

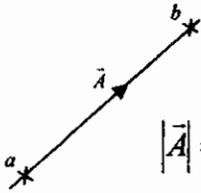
## الباب الأول

## جبر المتجهات

**تعريف:** تعرف الكميات الطبيعية بأنها الكميات التي نستخدمها في حياتنا اليومية، وهي نوعان:

- (١) كميات قياسية (عددية): تتميز بالمقدار فقط. مثل: الكتلة، الزمن، درجة الحرارة.
- (٢) كميات متجهة (متجهات): تتميز بالمقدار والاتجاه. مثل: الإزاحة، السرعة، القوة.

**تمثيل المتجه:** يمثل المتجه بخط مستقيم يصل بين نقطتين وطوله هو المسافة بين



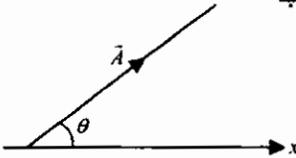
النقطتين  $\vec{A} = \vec{ab}$ .

ويشار إلى المتجه بالسهم المبين.

**مقدار المتجه:** هو طوله (أو قيمته العددية) ويكتب:  $|\vec{A}| = A = ab$

**اتجاه المتجه:** في المستوى يحدد الاتجاه بزاوية ميل المتجه

على محور  $x$  مثلاً.



**مجموع والفرق بين متجهين:**

**أولاً: المجموع:** مجموع متجهين  $\vec{A}, \vec{B}$

هو المتجه  $\vec{C}$  حيث:  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$  ويعرف أيضاً بمحصلة المتجهين.

بيانياً: نرسم المتجه  $\vec{A}$  وليكن  $\vec{ab}$

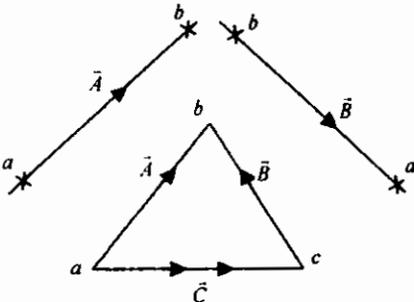
ومن نهايته نرسم موازياً للمتجه  $\vec{B}$

وليكن  $\vec{bc}$ ، ثم نوصل بداية  $\vec{A}$

بنهاية  $\vec{B}$  فنحصل على المجموع  $\vec{C}$

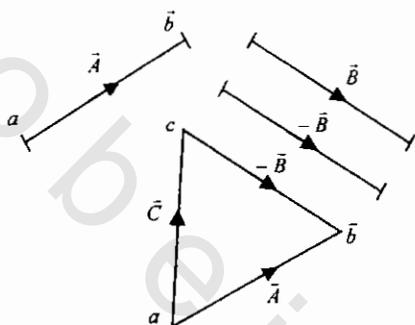
$$\vec{ac} = \vec{ab} + \vec{bc} \rightarrow \vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

يمسى المثلث  $abc$  بمثلث المتجهات.



ثانياً: الفرق: الفرق بين متجهين  $\vec{A}, \vec{B}$  هو المتجه  $\vec{C}$  حيث:

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



بيانياً: نرسم المتجه  $\vec{A}$

ومن نهايته نرسم موازياً للمتجه  $(-\vec{B})$

ثم نوصل بداية  $\vec{A}$  بنهاية  $(-\vec{B})$  فنحصل

على  $\vec{C}$  الذي هو محصلة

المتجهين  $(\vec{A}), (-\vec{B})$ .

متجه الوحدة: هو متجه مقداره يساوي الوحدة وإتجاهه هو

إتجاه المتجه الأصلي  $\vec{A}$ . ويرمز له  $\hat{a}$  (ويقرأ  $\hat{a}$ )

$|\hat{a}| = 1$  يقرأ أي المقدار أو القيمة العددية لـ  $\hat{a}$

العلاقة بين  $\vec{A}, \hat{a}$

$$\vec{A} = |\vec{A}| \hat{a} \rightarrow \hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

يكتب  $|\vec{A}|$  أيضاً  $A \leftarrow \hat{a} = \frac{\vec{A}}{A}$

متجهات الوحدة الأساسية:

$\hat{i}$  في إتجاه محور  $x$  ،  $\hat{j}$  في إتجاه محور  $y$

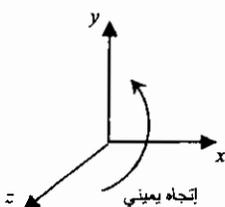
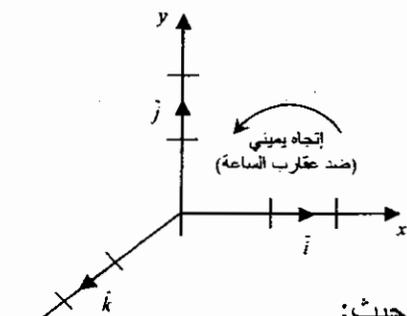
$\hat{k}$  في إتجاه محور  $z$

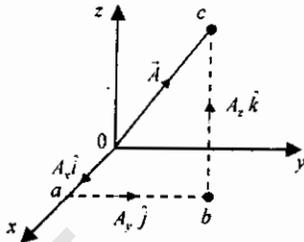
تعرف تلك المتجهات بمتجهات الوحدة الأساسية حيث:

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

ملحوظة: مجموعة المحاور الكرتيزية في الفراغ  $(xyz)$

هي مجموعة يمينية ويمكن رسمها بالصورة:





مركبات المتجه: المتجه  $\vec{A}$  له ثلاث مركبات هي عبارة

عن الكميات القياسية  $A_x, A_y, A_z$

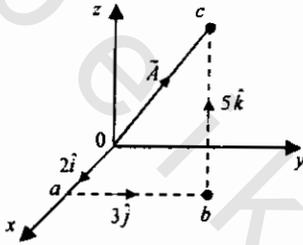
تحليلياً: نكتب المتجه بدلالة مركباته بالصورة:

$$\begin{aligned}\vec{A} = \vec{oc} &= \vec{oa} + \vec{ab} + \vec{bc} \\ &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}\end{aligned}$$

مثال: ارسم المتجه  $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$  بيانياً.

الحل: المتجه  $\vec{A}$  يمكن كتابته

بالصورة:



$$\vec{A} = \vec{oc} = \vec{oa} + \vec{ab} + \vec{bc}$$

حيث:  $\vec{oa} = 2\hat{i}$  (أي المركبة  $x$  للمتجه التي مقدارها 2 في اتجاه  $\hat{i}$ )

$\vec{ab} = 3\hat{j}$  (أي المركبة  $y$  للمتجه التي مقدارها 3 في اتجاه  $\hat{j}$ )

$\vec{bc} = 5\hat{k}$  (أي المركبة  $z$  للمتجه التي مقدارها 5 في اتجاه  $\hat{k}$ )

$$\therefore \vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

مقدار واتجاه متجه:

(1) في المستوى:  $\vec{A} \equiv (A_x, A_y)$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

مقداراً:

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$$

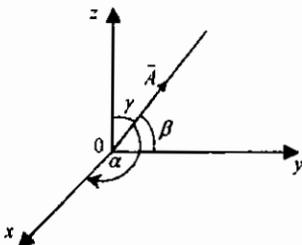
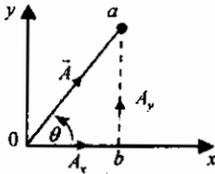
إتجاهاً:

(2) في الفراغ:  $\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

مقداراً:



اتجاهاً: يحدد اتجاه المتجه بالزوايا الثلاثة  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}, \quad \cos \beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}, \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|} \quad \text{حيث:}$$

$$\cos \alpha = l, \quad \cos \beta = m, \quad \cos \gamma = n \quad \text{جيوب تمام الاتجاه:}$$

أمثلة محلولة:

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$$

مثال (١): أثبت أن

وأن متجه الوحدة  $\hat{a}$  في اتجاه المتجه  $\vec{A}$  يمكن كتابته بالصورة:

$$\hat{a} = \ell \hat{i} + m \hat{j} + n \hat{k}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \ell^2 + m^2 + n^2 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \\ &= \frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2} \\ &= \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2} = \frac{A^2}{A^2} = 1 \end{aligned}$$

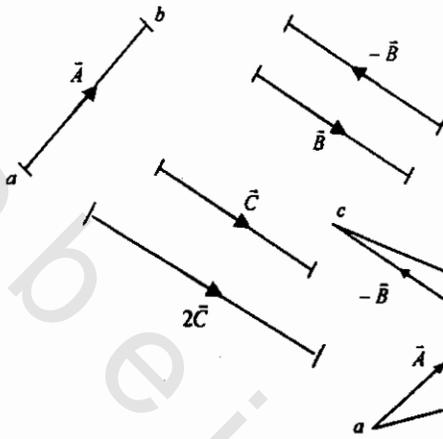
الجزء الثاني: من تعريف  $\hat{a}$ :

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \hat{i} + \frac{A_y}{|\vec{A}|} \hat{j} + \frac{A_z}{|\vec{A}|} \hat{k} \\ &= \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k} \\ &= \ell \hat{i} + m \hat{j} + n \hat{k} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): إذا أعطيت المتجهات  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  كما في الشكل كون المتجه

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C} \quad \text{بياناً .}$$



الحل: نرسم موازياً  $\vec{A}$  وليكن  $\vec{ab}$ .  
ومن نهايته  $b$  نرسم المتجه  $(-\vec{B})$   
وليكن  $\vec{bc}$  ومن نهايته  $c$  نرسم  
موازياً للمتجه  $(2\vec{C})$  وليكن  $\vec{cd}$ .  
ونصل نقطة البداية  $a$   
بنقطة النهاية  $d$   
فيكون هو المتجه  
 $\vec{D}$  المطلوب. حيث:

$$\vec{D} = \vec{A} + (-\vec{B}) + 2\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣) إذا كان :

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \quad \vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}, \quad \vec{C} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

أوجد: (١) المتجه  $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$  مقداراً واتجاهاً

(٢) المتجه  $\vec{G} = 2\vec{A} - 3\vec{B} - 5\vec{C}$  مقداراً واتجاهاً

الحل:

$$(1) \quad \vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) + (-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \\ = 4\hat{i} - 4\hat{j} + (0)\hat{k} = 4\hat{i} - 4\hat{j}$$

مقدار  $\vec{D}$ :

$$D = |\vec{D}| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

إتجاه  $\vec{D}$ :

$$\tan \theta = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \vec{G} &= 2\vec{A} - 3\vec{B} - 5\vec{c} \\
 &= 2(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) - 3(2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) - 5(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \\
 &= (6\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) - (6\hat{i} - 12\hat{j} - 9\hat{k}) - 5(-5\hat{i} + 10\hat{j} + 10\hat{k}) \\
 &= 5\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}
 \end{aligned}$$

مقدار  $\vec{G}$ :

$$G = |\vec{G}| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{30}$$

إتجاه  $\vec{G}$ : يتحدد بالزوايا الثلاثة:

$$\cos \alpha = \frac{G_x}{G} = \frac{5}{\sqrt{30}}, \quad \cos \beta = \frac{G_y}{G} = \frac{-2}{\sqrt{30}}, \quad \cos \gamma = \frac{G_z}{G} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

مثال (٤): إذا كانت

$$3\vec{A} + \vec{B} = 15\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} (1)$$

$$2\vec{A} + \vec{B} = 11\hat{i} + 4\hat{k}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} (2)$$

فأوجد  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  مقداراً وإتجاهاً.

الحل: من (1), (2) بالطرح:

$$\boxed{\vec{A} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} (3)$$

بالتعويض في (1):

$$\vec{B} = 15\hat{i} + 2\hat{j} - 3\vec{A}$$

$$= 15\hat{i} + 2\hat{j} - 3(4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k} \quad \underline{\hspace{2cm}} (4)$$

بالنسبة إلى  $\vec{A}$ : مقداراً

$$A = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = 6$$

إتجاهاً:

$$\cos \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

بالنسبة إلى  $\vec{B}$  : مقداراً

$$B = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (12)^2} = 13$$

إتجاهاً:

$$\cos \alpha = \frac{3}{13} , \quad \cos \beta = \frac{-4}{13} , \quad \cos \gamma = \frac{12}{13}$$

مثال(٥): أوجد متجه الوحدة الموازي لمحصلة (المجموع) المتجهين:

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} , \quad \vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

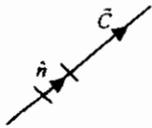
الحل: محصلة عدة متجهات هي مجموعها الإتجاهي:

محصلة  $\vec{A}, \vec{B}$ :

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) + (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \\ &= 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k} \end{aligned}$$

متجه الوحدة الموازي لـ  $(\vec{C})$  (أي في إتجاه  $\vec{C}$ ):

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2}} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{49}} \\ &= \frac{3}{7}\hat{i} + \frac{6}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k} \end{aligned}$$



مسألة: تحقق من أن  $\hat{n}$  هو عبارة عن متجه وحدة.

الحل: للتحقق من ذلك نثبت أن  $|\hat{n}| = 1$

$$|\hat{n}| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{36}{49} + \frac{4}{49}} = \sqrt{\frac{49}{49}} = 1$$

مثال(٦): ما هو المتجه الذي يجب إضافته إلى المتجهين:

$$\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k} \quad . \quad \vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

بحيث تكون محصلتهما هي متجه وحدة في إتجاه محور  $x$ .

الحل: محصلة  $\bar{A}, \bar{B}$ :

$$\bar{C} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) + (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

متجه الوحدة في اتجاه  $\hat{i} = x$

نفرض أن المتجه الذي يجب إضافته إلى  $\bar{C}$  لكي يعطي  $\hat{i}$  هو  $\bar{D}$ :

$$\bar{D} + \bar{C} = \hat{i} \rightarrow \bar{D} = \hat{i} - \bar{C} = -\hat{i} - (3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = -2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

مثال (٧): أثبت أن

$$|\bar{A} + \bar{B}|^2 + |\bar{A} - \bar{B}|^2 = 2|\bar{A}|^2 + 2|\bar{B}|^2$$

الحل:

$$\bar{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\therefore |\bar{A}|^2 = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\bar{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\therefore |\bar{B}|^2 = B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

$$|\bar{A} + \bar{B}|^2 = (A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2$$

$$= A_x^2 + 2A_x B_x + B_x^2 + A_y^2 + 2A_y B_y + B_y^2 + A_z^2 + 2A_z B_z + B_z^2 \quad (1)$$

$$|\bar{A} - \bar{B}|^2 = (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2$$

$$= A_x^2 - 2A_x B_x + B_x^2 + A_y^2 - 2A_y B_y + B_y^2 + A_z^2 - 2A_z B_z + B_z^2 \quad (2)$$

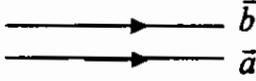
بجمع (1), (2):

$$|\bar{A} + \bar{B}|^2 + |\bar{A} - \bar{B}|^2 = 2A_x^2 + 2B_x^2 + 2A_y^2 + 2B_y^2 + 2A_z^2 + 2B_z^2$$

$$= 2(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) + 2(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = 2|\bar{A}|^2 + 2|\bar{B}|^2$$

## المتجهات المتوازية

يقال أن  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  متوازيان إذا كانت تربطها علاقة خطية



أي إذا كان  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ، حيث  $\lambda$  عدد قياسي:

$\lambda > 0$	$\lambda < 0$
$\vec{a} = \lambda \vec{b}$	$\vec{a} = -\lambda \vec{b}$
$\vec{a}$ ، $\vec{b}$ في إتجاهين متعاكسين	$\vec{a}$ ، $\vec{b}$ في إتجاهين متعاكسين

مثال: إذا كان لدينا للمتجهات الثلاثة:

$$\vec{a} = (15, -6, 24) ; \vec{b} = (5, -2, 8) ; \vec{c} = \left(-\frac{15}{2}, 3, -12\right)$$

فأثبت أن المتجهات الثلاثة متوازية، وأن  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  لهما نفس الإتجاه، بينما  $\vec{c}$ ، في اتجاهين متضادين.

الحل: نكتب المتجهات الثلاثة في الصورة الإتجاهية:

$$\vec{a} = 15\hat{i} - 6\hat{j} + 24\hat{k} ; \vec{b} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k} ; \vec{c} = -\frac{15}{2}\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k}$$

واضح أن هناك علاقات بين المتجهات الثلاثة:

$$\vec{a} = 3(5\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k}) = 3\vec{b} = \lambda \vec{b} \quad (1) \text{ علاقة بين } \vec{a}, \vec{b}$$

وهذا يعني أن  $\vec{a}$  يوازي  $\vec{b}$  وفي نفس الإتجاه ( $\lambda > 0$ ).

$$\vec{a} = -2\left(-\frac{15}{2}\hat{i} + 3\hat{j} + 12\hat{k}\right) = -5\vec{c} = \lambda \vec{c} \quad (2) \text{ علاقة بين } \vec{a}, \vec{c}$$

وهذا يعني أن  $\vec{a}$  يوازي  $\vec{c}$  وفي عكس الإتجاه ( $\lambda < 0$ ).

وحيث أن  $\vec{a}$  يوازي  $\vec{b}$ ،  $\vec{a}$  يوازي  $\vec{c}$  فإن المتجهات الثلاثة تكون متوازية.

**نظرية (١):** أثبت أنه إذا كان المتجهان  $\vec{a}, \vec{b}$  غير متوازيين فإن العلاقة:

$$x\vec{a} + y\vec{b} = 0 \text{ تستلزم أن يكون } x = 0, y = 0.$$

**الإثبات:** معنى أن  $\vec{a}, \vec{b}$  غير متوازيين هو:  $\vec{a} \neq \lambda \vec{b}$

في العلاقة المعطاة:  $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$  حيث  $\vec{a}, \vec{b}$  غير متوازيين.

**المطلوب:** إثبات أن  $x = 0, y = 0$ ، ولإثبات ذلك

نفرض عكس المطلوب: أي نفرض أن  $x \neq 0$

$$\therefore x\vec{a} = -y\vec{b} \rightarrow \vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b} = \lambda\vec{b}$$

وهذا يعني أن  $\vec{a}, \vec{b}$  متوازيان، وهو عكس المعطى في رأس المسألة، وإن

الفرض الذي فرضناه يكون خطأ ويكون الصح هو عكسه أي أن  $x = 0$  ومن ذلك

$$y\vec{b} = 0 \leftarrow y = 0, \text{ وهو المطلوب.}$$

**نظرية (٢):** إذا كان  $\vec{a}, \vec{b}$  متجهان غير متوازيين، وكان

$$x_1\vec{a} + y_1\vec{b} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$

$$\text{فإن: } x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

**الإثبات:** حيث أن:

$$x_1\vec{a} + y_1\vec{b} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$

$$\therefore (x_1 - x_2)\vec{a} + (y_1 - y_2)\vec{b} = 0$$

$$(x\vec{a} + y\vec{b}) = 0$$

ومن النظرية (١): فإن  $x = 0, y = 0$  (لأن  $\vec{a}, \vec{b}$  غير متوازيين)

$$x_1 - x_2 = 0 \rightarrow \therefore x_1 = x_2$$

$$y_1 - y_2 = 0 \rightarrow \therefore y_1 = y_2$$

وهو المطلوب.

## تطبيقات هندسية على المتجهات

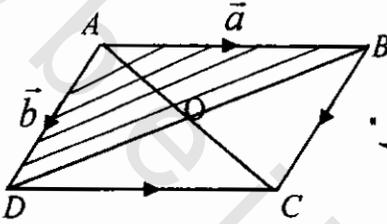
## [١] تطبيقات المتجهات في الهندسة الإقليدية:

يمكن استخدام المتجهات في إثبات بعض النظريات في الهندسة الإقليدية كما

في الأمثلة الآتية.

مثال (١): باستخدام المتجهات أثبت أن:

"قطراً متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر"



الإثبات:

نفرض أن القطرين  $AC, DB$  يتقاطعان عند  $O$ ، وأن:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{b}$$

القطر  $AC$ :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{--- (1)}$$

القطر  $DB$ :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}$$

$$\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b} \quad \text{--- (2)}$$

حيث:  $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DB}$ .

أيضاً: إذا كانت  $\lambda, \mu$  أعداد قياسية فإن:

$$\overrightarrow{AO} = \lambda(\overrightarrow{AC}) = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{DO} = \mu(\overrightarrow{DB}) = \mu(\vec{a} - \vec{b})$$

ومن  $\Delta AOD$  نجد أن:

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}$$

$$\therefore \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} + \mu(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\therefore (\lambda - \mu)\vec{a} = (1 - \mu - \lambda)\vec{b}$$

ولكن  $\vec{a}, \vec{b}$  متجهان غير متوازيان، فإن:  $\lambda - \mu = 0$  ;  $1 - \mu - \lambda = 0$

بحل المعادلتين:  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$

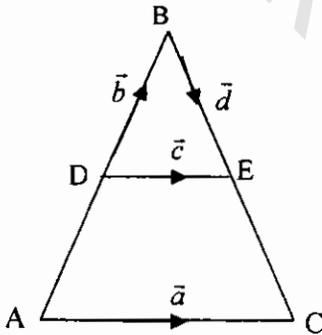
$$\therefore \vec{AO} = \lambda(\vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$\vec{DO} = \mu(\vec{DB}) = \frac{1}{2}\vec{DB}$$

أي أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر، وهو المطلوب.

**مثال (٢):** باستخدام المتجهات أثبت أن:

"المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه"



**الإثبات:**

في المثلث  $ABC$  المستقيم  $DE$

يصل بين منتصفي الضلعين  $AB, BC$

وبأخذ:

$$\vec{AC} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{DE} = \vec{c}, \vec{BC} = \vec{d}$$

نكون العلاقات الاتجاهية الآتية:

من الشكل

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\therefore \vec{a} = \vec{b} + \vec{d} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\vec{DE} = \vec{DB} + \vec{BE}$$

أيضاً:

$$\therefore \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) \quad \text{_____ (2)}$$

حيث:

$$\overline{DB} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\overline{BE} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \vec{d}$$

من (1)، (2) نحصل على:

$$\vec{c} = \frac{1}{2} \vec{a} \quad \text{_____ (3)}$$

$$|\vec{c}| = \frac{1}{2} |\vec{a}|$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AC \quad \text{_____ (4)}$$

$$\vec{c} = \lambda \vec{a}$$

ومن (3):

$$\therefore \vec{c} \parallel \vec{a} \quad \text{_____ (5)}$$

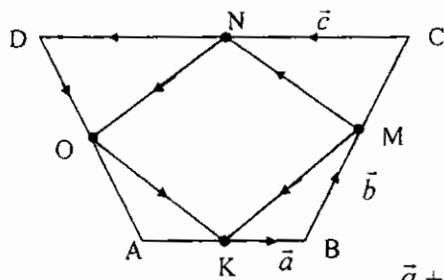
من (4)، (5) ينتج أن:

المستقيم  $DE$  الواصل بين منتصفي الضلعين  $AB, BC$  في المثلث  $ABC$  يوازي الضلع الثالث  $AC$  ويساوي نصفه في الطول. وهو المطلوب.

**مثال (3):** باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية:

"إذا وصلت منتصفات الأضلاع المتتالية لشكل رباعي بمستقيمات فإن الشكل

الرباعي الناتج يكون متوازي الأضلاع."



**الإثبات:**

إذا كان لدينا المتجهات الأربع  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$

تشكل مضلعاً مقللاً فإن:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0 \quad \text{_____ (1)}$$

وبفرض أن  $ABCD$  هو الشكل الرباعي المعطى، وأن  $K, M, N, O$  هي منتصفات أضلاعه المتتالية، فبتوصيل هذه المنتصفات بالمستقيمات المبينة بالشكل، وكتابة:

$$\overline{AB} = \vec{a}, \overline{BC} = \vec{b}, \overline{CD} = \vec{c}, \overline{DA} = \vec{d}$$

$$\overline{KB} = \frac{1}{2} \vec{a}, \quad \overline{BM} = \frac{1}{2} \vec{b} \quad \text{أيضاً فإن:}$$

ومن هندسة الشكل نجد أن:

$$\overline{KM} = \overline{KB} + \overline{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \text{___(2)}$$

$$\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CN} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{___(3)}$$

$$\overline{NO} = \overline{ND} + \overline{DO} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) \quad \text{___(4)}$$

$$\overline{OK} = \overline{OA} + \overline{AK} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a}) \quad \text{___(5)}$$

ومن (1):

$$(\vec{a} + \vec{b}) = -(\vec{c} + \vec{d}) \quad \text{___(6)}$$

$$(\vec{b} + \vec{c}) = -(\vec{a} + \vec{d}) \quad \text{___(7)}$$

بالتعويض من (6)، (7) في (2)، (3) واستخدام (4)، (5):

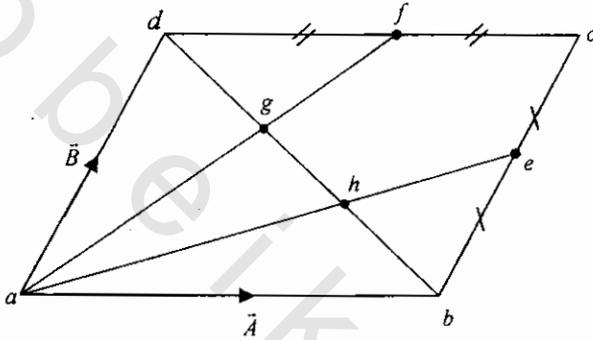
$$\therefore \overline{KM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) = -\overline{NO} = \overline{ON} \quad \text{___(8)}$$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{d}) = -\overline{OK} = \overline{KO} \quad \text{___(9)}$$

من (8)، (9) نجد أن:  $MN = KO$  (ويوازيه)،  $KM = ON$  (ويوازيه) وهذا يعني أن الشكل  $KMON$  هو متوازي أضلاع. وهو المطلوب.

مثال(٤): باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية:

" المستقيمان الواصلان من رأس متوازي الأضلاع إلى منتصف الضلعين المقابلين يقسمان القطر إلى ثلاثة أقسام متساوية".



الحل:

نفرض أن متوازي  $abcd$

أضلاع فيه  $e, f$  منتصفا

الضلعين  $bc, cd$

ولیکن  $\vec{ab} = \vec{A}$  ,  $\vec{ad} = \vec{B}$

والمطلوب إثبات أن:

$$\vec{hb} = \frac{1}{3}\vec{db} \quad , \quad \vec{dg} = \frac{1}{3}\vec{db}$$

$$dg = dh = hb$$

أي أن

من المثلث  $abe$ :

$$\vec{ae} = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} \quad \text{_____ (1)}$$

المتجه  $\vec{ah}$  في إتجاه المتجه  $\vec{ae}$  ولذلك فإن:

$$\vec{ah} = \lambda \vec{ae} = \lambda \left( \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} \right) \quad \text{_____ (2)}$$

حيث  $\lambda$  عدد قياسي:

بالمثل: فإن

$$\vec{db} = \vec{A} - \vec{B} \quad \text{_____ (3)}$$

$$\vec{hb} = \mu \vec{db} = \mu (\vec{A} - \vec{B}) \quad \text{_____ (4)}$$

حيث  $\mu$  عدد قياسي.

$$\vec{A} = \vec{ab} = \vec{ah} + \vec{hb} = \lambda \left( \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} \right) + \mu (\vec{A} - \vec{B}) \quad \text{من المثلث } abh$$

$$\therefore (\lambda + \mu - 1)\bar{A} + \left(\frac{\lambda}{2} - \mu\right)\bar{B} = 0 \quad \text{____(5)}$$

وحيث أن  $\bar{A}, \bar{B}$  متجهان غير متوازيين فإن:

$$\lambda + \mu - 1 = 0 \quad \text{____(6)}$$

$$\frac{\lambda}{2} - \mu = 0 \quad \text{____(7)}$$

من (7):

$$\lambda = 2\mu \quad \text{____(8)}$$

بالتعويض في (6):

$$2\mu + \mu - 1 = 0 \rightarrow \mu = \frac{1}{3} \quad \text{____(9)}$$

$$\therefore \lambda = \frac{2}{3} \quad \text{بالتعويض في (8):}$$

$$\therefore \bar{hb} = \mu \bar{db} = \frac{1}{3} \bar{db} \quad \text{____(10)}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\bar{dg} = \frac{1}{3} \bar{db} \quad \text{____(11)}$$

من (10), (11) نجد أن:  $hb = dg = gh$

أي أن المستقيمان الواصلان من رأس متوازي الأضلاع إلى منتصف الضلعين المقابلين يقسمان القطر إلى ثلاثة أقسام متساوية.

[٢] معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين معلوم متجهي موضعيهما:

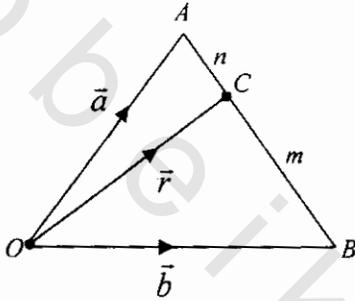
لإيجاد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين  $A, B$  اللذان متجهي موضعيهما  $\bar{a}, \bar{b}$

$$\bar{r} = \frac{m\bar{a} + n\bar{b}}{m + n} \quad \text{وذلك بالصورة:}$$

حيث  $\bar{r}$  متجه موضع أي نقطة على المستقيم ،  $m, n$  عدنان قياسيان .

**الإثبات:** يعرف متجه الموضع لأي نقطة بأنه المتجه الواصل من نقطة الأصل إلى

النقطة ، فبأخذ المستقيم المار بالنقطتين A,B اللذان متجهاً موضعهما  $\vec{a}, \vec{b}$  بالنسبة لنقطة الأصل O ، وأخذ المتجه  $\vec{r}$  هو متجه موضع أي نقطة C على المستقيم .



فمن المثلث OCA :

$$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$$

$$\therefore \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{r} - \vec{a} \quad \text{--- (1)}$$

ومن المثلث OAB :

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

$$\therefore \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a} \quad \text{--- (2)}$$

$$\vec{OB} = \vec{r} + \vec{CB} \quad \text{ولكن}$$

$$\therefore \vec{CB} = \vec{OB} - \vec{r} = \vec{b} - \vec{r} \quad \text{--- (3)}$$

وحيث أن  $\vec{AC}, \vec{CB}$  تقع على المستقيم AB فيكون لدينا علاقة خطية تربطهما معاً، وهذه العلاقة يمكن كتابتها بالصورة :

$$m\vec{AC} = n\vec{CB} \quad \text{--- (4)} \quad \rightarrow \quad \frac{AC}{CB} = \frac{n}{m}$$

حيث m,n عدنان قياسيان .

$$\therefore m(\vec{r} - \vec{a}) = n(\vec{b} - \vec{r})$$

بالتعويض من (3)، (1) في (4) :

$$\therefore (m+n)\vec{r} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

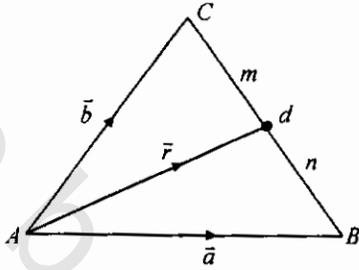
$$\therefore \vec{r} = \frac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m+n} \quad \text{--- (I)}$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة بالصورة :

$$m\vec{a} + n\vec{b} = (m+n)\vec{r} \quad \text{--- (II)}$$

وهو المطلوب .

ملاحظة هامة: من العلاقة (I) المذكور في البند السابق وهي:



$$\bar{r} = \frac{m\bar{a} + n\bar{b}}{m+n}$$

$$\therefore m\bar{a} + n\bar{b} = (m+n)\bar{r}$$

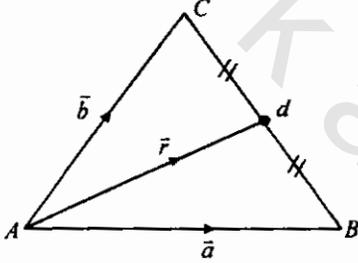
وهذا يعني إنه إذا كانت d تقسم CB بنسبة

$$\left(\frac{dc}{Bd} = \frac{m}{n}\right) m:n$$

وكانت  $\bar{AB} = \bar{a}$ ,  $\bar{AC} = \bar{b}$  وكان  $\bar{r}$  متجه موضع d فإن:

$$m\bar{a} + n\bar{b} = (m+n)\bar{r}$$

وكحالة خاصة:



إذا كانت d في منتصف CB فإن  $m = n$

$$\therefore m\bar{a} + n\bar{b} = (n+n)\bar{r}$$

$$\therefore \bar{a} + \bar{b} = 2\bar{r} \rightarrow \bar{AB} + \bar{AC} = 2\bar{Ad}$$

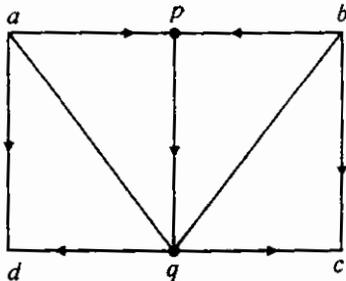
ونستخدم هذه العلاقة في حل كثير من المسائل.

أمثلة محلولة:

مثال (1): شكل رباعي فيه النقطة p منتصف الضلع ab والنقطة q

منتصف الضلع cd، أثبت أن:  $\bar{ad} + \bar{bc} = 2\bar{pq}$

الحل: في الشكل apqd:



$$\bar{ad} = \bar{ap} + \bar{pq} + \bar{qd} \quad (1)$$

في الشكل pbcq:

$$\bar{bc} = \bar{bp} + \bar{pq} + \bar{qc} \quad (2)$$

وحيث أن p تقع في منتصف ab فإن:

$$\bar{ap} = -\bar{bp} \quad (3)$$

وحيث أن q تقع في منتصف cd فإن:

$$\overline{qd} = -\overline{qc} \quad \text{_____ (4)}$$

بجمع (1),(2) واستخدام (4), (3) نجد أن:

$$\begin{aligned} \overline{ad} + \overline{bc} &= \overline{ap} + \overline{bp} + 2\overline{pq} + \overline{qd} + \overline{qc} \\ &= -\overline{bp} + \overline{bp} + 2\overline{pq} - \overline{qc} + \overline{qc} = 2\overline{pq} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢):  $abcdef$  شكل سداسي منتظم مركزه  $g$  أثبت أن:

$$(i) \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ad} + \overline{ae} + \overline{af} = 3\overline{ad}$$

$$(ii) \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ae} + \overline{af} = 4\overline{ag}$$

الحل:

(أ) في المثلث  $ade$ :

$$\overline{ad} = \overline{ae} + \overline{ed}$$

ولكن:  $\overline{ed} = \overline{ab}$  (من داخل المسدس)

$$\therefore \overline{ad} = \overline{ae} + \overline{ab} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\overline{ad} = \overline{ac} + \overline{cd} \quad \text{في المثلث } acd$$

ولكن:  $\overline{cd} = \overline{af}$  (من خواص المسدس)

$$\therefore \overline{ad} = \overline{ac} + \overline{af} \quad \text{_____ (2)}$$

$$2\overline{ad} = \overline{ae} + \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{cf} \quad \text{بجمع (1), (2):}$$

وبإضافة  $\overline{ad}$  للطرفين نحصل على:

$$\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ad} + \overline{ae} + \overline{af} = 3\overline{ad} \quad \text{_____ (i)}$$

ثانياً: نصل  $cf, be$  فيتقابلان في  $g$  (مركز المسدس)

في المثلث  $abe$ :

$$(\text{حيث } eg = gb) \overline{ab} + \overline{ae} = 2\overline{ag} \quad \text{_____ (3)}$$

في المثلث  $acf$ :

$$\overline{ac} + \overline{af} = 2\overline{ag} \quad (4)$$

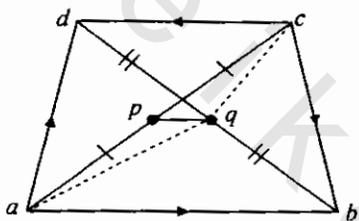
$$\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ae} + \overline{af} = 4\overline{ag}$$

بجمع (4), (3) نجد أن:

وهو المطلوب.

**مثال (3):**  $abcd$  شكل رباعي فيه  $p, q$  منتصفا  $ac, bd$  على الترتيب، أثبت أن:

$$\overline{ab} + \overline{ad} + \overline{cb} + \overline{cd} = 4\overline{pq}$$



**الحل:** نصل  $aq, cq$

في المثلث  $abd$ :

$$\overline{ab} + \overline{ad} = 2\overline{aq} \quad (1)$$

في المثلث  $cbd$ :

$$\overline{cb} + \overline{cd} = 2\overline{cq} \quad (2)$$

بجمع (2), (1) نحصل على:

$$\overline{ab} + \overline{ad} + \overline{cb} + \overline{cd} = 2(\overline{aq} + \overline{cq}) \quad (3)$$

ومن المثلث  $acq$ :

$$\overline{aq} + \overline{cq} = 2\overline{pq} \quad (4)$$

$$\overline{ab} + \overline{ad} + \overline{cb} + \overline{cd} = 2(2\overline{pq}) = 4\overline{pq}$$

بالتعويض من (4) في (3):

وهو المطلوب.

**مثال (4):** إذا كانت  $a', b', c'$  هي منتصفات أضلاع المثلث  $abc$  وكانت  $o$  نقطة

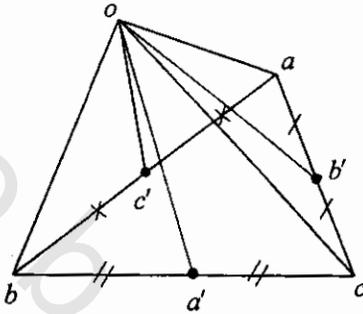
$$\overline{oa} + \overline{ob} + \overline{oc} = \overline{oa'} + \overline{ob'} + \overline{oc'}$$

إختيارية خارج المثلث، أثبت أن:

**الحل:** نصل  $a, b, c$  وكذلك  $a', b', c'$  بالنقطة  $o$

في المثلث  $oab$ :

$$\overline{oa} + \overline{ob} = 2\overline{oc'} \quad (1)$$



في المثلث  $obc$ :

$$\vec{ob} + \vec{oc} = 2\vec{oa'} \quad \text{_____ (2)}$$

في المثلث  $oca$ :

$$\vec{oc} + \vec{oa} = 2\vec{ob'} \quad \text{_____ (3)}$$

بجمع (1), (2), (3):

$$2(\vec{oa} + \vec{ob} + \vec{oc}) = 2(\vec{oa'} + \vec{ob'} + \vec{oc'})$$

$$\therefore \vec{oa} + \vec{ob} + \vec{oc} = \vec{oa'} + \vec{ob'} + \vec{oc'}$$

وهو المطلوب.

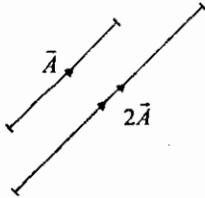
### ضرب المتجهات

(1) ضرب متجه في كمية قياسية (عدد):

متجه في اتجاه  $\vec{A}$  وقيمه  $\lambda$  مرة فتر  $\vec{A}$

$$(1) (\lambda + \mu) \vec{A} = \lambda \vec{A} + \mu \vec{A}$$

$$(2) \lambda(\vec{A} + \vec{B}) = \lambda \vec{A} + \lambda \vec{B}$$



(2) ضرب متجه في متجه:

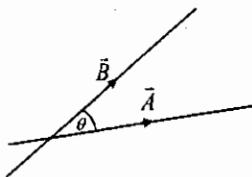
إذا كان لدينا المتجهان  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ، فيوجد نوعان من حواصل الضرب:

(أ) كمية قياسية  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  ويقراً:  $\vec{B} \cdot \vec{A}$  (حاصل الضرب القياسي).

(ب) كمية متجهة  $\vec{A} \wedge \vec{B}$  ويقراً:  $\vec{B} \text{ cross } \vec{A}$  (حاصل الضرب الإتجاهي).

أولاً: حاصل الضرب القياسي:

تعريف:



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = AB \cos \theta \quad \text{_____ (1)}$$

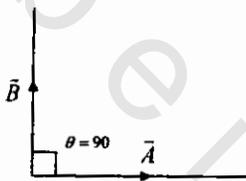
ملاحظات:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = BA \cos \theta = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (1) \quad \text{وذلك حيث أن:}$$

(2) الزاوية بين متجهين:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

(3) شرط تعامد متجهين:



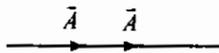
$$\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \theta = 0$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = 90^\circ = 0$$

$$\therefore \boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = 0}$$

(4) حاصل الضرب القياسي لمتجه  $\vec{A}$  في نفسه:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = (A)(A) \cos 0 = A^2 = |\vec{A}|^2$$

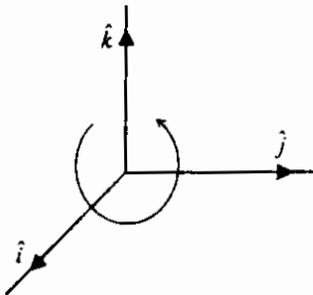


$$\therefore \boxed{\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2}$$

أمثلة محلولة:

مثال (1): أوجد حواصل الضرب التثائية القياسية لمتجهات الوحدة الأساسية  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ .

الحل:



$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 1 \times 1 \times \cos 90 = 0$$

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = 1 \times 1 \times \cos 90 = 0$$

$$\hat{k} \cdot \hat{i} = 1 \times 1 \times \cos 90 = 0$$



$$\therefore A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\therefore A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

وهو المطلوب.

**مثال(٤):** أوجد قيمة  $\lambda$  التي تجعل المتجهين

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}, \vec{B} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$$

متعامدين.

**الحل:** شرط تعامد متجهين:

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\therefore A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$$

$$\therefore (4) \times (2) + (-2) \times (\lambda) + (2) \times (1) = 0$$

$$8 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$10 = 2\lambda \quad \rightarrow \quad \boxed{\lambda = 5}$$

**مثال(٥):** إذا كان  $\vec{A}$  أي متجه فأثبت أنه يمكن كتابته بالصورة:

$$\vec{A} = (\vec{A} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{A} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{A} \cdot \hat{k})\hat{k}$$

**الحل:**

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad \text{_____ (1)}$$

لإثبات الصورة المعطاة يجب أن نثبت الآتي:

$$A_x = \vec{A} \cdot \hat{i}, \quad A_y = \vec{A} \cdot \hat{j}, \quad A_z = \vec{A} \cdot \hat{k}$$

من (1) بالضرب القياسي في  $\hat{i}$ :

$$\vec{A} \cdot \hat{i} = A_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_y (\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_z (\hat{k} \cdot \hat{i}) = A_x (1) = A_x$$

من (1) بالضرب القياسي في  $\hat{j}$ :

$$\vec{A} \cdot \hat{j} = A_x (\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + A_z (\hat{k} \cdot \hat{j}) = A_y (1) = A_y$$

من (1) بالضرب القياسي في  $\hat{k}$ :

$$\vec{A} \cdot \hat{k} = A_x(\hat{i} \cdot \hat{k}) + A_y(\hat{j} \cdot \hat{k}) + A_z(\hat{k} \cdot \hat{k}) = A_z(1) = A_z$$

$$\therefore \vec{A} = (\vec{A} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{A} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{A} \cdot \hat{k})\hat{k}$$

وهو المطلوب.

مثال(٦): أثبت أن المتجهات الثلاثة:

$$\vec{A} \equiv (3, -2, 1), \vec{B} \equiv (1, -3, 5), \vec{C} \equiv (2, 1, -4)$$

تكون أضلاع مثلث قائم الزاوية.

الحل: نكتب المتجهات الثلاثة في صورة إتجاهية

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{C} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

(١) نثبت أن هذه المتجهات تكون أضلاع مثلث:

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$$

بالنظر إلى المتجهات الثلاثة يتضح أن:

$$\vec{ab} = \vec{ac} + \vec{cb}$$

إذا المتجهات الثلاثة تكون أضلاع مثلث.

(٢) ولإثبات أن المثلث قائم الزاوية:

نوجد جواصل الضرب الممكنة للمتجهات  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= (3)(1) + (-2)(-4) + (1)(5) \\ &= 3 + 6 + 5 = 14 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore b \hat{a} c = \hat{a} \neq 90^\circ$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4)$$

$$= 2 - 3 - 20 = -21 \neq 0$$

$$\therefore \hat{c} \neq 90^\circ$$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = 6 - 2 - 4 = 0$$

[متعامدان  $\vec{A}, \vec{C}$ ]

$$\therefore \hat{b} = 90^\circ$$

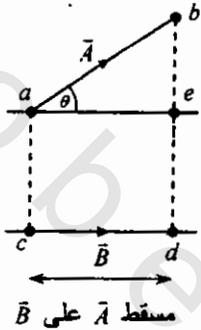
إذا المثلث  $abc$  قائم الزاوية في  $b$ . وهو المطلوب.

مسقط متجه على متجه آخر:

المسافة  $cd$  تمثل مسقط

المتجه  $\vec{A}$  على المتجه  $\vec{B}$

من الشكل:



$$cd = ae = ab \cos \theta$$

$$\text{Projection مسقط} \therefore p = |\vec{A}| \cos \theta \quad (1)$$

ولكن: من تعريف حاصل الضرب القياسي:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

$$p = |\vec{A}| \left[ \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \right] = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \vec{A} \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \vec{A} \cdot \hat{B} \quad \text{بالتعويض في (1):}$$

حيث  $\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$ . إذا مسقط  $\vec{A}$  على  $\vec{B}$   $\vec{A} \cdot \hat{B} = \vec{B}$

وبالمثل: مسقط  $\vec{G}$  على  $\vec{H}$   $\vec{G} \cdot \hat{H} = \vec{H}$ ، وهكذا.

مثال عددي: أوجد مسقط كلاً من المتجهين

$$\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \quad , \quad \vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

على الآخر، وكذلك الزاوية المحصورة بينهما.

الحل: مسقط  $\vec{A}$  على  $\vec{B}$   $p_1 = \vec{A} \cdot \hat{B} = \vec{B}$

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{1+9+25}} = \frac{\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{35}}$$

$$\begin{aligned}\therefore p_1 &= (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot \left( \frac{\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{35}} \right) \\ &= (2) \left( \frac{1}{\sqrt{35}} \right) + (1) \left( \frac{3}{\sqrt{35}} \right) + (1) \left( \frac{5}{\sqrt{35}} \right) \\ &= \frac{2+3+5}{\sqrt{35}} = \frac{10}{\sqrt{35}}\end{aligned}$$

أيضاً: مسقط  $\vec{B}$  على  $\vec{A} = \vec{B} \cdot \hat{A} = p_2$  حيث:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore p_2 = (\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot \left( \frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}} \right) = \frac{2+3+5}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

الزاوية المحصورة بين  $\vec{A}, \vec{B}$ :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \hat{A} \cdot \hat{B} \quad (1)$$

ملحوظة: بعض المراجع تكتب  $\frac{\vec{A}}{A} = \vec{a}, \frac{\vec{B}}{B} = \vec{b}$

$$\therefore \cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

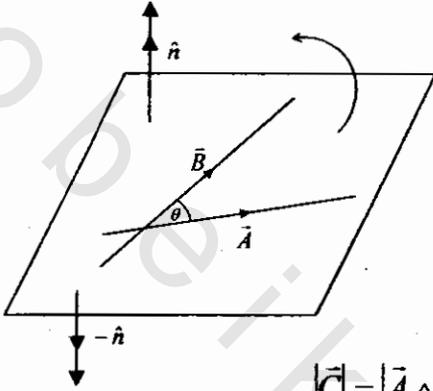
بالتعويض عن  $\hat{A}, \hat{B}$  في (1):

$$\begin{aligned}\therefore \cos \theta &= \left( \frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}} \right) \cdot \left( \frac{\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{35}} \right) \\ &= \frac{2+3+5}{\sqrt{6}\sqrt{35}} = \frac{10}{\sqrt{210}} = \frac{10}{14.49} = 0.69\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

**نتيجه:** حاصل الضرب الإتجاهي:

**تعريف:** إذا كان  $\vec{A}, \vec{B}$  متجهان بينهما زاوية  $\theta$  وكان  $\hat{n}$  متجه الوحدة في الإتجاه



العمودي على المستوى  $\vec{A}, \vec{B}$  بحيث أن  $\vec{A}, \vec{B}, \hat{n}$  تشكل منظومة يمينية فإن حاصل الضرب الإتجاهي يعرف بالعلاقة:

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (AB \sin \theta) \hat{n}$$

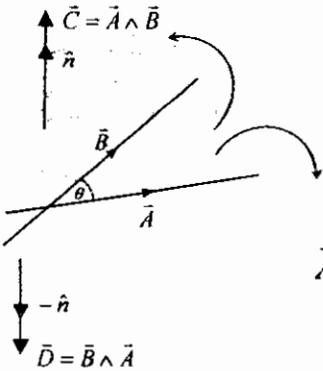
مقدار  $\vec{A} \wedge \vec{B}$ :

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \wedge \vec{B}| = |AB \sin \theta \hat{n}|$$

$$= |AB \sin \theta| |\hat{n}| = AB \sin \theta \quad , \quad |\hat{n}| = 1 \quad \text{حيث}$$

وتكون الزاوية بين  $\vec{A}, \vec{B}$ :

$$\sin \theta = \frac{|\vec{A} \wedge \vec{B}|}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$



**نتائج:**

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A} \quad (1)$$

**الإثبات:**

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = AB \sin \theta (\hat{n}) \quad (1)$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = BA \sin \theta (-\hat{n}) = -AB \sin \theta (\hat{n}) \quad (2)$$

من (1), (2)

$$\therefore \boxed{\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}}$$

**ملحوظة:** في حاصل الضرب القياسي فإن:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

(٢) شرط توازي متجهين:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \rightarrow |\vec{B} \wedge \vec{A}| = 0$$

الإثبات:

$$(\text{شرط التوازي}) \theta = 180^\circ, \theta = 0^\circ$$

$$\sin \theta = 0$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = AB \sin \theta = 0$$

ملحوظة: شرط التعامد:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$  (في حاصل الضرب القياسي).

(٣) حاصل الضرب الإتجاهي للمتجه  $\vec{A}$  في نفسه:

$$\theta = 0^\circ$$

$$\sin 0^\circ = 0$$

$$\vec{A} \wedge \vec{A} = AA \sin 0^\circ (\hat{n}) = \vec{0}$$

ملحوظة: في حاصل الضرب القياسي فإن:

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2}$$

أمثلة محلولة:

مثال (١): أوجد حواصل الضرب الإتجاهية لمتجهات الوحدة الأساسية.

الحل:

$$\left. \begin{aligned} \hat{i} \wedge \hat{i} &= 1 \times 1 \times \sin 0 \times (\hat{n}) = 0 \\ \hat{j} \wedge \hat{j} &= 1 \times 1 \times \sin 0 (\hat{n}) = 0 \\ \hat{k} \wedge \hat{k} &= 1 \times 1 \times \sin 0 (\hat{n}) = 0 \end{aligned} \right\} \text{_____ (1)}$$

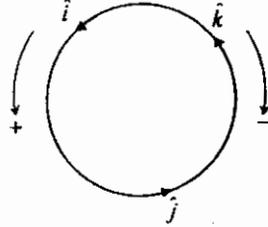
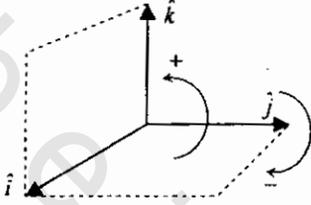
ونلاحظ أن: في حاصل الضرب القياسي تكون:

$$\boxed{\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1}$$

$\hat{i} \wedge \hat{j} = 1 \times 1 \times \sin 90 \times (\hat{n}) = \hat{k}$  ,  $(\hat{n} = \hat{k})$  أيضاً فإن:

$\hat{j} \wedge \hat{k} = 1 \times 1 \times \sin 90 \times (\hat{n}) = \hat{i}$  ,  $(\hat{n} = \hat{i})$

$\hat{k} \wedge \hat{i} = 1 \times 1 \times \sin 90 \times (\hat{n}) = \hat{j}$  ,  $(\hat{n} = \hat{j})$



ونلاحظ أن:

$\hat{j} \wedge \hat{i} = -\hat{i} \wedge \hat{j} = -\hat{k}$

$\hat{k} \wedge \hat{j} = -\hat{j} \wedge \hat{k} = -\hat{i}$

$\hat{i} \wedge \hat{k} = -\hat{k} \wedge \hat{i} = -\hat{j}$

(في حاصل الضرب القياسي)  $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$

أيضاً:

**مثال (٢):** إذا كان  $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$  ,  $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$

فأثبت أن:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) - \hat{j}(A_x B_z - A_z B_x) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

$$= \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

الإثبات:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \wedge (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$= A_x B_x (\hat{i} \wedge \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \wedge \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \wedge \hat{k})$$

$$+ \dots\dots\dots$$



ثانياً: يمكن الحل بطريقتين:

نوجد  $(\vec{A} + \vec{B})$ ،  $(\vec{A} - \vec{B})$  ثم نضربهما إتجاهياً:

$$\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k} = \vec{C}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k} = \vec{D}$$

المطلوب: إيجاد  $\vec{C} \wedge \vec{D}$

$$\vec{C} \wedge \vec{D} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -20\hat{i} - 6\hat{j} - 22\hat{k}$$

الطريقة الثانية:

$$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{A} \wedge \vec{A} - \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{B} \wedge \vec{A} - \vec{B} \wedge \vec{B}$$

$$= 0 + \vec{B} \wedge \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{A} + 0 \quad | \quad \vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

$$= 2(\vec{B} \wedge \vec{A})$$

$$= 2(-10\hat{i} - 3\hat{j} - 11\hat{k})$$

$$= -20\hat{i} - 6\hat{j} - 22\hat{k}$$

وهو المطلوب.

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 + |\vec{A} \wedge \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \quad \text{مثال (٤): أثبت أن}$$

الحل: من التعريف فإن الطرف الأيسر يكون:

$$L.H.S. = |AB \cos \theta|^2 + |AB \sin \theta \hat{n}|^2$$

$$= A^2 B^2 \cos^2 \theta + A^2 B^2 \sin^2 \theta |\hat{n}|^2 \quad | \quad |\hat{n}|^2 = 1$$

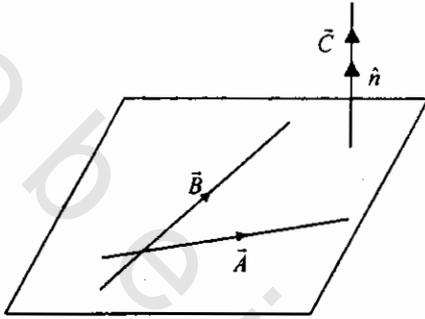
$$= A^2 B^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= A^2 B^2 = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 = R.H.S. = \text{الطرف الأيمن}$$

وهو المطلوب.

مثال (٥): أوجد متجه الوحدة العمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهين

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k} \quad , \quad \vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$



الحل: حيث أن  $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$

يكون عمودياً على المستوى الذي يحتوي  $\vec{A}, \vec{B}$ ، فإن متجه الوحدة المطلوب يكون في اتجاه  $\vec{C}$  أي:

$$\hat{n} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} \quad \text{--- (1)}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{(15)^2 + (10)^2 + (30)^2} = 35$$

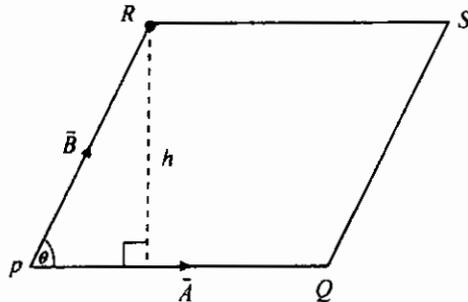
بالتعويض في (1):

$$\therefore \hat{n} = \frac{15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}}{35} = \frac{1}{7}(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

وهو المطلوب.

المعنى الهندسة لحاصل الضرب الاتجاهي  $(\vec{A} \wedge \vec{B})$

$|\vec{A} \wedge \vec{B}|$  يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه  $\vec{A}, \vec{B}$  ضلعان متجاوران.



**الحل:** نسقط الأرتفاع  $h$  من  $R$  على القاعدة فيكون:  $h = |\vec{B}| \sin \theta$

مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$\therefore S = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \sin \theta \quad \text{_____ (1)}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \hat{n} \quad \text{ولكن من التعريف:}$$

$$\therefore |\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \quad , \quad |\hat{n}| = 1 \quad \text{_____ (2)}$$

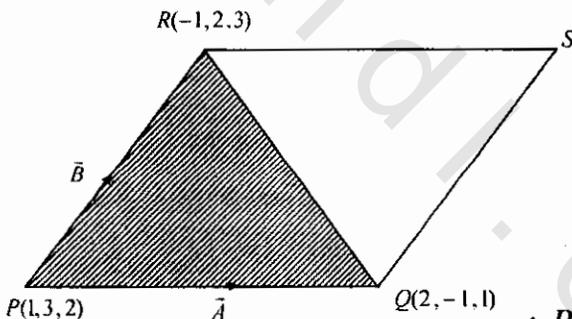
$$S = |\vec{A} \wedge \vec{B}| \quad \text{من (1), (2) نجد أن:}$$

وهو المطلوب.

**مثال تطبيقي:** باستخدام المعنى الهندسي لحاصل ضرب الإتجاهي أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط الآتية:

$$P(1,3,2) \quad , \quad Q(2,-1,1) \quad , \quad R(-1,2,3)$$

**الحل:**



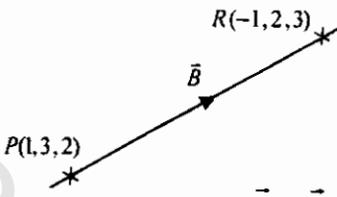
مساحة المثلث  $PRQ$  :

$$\Delta PRQ = \frac{1}{2} \text{مساحة } PRSQ = \frac{1}{2} |\vec{A} \wedge \vec{B}| \quad \text{_____ (1)}$$

لإيجاد  $\vec{A}, \vec{B}$  :

$$\begin{array}{c} \vec{A} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{P}(1,3,2) \quad \quad \quad \text{Q}(2,-1,1) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (2-1)\hat{i} + (-1-3)\hat{j} + (1-2)\hat{k} \\ &= \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k} \end{aligned}$$



$$\vec{B} = (-1-1)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (3-2)\hat{k}$$

$$= -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k}$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2 + (-9)^2} = \sqrt{107}$$

$$\Delta PRQ = \frac{1}{2} \sqrt{107} = 5.17$$

بالتعويض في (1):

وهو المطلوب.

### حواصل الضرب الثلاثية والرابعة

أولاً: حواصل الضرب الثلاثية:

قياسية  $(\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}))$  ، إتجاهية  $(\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}))$

ثانياً: حاصل الضرب الرباعي:

قياسية  $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D})$  ، إتجاهية  $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{D})$

ملخص لحواصل الضرب:

$\vec{A} \cdot \vec{B}$	ثنائي قياسي
$\vec{A} \wedge \vec{B}$	ثنائي إتجاهي
$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$	ثلاثي قياسي
$\vec{B} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$	ثلاثي إتجاهي
$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D})$	رباعي قياسي
$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{D})$	رباعي إتجاهي

أمثلة.

مثال (1): إذا كان

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}$$

فأثبت أن حاصل الضرب الثلاثي القياسي هو :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad \text{_____ (1)}$$

ملحوظة: حاصل الضرب الثنائي الإتجاهي

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

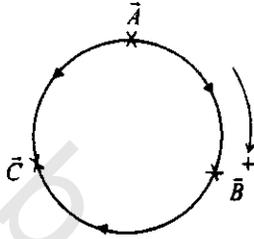
إثبات (1):

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \\ &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\ &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): أثبت أن حاصل الضرب القياسي  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$  يخضع للخاصية الدورية

الآتية:



$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

الحل: نستخدم خواص المحددات

(تغيير صف مكان صف يغير من إشارة المحدد)

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad \text{_____ (2)}$$

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad \text{_____ (3)}$$

من (1), (2), (3) ينتج المطلوب

$$\therefore \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

مسألة: أثبت أن تغيير مواضع علامتي  $\wedge$ , لا يغير من ناتج حاصل الضرب

الثلاثي القياسي، أي أثبات أن:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

الإثبات: من الخاصية الدورية

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A})$$

وهو المطلوب.

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0$$

ملحوظة: يمكن إثبات أن

الإثبات: من خواص المحددات

(تساوي صفين في محدد يجعل المحدد يساوي صفراً)

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 0$$

وهو المطلوب.

$$A_x \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - A_y \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + A_z \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = 0$$

المعنى الهندسي لحاصل الضرب  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$

إذا كانت المتجهات  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  تشكل جوانب متوازي مستطيلات فإن:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \text{حجم المتوازي}$$

الحل:

تمهيد (١):

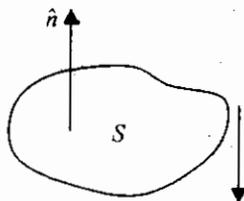
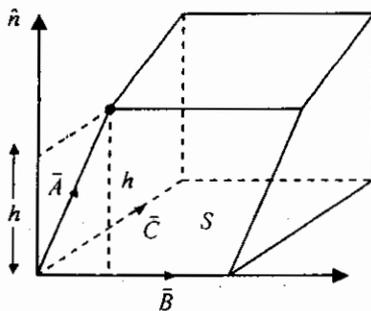
المساحة كمية متجهة أي تمثل بمتجه

$\vec{S}$  قيمته  $S$  وإتجاهه هو الإتجاه

العمودي على  $S$  أي في إتجاه متجه

$$\vec{S} = S \hat{n}$$

الوحدة  $\hat{n}$  بحيث



تمهيد (٢): مركبة أي متجه في إتجاه ما

تساوي حاصل الضرب القياسي للمتجه في

متجه الوحدة في هذا الإتجاه (مثال سابق).

فمثلاً: المركبة  $A_x$  للمتجه  $\vec{A}$  هي:

$$A_x = \vec{A} \cdot \hat{i}$$

لحل المثال: قاعدة متوازي المستطيلات يمثلها متوازي أضلاع فيه  $\vec{B}, \vec{C}$  ضلعان متجاوران، إذا مساحة القاعدة تساوي مساحة متوازي الأضلاع

$$S = |\vec{B} \wedge \vec{C}|$$

الارتفاع  $h$  يمثل بمستقيم عمودي على القاعدة  $S$  وهو في نفس الوقت مركبة المتجه  $\vec{A}$  في اتجاه العمودي على  $S$  أي أن اتجاه  $\hat{n}$ :

$$h = \vec{A} \cdot \hat{n}$$

حجم متوازي المستطيلات:

الارتفاع  $\times$  مساحة القاعدة  $= V$

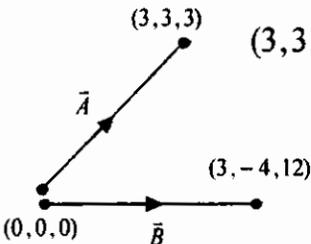
$$\begin{aligned} V &= S \times h = S(\vec{A} \cdot \hat{n}) = \vec{A} \cdot (S \hat{n}) \\ &= \vec{A} \cdot \vec{S} = \vec{A} \cdot (\hat{B} \wedge \hat{C}) \end{aligned}$$

طريقة أخرى:

$$\begin{aligned} V &= S \times h = |\hat{B} \wedge \hat{C}| \times (\vec{A} \cdot \hat{n}) \\ &= \vec{A} \cdot \{ |\hat{B} \wedge \hat{C}| \hat{n} \} = \vec{A} \cdot (\hat{B} \wedge \hat{C}) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال عددي: أوجد حجم متوازي المستطيلات الذي تحد أضلاعه الثلاثة المستقيمات الواصلة من نقطة الأصل إلى النقاط الثلاثة:



$$(3,3,3), (3,-4,12), (5,0,-12)$$

الحل: حجم متوازي المستطيلات

الذي أضلاعه هي  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

$$V = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

(1)

المطلوب إيجاد  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  :

$$\vec{A} = (3-0)\hat{i} + (3-0)\hat{j} + (3-0)\hat{k} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{B} = (3-0)\hat{i} + (-4-0)\hat{j} + (12-0)\hat{k} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$$

$$\vec{C} = (5-0)\hat{i} + (0-0)\hat{j} + (-12-0)\hat{k} = 5\hat{i} - 12\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} \equiv (3, 3, 3)$$

$$\vec{B} \equiv (3, -4, 12)$$

$$\vec{C} \equiv (5, 0, -12)$$

بالتعويض في (1)

$$V = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 12 \\ 5 & 0 & -12 \end{vmatrix} = 392$$

وهو المطلوب.

نظرية: الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتجهات الثلاثة  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  واقعة في

نفس المستوى هو:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0$$

الإثبات: اعتماداً على المعنى الهندسي لحاصل الضرب  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$  أنه يمثل حجم

متوازي المستطيلات التي تشكل  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  جوانبه.

إذا وقعت المتجهات الثلاثة  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  في مستوى واحد فإن حجم متوازي

المستطيلات الذي تشكل هذه المتجهات جوانبه يساوي صفراً

$$\therefore \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0$$

وبالعكس: إذا كانت  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0$  فهذا يعني أن حجم متوازي المستطيلات

الذي فيه  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  تشكل جوانبه يساوي صفراً أي أن  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  يجب أن تقع في

المستوى. وهو المطلوب.

مثال عددي: أوجد قيمة الثابت  $\lambda$  التي تجعل المتجهات الثلاثة

$$\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \quad \vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{k}, \quad \vec{C} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$$

تقع في مستوى واحد

الحل: شرط أن تقع المتجهات الثلاثة  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  في مستوى واحد هو أن يكون :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = 0$$

بفك المحدد نجد أن:

$$\lambda = \frac{5}{3}$$

وهو المطلوب.

أمثلة على حاصل الضرب الثلاثي الإتجاهي  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$

مثال (1): أثبت أن حاصل الضرب الثلاثي الإتجاهي للمتجهات  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  يعطي بالعلاقة الآتية:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

الحل: نكتب  $\vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{D}$  حيث:

$$\vec{D} = (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \hat{i}(B_y C_z - B_z C_y) + \hat{j}(B_z C_x - B_x C_z) + \hat{k}(B_x C_y - B_y C_x) \\ &= \hat{i} D_x + \hat{j} D_y + \hat{k} D_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \vec{A} \wedge \vec{D} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ (B_y C_z - B_z C_y) & (B_z C_x - B_x C_z) & (B_x C_y - B_y C_x) \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}[A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z)] + \hat{j}[\dots] + \dots \\ &= \hat{i}[(A_y C_y + A_z C_z) B_x - (A_y B_y + A_z B_z) C_x] + \hat{j}[\dots] + \dots \end{aligned}$$

بإضافة  $(A_x B_x C_x - A_x B_x C_x)$  إلى الطرف الأيمن:

$$\begin{aligned} \therefore \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \hat{i}[(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) B_x - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) C_x] + \hat{j}[\dots] \\ &= \hat{i}[(\vec{A} \cdot \vec{C}) B_x - (\vec{A} \cdot \vec{B}) C_x] + \hat{j}[\dots] \end{aligned}$$

إذا المركبة  $x$  لحاصل الضرب  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$  هي:

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C}) B_x - (\vec{A} \cdot \vec{B}) C_x$$

وبالمثل بالنسبة للمركبة  $y$ :

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C}) B_y - (\vec{A} \cdot \vec{B}) C_y$$

والمركبة  $z$ :

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C}) B_z - (\vec{A} \cdot \vec{B}) C_z$$

$$\therefore \boxed{\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): أثبت أن

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \neq (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$$

الحل:

$$L.H.S. = \bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\begin{aligned} R.H.S. &= (\bar{B} \wedge \bar{C}) \wedge \bar{A} = -\bar{C} \wedge (\bar{A} \wedge \bar{B}) \\ &= -[(\bar{C} \cdot \bar{B})\bar{A} - (\bar{C} \cdot \bar{A})\bar{B}] = (\bar{C} \cdot \bar{A})\bar{B} - (\bar{C} \cdot \bar{B})\bar{A} \\ &= (\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{B} \cdot \bar{C})\bar{A} \end{aligned} \quad \text{_____ (2)}$$

[حيث :  $\bar{C} \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot \bar{C}$  ,  $\bar{C} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{C}$  ]

من (1), (2) ينتج أن:

$$\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) \neq (\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge \bar{C}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣): إذا كان

$$\bar{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} , \bar{B} = -\hat{j} + \hat{k} , \bar{C} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) \neq (\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge \bar{C} \quad \text{فأثبت أن}$$

الحل: يمكن حل هذا المثال بطريقتين

أولاً: بتطبيق القانون، ثانياً: من المبادئ الأولية (يحلها الطالب)

الحل بالطريقة الأولى: باستخدام القانون

$$\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C}$$

$$\bar{A} \equiv (2, -3, 0) , \bar{B} \equiv (0, -1, 1) , \bar{C} \equiv (1, 1, 1)$$

$$\bar{A} \cdot \bar{C} = (2)(1) + (-3)(1) + (0)(1) = -1$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (2)(0) + (-3)(-1) + (0)(1) = 3$$

$$\therefore \bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) = -\bar{B} - 3\bar{C}$$

$$= -(-\hat{j} + \hat{k}) - 3(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = -3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k} \quad \text{_____ (1)}$$

أيضاً: باستخدام القانون (مثال (٢))

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge \bar{C} = (\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{B} \cdot \bar{C})\bar{A}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{C} = -1$$

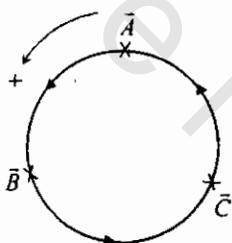
$$\bar{B} \cdot \bar{C} = (0)(1) + (-1)(1) + (1)(1) = 0$$

$$\therefore (\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge \bar{C} = -\bar{B} - 0(\bar{A}) = -\bar{B} = \hat{j} - \hat{k} \quad \text{_____ (2)}$$

$$\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) \neq (\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge \bar{C}$$

من (1), (2):

وهو المطلوب.



مثال(٤): أثبت صحة العلاقة الدورية لحاصل

الضرب الثلاثي الإتجاهي وصورتها:

$$\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) + \bar{B} \wedge (\bar{C} \wedge \bar{A}) + \bar{C} \wedge (\bar{A} \wedge \bar{B}) = 0$$

الحل: باستخدام القانون:

$$L.H.S. = (\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C}$$

$$+ (\bar{B} \cdot \bar{A})\bar{C} - (\bar{B} \cdot \bar{C})\bar{A} + (\bar{C} \cdot \bar{B})\bar{A} - (\bar{C} \cdot \bar{A})\bar{B}$$

$$= [(\bar{C} \cdot \bar{B}) - (\bar{B} \cdot \bar{C})]\bar{A} + [(\bar{A} \cdot \bar{C}) - (\bar{C} \cdot \bar{A})]\bar{B}$$

$$+ [(\bar{B} \cdot \bar{A}) - (\bar{A} \cdot \bar{B})]\bar{C} = 0$$

$$[\bar{C} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{C}, \bar{A} \cdot \bar{C} = \bar{C} \cdot \bar{A}, \bar{B} \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot \bar{B}] \quad \text{[حيث أن:}$$

وهو المطلوب.

مثال(٥): أثبت صحة العلاقة الآتية:

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{A}) = [\bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C})]^2$$

الحل: بوضع  $\bar{B} \wedge \bar{C} = \bar{D}$

$$\therefore \bar{D} \wedge (\bar{C} \wedge \bar{A}) = (\bar{D} \cdot \bar{A})\bar{C} - (\bar{D} \cdot \bar{C})\bar{A}$$

$$\therefore (\bar{B} \wedge \bar{C}) \wedge (\bar{C} \wedge \bar{A}) = (\bar{B} \wedge \bar{C} \cdot \bar{A})\bar{C} - (\bar{B} \wedge \bar{C} \cdot \bar{C})\bar{A}$$

$$= (\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C})\bar{C} - (\bar{B} \cdot \bar{C} \wedge \bar{C})\bar{A}$$

$$= (\bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C})\bar{C} \quad | \quad (\bar{B} \cdot \bar{C} \wedge \bar{C}) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore L.H.S. &= (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot [(\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C}) \vec{C}] & | & \vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \cdot \vec{C} \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C})(\vec{A} \wedge \vec{B} \cdot \vec{C}) \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C}) = [\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C}]^2 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال على حواصل الضرب الرباعي:

(أ) أثبت أن حاصل الضرب الرباعي القياسي يعطي بالعلاقة:

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})$$

(ب) أثبت أن حاصل الضرب الرباعي الإتجاهي يعطي بالعلاقة:

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{D}) = [(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{D}] \vec{C} - [(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}] \vec{D}$$

الحل: أولاً: نفرض أن  $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{G}$

$$\begin{aligned} L.H.S. &= \vec{G} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{G} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{D} = [(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}] \cdot \vec{D} \\ &= [(\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{A}] \cdot \vec{D} \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D}) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

ثانياً: نفرض أن  $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{G}$

$$\begin{aligned} L.H.S. &= \vec{G} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{G} \cdot \vec{D}) \vec{C} - (\vec{G} \cdot \vec{C}) \vec{D} \\ &= [(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{D}] \vec{C} - [(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}] \vec{D} \end{aligned}$$

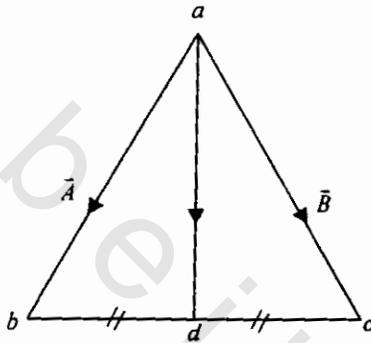
وهو المطلوب ثانياً.

تطبيق حاصل ضرب المتجهات في حل بعض المسائل في الهندسة المستوية

### وحساب المثلثات

يمكن استخدام حاصل ضرب المتجهات في إثبات بعض النظريات في الهندسة المستوية (الإقليدية) وحساب المثلثات كما في الأمثلة الآتية.

مثال (1): باستخدام خواص حاصل الضرب الثنائي القياسي، أثبت النظرية الهندسية الآتية: "المستقيم المنصف لقاعدة المثلث المتساوي الساقين يكون عمودياً على القاعدة"



القاعدة

الإثبات:

المثلث  $abc$  فيه  $ab = ac$

المستقيم  $ad$  ينصف القاعدة  $bc$

المطلوب: إثبات أن هذا المستقيم

يكون عمودياً على القاعدة، أي إثبات

أن  $\overline{ad} \perp \overline{bc}$  أي:  $\boxed{\overline{ad} \cdot \overline{bc} = 0}$

ولإثبات ذلك: نأخذ  $\overline{ab} = \vec{A}$  ,  $\overline{ac} = \vec{B}$  بحيث أن:  $|\vec{A}| = |\vec{B}| \leftarrow \boxed{A = B}$

من الرسم:

$$\overline{ad} = \overline{ab} + \overline{bd} = \vec{A} + \frac{1}{2}\overline{bc} \quad \text{_____ (1)}$$

ولكن:  $\overline{ac} = \overline{ab} + \overline{bc}$  (من المثلث  $abc$ )

$$\therefore \overline{bc} = \overline{ac} - \overline{ab} = \vec{B} - \vec{A} \quad \text{_____ (2)}$$

بالتعويض في (1):

$$\overline{ad} = \vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{B} - \vec{A}) = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) \quad \text{_____ (3)}$$

بضرب (2), (3) قياسياً:

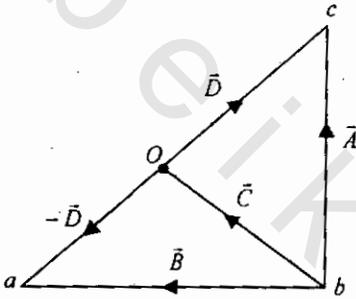
$$\overline{ad} \cdot \overline{bc} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = \frac{1}{2}[\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{A}]$$

ولكن:  $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$  ,  $\vec{B} \cdot \vec{B} = B^2$  ,  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

$$\therefore \vec{ad} \cdot \vec{bc} = \frac{1}{2}[B^2 - A^2] = 0 \quad (\text{لأن } A = B)$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): باستخدام خواص المتجهات، أثبت النظرية الهندسية الآتية  
"المستقيم الواصل من رأس القائمة في المثلث قائم الزاوية إلى منتصف الوتر يساوي نصف الوتر".



الإثبات: نرسم المثلث  $abc$  القائم الزاوية في  $b$   
والمطلوب: إثبات أن المستقيم  $bo$  للواصل  
من  $b$  إلى منتصف الوتر (نقطة  $O$ ) يساوي  
نصف الوتر أي:

$$bO = Oc$$

ولإثبات ذلك:

نأخذ  $\vec{bc} = \vec{A}$ ,  $\vec{ba} = \vec{B}$ ,  $\vec{bO} = \vec{C}$   
ولیکن  $\vec{OC} = \vec{D}$  أي أن:  $\vec{Oa} = -\vec{D}$   
من الرسم نجد أن:

$$\vec{A} = \vec{C} + \vec{D} \quad \text{(من المثلث } bcO \text{)} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \vec{C} + (-\vec{D}) = \vec{C} - \vec{D} \quad \text{(من المثلث } bOa \text{)} \quad (2)$$

وحيث أن المثلث  $abc$  قائم الزاوية في  $b$  فإن  $\vec{A}$  يكون عمودياً على  $\vec{B}$ .

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

بالتعويض من (1), (2) في (3):

$$(\vec{C} + \vec{D}) \cdot (\vec{C} - \vec{D}) = 0$$

$$\vec{C} \cdot \vec{C} - \vec{C} \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \vec{C} - \vec{D} \cdot \vec{D} = 0$$

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = C^2, \quad \vec{D} \cdot \vec{D} = D^2, \quad \vec{C} \cdot \vec{D} = \vec{D} \cdot \vec{C}$$

$$\therefore C^2 - D^2 = 0 \rightarrow C^2 = D^2 \rightarrow C = D$$

$$bO = Oc$$

أي أن :

وهو المطلوب.

مثال(3): باستخدام المتجهات، أثبت نظرية الهندسة الآتية

" الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة "

الحل: نأخذ  $O$  مركز الدائرة كنقطة أصل.

ولتكن  $B$  نقطة على محيط الدائرة

$$\text{المطلوب: إثبات أن } \hat{A}BC = \frac{\pi}{2}$$

ليكن  $r$  نصف قطر الدائرة حيث  $r = |\vec{a}| = |\vec{b}|$

وهنا  $\vec{a} = \vec{OA}$  ,  $\vec{b} = \vec{OB}$  , أيضاً فإن:  $\vec{OC} = -\vec{a}$

من الرسم نجد أن:

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

$$\therefore \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

(1)

أيضاً فإن:

$$\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$$

$$\therefore \vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{b} - (-\vec{a}) = \vec{b} + \vec{a}$$

(2)

ولإثبات أن  $\hat{A}BC = \frac{\pi}{2}$  نثبت أن  $\vec{AB}$  ,  $\vec{CB}$  متعامدان فمن (1), (2) بالضرب

القياسي نجد أن:

$$\vec{AB} \cdot \vec{CB} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \vec{a})$$

$$= \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a}$$

ولكن  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$  ,  $\vec{b} \cdot \vec{b} = b^2$  ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{CB} = b^2 - a^2 = 0$$

وذلك لأن  $a = b$  ،

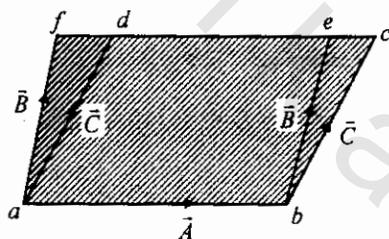
أي أن  $\overline{AB}, \overline{CB}$  متعامدان وبذلك فإن الزاوية

$$\hat{ABC} = \frac{\pi}{2}$$

وهو المطلوب.

**مثال (٤):** باستخدام المعنى الهندسي لحاصل الضرب الثنائي الاتجاهي، أثبت النظرية الهندسية الآتية:

"متوازي الأضلاع المرسومان على نفس القاعدة وبين نفس الخطين المتوازيين يكونان متساويان في المساحة".



**الإثبات:** متوازي الأضلاع

$abcd, abef$  مرسومان على

نفس القاعدة  $ab$  وبين الخطين

المتوازيين  $ab, fc$ .

والمطلوب: إثبات أن

$$\text{المثلث } abcd = \text{المثلث } abef$$

ولإثبات ذلك: نفرض أن

$$\overline{ab} = \overline{A}, \overline{bc} = \overline{C}, \overline{be} = \overline{B}$$

$$\overline{fd} = \lambda \overline{dc} = \lambda \overline{A} : \Delta afd$$

حيث  $\lambda$  عدد قياسي، (لأن  $\overline{fd}$  في إتجاه  $\overline{dc}$ )

ومن الرسم نجد أن:

$$\overline{ad} = \overline{af} + \overline{fd}$$

$$\overline{C} = \overline{B} + \lambda \overline{A}$$

(1)

بضرب (1) إتجاهياً في المتجه  $\overline{A}$ :

$$\overline{A} \wedge \overline{C} = \overline{A} \wedge \overline{B} + \lambda (\overline{A} \wedge \overline{A})$$

ولكن:  $\overline{A} \wedge \overline{A} = 0$

$$\therefore \vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \quad \underline{\hspace{2cm}} (2)$$

بأخذ مقياس (القيمة العددية) للطرفين:

$$|\vec{A} \wedge \vec{C}| = |\vec{A} \wedge \vec{B}| \quad \underline{\hspace{2cm}} (3)$$

ومن المعنى الهندسي لحاصل الضرب الإتجاهي فإن:

$|\vec{A} \wedge \vec{C}|$  يمثل مساحة متوازي الأضلاع  $abcd$ .

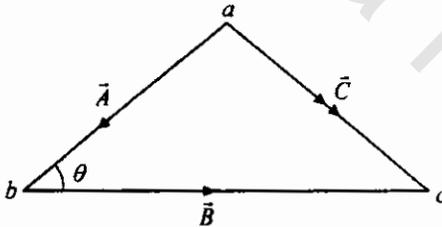
$|\vec{A} \wedge \vec{B}|$  يمثل مساحة متوازي الأضلاع  $abef$ .

من (3) نجد أن:

$$\square abcd = \square abef$$

وهو المطلوب.

**مثال (5):** أثبت قانون جيب التمام في حساب المثلثات المستوية.



**الإثبات:** المثلث  $abc$  حاد الزوايا وفيه

الزاوية  $\theta$  هي الزاوية بين  $ab, bc$ ،

فإذا كان  $\vec{ab} = \vec{A}$ ،  $\vec{bc} = \vec{B}$ ،  $\vec{ac} = \vec{C}$ ،

المطلوب: إثبات أن

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

(قانون جيب التمام)

حيث  $A = |\vec{A}|$ ،  $B = |\vec{B}|$ ،  $C = |\vec{C}|$

ولإثبات ذلك: في المثلث  $abc$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad \underline{\hspace{2cm}} (1)$$

بضرب (1) في نفسها قياسياً:

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$

$$C^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} = A^2 + B^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$$

(وذلك لأن:  $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$ ،  $\dots$ ،  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ )

وحيث أن:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$  ، فإن

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

وهو المطلوب.

حالة خاصة: إذا كانت  $\theta = 90^\circ \leftarrow \cos \theta = 0$

أي أن  $\vec{A}, \vec{B}$  يكونان متعامدان.

$$\therefore C^2 = A^2 + B^2$$

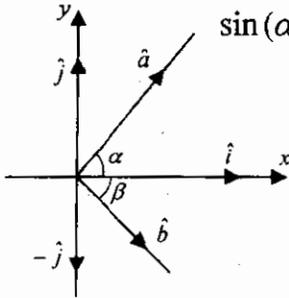
وهي نظرية فيثاغورث.

مثال (٦): باستخدام خواص حاصل ضرب القياسي والإتجاهي استنتج العلاقتين

المتلثتين الآتيتين:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



الإثبات: نأخذ متجهي وحدة  $\hat{a}, \hat{b}$  يصنعان

زاويتين  $\alpha, \beta$  مع محور  $x$  على الترتيب،

فتكون الزاوية بينهما  $(\alpha + \beta)$ .

فمن الرسم نجد أن:

$$\hat{a} = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j} \quad (1)$$

$$\hat{b} = \cos \beta \hat{i} - \sin \beta \hat{j} \quad (2)$$

(بتحليل  $\hat{a}, \hat{b}$  في إتجاهي  $x, y$ )

استنتاج العلاقة الأولى:

$$\begin{aligned} \hat{a} \cdot \hat{b} &= (\cos \alpha) (\cos \beta) + (\sin \alpha) (-\sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (3)$$

ومن تعريف حاصل ضرب القياسي:

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = (1) (1) \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta) \quad (4)$$

بمساواة (4), (3):

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

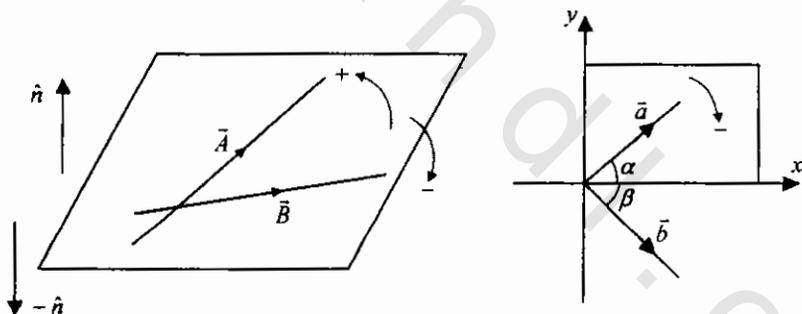
وهو المطلوب أولاً.

استنتاج العلاقة الثانية:

من (2), (1) بالضرب الإتجاهي:

$$\begin{aligned} \hat{a} \wedge \hat{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \beta & -\sin \beta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{k}(-\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) \\ &= -\hat{k}(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \end{aligned} \quad \text{_____ (5)}$$

ومن تعريف حاصل الضرب الإتجاهي:



$$\hat{a} \wedge \hat{b} = (1) (1) \sin(\alpha + \beta) (-\hat{k})$$

[حيث  $(-\hat{k})$  هو متجه الوحدة العمودي على  $\hat{a}, \hat{b}$  في الإتجاه اليساري]

$$\therefore \hat{a} \wedge \hat{b} = -\hat{k} \sin(\alpha + \beta) \quad \text{_____ (6)}$$

بمساواة (6), (5):

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

وهو المطلوب ثانياً.

## مسائل على جبر المتجهات

(١) إذا كان:  $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$  ,  $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$  ,  $\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  فأوجد:

(أ) المتجه  $\vec{G} = 2\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C}$  مقداراً وإتجاهاً.

(ب) متجه الوحدة الموازي للمتجه  $\vec{D} = 3\vec{A} - 2\vec{B} + 4\vec{C}$

(٢) (أ) أوجد قيمة  $\lambda$  التي تجعل المتجهين  $\vec{B} \equiv (4, -2, -2)$  ,  $\vec{A} \equiv (2, \lambda, 1)$  متعامدين.

(ب) أوجد متجهه الوحدة العمودي على كل من المتجهين

$$\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k} , \vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

(ج) أثبت أن المتجه  $\vec{A}$  يكون عمودياً على  $\vec{B}$  إذا كان:  $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$ .

(٣) إذا كان:  $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$  ,  $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$  فأوجد الآتي:

$$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B}) , (\vec{A} + 2\vec{B}) \wedge (2\vec{A} - \vec{B}) , (2\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} - 2\vec{B})$$

(٤) (أ) أوجد مسقط المتجه  $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$  على المتجه  $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ .

(ب) أوجد مسقط المتجه  $\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$  على المتجه الواصل بين النقطتين

$$. a = (-2, -4, 3) , b = (2, 3, -1)$$

(٥) (أ) أوجد المتجه الذي مقداره 5 وعمودي على المتجهين:

$$\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k} , \vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

(ب) إذا كان  $\vec{A} = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 3\lambda\hat{k}$  ,  $\vec{B} = -\hat{j} + 4\lambda\hat{k}$  أوجد قيمة  $\lambda$  التي

تجعل المتجهين  $(\vec{A} - 2\vec{B})$  ,  $(2\vec{A} + \vec{B})$  متعامدين.

(٦) (أ) أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه هي النقاط

$$. (3, -1, 2), (1, -1, -3), (4, -8, 1)$$

(ب) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أضلاع متجاورة هي

$$\vec{A} = 5\hat{i} - 2\hat{j}, \quad \vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \quad \vec{C} = 3\hat{i} + 2\hat{k}$$

(٧) (أ) أثبت أن المتجهين  $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ,  $\vec{B} = -6\hat{i} + 9\hat{j} + 3\hat{k}$  يكونان متوازيان.

(ب) إذا كان  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ ، فأثبت أن  $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{C} \wedge \vec{A}$

(ج) أثبت العلاقة الآتية:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) + (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot (\vec{a} \wedge \vec{d}) + (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot (\vec{b} \wedge \vec{d}) = 0$$

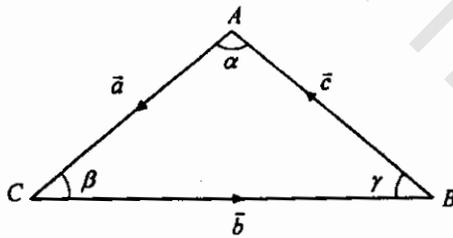
(٨) (أ) باستخدام المتجهات أثبت قانون الجيب في حساب المثلثات المستوية.

(ب) باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية:

محصول المتجهات الممثلة بواسطة المستقيمات المتوسطة للمثلث تساوي صفراً.

حل المسألة (٨):

الجزء (أ): إذا كان



$$AB = |\vec{a}| = a$$

$$BC = b$$

$$CA = c$$

وكان المتجهات الثلاثة  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  في ترتيب دوري واحد فإن:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \quad (1)$$

بضرب (1) إتجاهياً في  $\vec{a}$  واعتبار أن  $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$ ،  $\vec{a} \wedge \vec{c} = -\vec{c} \wedge \vec{a}$

$$\therefore \vec{a} \wedge \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} = 0 \rightarrow \therefore \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a} \quad (2)$$

بضرب (1) إتجاهياً في  $\vec{c}$  واعتبار أن  $\vec{c} \wedge \vec{c} = 0$ ،  $\vec{c} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{c}$

$$\therefore \vec{c} \wedge \vec{a} + \vec{c} \wedge \vec{b} + \vec{c} \wedge \vec{c} = 0 \rightarrow \therefore \vec{c} \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{c} \quad (3)$$

من (2), (3):  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{c} \wedge \vec{a}$  وبأخذ المقياس:

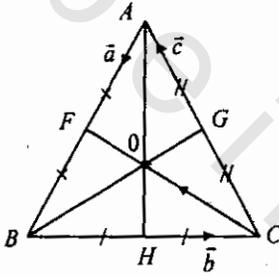
$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{b} \wedge \vec{c}| = |\vec{c} \wedge \vec{a}|$$

$$\therefore ab \sin \beta = bc \sin \gamma = ca \sin \alpha \rightarrow \frac{\sin \beta}{c} = \frac{\sin \gamma}{a} = \frac{\sin \alpha}{b}$$

بالقسمة على  $abc$

$$\therefore \frac{\sin \alpha}{b} = \frac{\sin \beta}{c} = \frac{\sin \gamma}{a}$$

وهو قانون الجيب.



الجزء (ب): المستقيمات المتوسطة (أو متوسطات المثلث) هي المستقيمات الواصلة بين منتصفات الأضلاع والرؤوس المقابلة، وهي تتلاقى في نقطة واحدة تسمى المركز المتوسط للمثلث.

المطلوب: إثبات أن محصلة المتوسطات  $\overline{AH}$ ,  $\overline{BG}$ ,  $\overline{CF}$  تساوي صفراً، أي:

$$\overline{AH} + \overline{BG} + \overline{CF} = 0$$

الإثبات: نأخذ  $\Delta ABC$  فيه:  $\overline{AB} = \vec{a}$ ,  $\overline{BC} = \vec{b}$ ,  $\overline{CA} = \vec{c}$

فمن الشكل ومن خواص المتجهات:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0 \rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \quad (1)$$

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overline{BH} = \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overline{CG} = \frac{1}{2}\vec{c} \quad \text{ومن تعريف المتوسطات:}$$

$$\therefore \overline{AH} = \overline{AB} + \overline{BH} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad (2)$$

$$\overline{BG} = \overline{BC} + \overline{CG} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \quad (3)$$

$$\overline{CF} = \overline{CA} + \overline{AF} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} \quad (4)$$

$$\therefore \overline{AH} + \overline{BG} + \overline{CF} = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0 \quad \text{بالجمع واستخدام (1):}$$

وهو المطلوب.