q_2 &= At + B - \left[\frac{1}{2}(At+B) + c\sin(2t+\alpha)\right] \\ &= \frac{1}{2}At + \frac{1}{2}B - c\sin(2t+\alpha) \\ &= (at+b) - c\sin(2t+\alpha) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3) \end{aligned}$$

<u>ولإيجاد معادلتي</u> p_1, p_2 : حيث أن

$$p_1 = \dot{q}_1 \quad ، \quad p_2 = \dot{q}_2$$

فبتفاضل (3) ، (1) بالنسبة للزمن نحصل على :

$$p_1 = a + 2c\cos(2t+\alpha)$$
$$p_2 = a - 2c\cos(2t+\alpha)$$

$$\therefore p_{1,2} = a \pm 2c\cos(2t+\alpha)$$

و هو المطلوب .

<u>إيجاد الحل</u> $q_1^{(1)}$: بالتعويض عن $\ddot{q}_1 = \dot{q}_1 \dfrac{d\dot{q}_1}{dq_1}$ في المعادلة المتجانسة

$$\ddot{q}_1 + 4q_1 = 0 \to \dot{q}_1 \frac{d\dot{q}_1}{dq_1} = -4q_1 \to \dot{q}_1 d\dot{q}_1 = -4q_1 dq_1$$

وبالتكامل :

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 = -4\left(\frac{1}{2}q_1^2\right) + \text{const}$$

$$\therefore \dot{q}_1^2 = -4q_1^2 + \text{const} = 4\left(\frac{\text{const}}{4} - q_1^2\right) = 4\left(c^2 - q_1^2\right)$$

$$\therefore \dot{q}_1 = 2\sqrt{c^2 - q_1^2}$$

و بالتكامل مرة ثانية :

$$\therefore \int \frac{dq_1}{\sqrt{c^2 - q_1^2}} = 2\int dt$$

$$\therefore \sin^{-1}\frac{q_1}{c} = 2t + \alpha$$

$$\therefore q_1^{(1)} = c\sin(2t+\alpha)$$

<u>إيجاد الحل</u> $q_1^{(2)}$: من المعادلة عير المتجانسة : $\ddot{q}_1 + 4q_1 = 2(At + B)$

و باستخدام المؤثر $D = \dfrac{d}{dt} \rightarrow D^2 = \dfrac{d^2}{dt^2}$

$$\therefore (D^2 + 4)q_1 = 2(At + B) \to q_1 = \frac{1}{D^2 + 4}\cdot 2(At + B)$$

$$\therefore q_1^{(2)} = \frac{1}{D^2+4}\cdot 2(At+B) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{1}{4}D^2}2(At+B)$$

$$= \frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}D^2)^{-1}(At+B)$$

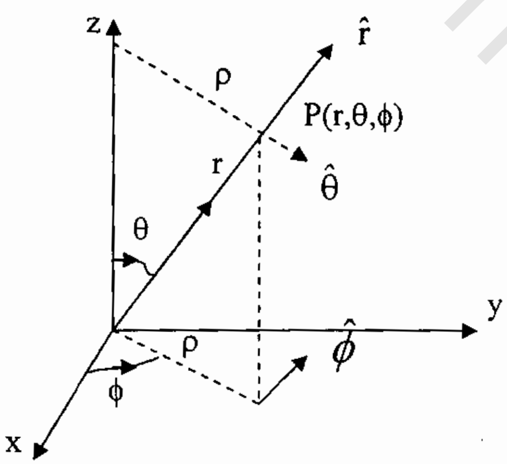
$$= \frac{1}{2}\left[1-\frac{D^2}{4}+\left(\frac{D^2}{4}\right)^2+\cdots\right](At+B)$$

$$= \frac{1}{2}(At+B) - \frac{1}{8}D^2(At+B)+\cdots$$

و لكن : $D(At+B) = A \quad , \quad D^2(At+B) = D(A) = 0,\cdots$

$$\therefore q_1^{(2)} = \frac{1}{2}(At+B)$$

<u>مثال (٨) : الحركة الفراغية لجسيم في الإحداثيات القطبية الكروية</u> : [انظر مثال (١٥-أ) فى ميكانيكا لاجرانج]



<u>تمهيد</u> :

<u>في الاحداثيات القطبية الكروية</u> :

$$x = \rho\cos\phi = r\sin\theta\cos\phi \quad , \quad \rho = r\sin\theta$$

$$y = \rho\sin\phi = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

<u>عنصر متجه الإزاحة</u> :

في الإحداثيات الكرتيزية: $d\vec{r} = (dx)\hat{i} + (dy)\hat{j} + (dz)\hat{k}$

في الإحداثيات القطبية الكروية : $d\vec{r} = (dr)\hat{r} + (rd\theta)\hat{\theta} + (r\sin\theta d\phi)\hat{\phi}$

<u>متجه السرعة :</u> في الإحداثيات الكرتيزية:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

حيث : $v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}$

وفي الإحداثيات القطبية الكروية :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\frac{dr}{dt})\hat{r} + (r\frac{d\theta}{dt})\hat{\theta} + (r\sin\theta\frac{d\phi}{dt})\hat{\phi}$$

$$= (\dot{r})\hat{r} + (r\dot{\theta})\hat{\theta} + (r\sin\theta\dot{\phi})\hat{\phi}$$

$$= v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} + v_\phi\hat{\phi}$$

وتصبح مركبات السرعة في الإحداثيات القطبية الكروية هي :

$$v_r = (\dot{r}), v_\theta = (r\dot{\theta}), v_\phi = (r\sin\theta\dot{\phi})$$

<u>المثـــال :</u> جسيم كتلته m يتحرك في فراغ الإحداثيات القطبية الكروية (r,θ,ϕ) تحت تأثير قوة معينة في مجال طاقة جهده $u(r,\theta,\phi)$ والمطلوب :

(١) إيجاد دالتي لاجرانج و هاملتون للجسيم المتحرك .

(٢) تطبيق معادلات لاجرانج و كذلك معادلات هاملتون للحصول علـــى معـــادلات الحركة للجسيم .

<u>الحـل :</u> توجد لدينا ٣ إحداثيات معممة : $q_j = q_1, q_2, q_3 = r, \theta, \phi$

(i) <u>**إيجاد دالة لاجرانج**</u> : $L = T - u$

حيث T طاقة الحركة :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)$$

u طاقة الجهد $\longrightarrow u = u(r,\theta,\phi)$

$$\therefore L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - u \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

(ii) **دالة هاملتون** :

$$H = \sum_j p_j\dot{q}_j - L$$

$$= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - L$$

$$= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) + u \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

و بدلالة كميات الحركة : من معادلات كمية الحركة $p_j = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ نجد أن :

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \longrightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} \longrightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}$$

وبالتعويض في دالة هاملتون :

$$H = p_r\left(\frac{p_r}{m}\right) + p_\theta\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right) + p_\phi\left(\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}\right)$$

$$-\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2\right] + u$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + u(r,\theta,\phi) \qquad \text{\_\_\_\_\_(3)}$$

(iii) **تطبيق معادلات لاجرانج لإيجاد معادلات الحركة** :

لدينا ٣ معادلات من معادلات لاجرانج صورتهم :

$$q_j = q_1, q_2, q_3 = r, \theta, \phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

و من (1) :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2\theta\dot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\, r\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\dot{\phi} - \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 \sin\theta\cos\theta\dot{\phi} - \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

بالتعويض في معادلات لاجرانج نحصل على :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) + \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) - \left(mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right) + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}) + \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0$$

وهي معادلات الحركة المطلوبة ، و يمكن كتابتها بالصورة :

$$m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right] = -\frac{\partial u}{\partial r} \qquad \_\_\_\_\_ (4)$$

$$m\left[\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right] = -\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad \_\_\_\_\_ (5)$$

$$m\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = -\frac{\partial u}{\partial \phi} \qquad \text{\_\_\_\_\_} (6)$$

وقد سبق إيجادها فى مثال (١٥-أ) فى ميكانيكا لاجرانج .

(iv) <u>تطبيق معادلات هاملتون لإيجاد معادلات الحركة:</u>

المجموعة الأولى $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ تعطي معادلات كمية الحركة .

بينما المجموعة الثانية $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$ هي التي تعطى معادلات الحركة المطلوبة .

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{mr^3\sin^2\theta} - \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \text{\_\_\_\_\_} (7)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2}{mr^2\sin^3\theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad \text{\_\_\_\_\_} (8)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2}{mr^2\sin^3\theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad \text{\_\_\_\_\_} (9)$$

من (9) ، (8) ، (7) يمكن إيجاد معادلات الحركة و ذلك بعد التعويض عن :

$$p_r = m\dot{r} \quad . \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad , \quad p_\phi = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}$$

و باعتبار أن $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt}$ فنحصل على :

من (7) :

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} = \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{mr^3} + \frac{(mr^2\sin^2\theta\dot{\phi})^2}{mr^3\sin^2\theta} - \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\therefore m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right] = -\frac{\partial u}{\partial r} \qquad \text{\_\_\_\_\_} (10)$$

ومن (8) :

$$\frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt}=\frac{(mr^2\sin^2\theta\dot{\phi})^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}-\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\therefore m\left[\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}-r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right]=-\frac{\partial u}{\partial\theta} \qquad \_\_\_\_(11)$$

ومن (9) :

$$\frac{d(mr^2\sin^2\theta\dot{\phi})}{dt}=-\frac{\partial u}{\partial\phi}$$

$$\therefore m\left[\frac{d}{dt}(r^2\sin\theta^2\dot{\phi})\right]=-\frac{\partial u}{\partial\phi} \qquad \_\_\_\_(12)$$

المعادلات (12) ، (11)، (10) هي معادلات الحركة المطلوبة .

حالة خاصة : إذا كان الجسيم يتحرك في المستوى القطبي (r,θ)حركة حرة

ففي حالة الحركة الحرة : فإن $u=0$

و في المستوى القطبي : $v_r=\dot{r}\ ,\ v_\theta=r\dot{\theta}\ ,\ v_\phi=0$ و تصبح معادلات الحركة بالصورة :

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=0 \quad\rightarrow\quad \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0$$

$$m\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}=0 \quad\rightarrow\quad r^2\dot{\theta}=\text{const}=h$$

مثال (٩) : في المثال السابق الخاص بحركة جسيم في فراغ الإحداثيات القطبية الكروية أوجد:

(i) القوى المعممة المؤثرة على الجسيم باستخدام معادلات لاجرانج للأنظمة الهولونومية.

(ii) العلاقة بين القوى المؤثرة على الجسيم والقوى المعممة ، ومن ذلك أوجد مركبات العجلة في اتجاهات المحاور القطبية الثلاثة.

الحل:

(i) **إيجاد القوى المعممة** : عنصر متجه الإزاحة في الإحداثيات القطبية الكروية هو :

$$d\vec{r}=(dr)\hat{r}+(rd\theta)\hat{\theta}+(r\sin\theta d\phi)\hat{\phi}$$

حيث $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi}$ هي متجهات الوحدة في تلك الإحداثيات .

لدينا ٣ إحداثيات معممة : $q_j = q_1, q_2, q_3 = r, \theta, \phi$ فيكون هناك ٣ قوى معممة مناظرة لها $Q_j = Q_r, Q_\theta, Q_\phi$.

ومن معادلات لاجرانج للأنظمة الهولونومية (التي تظهر فيها Q_j):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$$\therefore Q_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} \qquad \text{\_\_\_\_\_} (1)$$

$$Q_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} \qquad \text{\_\_\_\_\_} (2)$$

$$Q_\phi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} \qquad \text{\_\_\_\_\_} (3)$$

حيث T هي طاقة الحركة ، و تعطى بالعلاقة :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad . \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{2}m(2r\dot{\theta}^2 + 2r\sin^2\theta\dot{\phi}^2) = mr\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{2}m(r^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2) = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$$

بالتعويض في (3) ، (2)،(1) نحصل على :

$$Q_r = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) = m\left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right] \qquad \text{\_\_\_\_\_} (4)$$

$$Q_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = m\left[\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right] \qquad \text{\_\_\_\_} (5)$$

$$Q_\phi = \frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = m\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) \qquad \text{\_\_\_\_} (6)$$

المعادلات (6) ،(5)،(4) هي معادلات التي تعطي مركبات القوى المعممة المطلوبة .

(ii) العلاقة بين القوى المؤثرة على الجسيم و القوى المعممة :

إذا كانت $\vec{F}$ هي القوة المؤثرة على الجسيم المتحرك في فراغ الإحـداثيات القطبيـة الكروية فيكون لها المركبات الثلاثة : F_r, F_θ, F_ϕ

ونحصل على العلاقة بين $\vec{F}, Q_j$ من معادلة الشغل:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \sum_j Q_j dq_j \qquad \text{\_\_\_\_}(7)$$

حيث :

$$\vec{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} + F_\phi\hat{\phi} \qquad \text{\_\_\_\_}(8)$$

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi} \qquad \text{\_\_\_\_}(9)$$

$$\therefore\ \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_r dr + rF_\theta d\theta + r\sin\theta F_\phi d\phi \qquad \text{\_\_\_\_}(10)$$

أيضاً :

$$\sum_j Q_j dq_j = Q_r dr + Q_\theta d\theta + Q_\phi d\phi \qquad \text{\_\_\_\_}(11)$$

حيث: $q_j = r, \theta, \phi$

من (11) ، (10) ، (7) نحصل على :

$$F_r dr + rF_\theta d\theta + r\sin\theta F_\phi d\phi = Q_r dr + Q_\theta d\theta + Q_\phi d\phi$$

و بمقارنة المعاملات في الطرفين نحصل على :-

$$Q_r = F_r, Q_\theta = rF_\theta, Q_\phi = r\sin\theta F_\phi \qquad \text{\_\_\_\_}(12)$$

(iii) لإيجاد مركبات العجلة في الإحداثيات القطبية الكروية :

إذا كانت مركبات العجلة هي a_r, a_θ, a_ϕ فمن قانون نيوتن الثاني :

$$F_r = ma_r \quad , \quad F_\theta = ma_\theta \quad F_\phi = ma_\phi$$

$$\therefore\ a_r = \frac{F_r}{m}\ ,\ a_\theta = \frac{F_\theta}{m}\ ,\ a_\phi = \frac{F_\phi}{m} \qquad \text{\_\_\_\_}(13)$$

و من (12) نجد أن :

$$F_r = Q_r \quad , \quad F_\theta = \frac{Q_\theta}{r} \quad , \quad F_\phi = \frac{Q_\phi}{r\sin\theta}$$

بالتعويض في (13) :

$$\therefore a_r = \frac{Q_r}{m} \quad , \quad a_\theta = \frac{Q_\theta}{mr} \quad , \quad a_\phi = \frac{Q_\phi}{mr\sin\theta}$$

و بالتعويض عن كل من Q_r, Q_θ, Q_ϕ من (6) ، (5) و(4) :

$$\therefore a_r = \frac{Q_r}{m} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \qquad \text{\_\_\_\_} (14)$$

$$a_\theta = \frac{Q_\theta}{mr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 \qquad \text{\_\_\_\_} (15)$$

$$a_\phi = \frac{Q_\phi}{mr\sin\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) \qquad \text{\_\_\_\_} (16)$$

حالة خاصة:

في حالة الحركة في المستوى القطبي (r,θ) فإن مركبتي العجلة تصبح :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad , \quad a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

وقد سبق ايجادها فى علم الديناميكا

مثـال (١٠): حركـة جسـيم فـي فـراغ الإحـداثيات الاسـطوانية [انظر مثال (١٥-ب) فى ميكانيكا لاجرانج]

يتحـرك جسـيم كتلتـه m فـي مجـال قـوة محافظـة جهـدها $u(\rho,\phi,z)$ ، اسـتخدم فـراغ الإحداثيات الاسطوانية (ρ,ϕ,z) لإيجاد الآتي :

(١) دالة لاجرانج لحركة الجسيم .

(٢) تطبيق معادلات لاجرانج لإيجاد معادلة حركة الجسيم في الفراغ .

(٣) دالة هاملتون للجسيم المتحرك وتطبيق معادلات هاملتون لايجاد معادلات حركة الجسيم .

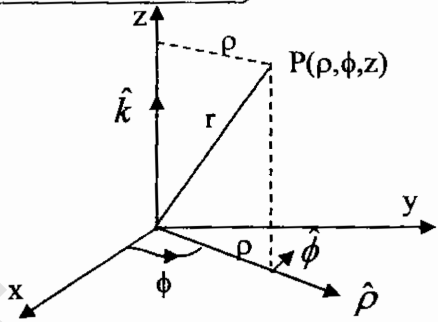
الحل : في الإحداثيات الاسطوانية تكون متجهات الوحدة $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}$

و يكون عنصر الإزاحة :

$$d\bar{r} = (d\rho)\hat{\rho} + (\rho d\phi)\hat{\phi} + (dz)\hat{k}$$

متجه السرعة :

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)\hat{\rho} + \left(\rho\frac{d\varphi}{dt}\right)\hat{\varphi} + \left(\frac{dz}{dt}\right)\hat{k}$$



$$=(\dot{\rho})\hat{\rho}+(\rho\dot{\varphi})\hat{\varphi}+(\dot{z})\hat{k}$$

$$=v_\rho\hat{\rho}+v_\varphi\hat{\varphi}+v_z\hat{k}$$

أي أن مركبات السرعة هي :

$$v_\rho=\dot{\rho}\ ,\ v_\phi=\rho\dot{\phi}\ ,\ \ v_z=\dot{z}$$

(i) **إيجاد دالة لاجرانج :**

$$L=T-u$$

حيث T طاقة الحركة :

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(v_\rho^2+v_\phi^2+v_z^2)=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2)$$

طاقة الجهد u :

$$u=u(\rho,\phi,z)$$

$$\therefore L=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2)-u(\rho,\phi,z) \qquad \_\_\_\_(1)$$

(ii) **تطبيق معادلات لاجرانج لإيجاد معادلات الحركة :**

لدينا ٣ إحداثيات معممة $q_j=\rho,\phi,z$ فيكون لدينا ٣ معادلات

$$,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\phi}=0,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\rho}=0\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0$$

و من (1) :

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}=m\dot{\rho}\ ,\quad \frac{\partial L}{\partial\rho}=m\rho\dot{\phi}^2-\frac{\partial u}{\partial\rho}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=m\rho^2\dot{\phi}\ ,\quad \frac{\partial L}{\partial\phi}=-\frac{\partial u}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=m\dot{z}\ ,\quad \frac{\partial L}{\partial z}=-\frac{\partial u}{\partial z}$$

بالتعويض في معادلات لاجرانج نحصل على : $\frac{d}{dt}(m\dot{\rho})-\left(m\rho\dot{\phi}^2-\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0$

$$\therefore m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)=-\frac{\partial u}{\partial\rho} \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^{2}\dot{\phi})-\left(-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)=0$$

$$m\frac{d}{dt}(\rho^{2}\dot{\phi})=-\frac{\partial u}{\partial \phi} \qquad \_\_\_\_ (3)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z})-(-\frac{\partial u}{\partial z})=0$$

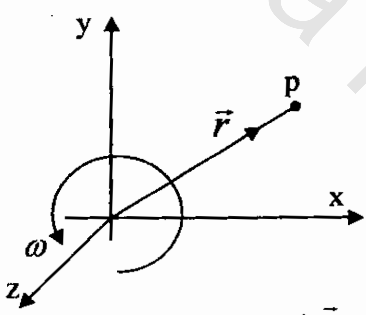
$$m(\ddot{z})=-\frac{\partial u}{\partial z} \qquad \_\_\_\_ (4)$$

المعادلات (4) ، (3) ، (2) هي معادلات الحركة للجسيم المتحرك في فراغ الإحداثيات الاسطوانية (ρ,ϕ,z) في وجود مجال محافظ جهده $u(\rho,\phi,z)$.

و هو المطلوب .

(٣) إيجاد دالة هاملتون وتطبيق معادلة هاملتون : يترك للطالب كمسألة

مثال (١١) : الحركة المستوية لجسيم في مجموعة محاور متحركة



مقدمة : عن المحاور المتحركة (أو الدوارة)

إذا دارت (أو تحركت) المحاور بسرعة زاوية ω حول محور z (العمودي على x,y)

$$\therefore \vec{\omega}=\omega\hat{k}$$

حيث $\hat{k}$ متجه الوحدة في اتجاه z

و حيث أن : الجسيم p يتحرك في المستوى xy

$$\therefore \vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$$

السرعة في حالة المحاور المتحركة (أو الدوارة) تعطى بالعلاقة الآتية :

$$\vec{v}=\underbrace{\dot{\vec{r}}}_{\text{سرعة الجسيم}}+\underbrace{\vec{\omega}\wedge\vec{r}}_{\text{سرعة المحاور}} \qquad \_\_\_\_ (1)$$

حيث :

$$\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

إذا كانت المحاور ثابتة فإن :

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}$$

ولإيجاد مركبات السرعة في المحاور المتحركة : من (1) :

$$\vec{v}=\left(\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}\right)+\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & o\end{vmatrix}$$

$$=(\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j})+(-\omega y\hat{i}+\omega x\hat{j})$$

$$=(\dot{x}-\omega y)\hat{i}+(\dot{y}+\omega x)\hat{j}$$

$$=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}$$

.: مركبات السرعة في المحاور المتحركة هي

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}-\omega y\\ v_y &= \dot{y}+\omega x \end{aligned} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

المثال : يتحرك جسيم كتلته m في مجال جهده $u(x,y)$ في المستوى (xy) ، فإذا كانت المحاور تدور بسرعة زاوية ω حول محور z ، أوجد :

(i) دالتي لاجرانج و هاملتون لحركة الجسيم .

(ii) معادلات حركة الجسيم بالنسبة للمحاور المتحركة .

وذلك بتطبيق معادلات لاجرانج ،و كذلك معادلات هاملتون

الحل:

(i) إيجاد دالتي لاجرانج و هاملتون : حيث أن الجسيم يتحرك في المستوى (xy)

.: هناك إحداثيان معممان $q_1=x\ ,\ q_2=y$

وتكون دالة هاملتون بالصورة :

$$H=\sum_j p_j\dot{q}_j-L\ =p_x\dot{x}+p_y\dot{y}-L \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

دالة لاجرانج :

$$L = T - u$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 - u = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) - u$$
$$= \frac{1}{2}m[(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2] - u \qquad \_\_\_\_\_ (4)$$

وبالتعويض في (3)

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \frac{1}{2}m\left[(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2\right] + u \qquad \_\_\_\_\_ (5)$$

و من معادلات كمية الحركة :

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} - \omega y) \qquad \_\_\_\_\_ (6)$$
$$p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \omega x) \qquad \_\_\_\_\_ (7)$$

من (7) ، (6) يمكن إيجاد : $\dot{x}, \dot{y}$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} + \omega y \ , \ \dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega x$$

بالتعويض في (5) :

$$H = p_x\left(\frac{p_x}{m} + \omega y\right) + p_y\left(\frac{p_y}{m} - \omega x\right) - \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{m}\right)^2\right] + u$$
$$= \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} + \omega(p_x y - p_y x) - \frac{p_x^2}{2m} - \frac{p_y^2}{2m} + u$$
$$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \omega(p_x y - p_y x) + u \qquad \_\_\_\_ (8)$$

وهي دالة هاملتون .

(ii) <u>إيجاد معادلات حركة الجسيم:</u>

<u>أولاً : تطبيق معادلات لاجرانج لإيجاد معادلات حركة الجسيم .</u>

حيث أن $q_1 = x \ , \ q_2 = y$

فيكون لدينا معادلتين من معادلات لاجرانج :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

و من (4) :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} - \omega y) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = m\omega(\dot{y} + \omega x) - \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \omega x) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -m\omega(\dot{x} - \omega y) - \frac{\partial u}{\partial y}$$

و بالتعويض في معادلتي لاجرانج :

$$m\frac{d}{dt}(\dot{x} - \omega y) - m\omega(\dot{y} + \omega x) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$m\frac{d}{dt}(\dot{y} + \omega x) + m\omega(\dot{x} - \omega y) + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

وهي معادلات الحركة المطلوبة ، و يمكن كتابتها بالصورة :

$$m(\ddot{x} - \omega\dot{y}) - m\omega(\dot{y} + \omega x) = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\therefore \ m(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\therefore m(\ddot{y} + \omega\dot{x}) + m\omega(\dot{x} - \omega y) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore m(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

ثانياً : تطبيق معادلات هاملتون لإيجاد معادلات حركة الجسيم .

من معادلات هاملتون [المجموعة الثانية $\dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j}$] :

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \omega p_y - \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \_\_\_\_\_(9)$$

$$\dot{p}_u = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\omega p_x - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \_\_\_\_\_(10)$$

و باستخدام المعادلة (7) و (6) فان :

المعادلة (9) تصبح :

$$\frac{dp_x}{dt} = \omega p_y - \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\therefore m\frac{d}{dt}(\dot{x} - \omega y) = m\omega(\dot{y} + \omega x) - \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\therefore m(\ddot{x} - \omega\dot{y}) = m\omega(\dot{y} + \omega x) - \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\therefore m(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \_\_\_\_\_(11)$$

المعادلة (10) تصبح :

$$\frac{dp_y}{dt} = -\omega p_y - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore m\frac{d}{dt}(\dot{y} + \omega x) = -m\omega(\dot{x} - \omega y) - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$m(\ddot{y} + \omega\dot{x}) = -m\omega(\dot{x} - \omega y) - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore m(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \_\_\_\_\_(12)$$

المعادلتان (12)، (11) هما معادلتا الحركة للجسيم في مجموعة المحاور المتحركة .

<u>حالة خاصة</u>: في حالة المحاور الثابتة ← $\omega = 0$

وتؤول (12) ، (11) إلى :

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

و لكن القوة المؤثرة على جسيم ترتبط بطاقة الجهد بالعلاقة :

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad F_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore m\ddot{x} = F_x \qquad , \qquad \therefore m\ddot{y} = F_y$$

وهو قانون نيوتن الثاني للحركة [القوة = الكتلة × العجلة] .

مثال (١٢): الحركة بالنسبة لمحاور متحركة في الفراغ:

جسيم يتحرك في الفراغ في منظومة محاور إحداثيات متحركة (x,y,z) تدور بسرعة زاوية مركباتها $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ فإذا كانت طاقة الجهد للجسيم هي **u(x,y,z)**

(أ) أوجد دالة هاملتون للجسيم .

(ب) أكتب معادلات هاملتون و استنتج منها معادلات الحركة بالنسبة للمحاور المتحركة (الدوارة)

ملاحظة: هذه المثال تعميم للمثال(١١) الخاص بالحركة المستوية المنسوبة للمحاور المتحركة.

الحـل: تعطى السرعة في المحاور الدوارة (المتحركة) بالعلاقة: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

وفي الفراغ فإن: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j} + \omega_3\vec{k}$$

$$\therefore \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (\dot{x} + +\omega_2 z - \omega_3 y)\vec{i} + (\dot{y} + +\omega_3 x - \omega_1 z)\vec{j} + (\dot{z} + \omega_1 y - \omega_3 x)\vec{k}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

أي أن مركبات السرعة في المحاور المتحركة في الفراغ تكون :

$$v_x = \dot{x} + \omega_2 z - \omega_3 y \quad , v_y = \dot{y} + \omega_3 x - \omega_1 z , v_z = \dot{z} + \omega_1 y - \omega_2 x$$

دالة لاجرانج :

$$L = T - u$$

$$= \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - u(x, y, z)$$

$$= \frac{1}{2} m[(\dot{x} + \omega_2 z - \omega_3 y)^2 + (\dot{y} + \omega_3 x - \omega_1 z)^2 + (\dot{z} + \omega_1 y - \omega_2 x)^2] - u$$

دالة هاملتون :- من التعريف

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L \qquad \_\_\_\_ (1)$$

ولكن :

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + \omega_2 z - \omega_3 y) \qquad \_\_\_\_ (2)$$

$$\therefore \dot{x} = \frac{p_x}{m} - \omega_2 z + \omega_3 y \qquad \_\_\_\_ (3)$$

$$p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \omega_3 x - \omega_1 z) \qquad \_\_\_\_ (4)$$

$$\therefore \dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega_3 x + \omega_1 z \qquad \_\_\_\_ (5)$$

$$p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m(\dot{z} + \omega_1 y - \omega_2 x) \qquad \_\_\_\_ (6)$$

$$\therefore \dot{z} = \frac{p_z}{m} - \omega_1 y + \omega_2 x \qquad \_\_\_\_ (7)$$

بالتعويض من (7) ، (5) ، (3) في (1) نحصل على :

$$H = p_x\left(\frac{p_x}{m} - \omega_2 z + \omega_3 y\right) + p_y\left(\frac{p_y}{m} - \omega_3 x + \omega_1 z\right)$$

$$+ p_z\left(\frac{p_z}{m} - \omega_1 y + \omega_2 x\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2} + \frac{p_z^2}{m^2}\right) + u(x, y, z)$$

$$\therefore H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + p_x\left(\omega_3 y - \omega_2 z\right) + p_y\left(\omega_1 z - \omega_3 x\right)$$
$$+ p_z\left(\omega_2 x - \omega_1 y\right) + u(x, y, z) \qquad \_\_\_\_ (8)$$

<u>**معادلات هاملتون :**</u>

المعادلات $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ تعطى نفس المعادلات (6)، (4)، (2) .

بينما المعادلات $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$ هي التي تعطي معادلات الحركة .

$$(1) \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \omega_3 p_y - \omega_2 p_z - \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\therefore m\frac{dp_x}{dt} = m[\ddot{x} + \omega_2 \dot{z} - \omega_3 \dot{y}] = \omega_3 m(\dot{y} + \omega_3 x - \omega_1 z)$$
$$- \omega_2 m(\dot{z} + \omega_1 y - \omega_2 x) - \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\therefore m\left[\ddot{x} + 2\omega_2 \dot{z} - 2\omega_3 \dot{y} - \left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right)x + \omega_1\omega_2 y + \omega_1\omega_3 z\right] = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \_\_\_\_ (9)$$

$$(2) \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\omega_3 p_x + \omega_1 p_z - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore m\frac{dp_y}{dt} = m\left[\ddot{y} + \omega_3 \dot{x} - \omega_1 \dot{z}\right] = -\omega_3 m(\dot{x} + \omega_2 z - \omega_3 y)$$
$$+ \omega_1 m(\dot{z} + \omega_1 y - \omega_2 x) - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore m\left[\ddot{y} + 2\omega_3 \dot{x} - 2\omega_1 \dot{z} - (\omega_1^2 + \omega_3^2)y + \omega_1\omega_2 x + \omega_2\omega_3 z\right]$$
$$= -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \_\_\_\_ (10)$$

$$(3) \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\omega_1 p_y + \omega_2 p_x - \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\therefore m\frac{dp_z}{dt} = m[\ddot z + \omega_1\dot y - \omega_2\dot x] = -\omega_1 m(\dot y + \omega_3 x - \omega_1 z)$$

$$+\omega_2 m(\dot x + \omega_2 z - \omega_3 y) - \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\therefore m\left[\ddot z + 2\omega_1\dot y - 2\omega_2\dot x - (\omega_1^2 + \omega_2^2)z + \omega_1\omega_3 x + \omega_2\omega_3 y\right]$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial z} \qquad \text{\_\_\_}(11)$$

المعادلات (11)، (10) ،(9) هي معادلات الحركة في الفراغ (x,y,z) بالنسبة لمجموعة المحاور المتحركة (الدوارة) .

<u>حالة خاصة:</u> من المعادلات (11)، (10) ،(9) يمكن استنتاج المعادلتين (11)، (10) في حالة الحركة المستوية للجسيم في مجموعة المحاور المتحركة. حيث :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad ، \quad \underset{\downarrow}{z = 0} \quad ، \quad \omega = (\underset{\downarrow}{0}, \underset{\downarrow}{0}, \underset{\downarrow}{\omega})$$

$$\dot z = 0, \ddot z = 0 \qquad\qquad \omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3$$

فبوضع $\omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega$ ، $\dot z = 0, \ddot z = 0$

في المعادلات (11)، (10)، (9) نحصل على:

$$m[\ddot x - 2\omega\dot y - \omega^2 x] = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$m[\ddot y + 2\omega\dot x - \omega^2 y] = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

و هما معادلتا حركة الجسيم في مجموعة المحاور المتحركة الخاصة في المستوى (xy)

[مثال رقم ١١] .

مسائل على ميكانيكا هاملتون

(١) إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية هي :

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}\omega^2x^2-ax^3+bx\dot{x}^2$$

حيث a,b,ω ثوابت. فأوجد دالة هاملتون لهذه المنظومة .

(٢) منظومة ميكانيكية دالة لاجرانج لها هي :

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2)-u(q_1,q_2)$$

أوجد دالة هاملتون لهذه المنظومة ، وطبق معادلات هاملتون لإيجاد معادلات حركة المنظومة .

(٣) إذا كانت دالة هاملتون لمنظومة ميكانيكية هي :

$$H(x,p)=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2+\lambda\left(\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2\right)^2$$

حيث ω,λ ثابتان ، طبق معادلات هاملتون القانونية لإيجاد معادلة حركة المنظومة ، ومنها أوجد علاقتين مناسبتين لـ x,p بدلالة الزمن t .

(٤) إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية هي:

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+A\dot{x}+B\dot{y}+C\dot{z}-U$$

حيث A,B,C,U دوال في (x,y,z) فأوجد دالة هاملتون وطبق معادلات هاملتون لإيجاد معادلات الحركة.

(٥) إذا كانت دالة هاملتون لمنظومة ميكانيكية هي: $H=\frac{1}{2}(p^2+2px)+U(x)$

فأوجد دالة لاجرانج وطبق معادلات لاجرانج لإيجاد معادلة حركة المنظومة.

(٦) منظومة ميكانيكية طاقة حركتها هي: $T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)$ وطاقة جهدها هي: $u=(q_1+q_2)^2$، المطلوب هو:

(i) إيجاد دالتي لاجرانج وهاملتون للمنظومة.

(ii) تطبيق معادلات لاجرانج وكذلك معادلات هاملتون لإيجاد معادلات الحركة للمنظمة.

(iii) إيجاد الحل العام لمعادلات الحركة أي إيجاد كل من q_1, q_2 (الإحداثيات المعممة).

(iv) إيجاد كميات الحركة المعممة للمنظومة (p_1, p_2).

(٧) إذا كان الفرق بين طاقتي الحركة والموضع لمنظومة ميكانيكية يعطي من العلاقة التالية: $\frac{1}{2}[\frac{\dot{x}^2}{a+by^2}+\dot{y}^2-2cy^2]$ حيث a,b,c ثوابت، المطلوب هو:

(i) إيجاد دالتي لاجرانج وهاملتون للمنظومة.

(ii) تطبيق معادلات لاجرانج وكذلك معادلات هاملتون لإيجاد معادلات الحركة للمنظومة.

(iii) إيجاد الحل العام لمعادلات الحركة أي إيجاد كل من x, y.

(٨) إذا كانت دالة لاجرانج لمنظمة ميكانيكية هي:

$$L=\frac{1}{2}\left\{(2\alpha+1)\dot{q}_1^2+2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2-\beta^2[(\alpha+1)q_1^2+q_2^2]\right\}$$

حيث α, β ثابتان، المطلوب هو:

(i) تطبيق معادلات لاجرانج لإيجاد معادلات الحركة للمنظومة ولإثبات أن: $q_1-q_2=c\cos(wt+\phi)$، حيث $w^2\alpha=\beta^2(\alpha+1)$، c, w, ϕ ثوابت.

(ii) إيجاد دالة هاملتون للمنظومة وتطبيق معادلات هاملتون لإيجاد معادلات الحركة للمنظومة.

(iii) حل معادلات الحركة المستنتجة أي إيجاد q_1, q_2.

(٩) (أ) إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانكية هي:

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2-\omega^2x^2)-\alpha x^2+\beta x\dot{x}^2$$

α, β, ω ثوابت، أوجد دالة هاملتون لهذه المنظومة.

(ب) إذا كانت دالة لاجرانج لمنظمة ميكانيكية هي:

$$L = \frac{1}{2} k(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + g \cos \theta$$

أوجد دالة هاملتون، واستخدم معادلات هاملتون لكتابة معادلات الحركة للمنظومة.

(١٠) (أ) إذا كانت دالة هاملتون لمنظومة ميكانيكية هي:

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - \alpha q_1^2 + \beta q_2^2$$

حيث α, β ثابتان، أثبت الآتي:

(i) $\dfrac{p_2 - \beta q_2}{q_1} = \text{const.}$

(ii) $q_1 q_2 = \text{const.}$

(iii) $\ell n\, q_1 = t + \text{const.}$

(ب) استخدم معادلات هاملتون لوصف حركة جسيم كتلته m يتحرك على مستوى مائل أملس يصنع زاوية α مع الأفقي [انظر المسألة ٦-أ في ميكانيكا لاجرانج].

حلول المسائل على ميكانيكا هاملتون

حل المسألة(١):

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}\omega^2x^2-ax^3+bx\dot{x}^2 \qquad \_\_(1)$$

من معادلات هاملتون:

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{1}{2}(2\dot{x})+bx(2\dot{x})=\dot{x}(1+2bx)\rightarrow \dot{x}=\frac{p}{1+2bx} \qquad \_\_(2)$$

$$H=p\dot{x}-L$$

$$=p(\frac{p}{1+2bx})-\frac{1}{2}(\frac{p}{1+2bx})^2+\frac{1}{2}w^2x^2+ax^3-bx(\frac{p}{1+2bx})^2$$

$$=ax^3+\frac{1}{2}w^2x+\frac{p^2}{2(1+2bx)^2}\left[2(1+2bx)-1-2bx\right]$$

$$=ax^3+\frac{1}{2}w^2x+\frac{p^2}{2(1+2bx)^2}\left[1+2bx\right]$$

$$=ax^3+\frac{1}{2}w^2x+\frac{p^2}{2(1+2bx)^2}$$

وهو المطلوب.

حل المسألة(٢):

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2)-u(q_1,q_2) \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

من معادلات هاملتون:

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{1}{2}(2\dot{q}_1+\dot{q}_2) \qquad \_\_\_\_\_\_(2)$$

$$p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=\frac{1}{2}(\dot{q}_1+2\dot{q}_2) \qquad \_\_\_\_\_\_(3)$$

بحل المعادلتين (3),(2) نحصل على:

$$\dot{q}_1=\frac{2}{3}(2p_1-p_2) \qquad \_\_\_\_\_\_(4)$$

$$\dot{q}_2=\frac{2}{3}(2p_2-p_1) \qquad \_\_\_\_\_\_(5)$$

دالة هاملتون:

$$H = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - L$$
$$= \frac{1}{2}(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_1 + \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)\dot{q}_2 - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + u(q_1, q_2)$$
$$= \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + u(q_1, q_2)$$
$$= \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + u(q_1, q_2) \qquad \_\_\_\_(6)$$

وبالتعويض من (5),(4) في (6) نحصل على:

$$H = \frac{1}{2}[\frac{4}{9}(2p_1 - p_2)^2 + \frac{4}{9}(2p_1 - p_2)(2p_2 - p_1) + \frac{4}{9}(2p_2 - p_1)^2\ ] + u(q_1, q_2)$$
$$= \frac{2}{3}(p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2) + u((q_1, q_2) \qquad \_\_\_\_(7)$$

وهو المطلوب الأول.

<u>ثانياً:</u> تطبيق معادلات هاملتون لإيجاد معادلات حركة المنظومة:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{2}{3}(2p_1 - p_2) + \frac{\partial u}{\partial q_1} \qquad \_\_\_\_(8)$$
$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{2}{3}(2p_2 - p_1) + \frac{\partial u}{\partial q_2} \qquad \_\_\_\_(9)$$
$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial u}{\partial q_1} \qquad \_\_\_\_(10)$$
$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{\partial u}{\partial q_2} \qquad \_\_\_\_(11)$$

بتفاضل (9),(8) بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\ddot{q}_1 = \frac{2}{3}(2\dot{p}_1 - \dot{p}_2) \qquad \_\_\_\_(12)$$
$$\ddot{q}_2 = \frac{2}{3}(2\dot{p}_2 - \dot{p}_1) \qquad \_\_\_\_(13)$$

بالتعويض من (11),(10) في (13),(12) نحصل على:

$$\ddot{q}_1=\frac{2}{3}(-2\frac{\partial u}{\partial q_1}+\frac{\partial u}{\partial q_2})=-\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial q_1}+\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial q_2} \qquad \_\_\_\_ (14)$$

$$\ddot{q}_2=\frac{2}{3}(-2\frac{\partial u}{\partial q_2}+\frac{\partial u}{\partial q_1})=-\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial q_2}+\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial q_1} \qquad \_\_\_\_ (15)$$

المعادلتان (15),(14) هما معادلتا الحركة المطلوبين.

حل المسألة(٣):

$$H=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2x^2)+\lambda(\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2)^2 \qquad \_\_\_\_ (1)$$

حيث أن:

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}_j&=-\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \_\_\_ (2)\\ \dot{q}_j&=\frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \_\_\_ (3)\end{aligned}\right\} \text{معادلات هاملتون}$$

فمن (2):

$$\therefore \dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial x}=-\left[w^2x+2\lambda(\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}w^2x^2)(w^2x)\right]$$

$$=-w^2x\left[1+\lambda(p^2+w^2x^2)\right] \qquad \_\_\_\_ (4)$$

من (3):

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=p+2\lambda(\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}w^2x^2)(p)$$

$$=p\left[1+\lambda(p^2+w^2x^2)\right] \qquad \_\_\_\_ (5)$$

المعادلتان (5),(4) يمثلان معادلات هاملتون للمنظومة.

<u>ولإيجاد x,p بدلالة t :</u> من (5),(4) بالقسمة نحصل على:

$$\frac{\dot{p}}{\dot{x}}=-\frac{w^2x}{p}$$

وبفصل المتغيرات:

$$p\dot{p}=-w^2x\,\dot{x}$$

$$p\,dp=-w^2x\,dx$$

وبالتكامل:

$$\frac{1}{2}p^2 = -w^2(\frac{1}{2}x^2) + C$$

$$\therefore p^2 = -w^2x^2 + \alpha \qquad , \alpha = 2c$$

$$\therefore p^2 + w^2x^2 = \alpha \qquad \_\_\_\_(6)$$

وهي معادلة حركة المنظومة.

ومن (5) وباستخدام (6) نحصل على :

$$\frac{dx}{dt} = p\left[1 + \lambda(p^2 + w^2x^2)\right] = p(1 + \alpha\lambda)$$

$$\therefore dx = (1 + \alpha\lambda)p\,dt \;\rightarrow\; x = \int(1 + \alpha\lambda)p\,dt \qquad \_\_\_\_(7)$$

ومن (4) واستخدام (6) نحصل على:

$$\frac{dp}{dt} = -w^2x\left[1 + \lambda(p^2 + w^2x^2)\right] = -w^2x(1 + \alpha\lambda)$$

$$\therefore dp = -w^2\,(1 + \alpha\lambda)x\,dt \quad \rightarrow \quad p = -w^2\int(1 + \alpha\lambda)x\,dt \quad \_\_(8)$$

المعادلتان (8),(7) هما المعادلتان المطلوبتان، حيث $\alpha = p^2 + w^2x^2$.

<u>حل المسألة(٤):</u> دالة لاجرانج :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + A\dot{x} + B\dot{y} + C\dot{z} - U \qquad \_\_\_\_(1)$$

من معادلات هاملتون:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad , \; j = x, y, z$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + A \;\rightarrow\; \dot{x} = \frac{p_x - A}{m} \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + B \;\rightarrow\; \dot{y} = \frac{p_y - B}{m} \qquad \_\_\_\_(3)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + C \;\rightarrow\; \dot{z} = \frac{p_z - C}{m} \qquad \_\_\_\_(4)$$

بالتعويض في (1) تأخذ دالة لاجرانج الصورة:

$$L=\frac{1}{2}m\left[\frac{(p_x-A)^2}{m^2}+\frac{(p_y-B)^2}{m^2}+\frac{(p_z-C)^2}{m^2}\right]$$
$$+\frac{A(p_x-A)}{m}+\frac{B(p_y-B)}{m}+\frac{C(p_z-C)}{m}-u$$

دالة هاملتون:

$$H=\sum_j p_j\dot{q}_j-L=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-L$$
$$=p_x\frac{(p_x-A)}{m}+p_y\frac{(p_y-B)}{m}+p_z\frac{(p_z-C)}{m}$$
$$-\left[\frac{(p_x-A)^2}{2m}+\frac{(p_y-B)^2}{2m}+\frac{(p_z-C)^2}{2m}\right]$$
$$-\frac{A(p_x-A)}{m}-\frac{B(p_y-B)}{m}-\frac{C(p_z-C)}{m}+U$$
$$=\frac{(p_x-A)^2}{2m}+\frac{(p_y-B)^2}{2m}+\frac{(p_z-C)^2}{2m}+U \qquad (5)$$

معادلات هاملتون:

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j}\ ,\ \dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}$$
$$=-\left[\frac{(p_x-A)}{m}\left(-\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{(p_y-B)}{m}\left(-\frac{\partial B}{\partial x}\right)+\frac{(p_z-C)}{m}\left(-\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial U}{\partial x}\right] \quad (6)$$

$$\dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}$$
$$=-\left[\frac{(p_x-A)}{m}\left(-\frac{\partial A}{\partial y}\right)+\frac{(p_y-B)}{m}\left(-\frac{\partial B}{\partial y}\right)+\frac{(p_z-C)}{m}\left(-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial U}{\partial y}\right] \quad (7)$$

$$\dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}$$
$$=-\left[\frac{(p_x-A)}{m}\left(-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+\frac{(p_y-B)}{m}\left(-\frac{\partial B}{\partial z}\right)+\frac{(p_z-C)}{m}\left(-\frac{\partial C}{\partial z}\right)+\frac{\partial U}{\partial z}\right] \quad (8)$$

بالتعويض من (4),(3),(2) في (8),(7),(6) نحصل على:

$$m\ddot{x}+\frac{dA}{dt}=\dot{x}\frac{\partial A}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial B}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \_\_\_\_(9)$$

وحيث أن $A=A(x,y,z)$

$$\therefore \frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial A}{\partial z}\dot{z} \qquad \_\_\_\_(10)$$

من (10),(9) نحصل على:

$$m\ddot{x}=\dot{y}\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)+\dot{z}\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)-\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \_\_\_\_(11)$$

وبالمثل فإن:

$$m\ddot{y}=\dot{z}\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)-\dot{x}\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)-\frac{\partial U}{\partial y} \qquad \_\_\_\_(12)$$

$$m\ddot{z}=\dot{x}\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)-\dot{y}\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)-\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \_\_\_\_(13)$$

المعادلات (13),(12),(11) تمثل معادلات الحركة المطلوبة.

حل المسألة (٥):

$$H=\frac{1}{2}(p^2+2px)+U(x) \qquad \_\_\_\_(1)$$

معادلات هاملتون:

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-p-\frac{\partial U(x)}{\partial x} \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=p+x \qquad \_\_\_\_(3)$$

للحصول على دالة لاجرانج نستخدم العلاقة: $H=\sum_j p_j\dot{q}_j-L=p\dot{x}-L$

$$\therefore L=p\dot{x}-H=p\dot{x}-\frac{1}{2}(p^2+2px)-U(x) \qquad \_\_\_\_(4)$$

بالتعويض من (3) في (4):

$$\therefore L=(\dot{x}-x)\dot{x}-\frac{1}{2}\left[(\dot{x}-x)^2+2x(\dot{x}-x)\right]-U(x)$$

$$=(\dot{x}-x)\left[\frac{1}{2}(\dot{x}-x)\right]-U(x)=\frac{1}{2}(\dot{x}-x)^2-U(x) \qquad \_\_\_\_ (5)$$

بتطبيق معادلات لاجرانج: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$

$$\frac{d}{dt}[(\dot{x}-x)(1)]-\left[(\dot{x}-x)(-1)-\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right]=0$$

$$\therefore \ddot{x}-\cancel{\dot{x}}+\cancel{\dot{x}}-x+\frac{\partial U(x)}{\partial x}=0$$

$$\therefore \ddot{x}-x=-\frac{\partial U(x)}{\partial x} \qquad \_\_\_\_\_\_ (6)$$

وهي معادلة الحركة المطلوبة.

<u>حل المسألة(٦):</u> <u>الجزء (i):</u> دالة لاجرانج:

$$L=T-u=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-(q_1+q_2)^2 \qquad (1)$$

دالة هاملتون:

$$H=T+u=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+(q_1+q_2)^2 \qquad (2)$$

(في حالة إذا كانت طاقة الحركة T دالة تربيعية متجانسة في $\dot{q}$ وكذلك طاقة الجهد u لا تعتمد اعتماداً صريحاً على $\dot{q}$ فإن $H=T+u$).

<u>الجزء (ii):</u> تطبيق معادلات لاجرانج:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{1}{2}(2\dot{q}_1)=\dot{q}_1 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=\dot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}=-2(q_1-q_2) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q_2}=2(q_1-q_2)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0 \quad \rightarrow \quad \ddot{q}_1+2(q_1-q_2)=0_2 \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0 \quad \rightarrow \quad \ddot{q}_2-2(q_1-q_2) \qquad (4)$$

المعادلتان (4),(3) هما معادلتا الحركة للمنظومة.

تطبيق معادلات هاملتون: حيث أن $p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$، فإن

$$p_1=\dot{q}_1 \text{ ، } p_2=\dot{q}_2$$

وبالتعويض في (2) نحصل على:

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+(q_1+q_2)^2$$

$$\dot{q}_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}=p_1, \qquad \dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial q_1}=-2(q_1-q_2)$$

$$\dot{q}_2=\frac{\partial H}{\partial p_2}=p_2, \qquad \dot{p}_2=-\frac{\partial H}{\partial q_2}=2(q_1-q_2)$$

$$\therefore \ddot{q}_1=\dot{p}_1 \quad \rightarrow \quad \ddot{q}_1=-2(q_1-q_2) \qquad (5)$$

$$\ddot{q}_2=\dot{p}_2 \quad \rightarrow \quad \ddot{q}_2=2(q_1-q_2) \qquad (6)$$

وهما نفس المعادلتين (4),(3) أي معادلتا الحركة للمنظومة.

<u>**الجزء(iii):**</u> بجمع (6),(5) نحصل على:

$$\ddot{q}_1+\ddot{q}_2=0$$

وبالتكامل بالنسبة للزمن:

$$\dot{q}_1+\dot{q}_2=\text{const.}=A$$

وبإجراء التكامل مرة أخرى بالنسبة للزمن:

$$q_1+q_2=At+B \qquad (7)$$

وبطرح المعادلتين (6),(5) نحصل على:

$$\ddot{q}_1-\ddot{q}_2+4(q_1-q_2)=0$$

وبإعتبار أن $q_1 - q_2 = x$ ، فإن

$$\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 = \ddot{x}$$

$$\therefore\ \ddot{x} + 4x = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ \ddot{x} = -4x$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة حلها هو:

$$x = C\cos(2t + \alpha)$$

$$\therefore q_1 - q_2 = C\cos(2t + \alpha) \qquad (8)$$

من (7),(8) بالجمع:

$$\therefore 2q_1 = C\cos(2t + \alpha) + (At + B)$$

$$\therefore q_1 = \frac{1}{2}[At + B + C\cos(2t + \alpha)] \qquad (9)$$

ومن (7), (8) بالطرح:

$$\therefore -2q_2 = C\cos(2t + \alpha) - (At + B)$$

$$\therefore q_2 = \frac{1}{2}[At + B - C\cos(2t + \alpha)] \qquad (10)$$

المعادلتان (9), (10) تعطيان الإحداثيين المعممين q_1, q_2.

<u>الجزء (iv):</u> لإيجاد p_1, p_2 : حيث أن $p_1 = \dot{q}_1 \ ,\ p_2 = \dot{q}_2$

$$\therefore\ p_1 = \frac{1}{2}[A - 2C\sin(2t + \alpha)]$$

$$p_2 = \frac{1}{2}[A + 2C\sin(2t + \alpha)]$$

<u>حل المسألة(٧): الجزء(i):</u> دالة لاجرانج:

$$L = T - u = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{x}^2}{a + by^2} + \dot{y}^2 - 2cy^2\right] \qquad (1)$$

دالة هاملتون: حيث أن: $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\therefore\ p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}\left[\frac{2\dot{x}}{a + by^2}\right] \quad \rightarrow \quad \dot{x}^2 = p_1^2\,(a + by^2)^2$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \ \rightarrow \ \dot{y} = p_2$$

ومن تعريف دالة هاملتون:

$$H=\sum p_i\,\dot q_1-L=p_1\dot x+p_2\dot y-\frac{\dot x^2}{2(a+by^2)}-\frac{1}{2}\dot y^2+cy^2$$

$$=p_1^2(a+by^2)+p_2^2-\frac{p_1^2(a+by^2)^2}{2(a+by^2)}-\frac{1}{2}p_2^2+cy^2$$

$$=\frac{1}{2}p_1^2(a+by^2)+\frac{1}{2}p_2^2+cy^2 \qquad (2)$$

تطبيق معادلات لاجرانج:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x}=\frac{\dot x}{(a+by^2)},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)=\frac{(a+by^2)\ddot x-\dot x(2by\dot y)}{(a+by^2)^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot y}=\dot y,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot y}\right)=\ddot y$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=\frac{-\dot x^2(4by)}{4(a+by^2)^2}-2cy$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)=\frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\therefore\ \frac{(a+by^2)\ddot x-\dot x(2by\dot y)}{(a+by^2)^2}=0\rightarrow(a+by^2)\ddot x-\dot x(2by\dot y)=0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot y}\right)=\frac{\partial L}{\partial y}\rightarrow \ddot y=\frac{-b\dot x^2 y}{(a+by^2)^2}-2cy \qquad (4)$$

وهما معادلتا الحركة المطلوبتين.

تطبيق معادلات هاملتون: $\dot q_1=\dfrac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot p_1=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$

$$\therefore \dot p_1=-\frac{\partial H}{\partial x}=0,\quad \dot p_2=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\left[\frac{1}{2}p_1^2(2by)+2cy\right] \qquad (5)$$

ولكن: $p_2=\dot y \leftarrow \dot p_2=\ddot y$

أيضاً فإن: $p_1=\dfrac{\dot x}{a+by^2}$، فبالتعويض في (5) نحصل على:

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{by\dot{x}^2}{(a+by^2)^2} - 2cy \qquad (6)$$

وحيث أن $p_1 = \frac{\dot{x}}{(a+by^2)}$، فإن:

$$\dot{p}_1 = \frac{(a+by^2)\ddot{x} - \dot{x}(2by\dot{y})}{(a+by^2)^2} = 0$$

$$\therefore (a+by^2)\ddot{x} - \dot{x}(2by\dot{y}) = 0 \qquad (7)$$

المعادلتان (7),(6) هما نفس المعادلتين (4) ,(3).

<u>الجزء الثالث</u>: لإيجاد x,y:

حيث أن $\dot{p}_1 = 0$، فإن:

$$p_1 = \text{const.} = \alpha$$

وحيث أن:

$$p_1 = \frac{\dot{x}}{(a+by^2)} = \alpha$$

فإن:

$$\dot{x} = \alpha(a+by^2) \qquad (8)$$

أيضاً فمن (5):

$$\ddot{y} = \dot{p}_2 = -[\frac{1}{2}p_1^2(2by) + 2cy]$$

$$= -[\alpha^2 by + 2cy] = -(\alpha^2 b + 2c)y = -w^2 y$$

حيث أن $w^2 = \alpha^2 b + 2c$، والحل العام للمعادلة $\ddot{y} = -w^2 y$ هو:

$$y = D\cos(wt + \varepsilon) \qquad (9)$$

وبالتعويض عن y في (8):

$$\dot{x} = \alpha a + \alpha b D^2 \cos^2(wt + \varepsilon)$$

وبالتكامل بالنسبة للزمن:

$$\therefore x=\alpha at+\alpha bD^2\int\cos^2(wt+\varepsilon)dt$$

$$=\alpha at+\alpha bD^2\int\frac{1}{2}[\cos 2(wt+\varepsilon)dt$$

$$=\alpha at+\frac{1}{2}\alpha bD^2[\frac{\sin(2wt+\varepsilon)}{2w}+t+G]$$

$$=\alpha at+\frac{1}{2}\alpha bD^2[\frac{1}{2w}\sin(2wt+\varepsilon)+t]+\frac{1}{2}\alpha bD^2 G$$

وبأخذ

$$A=\alpha a\,,\ B=\frac{1}{2}\alpha bD^2\,,\ C=\frac{1}{2}\alpha bD^2 G$$

$$x=At+B[t+\frac{1}{2w}\sin(2wt+\varepsilon)+C \tag{10}$$

المعادلتان (10) ,(9) هما المعادلتان المطلوبتان.

<u>حل المسألة(٨):</u> دالة لاجرانج:

$$L=\frac{1}{2}\{(2\alpha+1)\dot{q}_1^2+2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2-\beta^2[(\alpha+1)q_1^2+q_2^2]\} \tag{1}$$

<u>الجزء (i):</u> تطبيق معادلات لاجرانج:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}=-\beta^2(\alpha+1)q_1\quad,\quad\frac{\partial L}{\partial q_2}=-\beta^2 q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=2(\alpha+\frac{1}{2})\dot{q}_1+\dot{q}_2\quad,\quad\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=\dot{q}_1+\dot{q}_2$$

$$\therefore\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1})=2(\alpha+\frac{1}{2})\ddot{q}_1+\ddot{q}_2\quad,\quad\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2})=\ddot{q}_1+\ddot{q}_2$$

وتصبح معادلات لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1})=\frac{\partial L}{\partial q_1}\rightarrow 2(\alpha+\frac{1}{2})\ddot{q}_1+\ddot{q}_2=-\beta^2(\alpha+1)q_1 \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2})=\frac{\partial L}{\partial q_2}\rightarrow \ddot{q}_1+\ddot{q}_2=-\beta^2 q_2 \tag{3}$$

وهما معادلتا الحركة المطلوبة.

ولإثبات العلاقات المطلوبة في الجزء (i): بجمع (3),(2):

$$[2(\alpha+\frac{1}{2})+1]\ddot{q}_1+2\ddot{q}_2=-\beta^2[(\alpha+1)q_1+q_2]$$

$$\therefore 2[(\alpha+1)\ddot{q}_1+\ddot{q}_2]+\beta^2[(\alpha+1)q_1+q_2]=0$$

بوضع: $(\alpha+1)q_1+q_2=z$، فإن:

$$(\alpha+1)\ddot{q}_1+\ddot{q}_2=\ddot{z}$$

$$\therefore 2\ddot{z}+\beta^2 z=0 \rightarrow \ddot{z}=-\frac{\beta^2}{2}z=-n^2 z$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة فيها $n^2=\frac{\beta^2}{2}$ وحلها العام هو:

$$z=A\cos(nt+\varepsilon)$$

$$\therefore (\alpha+1)q_1+q_2=A\cos(nt+\varepsilon) \tag{4}$$

أيضاً: بضرب المعادلة (3) في $(\alpha+1)$ نحصل على:

$$(\alpha+1)\ddot{q}_1+(\alpha+1)\ddot{q}_2=-\beta^2(\alpha+1)q_2 \tag{5}$$

بطرح (5) من (2) نحصل على:

$$\alpha(\ddot{q}_1-\ddot{q}_2)+\beta^2(\alpha+1)(q_1-q_2)=0$$

وبوضع $q_1-q_2=x$ فإن:

$$\ddot{q}_1-\ddot{q}_2=\ddot{x}$$

$$\therefore \alpha\ddot{x}+\beta^2(\alpha+1)x=0$$

$$\ddot{x}=-\beta^2(\frac{\alpha+1}{\alpha})x=-w^2 x$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة فيها $w^2=\beta^2(\frac{\alpha+1}{\alpha})$ وحلها العام هو:

$$x=C\cos(wt+\phi)$$

$$\therefore q_1-q_2=C\cos(wt+\phi) \tag{6}$$

حيث:

$$w^2\alpha=\beta^2(\alpha+1) \qquad (7)$$

المعادلتان (7) , (6) هما المعادلتان المطلوبتان في الجزء (i).

<u>الجزء (ii):</u> دالة هاملتون:

حيث أن طاقة الحركة دالة تربيعية متجانسة في $\dot{q}$ ، وطاقة الجهد دالة في q فإن:

$$H=T+U$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(2\alpha+1)\dot{q}_1^2+2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2+\beta^2[(\alpha+1)q_1^2+q_2^2\right\} \qquad (8)$$

ومن تعريف كمية الحركة المعممة:

$$p_1=\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_1}=2(\alpha+\frac{1}{2})\dot{q}_1+\dot{q}_2 \rightarrow \dot{p}_1=2(\alpha+\frac{1}{2})\ddot{q}_1+\ddot{q}_2 \qquad (9)$$

$$p_2=\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_2}=\dot{q}_1+\dot{q}_2 \rightarrow \dot{p}_2=\ddot{q}_1+\ddot{q}_2 \qquad (10)$$

ومن معادلات هاملتون:

$$\dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial q_1}=-\beta^2(\alpha+1)q_1 \qquad (11)$$

$$\dot{p}_2=-\frac{\partial H}{\partial q_2}=-\beta^2 q_2 \qquad (12)$$

من (12) ,(11) ,(10) ,(9) نحصل على:

$$2(\alpha+\frac{1}{2})\ddot{q}_1+\ddot{q}_2=-\beta^2(\alpha+1)q_1 \qquad (13)$$

$$\ddot{q}_1+\ddot{q}_2=-\beta^2 q_2 \qquad (14)$$

المعادلتان (14) ,(13) هما معادلتا الحركة المطلوبتان وهما المعادلتان (3) ,(2).

<u>الجزء (iii):</u> لإيجاد q_1, q_2 : من العلاقتين (6) ,(4) بالجمع:

$$q_1+(\alpha+1)q_1=A\cos(nt+\varepsilon)+C\cos(wt+\phi)$$

$$\therefore q_1=\frac{1}{\alpha+2}[A\cos(nt+\varepsilon)+C\cos(wt+\phi)] \qquad (15)$$

ومن العلاقتين (6) ,(4) بالطرح:

$$\therefore \alpha q_1+2q_2=A\cos(nt+\varepsilon)-C\cos(wt+\phi) \qquad (16)$$

ولكن من (6):

$$\alpha q_1 = \alpha q_2 + \alpha C\cos(wt+\phi)$$

فبالتعويض في (16) نحصل على:

$$(\alpha+2)q_2 = A\cos(nt+\varepsilon) - (\alpha+1)C\cos(wt+\phi)$$

$$\therefore q_2 = \frac{1}{\alpha+2}[A\cos(nt+\varepsilon) - (\alpha+1)C\cos(wt+\phi)] \qquad (17)$$

وهو المطلوب.

<u>حل المسألة(٩):</u>

<u>الجزء(أ)</u>: دالة لاجرانج

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) - \alpha x^2 + \beta x \dot{x}^2 \qquad \_\_\_(1)$$

هنا السرعة المعممة الوحيدة هي $\dot{q} = \dot{x}$

دالة هاملتون هي:

$$H = \sum p\dot{q} - L = p\dot{x} - L \qquad \_\_\_(2)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + 2\beta x \dot{x}^2 = \dot{x}(1+2\beta x) \rightarrow \dot{x} = \frac{p}{1+2\beta x} \qquad \_\_\_(3)$$

بالتعويض من (3) ,(1) في (2) نحصل على دالة هاملتون بالصورة:

$$H = \frac{p^2}{1+2\beta x} - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+2\beta x}\right)^2(1+2\beta x) + \alpha x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

$$= \alpha x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{1+2\beta x}$$

وهي دالة هاملتون كدالة في x, p.

<u>الجزء(ب):</u>

دالة لاجرانج

$$L = \frac{1}{2}k(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin\theta) + g\cos\theta \qquad \_\_\_(1)$$

كمية الحركة المعممة هي:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

لدينا سرعتان معممتان هما $\dot{\theta}, \dot{\phi}$.

$$\therefore\ p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = k\,\dot{\theta} \quad , \qquad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = k\,\dot{\phi}\sin^2\theta \qquad \_\_\_(2)$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\dot{\theta} = \frac{p_1}{k} \quad , \quad \dot{\phi} = \frac{p_2}{k\sin^2\theta} \qquad \_\_\_(3)$$

دالة هاملتون:

$$H = \sum p\dot{q} - L = p_1\,\dot{q}_1 + p_2\,\dot{q}_2 - L$$

$$= p_1\,\dot{\theta} + p_2\,\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{k} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{k\sin^2\theta} - g\cos\theta \qquad \_\_\_(4)$$

معادلات هاملتون:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\therefore\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{k}\frac{p_2^2\tan\theta}{\sin\theta} + g\sin\theta \ , \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \qquad \_\_\_(5)$$

من (5) ,(2):

$$k\,\ddot{\theta} = g\sin\theta + \frac{k}{k}\dot{\phi}^2(\sin\theta)^4\frac{\tan\theta}{(\sin\theta)^2}$$

$$\therefore\ \ddot{\theta} = \frac{g}{k}\sin\theta + \dot{\phi}^2(\sin\theta)^2\tan\theta \qquad \_\_\_(6)$$

ومن (5) ,(3):

$$k(\ddot{\theta}\sin^2\theta + 2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}) = 0$$

$$\therefore\ \ddot{\theta}\sin^2\theta + 2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta} = 0 \qquad \_\_\_(7)$$

المعادلتان (7) ,(6) هما المعادلتان المطلوبتان.

حل المسألة(١٠):

الجزء(أ):

دالة هاملتون:

$$H = q_1p_1 - q_2p_2 - \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 \qquad \_\_\_(1)$$

معادلات هاملتون:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \;,\; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

لدينا إحداثيان معممان q_1, q_2:

$$\therefore \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}(q_1p_1 - q_2p_2 - \alpha q_1^2 + \beta q_2^2) = q_1$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{\partial}{\partial p_2}(q_1p_1 - q_2p_2 - \alpha q_1^2 + \beta q_2^2) = -q_2$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial}{\partial q_1}(q_1p_1 - q_2p_2 - \alpha q_1^2 + \beta q_2^2) = -p_1 - 2\alpha q_1$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{\partial}{\partial q_2}(q_1p_1 - q_2p_2 - \alpha q_1^2 + \beta q_2^2) = p_2 - 2\beta q_2$$

إيجاد المطلوبات:

$$\text{(i)} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p_2 - \beta q_2}{q_1}\right) = \frac{q_1(\dot{p}_2 - \beta\dot{q}_2) - (p_2 - \beta q_2)\dot{q}_1}{q_1^2}$$

$$= \frac{q_1[(p_2 - 2\beta q_2) + \beta q_2] - (p_2 - \beta q_2)q_1}{q_1^2}$$

$$= \frac{q_1(p_2 - 2\beta q_2 + \beta q_2 - p_2 + \beta q_2)}{q_1^2} = 0$$

$$\therefore \frac{p_2 - \beta q_2}{q_1} = \text{const.}$$

وهو المطلوب الأول.

$$\text{(ii)} \quad \frac{d}{dt}(q_1q_2) = \dot{q}_1q_2 + q_1\dot{q}_2 = q_1q_2 - q_1q_2 = 0 \;\rightarrow\; q_1q_2 = \text{const.}$$

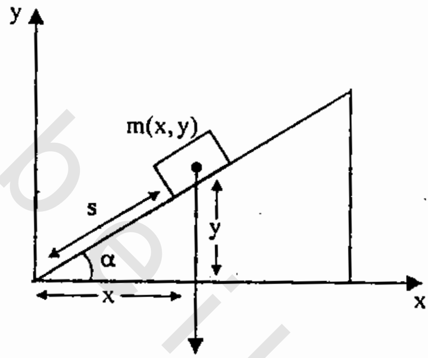
وهو المطلوب الثاني.

$$(ii)\ \frac{d}{dt}(\ell n\, q_1) = \frac{1}{q_1}\dot{q}_1 = \frac{1}{q_1}q_1 = 1 \ \rightarrow\ (\ell n\, q_1) = dt$$

$$\rightarrow\ \ell n\, q_1 = t + \text{const.}$$

وهو المطلوب الثالث.

<u>الجزء(ب):</u>



$$x = s\cos\alpha \ \rightarrow\ \dot{x} = \dot{s}\cos\alpha$$

$$y = s\sin\alpha \ \rightarrow\ \dot{y} = \dot{s}\sin\alpha$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = s\cos\alpha\,\vec{i} + s\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{s}\cos\alpha\,\vec{i} + \dot{s}\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{s}^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \dot{s}^2$$

$$\therefore\ T = \frac{1}{2}m\left|\dot{\vec{r}}\right|^2 = \frac{1}{2}\dot{s}^2$$

وبأخذ محور x مستوى للقياس:

$$V = mg\,y = mg\,s\sin\alpha$$

دالة لاجرانج:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mg\,s\sin\alpha$$

أيضاً فإن:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \ \rightarrow\ \dot{s} = \frac{p_s}{m}$$

دالة هاملتون:

$$H = \sum_i p_i\,\dot{q}_i - L = p_s\dot{s} - L$$

$$= \frac{p_s^2}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p_s}{m}\right)^2 + mg\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{p_s^2}{m} + mg\,s\sin\alpha$$

وحيث أن: $p_s = m\dot{s}$ $\leftarrow$ $\dot{p}_s = m\ddot{s}$

ومن معادلة هاملتون:

$$\therefore \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \rightarrow m\ddot{s} = -mg\sin\alpha$$

وهى معادلة الحركه المطلوبة

$$\therefore\ m\ddot{s} + mg\ \sin\alpha = 0$$

تكامل الفعل ومبدأ هاملتون

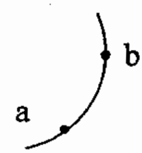
دالة لاجرانج هي دالة في المتغيرات $q, \dot{q}, t$:

$$\therefore L = L(q, \dot{q}, t)$$

و يعرف تكامل الفعل(Action Integral) بأنه :

" التكامل الخطي الزمني لدالة لاجرانج " ويرمز له بالرمز S .

$$\therefore S = \int_a^b L(q, \dot{q}, t)\, dt$$



<u>(٢) وينص مبدأ هاملتون لأقل فعل (**Hamilton principle of Least Action**)</u>

على أن : " تكامل الفعل (S) يكون أقل ما يمكن " (أي في نهايته الصغرى)

عندما يكون $\delta S = 0$

<u>ملحوظة</u>: مبدأ هاملتون يناظر ما يدرس في مقرر حساب التغيرات

:(Calculus of Variations)

حيث التكامل $I = \int F(x, y, \dot{y})dx$ يكون في نهايته القصوى (الصغرى أو العظمى) عندما $\delta I = 0$.

وفي الجدول الآتي نقارن بين خواص تكامل الفعل S والتكامل I في حساب التغيرات:

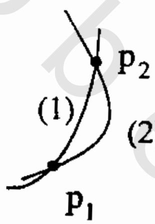
مبدأ هاملتون	حساب التغيرات
$S = \int L(t, q, \dot{q})dt$	$I = \int F(x, y, \dot{y})dx$
L	F
t	x
q	y
$\dot{q}$	$\dot{y}$
$\delta S = 0$	$\delta I = 0$
هذا الشرط يؤدي إلى معادلة لاجرانج وصورتها :	هذا الشرط يؤدي إلى معادلة أويلر – لاجرانج وصورتها :
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$
$(L_{\dot{q}})' - L_q = 0$	$(F_{\dot{y}})' - F_y = 0$
(مبدأ هاملتون)	(حساب التغيرات)

أمثلة على مبدأ هاملتون لأقل فعل :

مثال(١) : طبق مبدأ هاملتون لأقل فعل للحصول على معادلة لاجرانج بالصورة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

الحــل : نعتبر تكامل الفعل : $S=\int_{t_1}^{t_2} L(t,q,\dot{q})$



ونعتبر منحنى مجاور (2) للمنحنى الأصلي (1)

الواصل بين النقطتين p_1, p_2

التغير في تكامل الفعل (S) بين المنحنين (2) ، (1) :

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)dt-\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} L[(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)-L(q,\dot{q},t)]dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt \quad \_\_\_(1)$$

و من تعريف التغير في L :

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \qquad \_\_\_\_\_\_\_(2)$$

بالتعويض من (2) في (1) وتطبيق مبدأ هاملتون :

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt=0 \qquad \_\_\_\_\_\_\_(3)$$

و بإجراء التكامل بالتجزيء على الحد الثاني:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\left(\frac{dq}{dt}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q)dt \qquad \Big|\ \delta\left(\frac{d}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(\delta)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d(\delta q) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q \cdot d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \delta q \cdot d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \qquad \left| \begin{array}{l} \delta q(t_1) = 0 \\ \delta q(t_2) = 0 \end{array} \right.$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \delta q \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \delta q dt \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (4)}$$

بالتعويض في (3) نحصل على :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right] \delta q dt = 0$$

و حيث أن δq اختيارية فإن الدالة التي نكاملها يجب أن تساوي صفرا [نظرية] .

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٢):</u> اشتق معادلات هاملتون القانونية من مبدأ هامتلون لأقل فعل .

<u>الحل:</u> من مبدأ هاملتون:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \qquad \text{\_\_\_\_ (1)}$$

ومن تعريف الهاملتونيان:

$$H = \sum p_j \dot{q}_j - L$$

$$\therefore L = \sum p_j \dot{q}_j - H \qquad \_\_\_(2)$$

بالتعويض من (2) في (1):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_j p_j \dot{q}_j - H)\, dt = 0$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} \sum_j (p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \delta H)\, dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j (p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j)\, dt = 0 \;\Big|\; H = H(q_i, p_j)$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j (\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j})\delta p_j - \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{d}{dt}\sum_j p_j \delta q_j - \sum_j \dot{p}_j \delta q_j\right] dt$$

وذلك لأن:

$$\frac{d}{dt}\sum_j p_j \delta q_j = \sum_j \dot{p}_j \delta \dot{q}_j + \sum_j \dot{p}_j \delta q_j$$

$$\therefore \sum_j p_j \delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt}\sum_j p_j \delta q_j - \sum_j \dot{p}_j \delta q_j$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j (\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j})\delta p_j - \sum_j \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\delta q_i\right] dt + \sum_j p_j \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

وحيث أن $\delta p_j, \delta q_j$ مستقلتان فإن:

$$\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

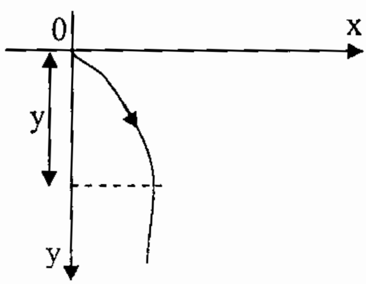
$$\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

وهو المطلوب .

مثال (٣): باستخدام مبدأ هاملتون لأقل فعل، أوجد معادلة مسار جسيم يتحرك تحت تأثير الجاذبية الأرضية مبتدئا من السكون عند نقطة الأصل .أحسب أيضا تكامل الفعل S لهذا الجسيم .

الحل:

نعتبر محور y رأسيا إلى أسفل



ونأخذ المستوى المار بمحور x هو مبدأ للقياس

دالة لاجرانج :

$$L = T - u \qquad \_\_\_\_\_ (1)$$

وحيث أن الجسيم تحرك تحت تأثير الجاذبية لمسافة رأسية y.

طاقة الحركة:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

طاقة الجهد :

$$u = -mgy$$

بالتعويض في (1) :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ (2)$$

حيث m كتلة الجسيم، g عجلة الجاذبية.

و باستخدام مبدأ هاملتون لأقل فعل ($\delta S = 0$) فإن معادلة المسار للجسيم المتحرك تكون هي معادلة لاجرانج و صورتها :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_\_ (3)$$

و من (2) :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = mg$$

و التعويض في (3) :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) - mg = 0$$

$$\therefore \ddot{y} - g = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_ (4)$$

وهي معادلة حركة الجسيم .

ولإيجاد معادلة المسار :

من (4) $\longrightarrow \ddot{y} = g$ وبالتكامل مرتين:

$$\dot{y} = gt + \alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (5)$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + \alpha t + \beta \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (6)$$

حيث α, β ثابتي التكامل، و لإيجادهما :

الجسيم بدأ الحركة من السكون من نقطة الأصل $\dot{y} = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad t = 0$

فمن (5) $\longrightarrow \alpha = 0$

ومن (6) $\longrightarrow \beta = 0$

$$\therefore \dot{y} = gt \qquad , \qquad y = \frac{1}{2}gt^2$$

$\downarrow$

وهي معادلة المسار المطلوبة .

و لحساب تكامل الفعل : من التعريف

$$S = \int_0^t L\,dt = \int_0^t \left[\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy\right]dt$$

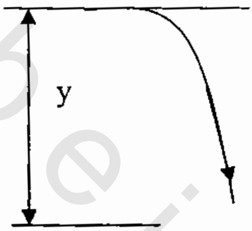
$$= m\int_0^t \left[\frac{1}{2}\dot{y}^2 + gy\right]dt = m\int_0^t \left[\frac{1}{2}g^2t^2 + g\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\right]dt$$

$$= m\int_0^t \left[\frac{1}{2}g^2t^2 + \frac{1}{2}g^2t^2\right]dt = mg^2\int_0^t t^2dt = \frac{1}{3}mg^2t^3$$

وهو المطلوب ثانياً .

مثال (٤) : إذا سقط جسيم من مسافة y_0 في زمن $t_0 = \sqrt{\dfrac{2y_0}{g}}$ وكانـــت المـــسافة المقطوعة في الزمن t هي : $y = \alpha t + \beta t^2$.

حيث α , β ثابتان يأخذان قيما حقيقة بحيث أن الزمن اللازم للسقوط من المسافة y_0 يكون دائما t_0 . أثبت أن التكامل $\int_0^{t_0} L\,dt$ يكون نهاية قصوى لقيمتي α, β حيث $\alpha = 0, \beta = \frac{g}{2}$



الحـــل:

طاقة الحركة: $T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2$

طاقة الجهد: $u = -mg \cdot y$

دالة لاجرانج :

$$L = T - u = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + mgy \qquad \text{\_\_\_\_\_} (1)$$

التكامل $\int_0^{t_0} Ldt$ يمثل هنا تكامل الفعل: $S = \int_0^{t_0} Ldt$

ولكي يكون هذا التكامل نهاية قصوى فإن $\delta S = 0$ (مبدأ هاملتون) وهذا يــؤدي إلـــى معادلة لاجرانج بالصورة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (2)$$

و من (1) : $\frac{\partial L}{\partial y} = mg \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$

بالتعويض في (2) $\therefore m\ddot{y} - mg = 0 \longleftarrow \frac{d}{dt}(m\dot{y}) - mg = 0$

$$\therefore \ddot{y} - g = 0 \qquad \therefore \ddot{y} = g \qquad \text{\_\_\_\_\_} (3)$$

و بالتكامل $\leftarrow \dot{y} = gt + c$ وبالتكامل مرة ثانية $\leftarrow y = \frac{1}{2} gt^2 + ct$

وحيث أن : $y = \alpha t + \beta t^2$ فإن :

$$\alpha = c, \beta = \frac{1}{2} g$$

و تصبح (3) بالصورة:

$$\ddot{y} = 2\beta$$

<u>وفي البداية :</u> عندما $t = t_0$ فإن $y = y_0$ و تكون $y_0 = \alpha t_0 + \beta t_0^2$

و حيث أن $t_0 = \sqrt{\dfrac{2y_0}{g}} \quad \leftarrow \quad \therefore\ y_0 = \dfrac{g t_0^2}{2}$

$$\therefore \frac{g t_0^2}{2} = \alpha t_0 + \frac{g}{2} t_0^2$$

و منها نجد أن $\alpha = 0$ و بذلك فان قيمتي α, β اللتان تجعلان $\int_0^{t_0} L\,dt$ قيمة قصوى

هما $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2} g$ و هو المطلوب .

<u>مثـال (٥)</u>: استخدم مبدأ هاملتون لأقل فعل لإثبات أن :

إضافة أي حد على صورة التفاضل التام بالنسبة للزمن لدالة ما في الموضع و الزمن

أي الحد $\dfrac{d\phi(q,t)}{dt}$) إلى دالة لاجرانج $L(q,\dot{q},t)$ لا يغير من صورة معادلات

لاجرانج .

<u>الحـل</u> : من مبدأ هاملتون لأقل فعل استنتجنا أن دالة لاجرانج تحقق معادلة لاجرانج

(مثال رقم (١)) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$$

و باعتبار دالة لاجرانج أخرى:

$$L' = L + \frac{d\phi}{dt} \qquad \_\_\_\_\_\_ (2)$$

<u>المطلوب :</u> إثبات أن الدالة L' تحقق أيضا معادلة لاجرانج بالصورة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0 \qquad \_\_\_\_ (3)$$

و هذا يعني أن : إضافة الحد $\frac{d\phi}{dt}$ إلى الدالة L لا يغير من صورة معادلة لاجرانج

<u>لإثبات ذلك :</u> حيث أن $\phi = \phi(q,t)$ فان

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial q} dq + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$$

$$\therefore \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

و بوضع $\frac{dq}{dt} = \dot{q}$:

$$\therefore \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

و بإضافة الحد $\frac{d\phi}{dt}$ إلى الدالة L نحصل على :

$$L' = L + \frac{d\phi}{dt} = L + \frac{\partial \phi}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \_\_\_\_\_(5)$$

و لإثبات أن L' تحقق معادلة لاجرانج (رقم (3)) :

من (5) بالتفاضل الجزئي بالنسبة إلى $\dot{q}$ [مـع اعتبـار أن $\phi = \phi(q,t)$ و مـشتقاتها $\frac{\partial \phi}{\partial q}, \frac{\partial \phi}{\partial t}$ لا تعتمد على $\dot{q}$] نحصل على :

$$\therefore \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \qquad \_\_\_\_\_(6)$$

و بتفاضل (6) بالنسبة للزمن تفاضلا تاما :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)\dot{q} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)\right]$$

باستخدام (4) :

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t\,\partial q} \qquad \_\_\_\_\_\_(7)$$

أيضاً : بتفاضل (5) جزئيا بالنسبة إلى q :

$$\frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)\dot{q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial q} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (8)$$

من (8) , (7) بالطرح نحصل على : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}$

[باعتبار أن $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial q} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial t}$]

ولكن من (1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

وهو المطلوب.

مسائل على مبدأ هاملتون لأقل فعل

(١) استخدم مبدأ هاملتون لأقل فعل لإيجاد معادلة حركة المتذبذب التوافقي البسيط.

(٢) يتحرك جسيم في مستوى رأسي تحت تأثير وزنه، استخدم مبدأ هاملتون لاستنتاج قانون نيوتن الثاني.

(٣) طبق مبدأ هاملتون لأقل فعل لإيجاد معادلات حركة البندول البسيط، وأوجد التردد والزمن الدوري لحركة البندول.

حل المسائل

المسألة(١): في المتذبذب التوافقي البسيط فإن:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \;,\; V=\frac{1}{2}kx^2$$

دالة لاجرانج:

$$\therefore L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$$

التغير في دالة لاجرانج:

$$\delta L=\delta T-\delta V=m\dot{x}\,\delta\dot{x}-kx\,\delta x$$

ومن مبدأ هاملتون لأقل فعل:

$$\therefore \int_0^\tau \delta L\,dt=\int_0^\tau m\dot{x}\,\delta\dot{x}\,dt-\int kx\,\delta x\,dt=0$$

$$\therefore \int_0^\tau m\dot{x}\,d(\delta x)-\int kx\,\delta x\,dt=0 \qquad \left|\; \frac{d(\delta x)}{dt}=\delta\dot{x} \;\therefore d(\delta x)=\delta\dot{x}\;dt\right.$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ على الحد الأول:

$$\therefore m\dot{x}\,\delta x\Big|_0^\tau-\int_0^\tau m\ddot{x}\,\delta x\,dt-\int_0^\tau kx\,\delta x\,dt=0$$

ويتلاشى الحد الأول عند $0,\tau$ وبذلك نحصل على:

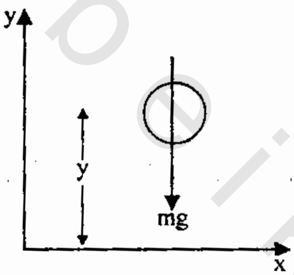
$$-\int_0^\tau (m\ddot{x}+kx)\,\delta x\,dt=0$$

وحيث أن δx إزاحة إختيارية فإن شرط تحقق هذه العلاقة هو:

$$(m\ddot{x}+kx)=0 \quad\rightarrow\quad m\ddot{x}=-kx$$

وهي معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي البسيط.

<u>المسألة(٢):</u>



طاقة الحركة:
$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

طاقة الجهد:
$$V=mg\,y$$

دالة لاجرانج:

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mg\,y$$

التغير في دالة لاجرانج:

$$\delta L=\delta T-\delta V=m\dot{x}\,\delta\dot{x}+m\dot{y}\,\delta\dot{y}-mg\,\delta y$$
$$=m\dot{x}\frac{d}{dt}(\delta x)+m\dot{y}\frac{d}{dt}(\delta y)-mg\,\delta y$$

ومن مبدأ هاملتون لأقل فعل:

$$\int_0^\tau \delta L\,dt=0$$

$$\therefore\ \int_0^\tau m\dot{x}\,d(\delta x)+\int_0^\tau m\dot{y}\,d(\delta y)-\int_0^\tau mg\,\delta y\,dt=0$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ على الحدين الأول والثاني:

$$\therefore [m\,\dot{x}\,\delta x+m\dot{y}\,\delta y]_0^\tau-\int_0^\tau m\ddot{x}\,\delta x\,dt-\int_0^\tau m\ddot{y}\,\delta y\,dt-\int_0^\tau mg\,\delta y\,dt=0$$

وحيث أن $\delta x,\ \delta y$ هي إزاحات إختيارية، وأن الحد الأول يتلاشى عند $0,\tau$ فإن:

$$\int_0^\tau m\ddot{x}\,\delta x\,dt=0 \quad\rightarrow\quad m\ddot{x}=0 \qquad \_\_\_(1)$$

$$\int_0^{\tau}(m\ddot{y}+mg)\,\delta y\,dt=0 \;\rightarrow\; m\ddot{y}=-mg \qquad \_\_\_(2)$$

المعادلتان (2) ,(1) هما معادلتا الحركة المطلوبة.

<u>المسألة(٣):</u>

دالة لاجرانج للبندول البسيط (في الإحداثيات القطبية) هي:

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+mg\,r\cos\theta$$

التغير في دالة لاجرانج:

$$\delta L=\delta T-\delta V$$
$$=m[\dot{r}\,\delta\dot{r}+r^2\dot{\theta}\,\delta\dot{\theta}+\dot{\theta}^2\,r\,\delta r)+mg\,r(-\sin\theta\,\delta\theta)+mg\cos\theta\,\delta r$$

مبدأ هاملتون لأقل فعل:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt=0$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2}[m\{\dot{r}\,\delta\dot{r}+r^2\dot{\theta}\,\delta\dot{\theta}+r\,\dot{\theta}^2\;\delta r\}-mg\,r\sin\theta\,\delta\theta+mg\cos\theta\,\delta r]\,dt=0 \quad (1)$$

ولكن:

$$m\,\dot{r}\,\delta\dot{r}\,dt=m\,\dot{r}\,d(\delta r)=d(m\,\dot{r}\,\delta r)-m\,\delta r\,\ddot{r}\,dt$$
$$mr^2\dot{\theta}\,\delta\dot{\theta}dt=d(mr^2\,\dot{\theta}\,\delta\theta)-\delta\theta\,mr^2\,\dot{\theta}\,dt$$

فبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على (بعد الإختصار):

$$\int_{t_1}^{t_2}[\{m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mg\cos\theta\}\,\delta r$$
$$+\{mr^2\ddot{\theta}+2mr\,\dot{r}\,\dot{\theta}+mg\,r\sin\theta\}\,\delta\theta]\,dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}[d(m\dot{r}\delta r)+d(mr^2\,\dot{\theta}\,\delta\theta)]\,dt=0$$

وبفرض أن $\delta r,\ \delta\theta$ تتلاشيان عند t_1, t_2 فإن التكامل الأخير يتلاشى، وحيث أن $\delta r,\ \delta\theta$ مستقلان وإختياريان فإننا نحصل على:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = 0 \quad , \quad mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin\theta = 0$$

إذا كان طول البندول $\ell = r$ وهو مقدار ثابت فإن هاتين المعادلتين تصبحان:

$$m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = 0 \quad , \quad m\ell\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$$

وهما معادلتا حركة البندول البسيط.

ويلاحظ أنه من العلاقة الثانية فإن:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta = -\omega^2\sin\theta$$

حيث $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$

وبإعتبار أن الزاوية θ صغيرة للغاية فإن $\sin\theta \approx \theta$ ونحصل على

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\omega^2\,\theta}$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة.

الزمن الدوري:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/\ell}} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

التردد:

$$\upsilon = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\ell}$$