الباب الرابع

التحويلات القانونية
Cannonical Transformation

مقدمة : عن التحويلات القانونية والإحداثيات القانونية :

تتوقف سهولة حل العديد من المسائل في الميكانيكا على اختيار الإحداثيات المعممة التي تستخدم، و تلعب التحويلات من مجموعة ما لإحداثيات الموضع و كمية الحركة إلى مجموعة أخرى دورا رئيسياً في جعل عملية حل المسائل أكثر سهولة .

إذا كان لدينا مجموعة إحداثيات للموضع و كمية الحركة (q_j, p_j) و أمكن تحويلها إلى مجموعة جديدة (Q_j, P_j) فإن معادلات التحويل تكون :

$$Q_j = Q_j(q_j, p_j, t) \quad , \quad P_j = P_j(q_j, p_j, t)$$

وتعرف التحويلات القانونية : بأنها تلك التحويلات التي لا تتغير معها صورة معادلات هاملتون القانونية ، أي أنها تلك التحويلات التي توجد لها دالة $\mathcal{H}$.
(تسمى دالة هاملتون في الإحداثيات الجديدة) و تحقق العلاقات :

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_j} \quad , \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_j}$$

والتي هي معادلات هاملتون في الإحداثيات الجديدة، ولها نفس صورة معادلات هاملتون القانونية في المتغيرات q_j, p_j .

تسمى Q_j, P_j في تلك الحالة بالإحداثيات القانونية، وهى مثل الإحداثيات القديمة q_j, p_j يجب أن تحقق أقواس بواسون التالية :

$$\{Q_j, Q_s\} = 0 \ , \ \{P_j, P_s\} = 0 \quad , \quad \{Q_j, P_s\} = \delta_{js}$$

يلاحظ أن دالة هاملتون الجديدة هي : $\mathcal{H} = \mathcal{H}(Q_j, P_j, t)$ و هي تختلف بالطبع عن دالة هاملتون القديمة أو الأصلية $H = H(q_j, p_j, t)$

الحصول على التحويلات القانونية باستخدام الدوال المولدة:

نفرض أن دالتي لاجرانج في الإحداثيات القديمة و الجديدة هي:

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad , \quad \mathcal{L}(Q_j, \dot{Q}_j, t)$$

و ترتبطان بدالتي هاملتون:

$$H(q_j, p_j, t) \quad , \quad \mathcal{H}(Q_j, P_j, t)$$

بالعلاقتين:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad , \quad \mathcal{H} = \sum P_j \dot{Q}_j - \mathcal{L}$$

والآن : من مبدأ هاملتون لأقل فعل والذي ينص على أن التكامل $\int Ldt$ يكون نهاية صغرى، و هذا يتطلب (من حساب التغيرات) أن تكون $\delta\int Ldt = 0$. وحسب مبدأ هاملتون فإن التحويلات القانونية يجب أن تحقق الشرط: أن يكون لكل من $\int Ldt$, $\int \mathcal{L}\, dt$ نهاية صغرى ، أي أنه في حالة التحويلات القانونية يجب أن يكون لدينا في نفس الوقت :

$$\delta\int Ldt = 0 \quad , \quad \delta\int \mathcal{L}\ dt = 0 \qquad \_\_\_\_ (2)$$

أي أن:

$$\delta\int \sum_j (p_j \dot{q}_j - H)dt = 0 \quad , \quad \delta\int \sum (P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H})dt = 0$$

أي أن:

$$\delta(\sum_j (p_j\ dq_j - Hdt) = 0 \qquad \_\_\_\_ (3)$$

$$\delta\int \sum (P_j\ dQ_j - \mathcal{H}\ dt) = 0 \qquad \_\_\_\_ (4)$$

وتكون هاتان الصورتان:((1) ، (2) أو (4) ، (3)) لمبدأ هاملتون متكافئتان تماما إذا كانت الكميات تحت علامة التكامل واحدة أو يكون الفرق بينهما على الأكثر هو تفاضل تام لدالة اختيارية في الإحداثيات المعممة (القديمة و الجديدة) و في الزمن أي دالة بالصورة : $G(q_j, Q_j, t)$

فمن (2) ، (1) بالطرح:

$$\delta\int (L - \mathcal{L})dt = 0$$

و هذا يستدعي أن يكون :

$$\delta\int dG = 0$$

حيث :
$$dG = (L - \mathcal{L})\,dt$$

$$\therefore \frac{dG}{dt} = L - \mathcal{L} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(5)$$

تسمى الدالة G التي تحقق العلاقة (5) بالدالة المولدة (generating function) للتحويل القانوني .

وإذا أعطيت الدالة G فإن معادلات التحويل

$$Q_j = Q_j(q_j, p_j, t) \quad , \quad P_j = P_j(q_j, p_j, t)$$

يمكن تحديدها تماماً .

<u>الصور المختلفة للدالة المولدة</u>

يمكن للدالة المولدة أن تأخذ عدة صور نتيجة اعتمادها على الإحداثيات القديمة (q_j, p_j) و الجديدة (Q_j, P_j) والزمن t وهذه الصور هي:

(1) $G = G(q_j, Q_j, t)$

(2) $S = S(q_j, P_j, t)$

(3) $F = F(p_j, Q_j, t)$

(4) $T = T(p_j, P_j, t)$

و سوف سندرس الآن كل صورة من تلك الصور :

<u>(١) الدالة المولدة</u> $G = G(q_j, Q_j, t)$:

لهذه الدالة يمكن إثبات أن:-

$$p_j = \frac{\partial G}{\partial q_j} \quad , \quad P_j = -\frac{\partial G}{\partial Q_j} \; , \; \mathcal{H} = H + \frac{\partial G}{\partial t}$$

حيث P_j, Q_j تحقق معادلات هاملتون .

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_j} \qquad , \qquad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_j}$$

<u>الإثبات:</u>

من العلاقة (5) :

$$\frac{dG}{dt}=L-\mathcal{L}\ =\sum_j p_j\dot{q}_j-H-(\sum P_j\dot{Q}_j-\mathcal{H})$$

$$\therefore dG=(L-\mathcal{L})dt$$
$$=\sum_j p_j dq_j-Hdt-(\sum_j P_jQ_j-\mathcal{H}\,dt)$$
$$=\sum_j p_j dq_j-\sum_j P_jQ_j+(\mathcal{H}-H)dt \qquad \text{\_\_\_\_\_}(6)$$

وحيث أن $G=G(q_j,Q_j,t)$

$$\therefore dG=\sum_j\frac{\partial G}{\partial q_j}dq_j+\sum_j\frac{\partial G}{\partial Q_j}dQ_j+\frac{\partial G}{\partial t}dt \qquad \text{\_\_\_\_\_}(7)$$

وبمقارنة (7) ، (6) نجد أن:

$$p_j=\frac{\partial G}{\partial q_j}\quad,\ P_j=-\frac{\partial G}{\partial Q_j}\ ,\ \mathcal{H}=H+\frac{\partial G}{\partial t} \qquad \text{\_\_\_\_}(8)$$

وحيث أن $\mathcal{H}$ هي دالة هاملتون في الإحداثيات القانونية P_j,Q_j فإنها تحقق معادلات هاملتون بنفس صورتها القانونية أي بالصورة :

$$\dot{Q}_j=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j}\quad,\ \dot{P}_j=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q_j} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(9)$$

المعادلات (9) ، (8) هي المعادلات المطلوبة للدالة المولدة G

<u>ملحوظة</u> : إذا كانت G لا تعتمد صراحة على الزمن فإن $\frac{\partial G}{\partial t}=0$

و تكون $\mathcal{H}=H$ أي أن دالة هاملتون تنطبق في الإحداثيات القديمة والجديدة .

(٢) <u>الدالة المولدة</u> $S=S(q_j,P_j,t)$

ترتبط الدالة S بالدالة G بالعلاقة الآتية:

$$S=G+\sum P_jQ_j \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

وذلك حيث أن: $P_j=-\frac{\partial G}{\partial Q_j}$ فتكون :

$$G = -\sum P_j Q_j + (\text{دالة تعتمد على } Q_j)$$
$$= -\sum P_j Q_j + S(q_j, P_j, t)$$

<u>ويمكن إثبات العلاقات التالية للدالة المولدة S</u>

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} \quad , \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \ , \ \mathcal{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

حيث P_j, Q_j تحقق معادلات هاملتون :

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad , \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_j}$$

<u>الإثبات:</u>

$$dG = \sum_j p_j dq_j - \sum_j P_j\, dQ_j + (\mathcal{H} - H)dt$$

$$= \sum_j p_j dq_j - d\left(\sum_j P_j Q_j\right) + \sum Q_j dP_j + (\mathcal{H} - H)dt$$

$$\therefore d\left(G + \sum_j P_j Q_j\right) = \sum_j p_j dq_j + \sum Q_j dP_j + (\mathcal{H} - H)dt$$

وبوضع $S = G + \sum P_j Q_j$ (من (1)) :

$$\therefore dS = \sum_j p_j dq_j + \sum Q_j dP_j + (\mathcal{H} - H)dt \qquad \_\_\_\_\_ (2)$$

وحيث أن $S = S(q_j, P_j, t)$

$$\therefore dS = \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j + \sum \frac{\partial S}{\partial P_j} dP_j + \frac{\partial S}{\partial t} dt \qquad \_\_\_\_\_ (3)$$

بمقارنة (3) , (2) نجد أن:

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} \quad , \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \ , \ \mathcal{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} \qquad \_\_\_\_\_ (4)$$

وحيث أن $\mathcal{H}$ هي دالة هاملتون في الإحداثيات القانونية Q_j, P_j ، فإنها تحقق معادلات هاملتون بالصورة:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_j} \quad , \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_j} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(5)$$

وهو المطلوب .

يلاحظ أيضاً أن الفرق بين دالتي هاملتون الجديدة $\mathcal{H}$ والقديمة H هو التفاضل الجزئي للدالة المولدة للتحويل (S) بالنسبة للزمن ، فإذا كانت : $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ فإن $\mathcal{H} = H$

(٣) الدالة المولدة $F = F(p_j, Q_j t)$:

وترتبط الدالة F بالدالة G بالعلاقة الآتية :

$$F = G - \sum p_j, q_j$$

ويمكن إثبات العلاقات الآتية للدالة المولدة F :

$$p_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j}, \quad q_j = -\frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \mathcal{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

(٤) الدالة المولدة $T = T(p_j, P_j, t)$

وترتبط الدالة T بالدالة G بالعلاقة الآتية :

$$T = G + \sum P_j G_j - \sum p_j, q_j$$

ويمكن إثبات العلاقات الاتية للدالة المولدة T :

$$q_j = -\frac{\partial T}{\partial p_j}, \quad Q_j = \frac{\partial T}{\partial p_j}, \quad \mathcal{H} = H + \frac{\partial T}{\partial t}$$

أمثلة محلولة:

مثال(١): أثبت أن التحويل الآتي هو تحويل قانوني:

$$Q = \ln(\frac{1}{q}\sin p), \quad P = q\cot p$$

ثم اوجد الدالة المولدة $T(p,P)$

الحـــل: المتغيرات القديمة q , p هي متغيرات قانونية لأنها تحقق أقواس بواسون :

$$\{q,q\} = 0 \ , \ \{p,p\} = 0 \ , \ \{q,p\} = 1$$

وحتى يكون التحويل المعطى قانوني يجب أن تكون المتغيرات الجديدة قانونية أيـضا أي تحقق أقواس بواسون، أى يجب أن يكون :

$$\{Q,Q\} = 0 \ , \ \{P,P\} = 0 \ , \ \{Q,P\} = 1$$

ولإثبات ذلك: العلاقتين $\{Q,Q\}=0$, $\{P,P\}=0$ محققتان

وذلك لان $\{f,f\}=0$ (من خواص أقواس بواسون)

والمطلوب الآن: إثبات أن $\{Q,P\}=1$

$$Q = \ln[\frac{\sin p}{q}] = \ln\sin p - \ln q \qquad \text{\_\_\_\_\_}(1)$$

$$P = q\cot p \qquad \text{\_\_\_\_\_}(2)$$

و من التعريف :

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$

فمن (2) , (1) :

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{1}{q} \ , \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\cos p}{\sin p}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \cot p \ , \quad \frac{\partial P}{\partial p} = -q\frac{1}{\sin^2 p}$$

$$\therefore \{Q,P\} = \frac{1}{\sin^2 p} - \frac{\cos^2 p}{\sin^2 p} = \frac{1-\cos^2 p}{\sin^2 p} = \frac{\sin^2 p}{\sin^2 p} = 1$$

ومن هذا يتضح أن المتغيرات Q, P تحقق أقواس بواسون المذكورة فهي متغيرات قانونية ، ويكون التحويل المعطى قانونياً .

لإيجاد الدالة المولدة T :

حيث أن $\frac{\partial T}{\partial p} = Q$, $\frac{\partial T}{\partial p} = -q$ (من خواص الدالة T)

ومن رأس المسألة فإن :

$$Q = \ell n \frac{\sin p}{q}, \quad q = \frac{P}{\cot p} = P \tan p$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial p} = -q = -P \tan p \to \therefore T = P \ell n \cos p + F_1(P) \_\_\_\_ (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = Q = \ell n \frac{\sin p}{q} = \ell n \frac{\sin p}{P \tan p} = \ell n \frac{\cos p}{P} = \ell n \cos p - \ell n P \_(2)$$

$$\therefore T = P \ell n \cos p - [P \ell n p - \int dP]$$

$$= P \ell n \cos p - P \ell n P + P + F_2(P) \_\_\_\_ (3)$$

بمقارنة (1) ، (3) نجد أن :

$$F_2(P) = P(1 - \ell n p)$$

وبالتعويض فى (3) نحصل على :

$$T = P \ell n \cos p + P(1 - \ell n P)$$

وهو المطلوب .

مثال(٢): أوجد قيم α, β التي تجعل التحويل الآتي قانونياً

$$Q = q^{\alpha} \cos \beta p \quad , \quad P = q^{\alpha} \sin \beta p$$

ثم اوجد الدالة المولدة $F(p, Q)$

الحـــل: حتى يكون التحويل قانونيا، يجب أن يكون:

$$\{Q,Q\}=0 \quad , \quad \{P,P\}=0 \quad , \quad \{Q,P\}=1$$

العلاقتان الأولى و الثانية محققتان حيث أنه من خواص أقواس بواسون

فإن $\{f,f\}=0$ ، و بالتالي فلكي يكون التحويل المعطى قانونيا فإن $\{Q,P\}=1$

و حيث أن :

$$Q=q^{\alpha}\cos\beta p \quad , \quad P=q^{\alpha}\sin\beta p$$

$$\therefore \frac{\partial Q}{\partial q}=\alpha q^{\alpha-1}\cos\beta p \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial p}=-q^{\alpha}\beta\sin\beta p$$

$$\frac{\partial P}{\partial q}=\alpha q^{\alpha-1}\sin\beta p \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial p}=q^{\alpha}\beta\cos\beta p$$

$$\therefore \{Q,P\}=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}=1$$

$$\therefore \alpha\beta q^{2\alpha-1}(\cos^2\beta p+\sin^2\beta p)=1 \quad \therefore \alpha\beta q^{2\alpha-1}=1$$

وهذا يتأتى إذا كان : $\alpha\beta=1\ ,\ \ 2\alpha-1=0$

$$\therefore \alpha=\frac{1}{2} \quad , \quad \beta=2$$

و تكون صورة التحويل القانوني هي:

$$Q=\sqrt{q}\cos 2p \quad , \quad P=\sqrt{q}\sin 2p$$

<u>لإيجاد الدالة المولدة F</u> :

من خواص الدالة F فإن : $\dfrac{\partial F}{\partial p}=-q,\quad \dfrac{\partial F}{\partial Q}=-p,$

ومن رأس المسألة فإن :

$$\frac{\partial F}{\partial p}=-Q^2\sec^2 2p\rightarrow F=-\frac{Q^2}{2}\tan 2p+F_1,(Q)\_\_\_(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = -Q\tan 2p \rightarrow F = -\frac{Q^2}{2}\tan 2p + F_2(p) \_\_\_(2)$$

بالمقارنة نجد أن $F_1 = F_2 = 0$ وبذلك نحصل على العلاقة المطلوبة :

$$F = -\frac{Q^2}{2}\tan 2p$$

مثـــال(٣): في منظومة المتذبذب التوافقي البسيط ، حيث دالة هاملتون لهــا الــصورة:

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ حيث m, ω ثابتان

(أ) استخدم الدالة المولدة $G(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q$ لإيجاد التحــويلات القانونية $P=P(q,p)$ ، $Q=Q(q,p)$ ، ثم أوجد دالة هــاملتون الجديــدة ، وأثبت أنها دالة دورية في متغير واحد على الأقل .

(ب) اكتب معادلات هاملتون القانونية في المتغيرات الجديدة Q,P ، و من ذلــك أوجد معادلة الحركة للمتذبذب بالصورة $q = a\sin(\omega t + \varepsilon)$ حيث ε ثابت ، $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ ، E هي الطاقة الكلية للمتذبذب .

الحــل: الدالة المولدة :

$$G(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q$$

ومن خواص هذه الدالة :

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} \quad , \; P = -\frac{\partial G}{\partial Q}$$

$$\therefore p = \frac{\partial G}{\partial q} = mwq \cot Q \quad \rightarrow \therefore Q = \cot^{-1}\left(\frac{p}{mwq}\right) \qquad \_\_\_\_ (1)$$

$$P = -\frac{\partial G}{\partial Q} = \frac{1}{2} mwq^2 \operatorname{cosec}^2 Q = \frac{1}{2} mwq^2 (1 + \cot^2 Q)$$

$$= \frac{1}{2} mwq^2 \left(1 + \frac{p^2}{m^2 \omega^2 q^2}\right) = \frac{1}{2} mwq^2 + \frac{p^2}{2m\omega} \qquad \_\_\_\_ (2)$$

المعادلتان (2), (1) تعطيان التحويلات القانونية المطلوبة :

$$Q = Q(q, p) \quad , \quad P = P(q, p)$$

<u>و لإيجاد دالة هاملتون الجديدة</u> :

حيث أن G لا تعتمد صراحة على الزمن t أي أن $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ فإن $\mathcal{H} = H$

وللتعبير عن $\mathcal{H}$ بدلالة Q,P نستخدم معادلات التحويل (2) , (1) لإيجاد q,p بدلالة Q,P ثم نعوض في علاقة H المعطاة في رأس المسألة فنحصل على $\mathcal{H}$.

$$p = m\omega q \cot Q \quad \rightarrow \quad \therefore p^2 = m^2 \omega^2 q^2 \cot^2 Q \qquad \_\_\_\_ (3)$$

$$P = \frac{1}{2} m\omega q^2 \operatorname{cosec}^2 Q = \frac{1}{2} m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}$$

$$\therefore q^2 = \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q \qquad \_\_\_\_ (4)$$

و بالتعويض من (4) في (3) :

$$p^2 = m^2 \omega^2 \left(\frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q\right) \cot^2 Q$$

$$= 2m\omega P \sin^2 Q \left(\frac{\cos^2 Q}{\sin^2 Q}\right) = 2m\omega P \cos^2 Q \qquad \_\_\_\_ (5)$$

المعادلتان (5) , (4) تعطيان q , p بدلالة P, Q حيث :

من (4) :
$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\ \sin Q$$

من (5) :
$$p = \sqrt{2m\omega P}\ \cos Q$$

و تصبح دالة هاملتون الجديدة :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \\ &= \frac{1}{2m}\left(2m\omega P\cos^2 Q\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{2P}{m\omega}\sin^2 Q\right) \\ &= \omega P\cos^2 Q + \omega P\sin^2 Q \\ &= \omega P = E \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (6)\end{aligned}$$

حيث E هي الطاقة الكلية .

وعليه فإن دالة هاملتون الجديدة $\mathcal{H}$ لا تعتمد على المتغير Q و تعتمد فقط على P ، وبالتالي فإن Q هو إحداثي دوري (أو مهمل) و تكون الدالة $\mathcal{H}$ هي دالة دورية في هذا المتغير الدوري (Q) . وهو المطلوب الثاني .

(ب) معادلات هاملتون القانونية في المتغيرات الجديدة Q , P

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_j} \quad , \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_j}$$

$$\therefore \dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = \omega \quad \rightarrow Q = \omega t + \varepsilon \qquad \text{\_\_\_\_} (7)$$

$$\therefore \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = 0 \quad \rightarrow \quad P = \text{const} = \frac{E}{\omega} \qquad \text{\_\_\_\_} (8)$$

و تصبح معادلة الحركة للمتذبذب هي:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\ \sin Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\ \sin(\omega t + \varepsilon) = a\ \sin(\omega t + \varepsilon)$$

حيث $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ و هو المطلوب .

مسائل على التحويلات القانونية

مسألة (١): باستخدام أقواس بواسون أثبت أن التحويل الآتي هو تحويل قانوني:

$$Q=(e^{-2q}-p^2)^{\frac{1}{2}}\ ,\qquad P=\cos^{-1}(pe^q)$$

مسألة (٢): باستخدام أقواس بواسون اثبت أن التحويل الآتي هو تحويل قانوني:

$$q=\sqrt{2P}\ \sin Q\quad ,\quad p=\sqrt{2P}\ \cos Q$$

مسألة(٣): إذا أعطيت الدالة المولدة $G(q,Q,t)$ بالصورة :

$$G=\frac{1}{2}mw[q-\frac{f(t)}{mw^2}]^2\cot Q$$

فأوجد كلاً من q,p بالصورة:

$$q=\frac{f(t)}{mw^2}+\sqrt{\frac{2P}{mw}}\sin Q\ ,\ p=\sqrt{2mwP}\cos Q$$

مسألة(٤): إذا كانت الدالة المولدة $F(Q_j,p_j)$ تعطي بالصورة:

$$F=-(e^Q-1)^2\tan p$$

ومعادلات التحويل لها هي:

$$q_j=-\frac{\partial F}{\partial p_j}\quad ,\quad P_j=-\frac{\partial F}{\partial Q_j}$$

فأوجد كل من Q,P بالصورة:

$$Q=\ln[1+\sqrt{q}\cos p]\ \ ,\ P=2\sqrt{q}\ [1+\sqrt{q}\cos p]\sin p$$

مسألة(٥): اوجد التحويل القانونى الذى دالته المولدة هى :

$$G=\frac{1}{2}[-Q\sqrt{q-Q^2}+q\cos^{-1}Q/\sqrt{q}]$$

حل المسائل على التحويلات القانونية

حل المسألة(١): حتى يكون التحويل قانونياً ، يجب أن يكون :

$$\{Q,Q\}=0\quad ,\quad \{P,P\}=0\quad ,\quad \{Q,P\}=1$$

العلاقتان الأولى و الثانية محققتان، حيث أنه من خواص أقواس بواسون فإن $\{f,f\}=0$ و بالتالي يجب إثبات أن:

$$\{Q,P\}=1 \qquad \text{حيث} \qquad \{Q,Q\}=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$

ولما كان: $P=\cos^{-1}(pe^{q})\ ,\quad Q=(e^{-2q}-p^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{-e^{-2q}}{(e^{-2q}-p^2)^{\frac{1}{2}}}\quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial p}=\frac{-p}{(e^{-2q}-p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q}=\frac{-p}{(e^{-2q}-p^2)^{\frac{1}{2}}}\quad , \quad \frac{\partial P}{\partial p}=\frac{-1}{(e^{-2q}-p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \{Q,P\}=\left(\frac{-e^{-2q}}{\sqrt{e^{-2q}-p^2}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{e^{-2q}-p^2}}\right)-\left(\frac{-p}{\sqrt{e^{-2q}-p^2}}\right)\left(\frac{-p}{\sqrt{e^{-2q}-p^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{e^{-2q}}{e^{-2q}-p^2}\right)-\left(\frac{p^2}{e^{-2q}-p^2}\right)=\frac{e^{-2q}-p^2}{e^{-2q}-p^2}=1$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن التحويل المعطى هو تحويل قانوني. و هو المطلوب .

<u>حل المسألة(٢)</u>: حتى يكون التحويل قانونياً يجب أن يكون:

$$\{Q,Q\}=0\ ,\quad \{P,P\}=0\ ,\quad \{Q,P\}=1$$

العلاقتان الأولى و الثانية محققتان، حيث أنه من خواص أقواس بواسون فإن : $\{f,f\}=0$ و بالتالي يجب إثبات أن :

$$\{Q,P\}=1\ \text{حيث}\qquad \{Q,P\}=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$

و لما كان: $p=\sqrt{2P}\cos Q\ ,\quad q=\sqrt{2P}\ \sin Q$

$$\therefore Q=\tan^{-1}\frac{q}{p}\quad , \quad P=\frac{1}{2}(q^2+p^2)$$

$$\therefore \tan Q=\frac{q}{p}\quad , \quad \therefore \frac{\partial P}{\partial q}=q\quad , \quad \frac{\partial P}{\partial p}=p$$

$$\therefore \sec^2 Q\frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{1}{P} \quad , \quad \sec^2 Q\frac{\partial Q}{\partial p}=-\frac{q}{p^2}$$

$$\therefore \{Q,P\}=[(\frac{1}{p}\cos^2 Q)p+(\frac{q}{p^2}\cos^2 Q)q]=\cos^2 Q[1+\frac{q^2}{p^2}]$$

$$=\cos^2 Q[1+\tan^2 Q]=\cos^2 Q\cdot\sec^2 Q=1$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن التحويل المعطى هو تحويل قانوني . وهو المطلوب .

<u>حل المسألة(٣):</u> معادلات التحويل للدالة المولدة $G(q,Q,t)$ هي:

$$p_j=\frac{\partial G}{\partial q_j} \quad \_\_\_(1) \quad , \quad P_j=-\frac{\partial G}{\partial Q_j} \quad \_\_(2) \quad , \mathcal{H}=H+\frac{\partial G}{\partial t} \quad \_\_(3)$$

من (1):

$$p=\frac{\partial G}{\partial q}=\frac{1}{2}mw\cot Q[2(q-\frac{f(t)}{mw^2})]=mw(q-\frac{f(t)}{mw^2})\cot Q \quad \_\_(4)$$

من (2):

$$P=-\frac{\partial G}{\partial Q}=-[-\frac{1}{2}mw(q-\frac{f(t)}{mw^2})^2\operatorname{cosec}^2 Q]$$

$$=\frac{mw}{2}[q-\frac{f(t)}{mw^2}]^2\operatorname{cosec}^2 Q \quad \_\_\_\_\_\_(5)$$

$$\therefore [q-\frac{f(t)}{mw^2}]=\sqrt{\frac{2P}{mw}}\,\frac{1}{\operatorname{cosec} Q} \quad \_\_\_\_\_\_(6)$$

بالتعويض من (6) في (4):

$$\therefore p=mw\sqrt{\frac{2P}{mw}}\,\frac{1}{\operatorname{cosec} Q}\cot Q=\sqrt{2mwP}\cos Q \quad \_\_(7)$$

ومن (6):

$$\therefore q=\frac{f(t)}{mw^2}+\sqrt{\frac{2P}{mw}}\sin Q \quad \_\_\_\_\_\_(8)$$

المعادلتان (8),(7) هما المعادلتان المطلوبتان.

حل المسألة(٤): معادلات التحويل للدالة المميزة S هي:

$$q=-\frac{\partial F}{\partial p} \quad \text{\_\_\_\_\_\_}(1) \qquad , \qquad P=-\frac{\partial F}{\partial Q} \quad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

فمن (1):

$$q=-[-(e^{Q}-1)^{2}\sec^{2}p]$$

$$\therefore \frac{q}{\sec^{2}p}=(e^{Q}-1)^{2} \rightarrow \sqrt{q}\cos p=e^{Q}-1$$

$$\therefore e^{Q}=\sqrt{q}\cos p+1$$

$$\therefore Q=ln[1+\sqrt{q}\cos p] \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

ومن (2):

$$P=-[-2(e^{Q}-1)(\tan p)e^{Q}] \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(4)$$

بالتعويض من (3) في (4):

$$P=2\tan p[e^{\ln(1+\sqrt{q}\cos p)}-1][e^{\ln(1+\sqrt{q}\cos p)}]$$

$$=2\tan p[(1+\sqrt{q}\cos p)-1]\,[1+\sqrt{q}\cos p]$$

$$=2\sqrt{q}\tan p\cos p\;[1+\sqrt{q}\cos p]$$

$$=2\sqrt{q}\sin p\;[1+\sqrt{q}\cos p] \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(5)$$

العلاقتان (5),(3) هما العلاقتان المطلوبتان.

حل المسألة(٥): واضح أن G تعتمد على q, Q أى أن : $G=G(q, Q)$

ومن خواصها : $P=\dfrac{\partial G}{\partial q}, \quad P=-\dfrac{\partial G}{\partial Q}$

$$\therefore p=\frac{1}{2}[-\frac{Q}{2\sqrt{q-Q^{2}}}+\cos^{-1}\frac{Q}{\sqrt{q}}-\frac{q}{\sqrt{1-\frac{Q^{2}}{q}}}(-\frac{Q}{2q^{3/2}})]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{Q}{2\sqrt{q-Q^{2}}}+\cos^{-1}\frac{Q}{\sqrt{q}}+\frac{Q}{2\sqrt{q-Q^{2}}}]=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{Q}{\sqrt{q}}(1)$$

$$\therefore P = -\frac{1}{2}[-Q\frac{-2Q}{2\sqrt{q-Q^2}} - \sqrt{q-Q^2} - q\frac{1}{\sqrt{1-\frac{Q^2}{q}}}(\frac{1}{\sqrt{q}})]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{Q^2 - q + Q^2 - q}{\sqrt{q-Q^2}}\right]$$

$$= \left[\frac{q-Q^2}{\sqrt{q-Q^2}}\right] = \sqrt{q-Q^2} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(2)$$

وبذلك يكون التحويل القانونى للدالة المولدة المعطاه هو [من (1) ، (2)]:

$$Q = \sqrt{q}\cos 2p, \quad P = \sqrt{q-Q^2}$$

وهو المطلوب .

تطبيقات على التحويلات القانونية

تطبيق (١) : تحويلات التماس (Contact Transformations)

تعريف :

يسمى التحويل القانوني من المتغيرات (q_j, p_j) إلى المتغيرات (Q_j, P_j) بتحويل التماس إذا كانت معادلات التحويل

$$P_j = P_j(q_j, p_j, t) \quad \text{و} \quad Q_j = Q_j(q_j, p_j, t)$$

تجعل الكمية :- $\sum_j (p_j dq_j - P_j dQ_j)$ تمثل تفاضلا تاما في المتغيرات q_j, p_j وفي هذه الحالة فإن :-

$$\sum_j (p_j dq_j - P_j dQ_j) = dW(p_j, q_j)$$

وتسمى الدالة W بالدالة المميزة (Characteristic Function) للتحويل .

وإذا كانت الدالة W معتمدة على الزمن فإنها تصبح $W(q_j, p_j, t)$

العلاقة بين الدالة المميزة W والدالتين المولدتين G,S

(١) الدالة $W(q_j, p_j, t)$ تنطبق على الدالة المولدة $G(q_j, Q_j, t)$ بعد استبدال المتغير p_j فيها ووضعه بدلالة q_j, Q_j

(٢) الدالة $S(q_j, P_j, t)$ ترتبط بالدالة $W(q_j, p_j, t)$ بالعلاقة :

$$S(q_j, P_j, t) = W(q_j, p_j, t) + P_j Q_j$$

وذلك بعد التعويض عن p_j بدلالة q_j, P_j .

ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية :

مثال(١): أثبت أن التحويل القانوني

$$Q = \tan^{-1}\frac{q}{p} \quad \text{و} \quad P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

هو تحويل تماس ، وأوجد الدوال المولدة الأربع G ، S ، F ، T للتحويل .

<u>الحــــــل</u>: التحويل المعطى يكون تحويل تماس إذا كان :

$$\sum_j (p_j dq_j - P_j dQ_j) = pdq - PdQ$$

يمثل تفاضلا تاما أي أن :

$$pdq - PdQ = dW$$

و لإثبات ذلك :

$$Q = \tan^{-1}\frac{q}{p}$$

$$\therefore dQ = d\left[\tan^{-1}\frac{q}{p}\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{q}{p}\right)^2} d\left(\frac{q}{p}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{p^2+q^2}{p^2}}\left(\frac{p\,dq - qdp}{p^2}\right) = \frac{p\,dq - qdp}{p^2+q^2}$$

$$\therefore pdq - PdQ = pdq - \frac{1}{2}\left(p^2+q^2\right)\cdot\frac{pdq - qdp}{p^2+q^2}$$

$$= pdq - \frac{1}{2}(pdq - qdp)$$

$$= \frac{1}{2}(pdq + qdp) = d\left(\frac{1}{2}pq\right) = dW$$

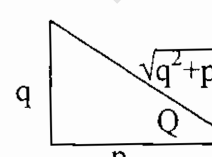
وبذلك يكون التحويل المعطى هو تحويل تماس ، وتكون الدالة المميزة هي

$$W = \frac{1}{2}pq = W(q,p)$$

<u>ولإيجاد الدالة المولدة G للتحويل :</u>

نعوض في W عن p بدلالة q,Q

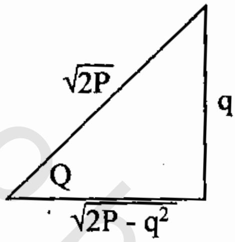
$$\because \frac{q}{p} = \tan Q \;\rightarrow\; \frac{p}{q} = \cot Q \;\rightarrow\; p = q\cot Q$$



$$\therefore W = \frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}q(q\cot Q) = \frac{1}{2}q^2\cot Q = G(q,Q)$$

ولإيجاد الدالة S(q, P) :

نعوض عن $Q = \sin^{-1}\dfrac{q}{\sqrt{2P}}$



$$\therefore S = \frac{q\sqrt{2P-q^2}}{2} + P\sin^{-1}\frac{q}{\sqrt{2P}}$$

ولإيجاد الدالة F(p, Q) :

من التعريف : $F = G - pq = \dfrac{pq}{2} - pq = -\dfrac{pq}{2}$

وتوجد q بدلالة p, Q حيث $q = p\tan Q$

$$\therefore F = -\frac{1}{2}p^2\tan Q$$

ولإيجاد الدالة T(p, P) :

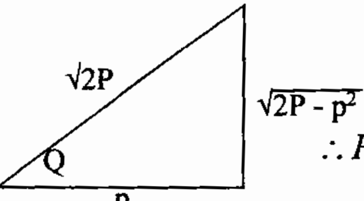
من التعريف :

$$T = G - pq + PQ = \frac{pq}{2} - pq + PQ$$

$$= -\frac{1}{2}pq + PQ$$

وبحذف q, Q وإيجادهم بدلالة p, P نحصل على :

$$q = p\tan Q = p\frac{\sqrt{2P-p^2}}{p} = \sqrt{2P-p^2}$$



$$\therefore P = -\frac{1}{2}p\sqrt{2P-p^2} + P\tan^{-1}\frac{\sqrt{2P-p^2}}{p}$$

وهو المطلوب .

<u>مثل (٢)</u> : أثبت أن التحويل القانوني :

$$Q=\ln(\frac{1}{q}\sin p) \quad و \quad P=q\cot p$$

هو تحويل تماس ، و أوجد الصورتين G,S للدالة المولدة للتحويل .

<u>الحل</u> :

$$Q=\ln\frac{\sin p}{q}=-\ln q+\ln\sin p$$

$$dQ=-\frac{1}{q}dq+\frac{1}{\sin p}\cdot\cos pdp=-\frac{1}{q}dq+\cot pdp$$

و لكي يكون التحويل المعطى تحويل تماس يجب أن يكون

$$pdq-PdQ=dW= \text{تفاضل تام}$$

حيث W هي الدالة المميزة .

$$pdq-PdQ$$

$$=pdq-q\cot p\cdot[-\frac{1}{q}dq+\cot pdp]$$

$$=(p+\cot p)dq-q\cot^2 pdp$$

$$=d\,[q(p+\cot p)]$$

$$=dW$$

$$= \text{تفاضل تام}$$

$$u=P+\cot P, v=-q\cot^2 P$$

$$\therefore \int udq=q(p-\cot p)$$

$$\int vdp=-q\int(\operatorname{cosec}^2 p-1)dp$$

$$=(P+\cot p)$$

وبذلك يكون التحويل المعطى هو تحويل تماس حيث الدالة المميزة :

$$W=q(p+\cot p)=w(q,p)$$

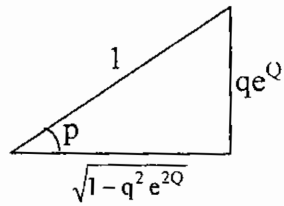
<u>ولإيجاد الدالتين المولدتين للتحويل G,S :</u>

(١) <u>الدالة G</u>: G=G(q ,Q) وتساوي W بعد التعويض عن p بدلالة Q, q كالآتي:

$$Q=\ln\frac{\sin p}{q} \qquad \therefore\frac{\sin p}{q}=e^Q$$

$$\therefore \sin p = qe^{Q} \quad \rightarrow \quad \therefore p = \sin^{-1}(qe^{Q})$$

نرسم المثلث المبين ، و منه نوجد $\cot p$ الموجودة في الدالة W بدلالة Q, q حيث:



$$\cot p = \frac{\sqrt{1-q^{2}e^{2Q}}}{qe^{Q}}$$

$$\therefore W = q(p+\cot p) = q[\sin^{-1}(qe^{Q}) + \frac{\sqrt{1-q^{2}e^{2Q}}}{qe^{Q}}]$$

$$= q\sin^{-1}(qe^{Q}) + e^{-Q}\sqrt{1-q^{2}e^{2Q}} = G(q,Q)$$

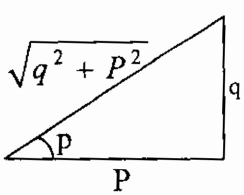
(٢) **الدالة S** : نستخدم العلاقة :

$$S(q,P) = W(q,p) + PQ$$

و نعوض عن p بدلالة q, P كالتالي

حيث أن $\cot p = \frac{P}{q}$ (من رأس المسألة)

فباستخدام المثلث المبين



$$\sin p = \frac{q}{\sqrt{q^{2}+P^{2}}}$$

$$S(q,P) = q(p+\cot p) + PQ$$

$$= q\,[\tan^{-1}\frac{\dot{q}}{P} + \frac{P}{q}] + P\ln[\frac{1}{q}\cdot\frac{q}{\sqrt{q^{2}+P^{2}}}]$$

$$= q\tan^{-1}\frac{q}{P} + P[1-\ln\sqrt{q^{2}+P^{2}}]$$

مثال (٣) : أثبت أن التحويل

$$Q = \sqrt{\frac{2q}{k}}\cos p \qquad , \qquad P = \sqrt{2kq}\sin p$$

هو تحويل تماس ، وأوجد الدالة المميزة W ، وكذلك الدالتين المولدتين G , S .

الحـــل:

$$Q=\sqrt{\frac{2q}{k}}\cos p=\sqrt{\frac{2}{k}}(\sqrt{q}\sin p)$$

$$dQ=\sqrt{\frac{2}{k}}[-\sqrt{q}\sin p dp+\frac{1}{2\sqrt{q}}\cos p dq]$$

$$P=\sqrt{2kq}\sin p=\sqrt{2k}(\sqrt{q}\sin p)$$

لكي يكون التحويل المعطى تحويل تماس يجب أن يكون:

$(pdq-PdQ)$ تفاضلاً تاماً أي يساوي dW

$$pdq-PdQ=pdq-\sqrt{2k}(\sqrt{q}\sin p)\cdot\sqrt{\frac{2}{k}}[-\sqrt{q}\sin p dp+\frac{1}{2\sqrt{q}}\cos p dq]$$

$$=(p-\sin p\cos p)dq+2q\sin^2 p dp$$

$$=d[(p-\sin p\cos p)q]=dW=\text{تفاضل تام}$$

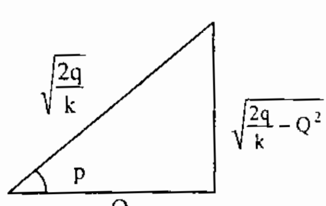
حيث الدالة المميزة : $W=(p-\sin p\cos p)q=W(p,q)$

<u>و لإيجاد الدالتين المولدتين للتحويل G,S</u>

<u>(١) الدالة **G**</u> : $G=G(q,Q)$ و تساوي W بعد التعويض عن p بدلالة q,Q كالآتي :

$$Q=\sqrt{\frac{2q}{k}}\cos p \quad\rightarrow\quad \cos p=\frac{Q}{\sqrt{\frac{2q}{k}}}\quad\rightarrow\quad \therefore p=\cos^{-1}\frac{Q}{\sqrt{\frac{2q}{k}}}$$

نرسم المثلث المبين ، و منه نوجد $\sin p$ الموجودة في الدالة W بدلالة q,Q



$$\sin p=\frac{\sqrt{\frac{2q}{k}-Q^2}}{\sqrt{\frac{2q}{k}}}$$

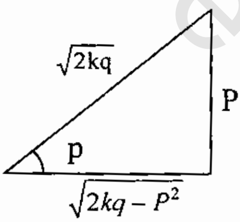
$$\therefore W = q(p-\sin p\cos p) = q\left[\cos^{-1}\frac{Q}{\sqrt{\frac{2q}{k}}} - \frac{Q\sqrt{\frac{2q}{k}-Q^2}}{\frac{2q}{k}}\right]$$

$$= q\cos^{-1}\sqrt{\frac{k}{2q}}Q - \frac{1}{2}kQ\sqrt{\frac{k}{2q}-Q^2} = G(q,Q)$$

(٢) الدالة S : نستخدم العلاقة :

$$S(q,P) = W(q,p) + PQ$$

و نعوض عن p بدلالة q,P كتالي



حيث أن $\sin p = \dfrac{P}{\sqrt{2kq}}$ (من رأس المسألة) فباستخدام

المثلث المبين $\cos p = \dfrac{\sqrt{2kq-P^2}}{\sqrt{2kq}}$

$$\therefore S(q,P) = q(p-\sin p\cos p) + PQ$$

$$= q\left[\sin^{-1}\frac{P}{\sqrt{2kq}} - \frac{P}{2kq}\sqrt{2kq-P^2}\right] + P\sqrt{\frac{2q}{k}}\cdot\frac{\sqrt{2kq-P^2}}{\sqrt{2kq}}$$

$$= q\sin^{-1}\frac{P}{\sqrt{2kq}} + \frac{P}{2k}\sqrt{2kq-P^2}$$

مسائل على تحويلات التماس

مسألة (١) : أثبت أن التحويل القانوني $Q = p\ ,\ P = -q$ هو تحويل تماس ، وأوجد الدالة المميزة له $W(p,q)$ و كذلك الدالتين المولدتين $G(q,Q)\ ,\ S(q,P)$.

مسألة(٢): أثبت أن الدالة المولدة G للتحويل $q = PQ^2\ ,\ p = \dfrac{1}{Q}$ هي $G = \dfrac{q}{Q}$

مسألة (٣) : أثبت أن التحويل القانوني :

$$Q = \sqrt{2q}e^{\alpha}\cos p\ ,\ \ P = \sqrt{2q}e^{-\alpha}\sin p$$

هو تحويل تماس ، وأوجد الدالة المميزة $W(p,q)$.

مسألة (٤) : أثبت أن التحويل القانوني

$$Q = \ln(1+q^{\frac{1}{2}}\cos p)$$

$$P = 2(1+q^{\frac{1}{2}}\cos p)q^{\frac{1}{2}}\sin p$$

هو تحويل تماس ، وأوجد الدالة المميزة $W(p,q)$.

وأوجد أيضا P كدالة في Q,p أي $P=P(Q,p)$ بالصورة

$$P = 2e^{Q}(e^{Q}-1)\tan p$$

مسألة (٥): في تحويل قانوني كانت $Q=\sqrt{q^2+p^2}$ و كانت الدالة المميزة :

$$W = \frac{1}{2}(q^2+p^2)\tan^{-1}\frac{q}{p}+\frac{1}{2}qp$$

أوجد الدالة المولدة $G(q,Q)$ وكذلك الدالة $P(q,p)$.

حل المسائل على تحويلات التماس

حل المسألة(١): التحويل المعطى يكون تحويل تماس إذا كان :

$Pdq-PdQ=dW$ (تفاضل تام)

ولإثبات ذلك :

$$Pdq - PdQ = pdq - (-q)d(p) = pdq + qdp$$

$$= d(pq) = dW$$

حيث $W = pq$ هي الدالة المميزة و يكون التحويل المعطى تحويل تماس .

ولإيجاد الدالتين S ، G :

نعوض من $P=-q$ ، $Q=p$

$$\therefore\ G = G(q,Q) = qQ \quad , S = S(q,P) = pq+QP=-Pp+pP=0$$

حل المسألة(٢):

$$q = PQ^2 \rightarrow \quad dq = 2PQdQ + Q^2dP$$

$$\therefore pdq = \frac{1}{Q}(2PQdQ + Q^2dP) = 2PdQ + QdP$$

$$pdq - PdQ = 2PdQ + QdP - PdQ = PdQ + QdP$$

$$= d(PQ) = dW$$

وهو تفاضل تام ، حيث الدالة المميزة : $W=PQ$

ولإيجاد الدالة المولدة G:

نضع $P = \dfrac{q}{Q^2} \quad \leftarrow \quad G = \dfrac{q}{Q^2}(Q) = \dfrac{q}{Q}$

حل المسألة(٣):

$$Q = \sqrt{2q}e^{\alpha}\cos p$$

$$dQ = (2q)^{-\frac{1}{2}}e^{\alpha}\cos p dq - (2q)^{\frac{1}{2}}e^{\alpha}\sin p dp$$

$$pdq - PdQ = pdq - \sin p[\cos p dq - 2q\sin p dp]$$

$$= (p - \sin p\cos p)dq + 2q\sin^2 p dp$$

$$= (p - \frac{1}{2}\sin 2p)dq + 2q\sin^2 p dp$$

$$= \frac{\partial}{\partial q}(pq - \frac{1}{2}q\sin 2p)dq + \frac{\partial}{\partial p}(pq - \frac{1}{2}q\sin 2p)dp$$

$$= \frac{\partial W}{\partial q}dq + \frac{\partial W}{\partial p}dp = dW = \quad \text{تفاضل تام}$$

وبذلك يكون التحويل المعطى هو تحويل تماس

حيث $W = pq - \frac{1}{2}q\sin 2p$ هي الدالة المميزة .

<u>ملحوظة</u>: لإيجاد الدالة المولدة $G(q,Q)$ من الدالة $W(q,p)$ نعوض عن p بدلالة Q من معادلة التحويل و إذا أردنا الدالة المولدة $S(q,P)$ نعوض عن p في W بدلالة P من معادلة التحويل ونضيف PQ.

حل المسائلة(٤): حيث أن :

$$Q = \ln(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p)$$

$$\therefore e^Q = 1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p \quad \rightarrow q^{\frac{1}{2}} = \frac{e^Q - 1}{\cos p}$$

$$\therefore q = (\frac{e^Q - 1}{\cos p})^2$$

بالتعويض في P :

$$P = 2[1 + \frac{e^Q - 1}{\cos p} \cos p]\ [\frac{e^Q - 1}{\cos p}] \sin p$$

$$= 2e^Q(e^Q - 1) \tan p = P(Q, p)$$

ولإيجاد الدالة المميزة : نثبت أن التحويل المعطى هو تحويل تماس

$$Q = \ln(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p)$$

$$\therefore dQ = \frac{1}{1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p}[-q^{\frac{1}{2}} \sin p dp + \cos p \cdot \frac{1}{2} q^{\frac{-1}{2}} dq]$$

$$= \frac{-q \sin p dp + \frac{1}{2} \cos p dq}{q^{\frac{1}{2}}\ [1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p]}$$

$$\therefore pdq - PdQ = pdq - 2(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p) q^{\frac{1}{2}} \sin p \cdot \frac{-q \sin p dp + \frac{1}{2} \cos p dq}{q^{\frac{1}{2}} (1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p)}$$

$$= pdq + 2q \sin^2 p dp - \sin p \cos p dq$$

$$= (p - \frac{1}{2} \sin 2p) dq + q(1 - \cos 2p) dp$$

$$= d[q\ (p - \frac{1}{2} \sin 2p)] = dW = \text{تفاضل تام}$$

∴ التحويل القانوني المعطى هو تحويل تماس

و تكون الدالة المميزة هي $W = q\,(p - \frac{1}{2}\sin 2p)$.

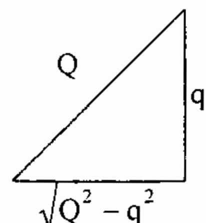
حل المسألة(٥): من علاقة Q نوجد p بدلالة Q و نعوض عنها في W فنحصل على $G(q,Q)$ كالآتي :

$$Q^2 = q^2 + p^2 \quad \rightarrow \quad p^2 = Q^2 - q^2 \quad \rightarrow \quad p = \sqrt{Q^2 - q^2}$$

و بالتعويض في W نحصل على :

$$G = \frac{1}{2}Q^2 \tan^{-1}\frac{q}{\sqrt{Q^2 - q^2}} + \frac{1}{2}q\sqrt{Q^2 - q^2}$$

$$= \frac{1}{2}Q^2 \sin^{-1}\frac{q}{Q} + \frac{1}{2}q\sqrt{Q^2 - q^2}$$



و لإيجاد P: نستخدم المعادلة :

$$P = -\frac{\partial G}{\partial Q}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial Q}[\frac{1}{2}Q^2 \sin^{-1}\frac{q}{Q} + \frac{1}{2}q\sqrt{Q^2 - q^2}]$$

$$= -[Q\sin^{-1}\frac{q}{Q} + \frac{1}{2}Q^2\frac{-q}{Q\sqrt{Q^2 - q^2}} + \frac{1}{2}q\cdot\frac{1}{2}(Q^2 - q^2)^{\frac{-1}{2}} \times 2Q]$$

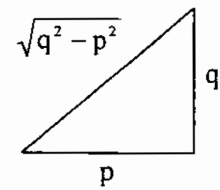
$$= -[Q\sin^{-1}\frac{q}{Q} - \frac{1}{2}\frac{qQ}{\sqrt{Q^2 - q^2}} + \frac{1}{2}\frac{qQ}{\sqrt{Q^2 - q^2}}]$$

$$= -Q\sin^{-1}\frac{q}{Q} = P(q,Q)$$

ولكي نوجد $P(q,p)$ نغير Q إلى $\sqrt{q^2 + p^2}$ فنحصل على :

$$P(q,p) = -\sqrt{q^2+p^2}\,\sin^{-1}\frac{q}{\sqrt{q^2+p^2}}$$

$$= -\sqrt{q^2+p^2}\,\tan^{-1}\frac{q}{p}$$



وهو المطلوب .

تطبيق (٢) : معادلة هاملتون – جاكوبى Hamilton – Jacobi's equation

مقدمة : إذا أمكننا إيجاد التحويل القانوني الذي يؤدى إلى أن تكون دالة هاملتون الجديدة $\mathcal{H}=0$ فإننا نرى من معادلات هاملتون أن

$$\dot{Q}_j=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_j}=0\ ,\ \dot{P}_j=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q_j}=0$$

$$,\therefore Q_j=\text{const}=\gamma_j\quad \therefore P_j=\text{const}=\beta_j$$

وتتوقف عملية تحديد حركة المنظومة على إيجاد الدالة المولدة الصحيحة ، و سوف نعتبر بالتحديد دالة التحويل $S=S(q,P,t)$ حيث تتحقق المعادلات .

$$P_j=\frac{\partial S}{\partial q_j}\ ,\ Q_j=\frac{\partial S}{\partial p_j}=\frac{\partial S}{\partial\beta_j}=\gamma_j\quad ,\mathcal{H}=H+\frac{\partial S}{\partial t}$$

و من المعادلة الأخيرة و بوضع $\mathcal{H}=0$ فإن الدالة المولدة S يجب أن تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية : $\frac{\partial S}{\partial t}+H(q_j,p_j,t)=0$

وحيث أن $p_j=-\frac{\partial S}{\partial q_j}$ فإن :

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_j,\frac{\partial S}{\partial q_j},t\right)=0}$$

وتسمى هذه المعادلة : معادلة هاملتون – جاكوبى ، و هي معادلة تفاضلية جزئية في الدالة غير المعلومة S التي هي دالة في المتغيرات q_j,t .

وتحتوي أيضا على الثوابت $P_j=\beta_j$.

$$S=S(q_j,\beta_j,t)=S(q_1,q_2,\ldots,q_n,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_n,t)$$

<u>حل معادلة هاملتون – جاكوبى:</u> تحتوى معادلة هاملتون جاكوبى على(n+1) من المتغيرات المستقلة هي $q_1,q_2,\ldots,q_n,t$ ، و الحل الكامل لها سوف يشتمل على (n+1) مقدارا ثابتا اختياريا(نتيجة عمليات التكامل). وتتلخص طريقة هاملتون جاكوبى لحل المسائل في حذف الثابت الإضافي الاختياري، و الرمز إلى الثوابت المتبقية n بالرموز $\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_n$ ، وبذلك فإن: $S=S(q_1,\ldots,q_n,\beta_1,\ldots\beta_n,t)$

ولإيجاد حل معادلة هاملتون جاكوبى أى إيجاد دالة التحويل القانونية S فإننا نستخدم طريقة فصل المتغيرات، و ذلك بفرض الحل على الصورة الآتية:

$$S = S_1(q_1) + S_2(q_2) .... + S_n(q_n) + F(t)$$

حيث كل دالة في الطرف الأيمن تعتمد على متغير واحد فقط .

هذه الطريقة تكون مفيدة على وجه الخصوص عندما لا تعتمد دالة هاملتون على الزمن صراحة وفي تلك الحالة فإن:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H = -E = \frac{\partial F(t)}{\partial t}$$

ومنها $F(t)=-Et$ ، مع حذف ثابت التكامل

$$\therefore S = S_1(q_1) + S_2(q_2) .... + S_n(q_n) - Et$$

وتكون معادلة هاملتون –جاكوبى بالصورة: $H(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}) = E$

حيث E ثابت يمثل الطاقة الكلية للمجموعة .

ويتضح كل ذلك من الأمثلة الآتية :

<u>مثال(١)</u> : <u>المتذبذب التوافقي البسيط</u>

في حالة المتذبذب التوافقي البسيط ذو الكتلة m و الممثل بزنبرك ثابته k

(أ) أكتب دالة هاملتون للمتذبذب .

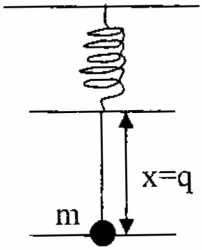
(ب) اكتب معادلة هاملتون – جاكوبى المنظرة .

(ج) استخدم طريقة هاملتون – جاكوبى لإيجاد معادلات حركة المتذبذب .

<u>الحــل</u>: (أ) <u>دالة هاملتون</u>:

نفرض أن q هو إحداثي الموضع للمتذبذب فتكون سرعته $\dot{q}$ وتكون طاقته حركته:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2$$



وطاقة جهده $u = \frac{1}{2} kq^2$

وتكون دالة لاجرانج : $L = T - u = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} kq^2$

ولكن كمية الحركة : $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$ ومنها $\dot{q} = \frac{p}{m}$

$$\therefore L = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}kq^2$$

وتكون دالة هاملتون:

$$H = \sum p_j \dot{q}_j - L = p\dot{q} - L$$

$$= p\left(\frac{p}{m}\right) - \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

وكان من الممكن إيجاد دالة هاملتون مباشرة حيث أن المنظومة التي يشكلها المتذبذب هي منظومة محافظة:

$$H = T + u = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

وهو المطلوب أولاً.

<u>(ب) معادلة هاملتون – جاكوبى:</u>

باستخدام $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ ودالة هاملتون H فان معادلة هاملتون جاكوبى تكون :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

<u>حل المعادلة (2) بطريقة فصل المتغيرات</u> :

نفرض حلا لمعادلة هاملتون– جاكوبى (2) بالصورة:

$$S(q,t) = S_1(q) + S_2(t) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (3)}$$

فبالتعويض في (2) نحصل على:

$$\frac{dS_2}{dt}+\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2+\frac{1}{2}kq^2=0$$

$$\therefore\ \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2+\frac{1}{2}kq^2=-\frac{dS_2}{dt}$$

وحيث أن الطرف الأيسر يعتمد على المتغير q فقط و الأيمن على المتغير t فقط فبوضع كل طرف يساوى مقدار ثابتا (β) نجد أن:-

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2+\frac{1}{2}kq^2=\beta \qquad \text{\_\_\_\_\_}(3)$$

$$\frac{dS_2}{dt}=-\beta \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4)$$

وباستخدام طريقة هاملتون جاكوبى التي تعتمد على حذف ثوابت التكامل ، يكون الحلان هما:

<u>حـــل (3)</u> :

$$\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2=2m\beta-mkq^2=2m\left(\beta-\frac{1}{2}kq^2\right)$$

$$\therefore\ \frac{dS_1}{dq}=\sqrt{2m\left(\beta-\frac{1}{2}kq^2\right)} \qquad \therefore dS_1=\sqrt{2m\left(\beta-\frac{1}{2}kq^2\right)}dq$$

$$\therefore\ S_1=\int\sqrt{2m\left(\beta-\frac{1}{2}kq^2\right)}dq \qquad \text{\_\_\_\_\_}(5)$$

<u>حـــل (4)</u> :

$$\frac{dS_2}{dt}=-\beta \quad\rightarrow\quad \therefore\ dS_2=-\beta dt$$

$$\therefore S_2=-\beta t \qquad \text{\_\_\_\_\_}(6)$$

وبذلك يكون الحل الكامل هو:

$$S = \int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}kq^2\right)}dq - \beta t$$

$$= S(q, \beta, t) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (7)}$$

وبأخذ الثابت β يكافئ إحداثي كمية الحركة الجديدة P فإن:

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}kq^2\right)}\ dq - \beta t\right\}$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial \beta}\sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}kq^2\right)}\ dq - \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta t)$$

$$= \sqrt{2m} \cdot \frac{1}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \frac{1}{2}kq^2}} - t = \sqrt{\frac{m}{2\beta}}\int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{k}{2\beta}q^2}} - t$$

بإجراء التكامل نحصل على:

$$Q = \sqrt{\frac{m}{2\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{2\beta}}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{k}{2\beta}}\,q - t = \gamma$$

حيث أن Q تساوي ثابت (γ) .

$$\therefore \sqrt{\frac{m}{2\beta}} \cdot \sqrt{\frac{2\beta}{k}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{k}{2\beta}}\,q = t + \gamma$$

$$\therefore \sqrt{\frac{m}{k}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{k}{2\beta}}\ q = t + \gamma$$

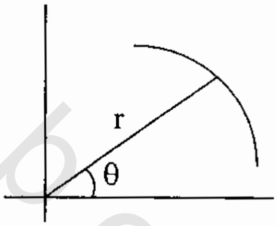
$$\therefore \sin^{-1}\sqrt{\frac{k}{2\beta}}\ q = \sqrt{\frac{k}{m}}(t + \gamma)$$

$$\therefore \sqrt{\frac{k}{2\beta}}\ q = \sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t + \gamma) \qquad \therefore q = \sqrt{\frac{2\beta}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t + \gamma)$$

و هذه العلاقة هي الحل المطلوب، ويمكن إيجاد الثابتان β, γ من الشروط الابتدائية للمسألة .

<u>مثال (٢) مسألة كبلر لحركة الكواكب</u>

باستخدام معادلة هاملتون جاكوبى أوجد حل مسألة كبلر لجسيم يتحرك في مجال قـوة مركزية تتناسب عكسيا مع مربع المسافة



<u>الحـــل:</u>

طاقة الحركة : $T = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right)$

طاقة الجهد : $u = \frac{-\gamma m}{r} = \frac{-k}{r}$

حيث $k = \gamma m$

دالة هاملتون هي :

$$H = T + u = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}$$

حيث أن

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}$$

فإن معادلة هاملتون جاكوبى تكون :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(r, \theta, \frac{\partial S}{\partial r}, \frac{\partial S}{\partial \theta}, t\right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{k}{r} = 0 \qquad \_\_\_\_ (2)$$

حل المعادلة : نفرض حلا بالصورة:

$$S = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(t) \qquad \_\_\_\_ (3)$$

و بالتعويض في (2) نحصل على:

$$\frac{dS_3}{dt} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2\right] - \frac{k}{r} = 0$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2\right] - \frac{k}{r} = -\frac{dS_3}{dt}$$

وبوضع كل طرف يساوي مقدار ثابت وليكن β_2 :

$$\therefore \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2\right]-\frac{k}{r}=\beta_2 \qquad (4)$$

$$\frac{dS_3}{dt}=-\beta_2 \qquad (5)$$

حل المعادلة (4):

من (4) بضرب الطرفين في $2mr^2$ فإن :

$$r^2\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2\right]-2mkr=2m\beta_2 r^2$$

$$\therefore \left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2=r^2\left[2m\beta_2+\frac{2mk}{r}-\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2\right]$$

وحيث أن أحد الطرفين يعتمد فقط على θ بينما الطرف الآخر يعتمد على r فقط فإن كل طرف يساوي مقدار ثابت وليكن β_1^2 .

$$\therefore \frac{dS_2}{d\theta}=\beta_1 \quad \rightarrow \quad S_2=\beta_1\theta \qquad (6)$$

$$r^2\left[2m\beta_2+\frac{2mk}{r}-\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2\right]=\beta_1^2$$

$$\therefore \left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2=2m\beta_2+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_1^2}{r^2}$$

$$\therefore \frac{dS_1}{dr}=\sqrt{2m\beta_2+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_1^2}{r^2}}$$

$$\therefore S_1=\int\sqrt{2m\beta_2+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_1^2}{r^2}}\ dr \qquad (7)$$

حل المعادلة (5) :

$$S_3=-\beta_2 t$$

و يصبح الحل الكامل هو:

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$= \int \sqrt{2m\beta_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_1^2}{r^2}}\ dr + \beta_1^2\theta - \beta_2 t \qquad \text{\_\_\_\_\_} (9)$$

وبتطابق الثابتان β_2 و β_1 مع كميتي الحركة الجديدتين P_θ و P_r فإن:

$$Q_r = \frac{\partial S}{\partial P_r} = \frac{\partial S}{\partial \beta_1} = \frac{\partial}{\partial \beta_1}\left\{\int \sqrt{2m\beta_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_1^2}{r^2}} dr\right\} + \theta = \gamma_1$$

$$Q_\theta = \frac{\partial S}{\partial P_\theta} = \frac{\partial S}{\partial \beta_2} = \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left\{\int \sqrt{2m\beta_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_1^2}{r^2}} dr\right\} - t = \gamma_2$$

حيث أن Q_θ و Q_r ثابتان (γ_1, γ_2) فبإجراء التفاضـلات بالنـسبة إلـى β_2 و β_1 نحصل على

$$\int \frac{\partial}{\partial \beta_1}\left[\sqrt{2m\beta_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_1^2}{r^2}}\right] dr + \theta = \gamma_1$$

$$\therefore \int \frac{\frac{-2\beta_1}{r^2}}{2\sqrt{2m\beta_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_1^2}{r^2}}} dr + \theta = \gamma_1 \ \rightarrow\ \int \frac{\beta_1 dr}{r^2\sqrt{2m\beta_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_1^2}{r^2}}} = \theta - \gamma_1 \qquad \text{\_\_\_\_} (10)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left[\sqrt{2m\beta_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_1^2}{r^2}}\right] dr - t = \gamma_2$$

$$\therefore \int \frac{2m dr}{2\sqrt{2m\beta_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_1^2}{r^2}}} - t = \gamma_2 \ \rightarrow\ \int \frac{m dr}{\sqrt{2m\beta_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_1^2}{r^2}}} = t + \gamma_2 \qquad \text{\_\_\_\_} (11)$$

التكامل الأول (10) يعطى علاقة بين r, θ أي معادلة المسار .

التكامل الثاني (11) يعطى علاقة بين r, t أي الموضـع r كدالة في الزمن .

والمطلوب عادة في مسألة كبلر لحركة الكواكب هو إيجاد معادلة المسار أي حل التكامل رقم (10) : ويمكن أيجاد حل لهذا التكامل بوضع $r = \frac{1}{u} \rightarrow dr = -\frac{du}{u^2}$

$$\therefore I = \int \frac{-\beta_1 \frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u^2}\sqrt{2m\beta_2 + 2mku - \beta_1^2 u^2}} = \int \frac{-\beta_1 du}{\beta_1 \sqrt{\frac{2m\beta_2}{\beta_1^2} + \frac{2mk}{\beta_1^2}u - u^2}}$$

$$\alpha^2 = \frac{2m\beta_2}{\beta_1^2}, \qquad \delta = \frac{mk}{\beta_1^2}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{\alpha^2 + 2\delta u - u^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{\alpha^2 + \delta^2 - (u-\delta)^2}}$$

$$= \cos^{-1} \frac{(u-\delta)}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}} = \theta - \gamma_1$$

$$\therefore \cos(\theta - \gamma_1) = \frac{u-\delta}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}} \quad \therefore u = \delta + \sqrt{\alpha^2+\delta^2}\cos(\theta-\gamma_1)$$

$$\therefore r = \frac{1}{u} = \frac{1}{\delta + \sqrt{\alpha^2+\delta^2}\cos(\theta-\gamma_1)} = \frac{\frac{1}{\delta}}{1 + \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\delta^2}}\cos(\theta-\gamma_1)}$$

$$= \frac{\ell}{1 + e\cos(\theta-\gamma_1)}$$

و هي معادلة المسار ، و هي عبارة عن معادلة قطع مخروطي نصف وتره البؤري العمودي هو $\ell = \frac{1}{\delta} = \frac{\beta_1^2}{mk}$ و اختلافه المركزي

$$e = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\delta^2}} = \sqrt{1+\frac{2\beta_1^2\beta_2}{mk^2}}$$

وهو المطلوب.

مسائل على معادلة هاملتون – جاكوبي

(١) يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية دالة الجهد لها هي: $u = \dfrac{-k\cos\theta}{r}$، أكتب دالتي لاجرانج وهاملتون لحركة الجسيم، وطبق معادلة هاملتون – جاكوبي لدراسة الحركة وإيجاد دالة التحويل (الحل الكامل) للمسألة.

(٢) استخدم معادلة هاملتون – جاكوبي لدراسة حركة جسيم كتلة m سقط رأسياً بحرية من ارتفاع h فوق سطح الأرض تحت تأثير وزنه.

(٣) إذا كانت دالة هاملتون لجسيم متحرك هي: $H = \dfrac{1}{2}p^2 - \dfrac{\mu}{q}$ حيث q, p هما الإحداثي وكمية الحركة المعممة، أدرس الحركة باستخدام معادلة هاملتون – جاكوبي حيث H لا تعتمد على الزمن t صراحة.

حل المسائل على معادلة هاملتون – جاكوبي

حل المسألة(١): طاقة الحركة:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

طاقة الجهد:

$$U = -\frac{k\cos\theta}{r}$$

دالة لاجرانج:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k\cos\theta}{r}$$

دالة هاملتون:

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L$$

حيث: $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\ ,\ p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$

$$\therefore H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2) - \frac{k\cos\theta}{r^2} = H(r, \theta, p_r, p_\theta)$$

وبإستخدام S دالة التحويل للمنظومة حيث $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$

فتكون معادلة هاملتون – جاكوبي بالصورة:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(r, \theta, \frac{\partial S}{\partial r}, \frac{\partial S}{\partial \theta}) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{(\frac{\partial S}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial S}{\partial \theta})^2\right\}-\frac{k\cos\theta}{r^2}=0 \quad (1)$$

ولحل هذه المعادلة : نستخدم طريقة فصل المتغيرات كالآتي:

نفرض الحل بالصورة:

$$S(r,\theta,t)=S_1(r)+S_2(\theta)+S_3(t)$$

فبالتعويض في (1):

$$\therefore \frac{dS}{dt}+\frac{1}{2m}\left\{(\frac{dS_1}{dr})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{dS_2}{d\theta})^2\right\}-\frac{k\cos\theta}{r^2}=0$$

$$\therefore \frac{1}{2m}\left\{(\frac{dS_1}{dr})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{dS_2}{d\theta})^2\right\}-\frac{k\cos\theta}{r^2}=-\frac{dS_3}{dt}$$

وحيث أن الطرف الأيسر يعتمد على (r,θ) فقط والأيمن على t فقط فإن كل طرف يساوي مقداراً ثابتاً (β) ونحصل على:

$$\frac{dS_3}{dt}=-\beta \quad (2)$$

$$\frac{1}{2m}\left\{(\frac{dS_1}{dr})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{dS_2}{d\theta})^2\right\}-\frac{k\cos\theta}{r^2}=\beta \quad (3)$$

ومن (3) بالضرب في r^2 وفصل المتغيرات:

$$\therefore \frac{r^2}{2m}(\frac{dS_1}{dr})^2-\beta r^2=k\cos\theta-\frac{1}{2m}(\frac{dS_2}{d\theta})^2=\gamma$$

وحيث أن الطرف الأيسر يعتمد على r فقط والثاني على θ فقط فكل طرف يساوي ثابت وليكن γ، وبذلك نحصل على العلاقتين:

$$\frac{1}{2m}(\frac{dS_1}{dr})^2=\beta+\frac{\gamma}{r^2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2m}(\frac{dS_2}{d\theta})^2=k\cos\theta-\gamma \quad (5)$$

وبحل المعادلات (2), (4), (5) لإيجاد S_3, S_1, S_2 نجد أن:

من (2):

$$dS_3 = -\beta\, dt \leftarrow \frac{dS_3}{dt} = -\beta$$

(6)

$$\therefore S_3 = -\beta t$$

ومن (4):

$$\frac{dS_1}{dr} = \sqrt{2m(\beta + \frac{\gamma}{r^2})} \leftarrow (\frac{dS_1}{dr})^2 = 2m(\beta + \frac{\gamma}{r^2})$$

$$\therefore dS_1 = \sqrt{2m(\beta + \frac{\gamma}{r^2})}\, dr \;\rightarrow\; S_1 = \int\sqrt{2m(\beta + \frac{\gamma}{r^2})}\, dr \qquad (7)$$

ومن (5):

$$\frac{dS_2}{d\theta} = \sqrt{2m(k\cos\theta - \gamma)} \leftarrow (\frac{dS_2}{d\theta})^2 = 2m(k\cos\theta - \gamma)$$

$$\therefore dS_2 = \sqrt{2m(k\cos\theta - \gamma)}\, d\theta \;\; \therefore S_2 = \int\sqrt{2m(k\cos\theta - \gamma)}\, d\theta \quad (8)$$

وتكون دالة التحويل (الحل الكامل) بالصورة:

$$S = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(t)$$

$$= \int\sqrt{2m(\beta + \frac{\gamma}{r^2})}\, dr + \int\sqrt{2m(k\cos\theta - \gamma)}\, d\theta - \beta t \qquad (9)$$

وهي دالة التحويل المطلوبة.

حل المسألة(٢): بأخذ دالة التحويل $S =$ ، واعتبار الاحداثي المعمم q هو بعد الجسيم عند أي لحظة عن الأرض أي أن $q = y$ ، وتكون سرعته المعممة هي $\dot{q}$ وهي سرعة الجسيم الحقيقية، وتكون كمية الحركة المعممة $p = m\dot{q}$.

دالة هاملتون:

$$H = T + U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + mgq$$

$$= \frac{p^2}{2m} + mgq = E \;(\text{الطاقة الكلية}) = \alpha \;\;(\text{ثابت})$$

وبأخذ $p=\frac{\partial S}{\partial q}$ فإن معادلة هاملتون – جاكوبي تكون:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+mgq+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{1}$$

وبكتابة حل هذه المعادلة بالصورة:

$$S(q,\alpha,t)=w(q,\alpha)-\alpha t \tag{2}$$

نجد أن:

$$\frac{\partial S}{\partial q}=\frac{\partial w}{\partial q},\ \frac{\partial S}{\partial t}=-\alpha$$

وتصبح (1) بالصورة:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial w}{\partial q}\right)^2+mg\,q-\alpha=0$$

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial q}=\sqrt{2m}\,(\alpha-mg\,q)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ w=\sqrt{2m}\int\sqrt{\alpha-mg\,q}\,dq+C \tag{3}$$

حيث C ثابت التكامل.

وبالتعويض من (3) في (2) نحصل على:

$$S=\sqrt{2m}\int\sqrt{\alpha-mg\,q}\,dq+C-\alpha t$$

الإحداثي المعمم الذي تولده الدالة S هو:

$$\beta=\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\text{const.}$$

$$\therefore \beta=\sqrt{2m}\int\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\alpha-mg\,q}\,dq+\frac{\partial}{\partial\alpha}(C-\alpha t)$$

$$=\sqrt{m/2}\int\frac{dq}{\sqrt{\alpha-mg\,q}}-t$$

$$=\sqrt{m/2}\cdot\frac{2}{mg}\sqrt{\alpha-mg\,q}-t$$

$$\therefore (\beta+t)^2=\frac{1}{g^2}\frac{2}{m}(\alpha-mg\,q)$$

$$\therefore q=-\frac{1}{2}g(\beta+t)^2+\frac{\alpha}{mg} \tag{4}$$

وبفرض أن الشروط الابتدائية كانت بحيث أنه عند $t=0$ كانت $q=q_0 , p=0$

$$\therefore p=\frac{\partial w}{\partial q}=\sqrt{2m}\sqrt{\alpha-mg\,q}=0$$

ومنها $\alpha=mg\,q_0$ (حيث $q=q_0$)، وبالتعويض في (4):

$$\therefore q=-\frac{1}{2}g(\beta+t)^2+q_0 \qquad (5)$$

أيضاً عند $t=0$ ، $q=q_0$ فمن معادلة (5) نستنتج أن: $\beta=0$ وبالتالي نحصل في النهاية على معادلة مسار الجسيم الساقط رأسياً تحت تأثير وزنه بالصورة:

$$q=-\frac{1}{2}gt^2+q_0 \rightarrow y=y_0-\frac{1}{2}gt^2$$

وهو المطلوب.

<u>حل المسألة(٣):</u> إذا كانت H لا تعتمد على الزمن صراحة فإن: $H=E=\text{const.}$

حيث E هي الطاقة الكلية للجسيم، أيضاً فإن: $p=\dfrac{\partial W}{\partial q}$

حيث W هي دالة هاملتون المميزة، وبذلك يمكن كتابة معادلة هاملتون – جاكوبي بالصورة:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2-\frac{\mu}{q}=E \rightarrow \frac{\partial W}{\partial q}=\sqrt{2\left(E+\frac{\mu}{q}\right)}$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$W=\int\sqrt{2\left(E+\frac{\mu}{q}\right)}\,dq$$

وتصبح دالة هاملتون الرئيسية بالصورة:

$$S(q,E,t)=W(q,E)-Et=\int\sqrt{2\left(E+\frac{\mu}{q}\right)}\,dq-Et$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta}\equiv\frac{\partial S}{\partial E}=\gamma=\frac{\partial W}{\partial E}-t$$

$$\therefore \gamma+t=\frac{\partial W}{\partial E}=\int\frac{dq}{\sqrt{2\left(E+\frac{\mu}{q}\right)}}$$

ولإيجاد هذا التكامل: نضع $\frac{2\mu}{q} = 2E\cot^2\theta$

$$\therefore \sqrt{2E + \frac{2\mu}{q}} = \sqrt{2E}\,\text{cosec}\,\theta \quad , \quad dq = \frac{2\mu}{E}\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\therefore \gamma + t = \int \frac{\frac{2\mu}{E}\tan\theta\sec^2\theta}{\sqrt{2E}\,\text{cosec}\,\theta}\, d\theta = \frac{2\mu}{E\sqrt{2E}}\int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta \qquad \_\_\_(1)$$

حيث: $\text{cosec}\,\theta\tan\theta = \sec\theta$

$$\therefore \text{cosec}\,\theta = \frac{\sec\theta}{\tan\theta}$$

والآن:

$$\int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta = \int \tan\theta(\sec\theta\tan\theta)\, d\theta = \int \tan\theta\, d(\sec\theta) = I$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ نحصل على:

$$I = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\sec^2\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta(1 - \tan^2\theta)\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\, d\theta - I$$

$$\therefore 2I = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \ell n(\sec\theta + \tan\theta)$$

بالتعويض في (1):

$$\gamma + t = \frac{\mu}{E\sqrt{2E}}[\sec\theta\tan\theta - \ell n(\sec\theta + \tan\theta)]$$

$$= \frac{\mu}{E\sqrt{2E}}\left[\sqrt{\frac{qE}{\mu}}\sqrt{1 + \frac{qE}{\mu}} - \ell n\left(\sqrt{\frac{qE}{\mu}} + \sqrt{1 + \frac{qE}{\mu}}\right)\right]$$

وهي علاقة بين الإحداثي q والزمن t، ويظهر بها الثابتان $\gamma, \beta = E$ واللذان يمكن إيجادهما من الشروط الإبتدائية للمسألة إذا وجدت.