الباب الخامس

الإحداثيات الدورية و دالة راوث

الإحداثيات الدورية (cyclic coordinates) أو الإحداثيات المهملة أو المستترة (ignorable coordinates)

في بعض المسائل في الميكانيكا التحليلية لا تظهر بعض الإحداثيات المعممة (ولتكن q_s) في دالة لاجرانج ، بينما تظهر السرعات المعممة المصاحبة لهذه الإحداثيات (أي $\dot{q}_s$) في تلك الدالة .

وتسمى الإحداثيات المعممة التي لا تظهر في دالة لاجرانج (أي الإحداثيات q_s) بالإحداثيات الدورية ، كما تسمى أيضا الإحداثيات المهملة (أو المستترة) ، بينما تسمى الإحداثيات التي تظهر في دالة لاجرانج (و لتكن q_j) بالإحداثيات غير الدورية .

إذا اعتبرنا منظومة ميكانيكية تتميز بعدد n من الإحداثيات العامة ، و لتكن q_j هي الإحداثيات غير الدورية (حيث $j=1,2,\ldots k$) و q_s هي الإحداثيات الدورية (حيث $s=k+1,k+2,\ldots n$) و تكون دالة لاجرانج بالصورة :

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, \dot{q}_s, t)$$

<u>يلاحظ أن</u> : عدد الإحداثيات غير الدورية =k إحداثي .

بينما : عدد الإحداثيات الدورية =n-k إحداثي .

وحيث أن q_s لا تظهر في دالة لاجرانج فيكون

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

و تصبح معادلات لاجرانج بالصورة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = 0$$

و لكن كمية الحركة p_s المصاحبة للاحداثي q_s هي :

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$$

$$\therefore \frac{dp_s}{dt} = 0 \qquad \therefore p_s = \text{const} = \alpha_s = \alpha_s(\dot{q}_s) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

أي أنه في حالة وجود إحداثي دوري (أو مهمل) q_s فإن كمية الحركة المعممة المصاحبة لهذا الإحداثي الدوري تكون ثابتة $(p_s = \alpha_s)$ و تسمى p_s في تلك الحالة بثابت الحركة :

دالة راوث (Routhian Function)

في حالة وجود عدد من الإحداثيات الدورية بين الإحداثيات المعممة المستخدمة فإنه يمكن اختزال عدد المعادلات التفاضلية التي يجب حلها بحيث يصبح عددها مساويا لعدد الإحداثيات المعممة غير الدورية .ويستخدم لذلك دالة جديدة تسمى دالة راوث (R) و تعرف بالعلاقة :

$$R = L(q_j, \dot{q}_j, \dot{q}_s, t) - \sum_{s=k+1}^{n} \dot{q}_s p_s$$

حيث التجميع يتم فقط على الإحداثيات الدورية .

ومن (2) :

$$R = L(q_j, \dot{q}_j, \dot{q}_s, t) - \sum_{s} \dot{q}_s \alpha_s = R(q_j, \dot{q}_j, \alpha_s, t) \qquad \_\_\_\_ (3)$$

التغير في دالة راوث :

$$dR = d\left(L - \sum_{s} \dot{q}_s \alpha_s\right)$$

$$= \sum_{j} \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \sum_{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} d\dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial t} dt -$$

$$- \sum_{s} \dot{q}_s d\alpha_s - \sum_{s} \alpha_s d\dot{q}_s$$

و بالتعويض عن : $\alpha_s = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$

$$dR = \sum_{j} \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \sum_{s} \dot{q}_s d\alpha_s + \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad \_\_\_\_ (4)$$

و حيث أن : $R = R(q_j, \dot{q}_j, \alpha_s, t)$

حيث : $j = 1,2,\ldots k \quad , s = k+1, k+2, \ldots\ldots n$

$$dR = \sum_j \frac{\partial R}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \sum_s \frac{\partial R}{\partial \alpha_s} d\alpha_s + \frac{\partial R}{\partial t} dt \qquad \_\_\_\_ (5)$$

و بمقارنة (5) ، (4) يتضح أن :

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j} \;, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \;, \quad \dot{q}_s = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_s} \;, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

و بالتعويض من المعادلتين :

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}$$

في معادلات لاجرانج للإحداثيات غير الدورية (q_j) نحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \;\rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \qquad \_\_\_\_ (6)$$

و هذه المعادلات عددها k معادلة في عدد k من المجاهيل q_j . (الإحداثيات المعممة غير الدورية) ، و تعرف بمعادلات راوث أو معادلات لاجرانج لدالة راوث .
وبحل هذه المعادلات يتم تعيين الإحداثيات غير الدورية q_j كدوال في الزمن .

<u>أما الإحداثيات الدورية</u> : فيتم تعيينها من العلاقة

$$\dot{q}_s = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_s}$$

و بإجراء التكامل نحصل على :

$$q_s = -\int \frac{\partial R}{\partial \alpha_s} dt \qquad \_\_\_\_\_ (7)$$

و هي تعطى الإحداثيات الدورية q_s كدوال في الزمن (بعد إجراء التكامل طبعا) ، أما العلاقة $\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$ فيتضح منها أنه إذا كانت دالة لاجرانج لا تعتمد على الزمن $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$ فإن دالة راوث هي الأخرى لا تعتمد على الزمن $\left(\frac{\partial R}{\partial t} = 0\right)$.

أمثلة محلولة :

مثال(١) : يتحرك كوكب حول الشمس في مسار مركزي تحت تأثير قوة مقدارها $\left(-\gamma \frac{m}{r^2}\right)$ ، أوجد دالة راوث للحركة ، و استخدم معادلة راوث لإيجاد معادلة الحركة للكوكب .

الحل: حيث أن $Q_r = -\gamma \frac{m}{r^2} \quad \leftarrow \quad \therefore u = -\gamma \frac{m}{r}$

و تكون دالة لاجرانج :

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\gamma m}{r}$$

نلاحظ أن θ لا تظهر في L فتكون θ إحداثي دوري (أو مهمل) ، وتكون كمية الحركة المناظرة هي ثابت الحركة .

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = mh = const = \alpha$$

$$\dot{\theta} = \frac{\alpha}{m r^2} \qquad \text{——} (1)$$

وتكون دالة راوث :

$$R(r,\dot{r},\alpha) = L - \alpha\dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2} m\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{\alpha}{mr^2}\right)^2\right] + \frac{\gamma m}{r} - \alpha\left(\frac{\alpha}{mr^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 - \frac{\alpha^2}{m^2r^2}\right) + \frac{\gamma m}{r} \qquad \text{——} (2)$$

ولإيجاد الإحداثي الغير دوري (r): نطبق معادلة راوث بالصورة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0$$

حيث :

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\alpha^2}{mr^3} - \gamma \frac{m}{r^2} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

فبالتعويض في معادلة راوث :

$$\therefore m\ddot{r} - \frac{\alpha^2}{mr^3} + \gamma\frac{m}{r^2} = 0$$

$$\therefore \ddot{r} - \frac{\alpha^2}{m^2r^3} + \gamma\frac{m}{r^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\gamma}{r^2} \qquad \_\_\_\_ (3)$$

حيث : $\alpha = mh$

تحتوي المعادلة (3) على المتغير الغير دوري r ، و يمكن حلها و مكاملتها كما سبق في مثال رقم (2) على معادلات هاملتون ، و من ذلك يمكن إيجاد معادلة مسار الكوكب .

<u>مثال (٢)</u> : في نظام ديناميكي له درجتان حرية تعطى طاقة الحركة من :

$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2(\alpha+\beta q_2^2)} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2$ و طاقة الوضع (الجهد) من $u = \gamma + \mu q^2$

حيث $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ ثوابت ، أوجد دالة راوث للمنظومة واستخدمها لتعيين الإحداثيات العامة q_1, q_2 كدوال في الزمن .

<u>الحــل</u>: دالة لاجرانج للمنظومة

$$L = T - u = \frac{\dot{q}_1^2}{2(\alpha+\beta q_2^2)} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \gamma - \mu q_2^2 \qquad \_\_\_\_ (1)$$

هنا الإحداثي q_1 لا يظهر صراحة في L فهو إحداثي دوري (أو مهمل) وتكون كمية الحركة المناظرة له هي ثابت الحركة

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\dot{q}_1}{(\alpha+\beta q_2^2)} = C \qquad \_\_\_\_ (2)$$

<u>دالة راوث :</u>

$$R = L - p_1\dot{q}_1 = L - C\dot{q}_1$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{(\alpha+\beta q_2^2)} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \gamma - \mu q_2^2 - C\dot{q}_1$$

$$= \frac{1}{2}C\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \gamma - \mu q_2^2 - C\dot{q}_1$$

$$=\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-\gamma-\mu q_2^2-\frac{1}{2}C\dot{q}_1$$

$$=\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-\gamma-\mu q_2^2-\frac{1}{2}C\left[C(\alpha+\beta q_2^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-\gamma-\mu q_2^2-\frac{1}{2}C^2(\alpha+\beta q_2^2) \qquad \_\_\_\_(3)$$

واضح أن R دالة في $q_2, \dot{q}_2, C$.

معادلات راوث : تستخدم لإيجاد الإحداثي غير الدوري q_2 وصورتها :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_2}=0$$

$$\therefore \ddot{q}_2^2+(2\mu+\beta c^2)q_2=0$$

$$\therefore \ddot{q}_2^2=-(2\mu+\beta c^2)q_2=-n^2q_2 \qquad \_\_\_\_(4)$$

حيث $n^2=(2\mu+\beta c^2)$

المعادلة (4) معادلة تفاضلية حلها العام هو :

$$q_2=A\sin(nt+\varepsilon)$$

حيث : ε ثابت .

$$\therefore q_2=A\sin[\sqrt{(2\mu+\beta c)}\ t+\varepsilon] \qquad \_\_\_\_(5)$$

و <u>لإيجاد الإحداثي الدوري</u> q_1 :- نستخدم العلاقة $q_1=-\int\frac{\partial R}{\partial c_1}dt$

فباستخدام (3) نحصل على :

$$q_1=c\int(\alpha+\beta q_2^2)dt$$

$$=c\int[\alpha+\beta A^2\sin^2(nt+\varepsilon)]dt$$

$$=c\int\left[\alpha+\beta A^2\cdot\frac{1}{2}\{1-\cos 2(nt+\varepsilon)\}\right]dt$$

$$=c\left[\alpha t+\frac{1}{2}\beta A^2t-\frac{1}{2}\beta A^2\frac{\sin 2(nt+\varepsilon)}{2n}\right]+\text{const}$$

$$=c\left[(\alpha+\frac{1}{2}\beta A^2)t-\frac{\beta A^2}{4n}\sin 2(nt+\varepsilon)\right]+\text{const}$$

$$=c\left[(\alpha+\frac{1}{2}\beta A^2)t-\frac{\beta A^2}{4\sqrt{2\mu+\beta c^2}}\sin 2(\sqrt{2\mu+\beta c^2}\,t+\varepsilon)\right]+\text{const}\_\_(6)$$

المعادلتان (6)،(5) هما المعادلتان اللتان تعطيان q_1, q_2 بدلالة الزمن t .وهو المطلوب .

مثال(٣) : تتحرك نقطة مادية كتلتها m في مجال قوة جهدها $u=-\frac{m}{r^2}$ ، فإذا بـدأت النقطة المادية الحركة عندما كانت :

$$r=1, \theta=0, \dot{r}=\sqrt{2}, \dot{\theta}=2$$

أوجد دالة راوث و استخدمها لإيجاد الإحداثيات العممة (r,θ) كدوال في الزمن.

الحـــل : دالة لاجرانج :

$$L=T-u=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{m}{r^2} \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$$

من هذه العلاقة يتضح أن θ هو إحداثي دوري (لعدم وجوده في L) .

وبذلك فإن كمية الحركة المناظرة p_θ تكون ثابتا للحركة .

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=\text{const}=\alpha$$

$$\therefore \dot{\theta}=\frac{\alpha}{mr^2} \qquad \_\_\_\_\_\_ (2)$$

دالة راوث :

$$R=L-p_\theta\dot{q}_\theta=L-\alpha\dot{\theta}$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{m}{r^2}-\alpha\left(\frac{\alpha}{mr^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2+r^2\left(\frac{\alpha}{mr^2}\right)^2\right]+\frac{m}{r^2}-\frac{\alpha^2}{mr^2}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{mr^2} + \frac{m}{r^2} - \frac{\alpha^2}{mr^2}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{mr^2} + \frac{m}{r^2} \qquad \text{———} (3)$$

<u>لإيجاد الثابت</u> α : من الشروط الابتدائية للمسألة :

$$[m\,r^2\dot{\theta}]_{t=0} = m(1)^2 \cdot (2) = 2m = \alpha$$

وتصبح المعادلة (3) بالصورة:

$$R = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\frac{(2m)^2}{m\,r^2} + \frac{m}{r^2} \;\; = \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 - \frac{m}{r^2} \qquad \text{———} (4)$$

<u>وللحصول على الإحداثيات المعممة</u> (r,θ) بدلالة الزمن :

<u>(١) بالنسبة للاحداثي غير الدوري</u> (r) :

نوجده من معادلة راوث :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0$$

حيث :

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{2m}{r^3}$$

$$\therefore m\ddot{r} - \frac{2m}{r^3} = 0 \qquad \therefore \ddot{r} - \frac{2}{r^3} = 0 \qquad \text{———} (5)$$

وبتكامل المعادلة (5) :

$$\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} - \frac{2}{r^3} = 0$$

$$\therefore \int \dot{r}\,d\dot{r} - \int 2r^{-3} = 0 \therefore \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{r^2} = \text{const}$$

$$\therefore \dot{r}^2 + \frac{2}{r^2} = \text{const} = c$$

وباستخدام الشروط الابتدائية للمسألة :

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{2}{(1)^2} = c = 4$$

$$\therefore \dot{r}^2 + \frac{2}{r^2} = 4$$

$$\therefore \dot{r}^2 = 4 - \frac{2}{r^2} = \frac{4}{r^2}[r^2 - \frac{1}{2}]$$

$$\therefore r^2\dot{r}^2 = 4\left[r^2 - \frac{1}{2}\right] \qquad \therefore r\dot{r} = 2\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{2}} = r\frac{dr}{dt}$$

و بفصل المتغيرات و التكامل :

$$\frac{rdr}{\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{2}}} = 2dt$$

$$\int \frac{1}{2}(2rdr)\left(r^2 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{2}} = 2\int dt$$

$$\therefore \cancel{\frac{1}{2}}\left[\frac{(r^2 - \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}}\right] = 2t + c$$

$$\therefore \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}} = 2t + c$$

<u>و لإيجاد الثابت c</u> : في البداية $t = 0$ ، $r = 1$

$$\therefore c = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}} = 2t + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(4t + \sqrt{2})$$

$$\therefore r^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(4t + \sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}(16t^2 + 8\sqrt{2}t + 2) = 4t^2 + 2\sqrt{2}t + \frac{1}{2}$$

$$\therefore r^2 = 4t^2 + 2\sqrt{2}t + 1 \quad \rightarrow \quad \therefore r = \sqrt{4t^2 + 2\sqrt{2}t + 1} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(I)}$$

<u>(٢) بالنسبة للاحداثي الدوري</u> θ : يوجد من العلاقة

$$\theta = -\int \frac{\partial R}{\partial \alpha} dt$$

حيث : $\frac{\partial R}{\partial \alpha} = -\frac{\alpha}{mr^2}$ (من (3))

$$\therefore \theta = \int \frac{\alpha}{mr^2} dt = \frac{\alpha}{m} \int \frac{dt}{r^2}$$

$$= \frac{\alpha}{m} \int \frac{dt}{4t^2 + 2\sqrt{2}t + 1}$$

$$= 2\int \frac{dt}{\left(2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$\alpha = 2m$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = 2 \cdot \frac{1}{1/\sqrt{2}} \tan^{-1} \left[\frac{2t + \sqrt{2}/2}{1/\sqrt{2}} \right] + \text{const}$$

$$\therefore \theta = 2\sqrt{2} \tan^{-1}(2\sqrt{2} + 1) + const$$

<u>**ولايجاد الثابت**</u> : عند $t = 0$ ، $\theta = 0$ فإن

$$0 = 2\sqrt{2} \tan^{-1} 1 + \text{const.}$$

$$\therefore \cos t = -2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \theta = 2\sqrt{2}\left[\tan(2\sqrt{2} + 1) - \frac{\pi}{4}\right] \qquad \text{\_\_\_\_(II)}$$

المعادلتان (II) ، (I) تعطيان الإحداثيان العامان r, θ بدلالة الزمن ، وهو المطلوب .

مسائل على الإحداثيات الدورية و دالة راوث

(١) إذا كانت طاقة حركة منظومة ديناميكية هي : $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 - q_1^2\dot{q}_2^2)$

وطاقة جهدها هي : $u = \frac{1}{2}k^2 q_1^2$

أوجد دالة راوث للمنظومة ، و استخدم معادلات راوث لإثبات أن :

$$q_1^2 = a\sin(2kt + b) + c$$

حيث : a,b,c,k ثوابت .

(٢) تتحرك نقطة مادية كتلتها m تحت تأثير قوة مقداره $\frac{-2m}{r^3}$ حيث r هو بعد النقطة المادية عن مركز الجذب O ، استخدم الإحداثيات القطبية كإحداثيات معممة لإيجاد دالة راوث ، ثم استخدم تلك الدالة لإيجاد الإحداثيات المعممة r, θ بدلالة الزمن علما بأن النقطة المادية بدأت حركتها عند t=0 حيث كانت $\dot{\theta} = \frac{1}{2}$ ، $r = 2, \dot{r} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

(٣) منظومة ديناميكية طاقة حركتهاهي: $T = \frac{1}{2}[\frac{\dot{q}_1^2}{a + bq_2^2} + \dot{q}_2^2]$ ، وطاقة الجهد لها هي: $u = cq_2^2 + d$ حيث a, b, c, d ثوابت، المطلوب:

(i) إيجاد دالة راوث للمنظومة.

(ii) تطبيق معادلات راوث لإيجاد معادلة الحركة للمنظومة.

(iii) استخدام معادلات الحركة المستنتجة لإيجاد q_1, q_2 كدوال في الزمن.

(٤) (أ) أكتب دالتي لاجرانج وهاملتون لحركة مقذوف في المستوى في وسط غير مقاوم، ثم طبق معادلات لاجرانج وكذلك معادلات هاملتون لإيجاد معادلات حركة المقذوف.

(ب) أكتب دالة راوث لحركة المقذوف، ثم طبق معادلات راوث لإيجاد معادلات الحركة للمقذوف.

(٥) يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية جاذبة صورتها لوحدة الكتل هي: $\vec{F}=(-\frac{k}{r^3})\vec{r}$، حيث k ثابت، $\vec{r}$ متجه الموضع، المطلوب.

(i) إيجاد دوال لاجرانج وهاملتون وراوث للجسيم.

(ii) تطبيق معادلات لاجرانج وهاملتون وراوث لإيجاد معادلات حركة الجسيم.

(٦) كتلة مقدارها $3m$ معلقة في أحد طرفي خيط طوله ℓ يمر على بكرة خفيفة ملساء ومثبتة، وفي الطرف الآخر للخيط توجد بكرة أخرى خفيفة ملساء ويمر عليها خيط طوله s، وتحمل البكرة كتلتان $2m, m$، أوجد الآتي:

(١) القوى المعممة

(٢) دالة لاجرانج للمنظومة

(٣) دالة هاملتون

(٤) دالة رواث

(٥) معادلات لاجرانج وهاملتون وراوث

(٦) تحقيق قاعدة هاملتون لأقل فعل

حلول المسائل على الإحداثيات الدورية و دالة راوث

حل المسألة(١): دالة لاجرانج :

$$L = T - u = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 - q_1^2\dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}k^2 q_1^2 \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$$

وحيث أن q_2 لم تظهر في L فهي إحداثي دوري(أو مهمل) و بذلك تكون كمية الحركة المنظرة هي ثابت الحركة :

$$p_2 = \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_2} = -q_1^2 \dot{q}_2 = \alpha \quad \rightarrow \qquad \therefore \dot{q}_2 = -\frac{\alpha}{q_1^2} \quad \text{\_\_\_\_} (2)$$

دالة راوث :

$$R = L - p_2 \dot{q}_2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 - q_1^2 \frac{\alpha^2}{q_1^4}\right) - \frac{1}{2} k^2 q_1^2 - \alpha\left(\frac{-\alpha}{q_1^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 - \frac{\alpha^2}{q_1^2}\right) - \frac{1}{2} k^2 q_1^2 + \frac{\alpha^2}{q_1^2}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2} k^2 q_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{q_1^2} \qquad \text{\_\_\_\_} (3)$$

ولإيجاد الإحداثيات غير الدورية (q_1) : نستخدم معادلات راوث ، حيث

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial q_1} = -k^2 q_1 - \frac{\alpha^2}{q_1^3} = -\left(k^2 q_1 + \frac{\alpha^2}{q_1^3}\right)$$

بالتعويض في معادلة راوث :

$$\therefore \ddot{q}_1 - \left(k^2 q_1 + \frac{\alpha^2}{q_1^3}\right) = 0 \qquad \therefore \ddot{q}_1 = \dot{q}_1 \frac{d\dot{q}_1}{dq_1} = -\left(k^2 q_1 + \frac{\alpha^2}{q_1^3}\right)$$

$$\therefore \dot{q}_1 d\dot{q}_1 = -\left(k^2 q_1 + \frac{\alpha^2}{q_1^3}\right) dq_1$$

و بإجراء التكامل نحصل على :

$$\frac{1}{2} \dot{q}_1^2 = -\left[\frac{1}{2} k^2 q_1^2 - \frac{\alpha^2}{2q_1^2}\right] + \text{const}$$

$$\therefore \dot{q}_1^2 = \left[\frac{\alpha^2}{q_1^2} - k^2 q_1^2\right] + \text{const}(\beta) = \frac{\alpha^2 - k^2 q_1^4}{q_1^2} + \beta$$

$$\therefore q_1^2\dot{q}_1^2 = \alpha^2 - k^2 q_1^4 + \beta q_1^2$$

$$= k^2\left[\frac{\alpha^2}{k^2} - \left(q_1^4 - \frac{\beta}{k^2}q_1^2\right)\right]$$

$$= k^2\left[\frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{\beta^2}{4k^2} - \left(q_1^4 - \frac{\beta}{k^2}q_1^2 + \frac{\beta^2}{4k^2}\right)\right]$$

$$a^2 = \frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{\beta^2}{4k^2} = \text{const}$$

$$c = \frac{\beta}{2k^2} = \text{const}$$

$$= k^2\left[\frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{\beta^2}{4k^2} - \left(q_1^2 - \frac{\beta}{2k^2}\right)^2\right]$$

$$= k^2\left[a^2 - (q_1^2 - c)^2\right]$$

$$\therefore q_1\dot{q}_1 = k\sqrt{a^2 - (q_1^2 - c)^2} = q_1\frac{dq_1}{dt}$$

بفصل المتغيرات و التكامل نحصل على :

$$\therefore \int\frac{2q_1 dq_1}{\sqrt{a^2 - (q_1^2 - c)^2}} = 2\int k dt$$

بوضع :

$$q_1^2 - c = u$$

$$2q_1 dq_1 = du$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a}$$

$$\therefore \int\frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = 2\int k dt$$

$$\sin^{-1}\frac{u}{a} = 2kt + b$$

$$u = a\sin(2kt + b)$$

$$\therefore q_1^2 - c = a\sin(2kt + b)$$

$$\therefore q_1^2 = a\sin(2kt + b) + c$$

وهو المطلوب .

حل المسألة(٢): باستخدام الإحداثيات القطبية r, θ كإحداثيات عامة أو معممة

تكون طاقة الحركة :

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

طاقة الجهد :

$$u = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

حيث $\vec{F}$ هي القوة المؤثرة :

$$\vec{F} = \frac{-2m}{r^3}\hat{\vec{r}}$$

$$\therefore u = 2m \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^3}\hat{\vec{r}} \cdot (dr\hat{\vec{r}} + rd\theta\hat{\vec{\theta}})$$

$$= 2m \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^3} dr = -\frac{m}{r^2}$$

وتكون دالة لاجرانج :

$$L = T - u = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{m}{r^2}$$

ومنها يتضح أن الإحداثي θ هو إحداثي دوري (لعدم وجوده في معادلة L)

و بذلك فإن :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}^2 = \text{const} = \alpha$$

$$\therefore \dot{\theta} = \frac{\alpha}{mr^2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (1)$$

دالة راوث :

$$R = L - p_\theta\dot{\theta} = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{m}{r^2} - \alpha\dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2 \left(\frac{\alpha}{m r^2} \right)^2 \right] + \frac{m}{r^2} - \alpha \left(\frac{\alpha}{m r^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{m}{r^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{m r^2} \right) \qquad \_\_\_\_\_ (2)$$

ولإيجاد الإحداثيات العامة r, θ نتبع الآتي :

(١) <u>بالنسبة للاحداثي غير الدوري</u> (r) : نوجده من معادلة راوث :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0$$

حيث :

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{-2}{r^3}\left(m - \frac{\alpha^2}{2m} \right)$$

$$\therefore m\ddot{r} - \left[-\frac{2m}{r^3} + \frac{\alpha^2}{mr^3} \right] = 0$$

ومن الشروط الابتدائية للمسألة :- نوجد الثابت α ، حيث :

$$\alpha = mr^2\dot{\theta} = m \cdot (4) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = 2m$$

$$\therefore m\ddot{r} - \left[-\frac{2m}{r^3} + \frac{4m^2}{mr^3} \right] = 0 \rightarrow m\ddot{r} - \frac{2m}{r^3} = 0$$

$$\therefore \ddot{r} - \frac{2}{r^3} = 0$$

و بإجراء التكامل بالنسبة لـــ r : وذلك بالضرب في $2\dot{r}$ و التكامل

$$2\dot{r}\ddot{r} - 2\dot{r}\left(\frac{2}{r^3} \right) = 0 \therefore \dot{r}^2 + \frac{2}{r^2} = \text{const}$$

ومن الشروط الابتدائية :- $\frac{3}{2} + \frac{2}{4} = \text{const} = 2$

$$\therefore \dot{r}^2 + \frac{2}{r^2} = 2 \to \dot{r}^2 r^2 + 2 = 2r^2 \to \dot{r}^2 r^2 = 2(r^2 - 1)$$

$$\therefore r\dot{r} = \sqrt{2}\sqrt{r^2 - 1} = r\frac{dr}{dt}$$

و بإجراء التكامل بالنسبة إلى t :

$$\int_2^r \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - 1}} = \int_0^t \sqrt{2}dt$$

$$\therefore \sqrt{r^2 - 1}\Big|_2^r = \sqrt{2}t \qquad \therefore \sqrt{r^2 - 1} - \sqrt{3} = \sqrt{2}t$$

$$\therefore r^2 - 1 = (\sqrt{2}t + \sqrt{3})^2 = 2t^2 + 2\sqrt{6}t + 3$$

$$\therefore r = \sqrt{2t^2 + 2\sqrt{6}t + 4} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(I)}$$

(٢) للاحداثي الدوري (θ) : نستخدم العلاقة

$$\theta = -\int \frac{\partial R}{\partial \alpha} dt$$

حيث(من(2)) :

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = -\frac{1}{mr^2}\alpha = -\frac{1}{mr^2}(2m) = -\frac{2}{r^2}$$

$$\therefore \theta = 2\int \frac{dt}{r^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 2\sqrt{6}t + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + 2\sqrt{6}t + 2}$$

$$= \int \frac{dt}{(t + \sqrt{3/2})^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{1/\sqrt{2}} \tan^{-1}\left[\frac{t + \sqrt{3/2}}{1/\sqrt{2}}\right] + const$$

$$= \sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}t + \sqrt{3}) + const \qquad \text{\_\_\_\_\_(II)}$$

المعادلتان (II) ، (I) تعطيان الإحداثيان العامان r, θ بدلالة الزمن . وهو المطلوب .

حل المسألة(٣):

الجزء (i): لإيجاد دالة راوث: نوجد أولاً دالة لاجرانج للمنظومة:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{q}_1^2}{a + bq_2^2} + \dot{q}_2^2\right] - (Cq_2^2 + d) \qquad (1)$$

واضح أن الاحداثي المهمل في هذه المسألة هو $s_1 = q_1$ فتكون دالة راوث بالصورة:

$$R = L - \alpha\dot{s}_1 = \frac{\dot{s}_1^2}{2(a + bq_2^2)} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - Cq_2^2 - \alpha\dot{s}_1 - d \qquad (2)$$

حيث α ثابت من ثوابت الحركة.

ولكن R يجب أن تكون على الصورة $R(q_2, \dot{q}_2, \alpha)$ ولتحقيق ذلك نستخدم العلاقة:

$$\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_1} = \frac{\dot{s}_1}{a + bq_2^2} \rightarrow \dot{s}_1 = \alpha(a + bq_2^2)$$

وبالتعويض في (2):

$$\therefore R = -\frac{\alpha^2}{2}(a + bq_2^2) + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - Cq_2^2 - d \qquad (3)$$

الجزء (ii): بتطبيق معادلة راوث:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0$$

$$\therefore \ddot{q}_2 + w^2 q_2 = 0 \qquad (4)$$

حيث $w^2 = 2c + b\alpha^2$.

المعادلة (4) هي معادلة الحركة للمنظومة.

الجزء (iii): حل المعادلة (4) هو:

$$q_2 = D\cos(wt + \varepsilon) \qquad (5)$$

وهو الاحداثي المعمم q_2 كدالة في الزمن.

وللحصول على الاحداثي q_1 كدالة في الزمن: نستخدم المعادلة $\dot{s}_1 = \frac{\partial R}{\partial \alpha}$ ومنها:

$$\dot{s}_1 = \alpha(a + b q_2^2)$$

$$\therefore s_1 = \int \alpha(a + b q_2^2)dt = \int \alpha[a + bA^2 \cos^2(wt + \varepsilon)]dt$$

$$\therefore q_1 = s_1 = \int \alpha a\,dt + \int \alpha b D^2 \cos^2(wt + \varepsilon)dt$$

$$= \alpha at + \alpha b D^2 \int \frac{1}{2}[\cos 2(wt + \varepsilon) + 1]dt$$

$$= \alpha at + \frac{1}{2}\alpha b D^2 [\frac{1}{2w}\sin(2wt + \varepsilon) + t + G]$$

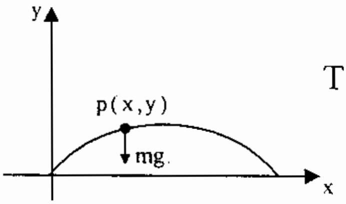
$$= \alpha at + \frac{1}{2}\alpha b D^2 [\frac{1}{2w}\sin(2wt + \varepsilon) + t] + \frac{1}{2}\alpha b D^2 G$$

وبأخذ $A = \alpha a, \frac{1}{2}\alpha b D^2 = B, \quad \frac{1}{2}\alpha b D^2 G = C$

$$\therefore q_1 = At + B[t + \frac{1}{2w}\sin(2wt + \varepsilon)] + C$$

$$= (A + B)t + \frac{B}{2w}\sin(2wt + \varepsilon) + C \qquad (6)$$

المعادلتان (5) ,(6) تعطيان q_2, q_1 وهو المطلوب.



<u>حل المسألة(٤)</u>: <u>الجزء(أ)</u>: طاقة حركة المقذوف:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

طاقة الجهد أو الموضع: $U = mgy$

دالة لاجرانج:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg\,y$$

دالة هاملتون:

$$H = T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg\,y$$

ولكتابة دالة هاملتون بدلالة p_1 ,p_2:

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}\ ,\ p_2=\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}$$

$$\therefore \dot{x}=\frac{p_1}{m}\ ,\ \dot{y}=\frac{p_2}{m}\ \rightarrow H=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}+mg\,y$$

<u>معادلات لاجرانج:</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{x}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{y}=mg \qquad (2)$$

المعادلتان (2) ,(1) هما معادلتا الحركة للمقذوف.

معادلات هاملتون:

$$\dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial x}=0\ ,\ \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{p_1}{m}\ \rightarrow\ m\ddot{x}=\dot{p}_1=0 \qquad (3)$$

$$\dot{p}_2=-\frac{\partial H}{\partial y}=-my\ ,\ \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_2}=\frac{p_2}{m}\ \rightarrow\ m\ddot{y}=\dot{p}_2=-mg \qquad (4)$$

المعادلتان (4) ,(3) هما معادلتا الحركة للمقذوف وهما نفس المعادلتين (2) ,(1).

<u>الجزء (ب):</u> دالة راوث: نلاحظ من L أو H أن x هو إحداثي مهمل، وعلى ذلك فإن:

$$\dot{p}_1=0\ \rightarrow\ p_1=\text{const.}=\alpha$$

وتكون دالة راوث بالصورة:

$$R=L-\alpha\dot{x}=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mg\,y-\alpha\dot{x} \qquad \_\_\_\_(5)$$

وللحصول على دالة راوث في صورتها الصحيحة يجب حذف $\dot{x}$ منها حيث أن:

$$R=R(y,\dot{y},\alpha)$$

ولكن: $\dot{x}=\frac{p_1}{m}=\frac{\alpha}{m}$، فبالتعويض في (5):

$$R=\frac{1}{2}m[\frac{\alpha^2}{m^2}+\dot{y}^2]-mg\,y-\alpha(\frac{\alpha}{m})$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{y}^2-mg\,y-\frac{\alpha^2}{2m} \qquad \text{——} \quad (6)$$

معادلة راوث:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial R}{\partial \dot{y}})-\frac{\partial R}{\partial y}=0$$

$$\therefore m\ddot{y}+my=0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{y}=-mg \qquad \text{——} \quad (7)$$

أيضاً فإن: $\frac{\partial R}{\partial \alpha}=-\dot{x}$ ومنها: $-\dot{x}=-\frac{\alpha}{m}$ ، أي أن: $\dot{x}=\frac{\alpha}{m}$ ومنها:

$$\ddot{x}=0 \qquad \text{——} \quad (8)$$

العلاقتين (8) ,(7) هما نفس معادلتا الحركة (2) ,(1).

<u>حل المسألة(٥):</u> لجسيم كتلته m فإن:

$$\vec{F}=-\frac{km}{r^3}\vec{r}$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية فتكون الإحداثيات المعممة: $q_1=r, q_2=\theta$

وتكون السرعات المعممة هي:

$$\dot{q}_1=\dot{r}\,,\ \dot{q}_2=\dot{\theta}$$

السرعات الحقيقية (المعتادة) هي:

$$v_r=\dot{r}\,,\ v_\theta=r\dot{\theta}$$

طاقة الحركة هي:

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

طاقة الجهد هي:

$$U=-\frac{km}{r}$$

[من التعريف: $U=-\int_{\infty}^{r}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-km\int_{r}^{\infty}\frac{dr}{r^2}=-\frac{km}{r}$]

<u>الجزء (i): دالة لاجرانج:</u>

$$L=T-U=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{km}{r} \qquad (1)$$

<u>دالة هاملتون:</u>

$$H=T+U=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{km}{r}$$

وبدلالة p_1, p_2:

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r} \quad \rightarrow \quad \dot{r}=\frac{p_1}{m}$$

$$p_2=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}=\frac{p_2}{mr^2}$$

$$\therefore H=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2mr^2}-\frac{km}{r} \qquad (2)$$

<u>دالة راوث:</u> حيث أن θ هو إحداثي مهمل $q_2=\theta$

$$\therefore R=L-\alpha\dot{\theta}=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{km}{r}-\alpha\dot{\theta}$$

ولحذف $\dot{\theta}$ منها:

$$p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\text{const.}=\alpha$$

$$\therefore p_2=mr^2\dot{\theta}=\alpha \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}=\frac{\alpha}{mr^2}$$

$$\therefore R=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\frac{\alpha^2}{m^2r^4})+\frac{km}{r}-\frac{\alpha^2}{mr^2}$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{km}{r}-\frac{\alpha^2}{2mr^2} \qquad (2)$$

<u>الجزء (ii): تطبيق معادلات لاجرانج:</u>

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}})-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \quad \rightarrow \quad m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-\frac{km}{r^2} \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}})-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \quad \rightarrow \quad mr^2\,\dot{\theta}=const.=\alpha \qquad (5)$$

المعادلتان (5) ,(4) هما معادلات الحركة للجسيم.

تطبيق معادلات هاملتون:

$$\dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{p_2^2}{mr^3}-\frac{km}{r^2}\ ,\ \dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{p_1}{m}$$

ومن هاتين المعادلتين فإن:

$$m(\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2)=-\frac{km}{r^2} \qquad (6)$$

$$\dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=0 \quad , \quad \dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_2}=\frac{p_2}{mr^2}$$

وبذلك نحصل على:

$$mr^2\,\dot{\theta}=const.=\alpha \qquad (7)$$

المعادلتان (7) ,(6) هما المعادلتان (5) ,(4) [معادلتا الحركة].

تطبيق معادلات راوث:

$$\frac{\partial R}{dt}(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}})-\frac{\partial R}{\partial r}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{r})-\frac{\alpha^2}{mr^3}+\frac{km}{r^2}=0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta}=\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad -\frac{\alpha}{mr^2}=-\dot{\theta} \ \rightarrow \ mr^2\,\dot{\theta}=\alpha \qquad (9)$$

ومن (8) نجد أن:

$$m\ddot{r}-\frac{(m\dot{r}\dot{\theta})^2}{mr^3}+\frac{km}{r^2}=0$$

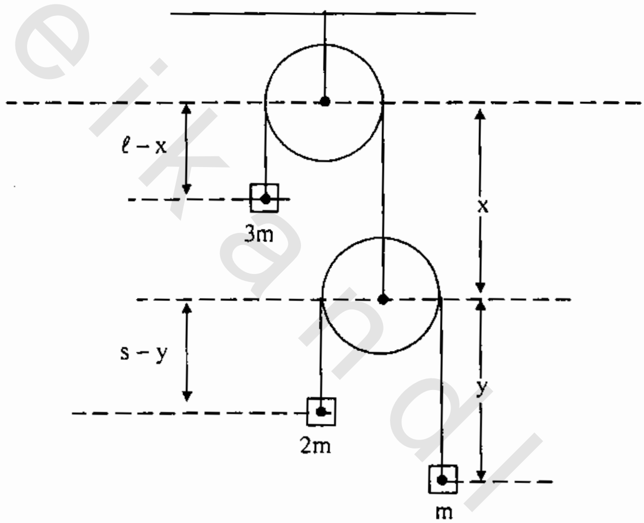
$$\therefore m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-\frac{km}{r^2} \qquad (10)$$

المعادلتان (10) ,(9) هما المعادلتان (5) ,(4) [معادلتا الحركة].

وهو المطلوب مع ملاحظة أن معادلات الحركة لم تتغير بتطبيق المعادلات الثلاثة.

<u>حل المسألة(٦):</u>

الأطوال x, y هي الإحداثيات المعممة (أنظر الشكل)، حيث x هي المسافة بين مركزي البكرتين الثابتة والمتحركة، y هي المسافة بين الكتلة (m) ومركز البكرة المتحركة، فيكون موضع الكتلة (m) من مركز البكرة الثابتة هو $(x+y)$، ويكون موضع الكتلة $(2m)$ من مركز البكرة الثابتة هو $(x+s-y)$، وموضع الكتلة $(3m)$ من مركز البكرة الثابتة هو $(\ell - x)$ حيث ℓ, s ثابتان.



سرعة الكتلة m هي:

$$\frac{d}{dt}(x+y) = \dot{x} + \dot{y}$$

سرعة الكتلة $2m$ هي:

$$\frac{d}{dt}(x+s-y) = \dot{x} - \dot{y}$$

سرعة الكتلة $3m$ هي:

$$\frac{d}{dt}(\ell - x) = -\dot{x}$$

لإيجاد القوى المعممة:

نفرض أن طاقة الجهد V للمنظومة هي (وذلك بأخذ مركز الكرة الثابتة هو مبدأ القياس).

$$\begin{aligned} V &= -3mg(-x) - 2mg(x+s-y) - mg(x+y) \\ &= 3mg\,x - 2mg\,x - 2mg\,s + 2mg\,y - mg\,x - mg\,y \\ &= mg\,y + c \qquad , \qquad c = -2mg\,s \end{aligned}$$

وتكون القوتان المعممتان هما:

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad , \quad Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial y} = -mg$$

<u>لإيجاد دالة لاجرانج:</u>

طاقة الحركة المنظومة:

$$T = \frac{1}{2}[3m\,\dot{x}^2 + 2m(\dot{x}-\dot{y})^2 + m(\dot{x}+\dot{y})^2] = \frac{1}{2}m[6\,\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + 3\dot{y}^2]$$

كمية الحركة المعممة:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(6\dot{x} - \dot{y}) \; , \; p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m(-\dot{x} + 3\dot{y})$$

ومن هاتين المعادلتين نجد أن:

$$\dot{x} = \frac{3p_1 + p_2}{17m} \; , \; \dot{y} = \frac{p_1 + 6p_2}{17m}$$

دالة لاجرانج:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[6\dot{x}^2 - 2\dot{x}\,\dot{y} + 3\dot{y}^2] - mg\,y$$

مع ملاحظة أن x هو إحداثي مهمل.

<u>لإيجاد دالة هاملتون:</u>

$$H = T + V = \frac{1}{2}m[6\dot{x}^2 - 2\dot{x}\,\dot{y} + 3\dot{y}^2] + mg\,y$$

وبالتعويض عن $\dot{x}, \dot{y}$ بدلالة p_1, p_2 نحصل على:

$$H = \frac{1}{578m}[6(3p_1+p_2)^2 - 2(3p_1+p_2)(p_1+6p_2) + 3(p_1+6p_2)^2] + mg\,y$$

$$= \frac{1}{578m}[6(9p_1^2+6p_1p_2+p_2^2) - (6p_1^2+37\,p_1p_2+12p_2^2)$$

$$+3(p_1^2+12p_1p_2+36p_2^2)] + mg\,y$$

$$= \frac{1}{578m}[51\,p_1^2 + 35\,p_1\,p_2 + 102\,p_2^2] + mg\,y$$

<u>لإيجاد دالة راوث:</u>

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(6\dot{x} - \dot{y}) = \text{const.} = c$$

$$\therefore\ R = \frac{1}{2}m(6\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + 3\dot{y}^2) - mg\,y - \dot{x}\,c$$

ولإيجاد دالة راوث الفعلية يجب التخلص من المتغير $\dot{x}$ ، حيث:

$$\dot{x} = \frac{1}{6}(\frac{c}{m} + \dot{y})$$

$$\therefore R = -\frac{c^2}{12m} - \frac{c\,\dot{y}}{6} + \frac{17}{12}\dot{y}^2 - mg\,y$$

معادلات لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

ومن هاتين المعادلتين نجد أن:

$$m(6\ddot{x} - \ddot{y}) = 0$$

$$m\ (\ddot{x} - 3\ddot{y}) = mg$$

ويمكن إيجاد العجلة للكتل المذكورة كالآتي:

حيث أن عجلة الكتلة m = $\ddot{x} + \ddot{y}$

وأن عجلة الكتلة $2m$ = $\ddot{x} - \ddot{y}$

و أن عجلة الكتلة $3m$ = $-\ddot{x}$

وبحل معادلتي لاجرانج في $\ddot{x}, \ddot{y}$ نحصل على:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{17}g \quad , \quad \ddot{y} = -\frac{6}{17}g$$

.: عجلة الكتلة m هي:

$$\ddot{x} + \ddot{y} = -\frac{1}{17}g - \frac{6}{17}g = -\frac{7}{17}g$$

عجلة الكتلة 2m هي:

$$\ddot{x} - \ddot{y} = -\frac{1}{17}g - (-\frac{6}{17}g) = -\frac{1}{17}g + \frac{6}{17}g = \frac{5}{17}g$$

عجلة الكتلة 3m هي:

$$-\ddot{x} = -(-\frac{1}{17}g) = \frac{1}{17}g$$

<u>معادلات هاملتون:</u>

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \therefore \ \dot{p}_1 = 0 \quad , \quad p_1 = \text{const.}(c)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} \qquad \therefore \ \dot{p}_2 = -mg$$

$$\dot{q}_1 = \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{3p_1 + p_2}{17m}$$

$$\dot{q}_2 = \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{6p_1 + p_2}{17m}$$

<u>معادلة راوث:</u>

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial R}{\partial \dot{y}}) - \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

$$\therefore \ \frac{d}{dt}[-\frac{1}{6}c + \frac{17}{6}m\dot{y}] + mg = 0$$

$$\therefore \frac{17}{6}m\ddot{y} = -mg \quad \rightarrow \quad \therefore \ddot{y} = -\frac{6}{17}g$$

وهي نفس النتيجة المتحصل عليها من معادلات لاجرانج.

$$\frac{\partial R}{\partial c} = -\dot{x} \rightarrow -\frac{c}{6m} - \frac{\dot{y}}{6} = -\dot{x}$$

$$\therefore \frac{1}{6}(\frac{c}{m} + \dot{y}) = \dot{x} \quad \therefore \ddot{x} = \frac{1}{6}\ddot{y} = -\frac{1}{17}g$$

وهو ما حصلنا عليه أيضاً من معادلات لاجرانج.

<u>قاعدة هاملتون لأقل فعل:</u>

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = 0 \quad \text{أو} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0$$

وباستخدام العلاقة الخاصة بدالة لاجرانج L نحصل على:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\frac{1}{2} m(12\dot{x}\,\delta\dot{x} - 2\dot{y}\,\delta\dot{x} - 2\dot{x}\,\delta\dot{y} + 6\dot{y}\,\delta\dot{y}]\,dt - \int_{t_1}^{t_2} mg\,y\,dt = 0$$

$$\therefore m\int_{t_1}^{t_2}(6\dot{x} - \dot{y})\,d(\delta x) + m\int_{t_1}^{t_2}(3\dot{y} - \dot{x})\,d(\delta y) - mg\int_{t_1}^{t_2}\delta y\,dt = 0$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ نحصل على:

$$m[(6\dot{x} - \dot{y})(\delta x)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}(6\ddot{x} - \ddot{y})\;\delta x\,dt] + m[(3\dot{y} - \dot{x})(\delta x)\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2}(3\ddot{y} - \ddot{x})\;\delta y\,dt] - mg\int_{t_1}^{t_2}\;\delta y\,dt = 0$$

$$\therefore m\int_{t_1}^{t_2}(-6\ddot{x} + \ddot{y})\;(\delta x)\,dt + m\int_{t_1}^{t_2}(\ddot{x} - 3\ddot{y} - g)\;(\delta y)\,dt = 0$$

وهذه العلاقة تنطبق بشرط أن الكميات تحت علامات التكامل تساوي صفراً (وذلك لأن الإزاحات $\delta x, \delta y$ هي إزاحات إختيارية)، وبذلك نحصل على:

$$m(-6\ddot{x} + \ddot{y}) = 0 \quad , \quad m(\ddot{x} - 3\ddot{y} - g) = 0$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بإستخدام معادلات لاجرانج.

وهو المطلوب.