الباب الثالث

أقواس بواسون ولاجرانج
Poisson and Lagrange Brackets

تعريف :

إذا كان لدينا f, g تعتمدان على الإحداثيات المعممة q_j وكميات الحركة المعممة p_j والزمن ، وذلك في منظومة ديناميكية هولونومية أي إذا كان :

$$f = f(q_j, p_j, t) \quad ، \quad g = g(q_j, p_j, t)$$

فإن قوس بواسون للدالتين f,g يعرف كالآتي :

$$\{f, g\} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}$$

مثـــال :

إذا كانت H هي دالة هاملتون للمنظومة الديناميكية و كانت $f = f(q_j, p_j, t)$ هـــي أي دالة تعتمد على الموضع و كمية الحركة العموميتين والزمن t ، فأثبت أن :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

حيث $\{f,H\}$ هو قوس بواسون للدالتين f, H .

الحـــل :

حيث أن $f = f(q_j, p_j, t)$ فإن تفاضلة f هي :

$$df = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

ويكون التفاضل التام بالنسبة للزمن للدالة f هو :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j - \frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j \right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

ومن معادلات هاملتون القانونية :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad , \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

فبالتعويض في (1) نحصل على :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

حيث :

$$\{f, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} \right)$$

وهو قوس بواسون للدالتين f, H .

ملحوظة هامة : إذا كانت الدالة f لا تعتمد صراحة عل الزمن أي إذا كان :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad \text{فإن} \qquad \frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

ويكون شرط ثبوت الدالة f أي أن تكون ثابتة بمرور الزمن هو $\frac{df}{dt} = 0$ وهذا يعطي $\{f, H\} = 0$ أي تلاشي قوس بواسون لهذه الدالة مع دالة هاملتون ، و هو شرط ثبوت تلك الدالة .

تعرف الدالة التي تخضع للشرط $\{f, H\} = 0$ بأنها ثابت للحركة و هذا هو المعنى الطبيعي لأقواس بواسون .

<u>خواص أقواس بواسون:</u>

إذا كانت f,h,g دوالا في (q_j, p_j, t) و كان α ثابت فإنه يمكن إثبات الخواص التالية لأقواس بواسون :

(1) $\{f, f\} = 0 \quad , \quad \{f, \alpha\} = 0$

(2) $\{f, g\} = -\{g, f\}$

(3) $\{f \pm h, g\} = \{f, g\} \pm \{h, g\}$

(4) $\{fh, g\} = f\{h, g\} + h\{f, g\}$

$$(5)\quad \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$$

$$(6)\quad \{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$$

وتعرف الخاصية الأخيرة بمتطابقة جاكوبي (Jacobi'sIndentity) ، ويلاحظ فيها أن الدوال f,g,h تبقى في ترتيب دوري واحد في الحدود الثلاثة للمتطابقة .

تستخدم أقواس بواسون في الميكانيكا التحليلية لمعرفة ما إذا كانت دالة ما $f(q_j,p_j,t)$ من ثوابت الحركة أو لإيجاد معدل تغيرها مع الزمن و العلاقات الست السابق تستخدم في حساب أقواس بواسون .

<u>أثبات العلاقات السابقة:</u> يستخدم تعريف أقواس بواسون في إثبات العلاقات كالآتي

$$(1)\quad \{f,f\}=\sum_j\left\{\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}\right\}=0$$

$$\{f,\alpha\}=\sum_j\left\{\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial \alpha}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial \alpha}{\partial q_j}\right\}=0$$

حيث α ثابت فيكون تفاضلها مساويا صفراً .

$$(2)\quad \{f,g\}=\sum_j\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)$$

$$=-\sum_j\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)=-\{g,f\}$$

ومن ذلك نرى أن أقواس بواسون لا تتبع قانون التبادل (commutation law) .

$$(3)\quad \{f+h,g\}=\sum_j\left[\frac{\partial(f+h)}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial(f+h)}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right]$$

$$=\sum_j\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)+$$

$$+\sum_j\left(\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)=\{f,g\}+\{h,g\}$$

وبالمثل فإن :

$$\{f-h,g\}=\{f,g\}-\{h,g\}$$

ومن ذلك نرى أن أقواس بواسون تتبع قانون التوزيع (Distribution law) .

$$(4)\quad \{fh,g\}=\sum_j\left[\frac{\partial(fh)}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial(fh)}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right]$$

$$=\sum_j\left[\left(f\frac{\partial h}{\partial q_j}+h\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)\frac{\partial g}{\partial p_j}-\left(f\frac{\partial h}{\partial p_j}+h\frac{\partial f}{\partial p_j}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)\right]$$

$$=f\sum_j\left(\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)+h\sum_j\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)$$

$$=f\{h,g\}+h\{f,g\}$$

$$(5)\quad \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\frac{\partial}{\partial t}\sum_j\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)$$

و لكن :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}\right)=\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial p_j}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)\frac{\partial g}{\partial p_j}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial p_j}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial q_j} \right] = \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\}$$

(6) يترك إثباتها للطالب كتمرين.

حالات خاصة :

يمكن حساب الحالات الخاصة الآتية ، و هي مفيدة جدا في حل مسائل الميكانيكا التحليلية .

فإذا كانت q_j, p_j هي إحداثيات و كميات حركة معممة ، و كانت $f = f(q_j, p_j, t)$ وكمثال لهما دالة هاملتون حيث $H = H(q_j, p_j, t)$

فإن العلاقات الآتية يكن إثباتها بسهولة :

$$(1) \quad \{f, q_j\} = -\frac{\partial f}{\partial p_j} \rightarrow \{H, q_j\} = -\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$(2) \quad \{f, p_j\} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \rightarrow \{H, p_j\} = \frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$(3) \quad \{q_i, q_j\} = 0 \quad , \quad \{p_i, p_j\} = 0$$

$$(4) \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \left[= 1(i = j), = 0(i \neq j)\right]$$

العلاقات (4) ,(3) تعرف بأقواس بواسون الأساسية ويمكن إثباتها كالتالى:

$$\{q_i, q_j\} = \sum_s \left[\frac{\partial q_i}{\partial q_s}\frac{\partial q_j}{\partial p_s} - \frac{\partial q_i}{\partial p_s}\frac{\partial q_j}{\partial q_s}\right] = 0$$

$$\{p_i, p_j\} = \sum_s \left[\frac{\partial p_i}{\partial q_s}\frac{\partial p_j}{\partial p_s} - \frac{\partial p_i}{\partial p_s}\frac{\partial p_j}{\partial q_s}\right] = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \sum_s \left[\frac{\partial q_i}{\partial q_s}\frac{\partial p_j}{\partial p_s} - \frac{\partial q_i}{\partial p_s}\frac{\partial p_j}{\partial q_s}\right] = \delta_{ij}$$

أمثلة محلولة :

مثال (١) : باستخدام خواص أقواس بواسون ، أثبت أنه إذا كانت دالة هاملتون لا تعتمد صراحة على الزمن فإنها تكون ثابتا للحركة :

الحل :

حيث أن $H = H(q_j, p_j)$ ولا تعتمد على الزمن صراحة : $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

ومن العلاقة :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad \{H, H\} = 0$$

$$\therefore \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = 0 + 0 = 0$$

$$\therefore \frac{dH}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore H = \text{const}$$

أي أن H هو ثابت للحركة في حالة عدم اعتماده صراحة على الزمن .

مثال (٢): إذا كانت كل من الكميتين f, g ثابت للحركة

أي إذا كان $\frac{df}{dt} = 0, \frac{dg}{dt} = 0$ فاثبت أن قوس بواسون لهما هو أيضا ثابت للحركة .

[تسمى هذه النظرية بنظرية جاكوبي – بواسون (Jacobi-Poisson Theorem)]

الحل:

حيث أن : $g = g(q_j, p_j, t)$ ، $f = f(q_j, p_j, t)$ كلاهما ثابت للحركة فإن

$$\frac{df}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

$$\frac{dg}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

و المطلوب إثبات أن $\frac{d}{dt}\{f, g\} = 0$

أي أن

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{\{f, g\}, H\} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\{f,g\}=\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}+\{\{f,g\},H\}$$

$$=\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}+\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}-\{H,\{f,g\}\}$$

$$=\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}+\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\{f,\{g,H\}\}+\{g,\{H,f\}\}$$

$$=\left[\{f,\{g,H\}\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}\right]+\left[\{g,\{H,f\}\}+\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}\right]$$

$$=\left\{f,\{g,H\}+\frac{\partial g}{\partial t}\right\}+\left\{\{f,H\}+\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}$$

$$=\left\{f,\frac{dg}{dt}\right\}+\left\{\frac{df}{dt},g\right\}=\{f,0\}+\{0,g\}=0$$

وبهذا يكون $\{f,g\}$ هو ثابت الحركة .

وبذلك نكون قد أثبتنا نظرية جاكوبى – بواسون [إذا كان f, g ثابتان للحركة فإن قوس بواسون لهما هو ثابت للحركة أيضاً] .

<u>ملحوظة</u> : أستخدمنا في الإثبات الخاصية (2) والخاصية (5) وكذلك متطابقة جاكوبي .

<u>مثال(٣)</u>: أحسب أقواس بواسون للمركبات الكرتيزية لكل من المتجهين $\vec{r},\vec{p}$ حيث

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ (متجه الموضع)

$\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}$ (متجه كمية الحركة الخطية)

<u>الحـل</u>: أقواس بواسون المطلوبة هي :

(i) لمركبات المتجه $\vec{r}$ مع نفسها أي :

$\{x,x\},\{y,y\},\{z,z\}$

$\{x,y\},\{y,z\},\{z,x\}$

(ii) لمركبات المتجه $\vec{p}$ مع نفسها أي : $\{p_x,p_x\},\{p_y,p_y\},\{p_z,p_z\}$

$\{p_x,p_y\},\{p_y,p_z\},\{p_z,p_x\}$

(iii) لمركبات المتجه $\vec{r}$ مع مركبات المتجه $\vec{p}$ أي :

$$\{x,p_x\},\{x,p_y\},\{x,p_z\}$$
$$\{y,p_x\},\{y,p_y\},\{y,p_z\}$$
$$\{z,p_x\},\{z,p_y\},\{z,p_z\}$$

ولحساب هذه الأقواس نستخدم الخواص الآتية :

$$\{q_s,q_j\}=0 \quad , \quad \{p_s,p_j\}=0 \quad , \quad \{q_s,p_j\}=\delta_{sj}$$

$$\therefore \{x,x\}=\{y,y\}=\{z,z\}=\{x,y\}=\{y,z\}=\{z,x\}=0 \qquad \_\_\_\_ (1)$$
$$\{p_x,p_x\}=\{p_y,p_y\}=\{p_z,p_z\}=\{p_x,p_y\}=\{p_y,p_z\}=\{p_z,p_x\}=0 \qquad \_\_\_\_ (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\{x,p_x\}=1,\{x,p_y\}=0,\{x,p_z\}=0\\ \{y,p_x\}=0,\{y,p_y\}=1,\{y,p_z\}=0\\ \{z,p_x\}=0,\{z,p_y\}=0,\{z,p_z\}=1\end{array}\right\} \qquad \_\_\_\_ (3)$$

<u>مثـــال(٤)</u> : جسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية تتجه دائما نحو مركـز ثابـت O ، ودالة الجهد لها $u(r)$ ، أثبت أن متجه كمية الحركة الزاوية $\vec{M}=\vec{r}\wedge\vec{p}$ للجسيم حول نقطة O يظل متجها ثابتا طوال الحركة (أي يكون ثابتا للحركـة) و ذلـك باستخدام خواص أقواس بواسون .

<u>الحـــل</u> : متجه كمية الحركة الزاوية :

$$\vec{M}=\vec{r}\wedge\vec{p}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ p_x & p_y & p_z\end{vmatrix}$$
$$=(yp_z-zp_y)\vec{i}+(zp_x-xp_z)\vec{j}+(xp_y-yp_x)\vec{k}$$
$$=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}$$

وحتى يكون المتجه $\vec{M}$ ثابتا طوال الحركـة فيجـب أن تكـون مركبـات الثلاثـة M_x,M_y,M_z ثابتة أيضاً وحيث أن المتجه $\vec{M}$ لا يعتمد على الزمن صراحة فيكـون $\frac{\partial\vec{M}}{\partial t}=0$ ويكون شرط ثبوت $\vec{M}$ (أو كون $\vec{M}$ ثابتاً للحركة) هو تلاشي قوس بواسون

للمتجه $\vec{M}$ مع دالة هاملتون للجسيم المتحرك أي أن $\{\vec{M},H\}=0$ ، و هذا يعني أيضاً أن :

$$\{M_x,H\}=0\,,\{M_y,H\}=0\,,\{M_z,H\}=0$$

و لإثبات ذلك : نكتب دالة هاملتون للمنظومة :

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+u(x,y,z)$$

حيث : $r^2=x^2+y^2+z^2 \leftarrow \dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r},\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r},\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{z}{r}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}u'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}u' \qquad \Big|\; u'=\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{r}u'$$

لحساب أقواس بواسون :- نستخدم خواص أقواس بواسون :

$$\begin{aligned}\{M_x,H\}&=\{yp_z-zp_y,H\}\\&=\{yp_z,H\}-\{zp_y,H\}\\&=y\{p_z,H\}+\{y,H\}p_z-z\{p_y,H\}-\{z,H\}p_y\\&=y\left(-\frac{\partial H}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\right)p_z+z\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\right)p_y\\&=y\left(-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\cancel{\left(\frac{1}{m}p_y\right)p_z}+z\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\cancel{\left(\frac{1}{m}p_z\right)p_y}\\&=\cancel{y\left(-\frac{z}{r}u'\right)}+\cancel{z\left(\frac{y}{r}u'\right)}=0\end{aligned}$$

استخدمنا هنا الخواص الآتية :

$$\{f-h,g\}=\{f,g\}-\{h,g\}$$

$$\{fh, g\} = f\{h, g\} + \{f, g\}h$$

$$\{H, p_j\} = \frac{\partial H}{\partial q_j}, \{H, q_j\} = -\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

بالمثل فإن :

$$\begin{aligned}
\{M_y, H\} &= \{zp_x - xp_z, H\} \\
&= \{zp_x, H\} - \{xp_z, H\} \\
&= z\{p_x, H\} + \{z, H\}p_x - x\{p_z, H\} - \{x, H\}p_z \\
&= z\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\right)p_x - x\left(-\frac{\partial H}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\right)p_z \\
&= z\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \cancel{\left(\frac{1}{m}p_z\right)p_x} + x\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \cancel{\left(\frac{1}{m}p_x\right)p_z} \\
&= z\cancel{\left(-\frac{x}{r}u'\right)} + x\cancel{\left(\frac{z}{r}u'\right)} = 0
\end{aligned}$$

وأيضاً فإن $\{M_z, H\} = 0$ و بذلك يكون $\{\vec{M}, \vec{H}\} = 0$ و هذا يعني أن $\vec{M}$ هو ثابت الحركة .

أقواس لاجرانج (Lagrange's Brackets)

تعرف أقواس لاجرانج $[f,g]$ بالنسبة للأساس (q_j, p_j) بالعلاقة :

$$[f, g] = \sum_j \left(\frac{\partial q_j}{\partial f}\frac{\partial p_j}{\partial g} - \frac{\partial p_j}{\partial f}\frac{\partial q_j}{\partial g}\right)$$

و يلاحظ أن أقواس بواسون هي

$$\{f, g\} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)$$

<u>ملحوظة هامة</u>: بعض المراجع تكتب أقواس بواسون بالصورة $[f, g]$ وأقواس لاجرانج بالصورة $\{f, g\}$ فلزم التنوية.

أمثلة محلولة :

مثال (١) : اثبت أن أقواس لاجرانج لا تخضع لقانون التبادل

بمعنى أن $[f,g]=-[f,g]$

الحــــل :

$$[f,g]=\sum_j\left(\frac{\partial q_j}{\partial f}\frac{\partial p_j}{\partial g}-\frac{\partial p_j}{\partial f}\frac{\partial q_j}{\partial g}\right)$$

$$=-\sum_j\left(\frac{\partial p_j}{\partial f}\frac{\partial q_j}{\partial g}-\frac{\partial q_j}{\partial f}\frac{\partial p_j}{\partial g}\right)$$

$$=-\sum_j\left(\frac{\partial q_j}{\partial g}\frac{\partial p_j}{\partial f}-\frac{\partial p_j}{\partial g}\frac{\partial q_j}{\partial f}\right)$$

$$=-[f,g]$$

ملحوظة : هذه العلاقة تناظر علاقة أقواس بواسون : $\{f,g\}=-\{g,f\}$.

مثـــال (٢) : اثبت أن

$$[q_i,q_j]=0 \quad , \quad [p_i,p_j]=0$$

بينما

$$[q_i,p_j]=\delta_{ij}$$

الحــــل : يمكن إثبات هذه العلاقات من تعريف أقواس لاجرانج و باعتبار ان q,p هي إحداثيات مستقلة و ذلك كالآتي :

$$[q_i,p_j]=\sum_k\left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i}\frac{\partial p_k}{\partial q_j}-\frac{\partial q_k}{\partial q_j}\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$$

و حيث أن : q,p مستقلتان فإن

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_i}=0 \; , \; \frac{\partial p_k}{\partial q_i}=0$$

$$\therefore [q_i,q_j]=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

و بالمثل يمكن إثبات أن :

$$\therefore [p_i,p_j]=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

أيضاً :

$$[q_i, p_j] = \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i}\frac{\partial p_k}{\partial p_j} - \frac{\partial q_k}{\partial p_j}\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$$

و لما كان $\frac{\partial q_k}{\partial p_j} = 0$ فإن الحد الثاني يتلاشى

$$\therefore [q_i, p_j] = \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial q_i}\frac{\partial p_k}{\partial p_j} \qquad \_\_\_\_\_ (3)$$

و لكن : $\frac{\partial p_k}{\partial p_j} = \delta_{kj}$ ، $\frac{\partial q_k}{\partial q_i} = \delta_{ki}$

فبالتعويض في (3) :

$$\therefore [q_i, p_j] = \sum_k \delta_{ki} \cdot \delta_{kj} = \delta_{ij} \qquad \_\_\_\_\_ (4)$$

وهو المطلوب .

<u>ملحوظة</u>: هذه العلاقات تناظر العلاقات الخاصة بأقواس بواسون و هي :

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad , \{p_i, p_j\} = 0 \quad , \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

<u>مثـال (٣)</u> : إذا كانت $[q_\ell, q_i]$ و $[p_\ell, q_i]$ هي أقواس لاجرانج وكانت $\{q_\ell, p_j\}$ و $\{p_\ell, p_j\}$ هي أقواس بواسون ، أثبت أن :

$$\sum_{\ell=1}^{n}[p_\ell, q_i]\{p_\ell, p_j\} + \sum_{\ell=1}^{n}[q_\ell, q_i]\{q_\ell, p_j\} = 0 \qquad \_\_\_\_\_ (1)$$

<u>الحـــل</u>: نعلم أن :

$$[p_\ell, q_i] = -[q_i, p_\ell] = -\delta_{i\ell}$$

وأن :

$$[q_\ell, q_i] = 0, [p_\ell, p_j] = 0$$

وأن :

$$\{q_\ell, p_j\} = \delta_{\ell j}$$

فبالتعويض في الطرف الأيسر من (1) :

$$\therefore \sum_{\ell=1}^{n}[p_\ell, q_i]\{p_\ell, p_j\} + \sum_{\ell=1}^{n}[q_\ell, q_i]\{q_\ell, p_j\}$$
$$= -\delta_{i\ell} \times 0 + 0 \times \delta_{\ell j} = 0$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٤)</u> : إذا كانت $[q_\ell, q_i]$ و $[p_\ell, q_i]$ هي أقواس لاجرانج وكانت $\{q_\ell, q_j\}$ و $\{p_\ell, q_j\}$ هي أقواس بواسون ، اثبت أن :

$$\sum_{\ell=1}^{n}[p_\ell, q_i]\{p_\ell, q_j\} + \sum_{\ell=1}^{n}[q_\ell, q_i]\{q_\ell, q_j\} = \delta_{ij} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(2)$$

<u>الحـــل</u>: نعلم أن :

$$[q_\ell, q_i] = 0, \{q_\ell, q_j\} = 0$$

$$[p_\ell, q_i] = -[q_i, p_\ell] = -\delta_{i\ell}$$

$$\{p_\ell, q_j\} = -\{q_j, p_\ell\} = -\delta_{j\ell}$$

فيكون الحد الثاني من الطرف الأيسر من (1) يساوي صفرا ، أما الحد الأول فيكون :

$$\sum_{\ell=1}^{n}[p_\ell, q_i]\{p_\ell, q_j\} = -\delta_{i\ell} \times -\delta_{j\ell} = \delta_{ij}$$

$$\therefore \sum_{\ell=1}^{n}[p_\ell, q_i]\{p_\ell, q_j\} + \sum_{\ell=1}^{n}[q_\ell, q_i]\{q_\ell, q_j\} = \delta_{ij}$$

وهو المطلوب .

مسائل على أقواس بواسون ولاجرانج

(١) أثبت أقواس بواسون الأساسية المعرفة بالعلاقات:

$$\{q_i,q_j\}=0\ ,\ \{p_i,p_j\}=0\ ,\ \{q_i,p_j\}=\delta_{ij}\begin{cases}1 & (i\neq j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

(٢) إذا كانت q_j, p_j هي إحداثيات وكميات حركة معممة، وكانت $f=f(q_j,p_j,t)$ فأثبت أن:

$$\text{(i)}\ \{f,q_j\}=-\frac{\partial f}{\partial p_j}\quad ,\quad \text{(ii)}\ \{f,p_j\}=\frac{\partial f}{\partial q_j}$$

(٣) إذا كانت $\{\phi,\psi\}$ هو قوس بواسون للدالتين ϕ,ψ ، أثبت أن

$$\text{(i)}\quad \frac{\partial}{\partial t}\{\phi,\psi\}=\{\frac{\partial\phi}{\partial t},\psi\}+\{\phi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{d}{\partial t}\{\phi,\psi\}=\{\frac{d\phi}{dt},\psi\}+\{\phi,\frac{d\psi}{dt}\}$$

(٤) أثبت متطابقة جـاكوبي لأقواس بواسون وصورتها:

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}+\{h,\{f,g\}\}=0$$

(٥) استخدم متطابقة جـاكوبي لإثبات نظرية جـاكوبي- بواسون التي تنص على الآتي:

" قوس بواسون لثابتي حركة يكون هو نفسه ثابتاً للحركة.

حلول المسائل

حل المسألة(١):

$$\{q_i,q_j\}=\sum_k(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k}-\frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k})$$

وحيث أن q_i, q_j لا تعتمد على p_k (ليست دوال في p_k) فإن:

$$\frac{\partial q_j}{\partial p_k}=\frac{\partial q_i}{\partial p_k}=0\ \rightarrow\ \{q_i,q_j\}=0=\{p_i,p_j\}$$

أيضاً فإن:

$$\{q_i , p_j\} = \sum_k (\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k})$$

$$= \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} = \sum_k \delta_{ik}\,\delta_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

وقد تلاشى الحد الثاني لأن:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0 \ , \ \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$$

حل المسألة(٢):

$$\{f , q_j\} = \sum_j (\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial q_j}{\partial q_i})$$

وحيث أن: $(i = j)$ $\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 1$ ، $\frac{\partial q_j}{\partial p_i} = 0$ (q_j لا يعتمد على p_j) فإن:

$$\{f , q_j\} = -\frac{\partial f}{\partial p_j}$$

وهو المطلوب الأول.

أيضاً:

$$\{f , p_j\} = \sum_i (\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_j}{\partial q_i})$$

وحيث أن: $(i = j)$ $\frac{\partial p_j}{\partial p_i} = 1$ ، $\frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0$ (p_j لا تعتمد على q_j) فإن:

$$\therefore \{f , p_j\} = \frac{\partial f}{\partial q_j}$$

وهو المطلوب الثاني.

حل المسألة(٣): من تعريف قوس بواسون:

$$\{\phi , \psi\} = \frac{\partial \phi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \psi}{\partial q_i}\frac{\partial \phi}{\partial p_i}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}\{\phi,\psi\} = \frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial\phi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial\phi}{\partial p_i}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}(\frac{\partial\phi}{\partial t})\frac{\partial\psi}{\partial p_i} + \frac{\partial\phi}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}(\frac{\partial\psi}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial q_i}(\frac{\partial\psi}{\partial t})\frac{\partial\phi}{\partial p_i} - \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}(\frac{\partial\psi}{\partial t})$$

$$= [\frac{\partial}{\partial q_i}(\frac{\partial\phi}{\partial t})\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}(\frac{\partial\phi}{\partial t})] + [\frac{\partial\phi}{\partial q_i}\frac{\partial\phi}{\partial p_i}(\frac{\partial\psi}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial q_i}(\frac{\partial\psi}{\partial t})\frac{\partial\phi}{\partial p_i}]$$

$$= \{\frac{\partial\phi}{\partial t},\psi\} + \{\phi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\}$$

حيث أن

$$\{\frac{\partial\phi}{\partial t},\psi\} = \frac{\partial}{\partial q_i}(\frac{\partial\phi}{\partial t})\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}(\frac{\partial\phi}{\partial t}) \text{ , ...}$$

وبالمثل: يمكن إثبات العلاقة الثانية:

$$\frac{d}{dt}\{\phi,\psi\} = \{\frac{d\phi}{\partial t}, \psi\} + \{\phi,\frac{d\psi}{dt}\}$$

<u>حل المسألة(٤):</u> [متطابقة چـــاكوبي]:

سوف نستخدم العلاقات الآتية لإثبات متطابقة چـــاكوبي:

$$\{f,g\} = -\{g,f\}\ ;\ \{f,f\} = 0;$$

$$\{f,g+h\} = [f,g\} + \{f,h\};\ \{f,gh\} = g\{f,h\} + \{f,g\}h$$

والآن: لنعتبر التعبير الآتي:

$$\{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\}\}$$

$$= \{f,\sum_j(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j})\} - \{g,\sum_j(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j})\} \quad \_\_(1)$$

نفرض أن:

$$\sum_j\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} = M \quad , \quad \sum_j\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j} = N$$

$$\sum_j\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} = L \quad , \quad \sum_j\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j} = R$$

فتصبح المعادلة (1):

$$\{f,\{g,h\}\}-\{g,\{f,h\}\}=\{f,(M-N)\}-\{g,(L-R\}$$
$$=\{f,M\}-\{f,N\}-\{g,L\}+\{g,R\}$$

وباستخدام العلاقات المذكورة عاليه:

$$\therefore \text{R.H.S}=\{f,\sum_j(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j})\}-\{f,\sum_j(\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j})\}$$
$$-\{g,\sum_j(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j})\}-\{g,\sum_j(\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j})\}$$

أيضاً باستخدام العلاقة: $\{f,gh\}=\{f,g\}h+\{f,h\}g$ نحصل على:

$$\therefore \text{R.H.S}=\{f,\sum_j\frac{\partial g}{\partial q_j}\}\sum_j\frac{\partial h}{\partial p_j}+\{f,\sum_j\frac{\partial h}{\partial p_j}\}\sum_j\frac{\partial g}{\partial q_j}$$
$$-\{f,\sum_j\frac{\partial g}{\partial p_j}\}\sum_j\frac{\partial h}{\partial q_j}-\{f,\sum_j\frac{\partial h}{\partial q_j}\}\sum_j\frac{\partial g}{\partial p_j}$$
$$-\{g,\sum_j\frac{\partial f}{\partial q_j}\}\sum_j\frac{\partial h}{\partial p_j}-\{g,\sum_j\frac{\partial h}{\partial p_j}\}\sum_j\frac{\partial f}{\partial q_j}$$
$$+\{g,\sum_j\frac{\partial f}{\partial p_j}\}\sum_j\frac{\partial h}{\partial q_j}+\{g,\sum_j\frac{\partial h}{\partial q_j}\}\sum_j\frac{\partial f}{\partial p_j}$$
$$=\sum_j[-\frac{\partial h}{\partial q_j}(\{\frac{\partial f}{\partial p_j},g\}+\{f,\frac{\partial g}{\partial p_j}\})+\frac{\partial h}{\partial p_j}(\{\frac{\partial f}{\partial q_j},g\}+\{f,\frac{\partial g}{\partial q_j}\})]$$
$$+\sum_j[\frac{\partial g}{\partial q_j}\{f,\frac{\partial h}{\partial p_j}\}-\frac{\partial g}{\partial p_j}\{f,\frac{\partial h}{\partial q_j}\}-\frac{\partial f}{\partial q_j}\{g,\frac{\partial h}{\partial p_j}\}+\frac{\partial f}{\partial p_j}\{g,\frac{\partial h}{\partial q_j}\}] \quad \_(2)$$

وباستخدام العلاقة

$$\frac{\partial}{\partial x}\{f,g\}=\{\frac{\partial f}{\partial x},g\}+\{f,\frac{\partial g}{\partial x}\}$$

فإن الطرف الأيمن من (2) يؤول إلى:

$$\sum[-\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\{f,g\}+\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\{f,g\}=-\{h,\{f,g\}\}$$

$$\therefore \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\} + \{h,\{f,g\} = 0$$

$$\therefore \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

وهي متطابقة چــاكوبي المطلوبة.

<u>حل المسألة(٥):</u> [نظرية چــاكوبي – بواسون]:

في المسألة(٤): إذا كان $h = H$ (دالة هاملتون) فإن متطابقة چــاكوبي تصبح:

$$\{f,\{g,H\}\} + \{g,\{H,f\}\} + \{H,\{f,g\}\} = 0 \qquad \_\_\_(3)$$

وبفرض أن كل من f, g ثابتان من ثوابت الحركة، أي أن:

$$\{f,H\} = 0 \ , \ \{g,H\} = 0$$

فإن متطابقة چــاكوبي (3) تؤول إلى:

$$\{H,\{f,g\}\} = 0$$

وهذا يعني أن: المتغير الدنياميكي $\{f,g\}$ هو أيضاً ثابت للحركة، وبذلك نحصل علــى النظرية الآتية (نظرية چــاكوبي – بواسون):

"قوس بواسون لثابتي حركة يكون هو نفسه ثابتاً للحركة".

<u>ملحوظة</u> : سبق حل هذه المسألة أى إثبات نظرية جاكوبى – بواسون فى المثال رقم (٢) على أقواس بواسون ، والحل هنا هو حل مختصر باستخدام متطابقة جاكوبى .