الباب الثاني

الاستاتيكا المستوية

تعريف علم الاستاتيكا: هو أحد فروع علم الميكانيكا الذي ندرس فيه القوى المؤثرة على الأجسام الساكنة وذلك من حيث خواصها وإتزانها وطرق التعامل معها، ... إلخ.

تعريف القوة $(\vec{F})$: هي كمية متجهة تعرف بأنها المؤثر الذي يغير من حالة الجسم من حيث السكون أو الحركة المنتظمة.

أنواع القوى:

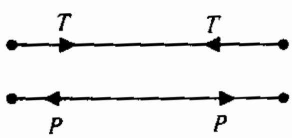
(١) قوة الجاذبية

(٢) قوة التلامس بين جسمين (قوة رد الفعل)

(٣) قوة الإحتكاك بين جسمين خشنين

(٤) قوة الشد في الخيوط (T)

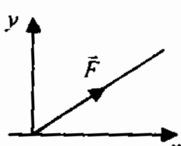
(٥) قوة التضاغط في القضبان (p)



أنواع القوى:

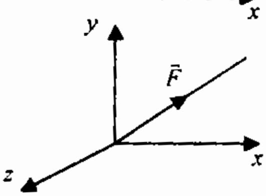
(١) مستوية: تؤثر في المستوى.

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$$



(٢) فراغية: تؤثر في الفراغ.

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$



وسوف ندرس في هذا الباب القوى المستوية المؤثرة على الأجسام وهو ما يعرف بالاستاتيكا المستوية. ونتناول فيه عدد من الموضوعات هي:

(١) محصلة القوى المستوية.

(٢) عزوم القوى.

(٣) مجموعات القوى المستوية غير المتلاقية.

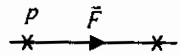
(أ) القوى المتوازية، (ب) الإزدواجات

(٤) مجموعات القوى المتكافئة – إختزال مجموعات القوى.

أولاً: محصلة القوى المستوية

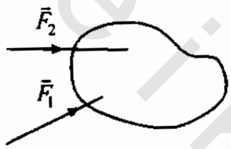
تعريفات هامة

(١) خط عمل القوة: هو المستقيم الذي تؤثر فيه (أو تعمل فيه) القوة.



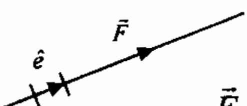
(٢) نقطة تأثير القوة: أي نقطة تقع على خط عمل القوة.

(٣) محصلة قوتين: هو قوة تحل محل القوتين ويكون تأثيرها على الجسم هو نفس تأثير القوتين.



رياضياً: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

(٤) مقدار القوة: هي القيمة العددية لها: $F = |\vec{F}|$

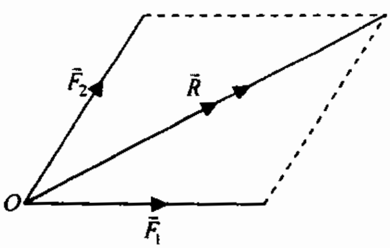


(٥) العلاقة بين $\vec{F}, F$:

إذا كان $\hat{e}$ متجه وحدة في إتجاه القوة فإن: $\vec{F} = F\,\hat{e}$

إيجاد محصلة قوتين:

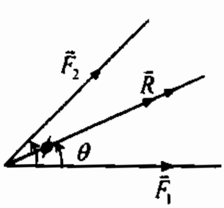
(١) بيانياً (قاعدة متوازي أضلاع القوى)



القوتان $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ خارجتان من نقطة O وتمثلان ضلعان متجاوران من متوازي أضلاع.

نكمل متوازي الأضلاع فتكون المحصلة هي قطر المتوازي الخارج من نقطة الالتقاء O.

(٢) تحليلياً (جبرياً):



ϕ زاوية بين $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

θ الزاوية بين $\vec{R}, \vec{F}_1$

مقدار المحصلة: $R = |\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos\phi}$

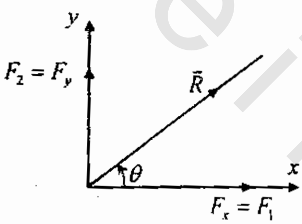
(قانون جيب التمام: $R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos\phi$)

إتجاه المحصلة: تعطي بالعلاقة

$$\tan\theta = \frac{F_2 \sin\phi}{F_1 + F_2 \cos\phi}$$

حالات خاصة:

(١) إذا كانت القوتان متعامدتان:

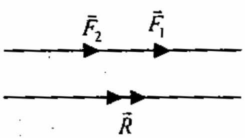


$$\phi = 90^\circ \begin{bmatrix} \sin 90 = 1 \\ \cos 90 = 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{F_2 \times 1}{F_1 + F_2 \times 0} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{F_y}{F_x}$$

(٢) إذا كانت القوتان في إتجاه واحد:



$$\phi = 0 \begin{bmatrix} \sin 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2$$

(المحصلة تساوي مجموع القوتين)

$$\tan\theta = \frac{F_2 \times 0}{F_1 + F_2 \times 1} = 0 \quad \to \quad \theta = 0$$

(المحصلة تكون في اتجاه القوتين).

أمثلة محلولة

مثال(١): أثبت أن محصلة قوتين متساويتين في المقدار $(F_1 = F_2 = F)$ هي: $R = 2F\cos\frac{\phi}{2}$ حيث ϕ هي الزاوية بين القوتين، وأن تلك المحصلة تنصف الزاوية ϕ.

الحل: المطلوب إثبات أن

مقدار المحصلة: $R = 2F\cos\frac{\phi}{2}$ واتجاهها: $\theta = \frac{\phi}{2}$

$$F_1 = F_2 = F$$

$$\therefore R = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F \times F\cos\theta} = \sqrt{2F^2 + 2F^2\cos\phi}$$

$$= \sqrt{2F^2(1+\cos\phi)}$$

$$= \sqrt{2F^2(2\cos^2\frac{\phi}{2})}$$

$$= \sqrt{4F^2\cos^2\frac{\phi}{2}}$$

$$= 2F\cos\frac{\phi}{2}$$

$$1 + \cos\phi = 2\cos^2\frac{\phi}{2}$$

$$\sin\phi = 2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$$

$$[\sin 2x = 2\sin x\cos x]$$

المطلوب الأول.

و<u>لإيجاد اتجاه المحصلة</u>: من القانون

$$\tan\theta \frac{F_2\sin\phi}{F_1 + F_2\cos\phi}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{F\sin\phi}{F + F\cos\phi} = \frac{F\sin\phi}{F(1+\cos\phi)}$$

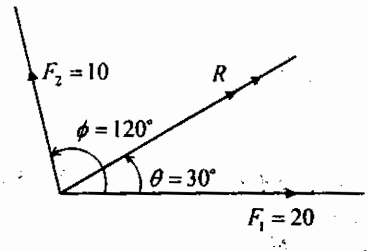
$$= \frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} = \frac{2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}}{2\cos^2\frac{\phi}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}} = \tan\frac{\phi}{2} \rightarrow \theta = \frac{\phi}{2}$$

وهو المطلوب الثاني.

مثال(٢): قوتان مقدارهما 20,10 تؤثران في جسم، فإذا كانت الزاوية بينهما $\phi = 120^\circ$، أوجد محصلة القوتين مقداراً واتجاهاً.

الحل:



مقدار المحصلة:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\phi}$$
$$= \sqrt{(20)^2 + (10)^2 + 2\times 20\times 10\cos\cos 120^\circ}$$
$$= \sqrt{400 + 100 + 400(-\frac{1}{2})} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

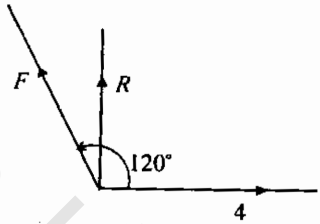
$$[\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \ , \ \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

ولإيجاد الاتجاه:

$$\tan\theta = \frac{F_2\sin\phi}{F_1 + F_2\cos\phi} = \frac{10\sin 120}{20 + 10\cos 120}$$
$$= \frac{10(\frac{\sqrt{3}}{2})}{20 + 10(-\frac{1}{2})} = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ \qquad [\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}]$$

مثال(٣): قوتان مقدارهما $4, F$ تؤثران في جسم، فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى، وكانت الزاوية بينهما $\phi = 120^\circ$ فأوجد مقدار القوة F.



الحل:

$\phi = 120^\circ \;,\; \theta = 90^\circ$

بتطبيق القانون:

$$\tan\theta = \frac{F_2 \sin\phi}{F_1 + F_2 \cos\phi}$$

$$\tan 90 = \frac{F \sin 120}{4 + F \cos 120} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

ولكن: $\boxed{\tan 90 = \infty}$ ، وأيضاً: $\boxed{\infty = \frac{a}{0}}$

فمن (1) نجد أن: $4 + F\cos 120 = 0$

$$\therefore 4 + F(-\frac{1}{2}) = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}F = 4 \;\rightarrow\; \boxed{F = 8}$$

مثال(٤): قوتان متعامدتان إحداهما $\frac{3}{4}$ الأخرى ومقدار محصلتهما تساوي 20، أوجد مقدار كل من القوتين، وإذا أصبح مقدار محصلتهما مساوياً $4\sqrt{13}$ فأوجد الزاوية بينهما في هذه الحالة.

الحل: نفرض القوتان هما: F_1, F_2 ، بحيث أن: $F_1 = \frac{3}{4}F_2$

إذاً يمكننا كتابة F_1, F_2 بالصورة الآتية:

$$F_1 = 3F \;\;,\;\; F_2 = 4F$$

$$[\frac{F_1}{F_2} = \frac{3F}{4F} = \frac{3}{4} \;\rightarrow\; F_1 = \frac{3}{4}F_2]$$

محصلة القوتان المتعامدتان تساوي 20

$$\therefore \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 20$$

$$\therefore \sqrt{(3F)^2 + (4F)^2} = 20 \;\rightarrow\; \sqrt{25F^2} = 20$$

$\therefore 5F = 20 \quad \rightarrow \quad F = \frac{20}{5} = 4$

$\therefore F_1 = 3\times 4 = 12 \quad , \quad F_2 = 4\times 4 = 16$

وهو المطلوب الأول.

المطلوب الثاني:

إذا أصبحت المحصلة = $4\sqrt{13}$ فإن الزاوية بين القوتين تصبح ϕ، فمن القانون:

$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos\phi} = 4\sqrt{13}$

بالتربيع:

$16\times 13 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\phi$

$= (12)^2 + (16)^2 + 2\times 12\times 16\cos\phi$

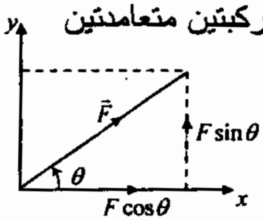
$\therefore 208 = 144 + 265 + 24\times 16\cos\phi$

$24\times 16\cos\phi = 208 - 400 = -192$

$\therefore \cos\phi = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \phi = 120^\circ$

وهو المطلوب ثانياً.

محصلة عدة قوى مستوية: أي قوة $\vec{F}$ يمكن تحليلها إلى مركبتين متعامدتين



(١) $F\cos\theta$ في اتجاه محور x.

(٢) $F\sin\theta$ في اتجاه محور y.

وتكتب القوة $\vec{F}$ اتجاهياً بالصورة:

$\vec{F} = (F\cos\theta)\hat{i} + (F\cos\theta)\hat{j}$

إذا كان لدينا أكثر من قوة (عدة قوى) مستوية:

$\vec{F}_1 = (F_1\cos\theta_1)\hat{i} + (F_1\sin\theta_1)\hat{j}$

$\vec{F}_2 = (F_2\cos\theta_2)\hat{i} + (F_2\sin\theta_2)\hat{j}$

$\vec{F}_3 = (F_3\cos\theta_3)\hat{i} + (F_3\sin\theta_3)\hat{j}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

وتكون المحصلة:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$$
$$= (F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 + \cdots)\hat{i} + (F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2 + \cdots)\hat{j}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}}$$

حيث:

$R_x = F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 + \cdots$ مركبة المحصلة في اتجاه x

$R_y = F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2 + \cdots$ مركبة المحصلة في اتجاه y

ويكون مقدار المحصلة:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

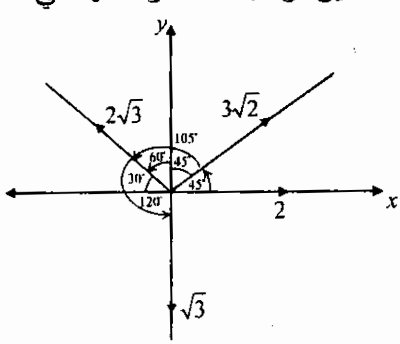
واتجاههما:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

أمثلة محلولة:

مثال(١): تؤثر القوى المستوية $2, 3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ في جسم ما، وكانت الزاوية بين القوتين الأولى والثانية هي $450°$ وبين الثانية والثالثة $105°$ وبين الثالثة والرابعة $120°$، أوجد محصلة هذه القوى مقداراً واتجاهاً.

الحل: نرسم القوى المعطاة مقاديراً واتجاهات، ونحللها في الاتجاهين x, y



$$R_x = 2 + 3\sqrt{2}\cos 45 - 2\sqrt{3}\cos 30$$

$$= 2 + 3\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}) - 2\sqrt{3}\,(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2$$

$$R_y = 3\sqrt{2}\sin 45 + 2\sqrt{3}\sin 30 - \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}) + 2\sqrt{3}(\frac{1}{2}) - \sqrt{3} = 3$$

إذاً المحصلة:

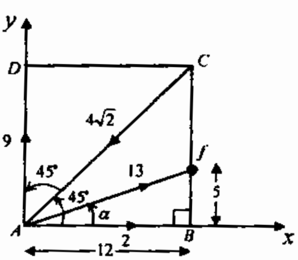
مقداراً $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

اتجاهاً $\theta^\circ = \tan^{-1}\frac{3}{2} \leftarrow \tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{3}{2}$

<u>مثال(٢):</u> $ABCD$ مربع طول ضلعه $12cm$، أخذت نقطة f على BC بحيث $Bf = 5cm$، فإذا أثرت قوى مقاديرها $2, 13, 4\sqrt{2}, 9$ في الأضلاع:

$$\overline{AB}\ ,\ \overline{Af}\ ,\ \overline{CA}\ ,\ \overline{AD}$$

على الترتيب فأوجد محصلة هذه القوى مقداراً واتجاهاً.



<u>الحل:</u>

نفرض أن القوة (13) المؤثرة في $\overline{Af}$ تعمل زاوية α مع محور x، فمن نظرية فيثاغورث في المثلث ABf

$$Af = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{12}{13}\ ,\ \sin\alpha = \frac{5}{13}$$

بتحليل القوى في الاتجاهين x, y:

$$R_x = 2 + 13\cos\alpha - 4\sqrt{2}\cos 45$$

$$= 2 + 13(\frac{12}{13}) - 4\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 10$$

$$R_y = 9 + 13\sin\alpha - 4\sqrt{2}\sin 45$$
$$= 9 + 13(\frac{5}{13}) - 4\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 10$$

إذاً المحصلة:

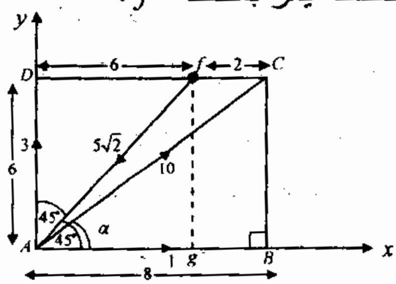
مقداراً: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{100+100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

اتجاهاً: $\tan\theta = \dfrac{R_y}{R_x} = \dfrac{10}{10} = 1$

$\therefore \theta = 45^\circ \quad [\tan 45^\circ = 1]$

وهو المطلوب.

مثال(٣): $ABCD$ مستطيل فيه $AB = 8cm$ ، $AD = 6cm$ ، أخذت نقطة f على DC بحيث أن $Df = 6cm$ فإذا أثرت قوى مقاديرها $1, 10, 5\sqrt{2}, 3$ في الأضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{Af}, \overline{AD}$ على الترتيب فأوجد محصلة هذه القوى مقداراً واتجاهاً، وأثبت أن خط عمل تلك المحصلة يمر بالنقطة f.



الحل:

نفرض أن AC يصنع زاوية α مع AB (محور x) حيث

$AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ (فيثاغورث)

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

وبالتحليل في اتجاهي x, y نحصل على:

$$R_x = 1 + 10\cos\alpha + 5\sqrt{2}\cos 45 = 1 + 10(\frac{4}{5}) + 5\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 14$$

$$R_y = 3 + 10\sin\alpha + 5\sqrt{2}\sin 45 = 3 + 10(\frac{3}{5}) + 5\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 14$$

إذاً المحصلة:

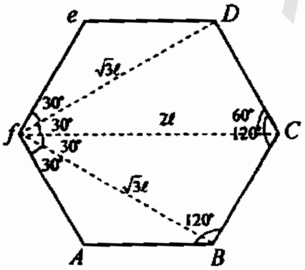
مقداراً: $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{(14)^2+(14)^2}=14\sqrt{2}$

اتجاهاً: $\tan\theta=\dfrac{R_y}{R_x}=\dfrac{14}{14}=1$

$\therefore\ \theta=45^\circ \qquad |\tan 45=1$

أي أن المحصلة تميل على AB (محور x) بزاوية 45° وهذا يعني أن المحصلة (أو خط عملها) يمر بنقطة f. وهو المطلوب.

مثال(٤): $ABCDef$ شكل سداسي منتظم (مسدس منتظم)، أثرت قوى مقاديرها: 1,2,3,4,5 في الأضلاع $\overline{fA},\overline{fB},\overline{fC},\overline{fD},\overline{fe}$ على الترتيب، أوجد محصلة هذه القوى مقداراً واتجاهاً.



الحل: تمهيد قبل حل المثال

خواص الشكل السداسي:

(١) الأضلاع الستة متساوية الطول.

(٢) كل ضلعين متقابلين متوازيين.

(٣) الزاوية بين أي ضلعين متجاورين = 120°.

(٤) طول المستقيم المرسوم بين رأسين غير متتالين = $\sqrt{3}\,\ell$ حيث ℓ هي طول ضلع المسدس، فمثلاً المسافة $fB=\sqrt{3}\,\ell$، المسافة $fD=\sqrt{3}\,\ell$

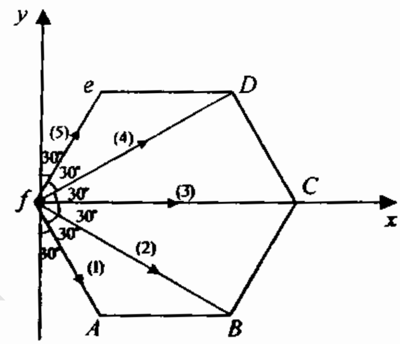
أيضاً: فإن المسافة fC تعطي من $fC=2\ell$.

ملاحظة: يجب ملاحظة النسب المثلثية الآتية

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 0=1 \qquad , \qquad \sin 0=0 \\ \cos 30=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60 \\ \cos 60=\dfrac{1}{2}=\sin 30 \end{array}}$$

$$\cos 90 = 0 \quad , \quad \sin 90 = 1$$
$$\cos 120 = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل المثال:



نحلل القوى في اتجاهي x, y:

$$R_x = 1\cos 60 + 2\cos 30 + 3 + 4\cos 30 + 5\cos 60 = 11.2$$
$$R_y = -1\sin 60 - 2\sin 30 + 4\sin 30 + 5\sin 60 = 4.5$$

ملحوظة: كان من الممكن كتابة R_y بدلالة الزاوية القريبة وذلك بالصورة:

$$R_y = -1\cos 30 - 2\cos 60 + 4\cos 60 + 5\cos 30 = 4.5$$

المحصلة:

مقداراً

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(11.2)^2 + (4.5)^2} = 12.1$$

اتجاهاً

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{4.5}{11.2} = 0.402$$

$$\therefore \theta = \cdots$$

إتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية

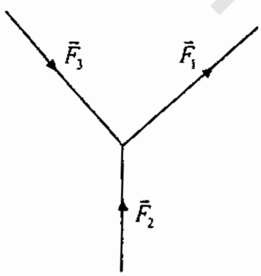
إذا وقع جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية وكانت محصلتها هي:

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$$

فإن شرط إتزان هذا الجسم تحت تأثير مجموعة القوى هو أن تتلاشى المحصلة، أي أن يكون:

$$\boxed{R_x = 0} \quad , \quad \boxed{R_y = 0}$$

<u>حالة خاصة</u>: إتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة.



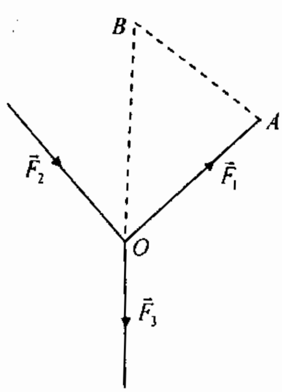
شرط الإتزان في هذه الحالة:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

ولحل المسائل الخاصة بهذا الموضوع لدينا قاعدتان هامتان

(١) **<u>قاعدة مثلث القوى</u>**: وتنص على الآتي

" إذا أثرت ثلاث قوى متلاقية في نقطة ورسم مثلث أضلاعه توازي خطوط عمل القوى (ويعرف بمثلث القوى)، فإن مقادير القوى تتناسب مع أطوال أضلاع المثلث".



<u>رياضياً</u>: القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ تلتقي في نقطة O

وبرسم المثلث OAB بحيث أن أضلاعه توازي خطوط عمل القوى

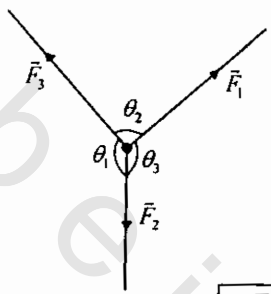
$\vec{F}_2 // \overline{AB}$ ، $\vec{F}_3 // \overline{OB}$ ، $\vec{F}_1 // \overline{OA}$

المثلث OAB هو مثلث القوى وتنص القاعدة على:

$$\boxed{\frac{F_1}{OA} = \frac{F_2}{AB} = \frac{F_3}{OB}}$$

(٢) **قاعدة لامي**: وتنص على الآتي

" إذا إتزنت ثلاث قوى متلاقية في نقطة فإن مقادير القوى تتناسب مع جيوب الزوايا المقابلة لها" .



رياضياً: إذا كانت الزاوية θ_1 تقابل $\vec{F}_1$

وكانت الزاوية θ_2 تقابل $\vec{F}_2$

وكانت الزاوية θ_3 تقابل $\vec{F}_3$

فإن قاعدة لامي تنص على:

$$\boxed{\frac{F_1}{\sin\theta_1}=\frac{F_2}{\sin\theta_2}=\frac{F_3}{\sin\theta_3}}$$

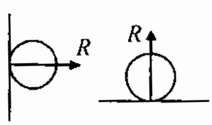
أمثلة محلولة

مثال(١): كرة منتظمة ملساء وزنها $100\,gm$ ونصف قطرها $30\,cm$ معلقة من نقطة على سطحها بأحد طرفي خيط خفيف طوله $50\,cm$ ومثبت طرفه الآخر في نقطة على حائط رأسي أملس، فبإعتبار وزن الكرة يؤثر في مركزها، أوجد الشد في الخيط ورد فعل الحائط على الكرة عند الإتزان.

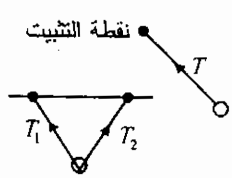
الحل: تمهيد: قبل حل المثال لاحظ الآتي:

(١) وزن الجسم هو عبارة عن قوة جذب الأرض لـه واتجاهه دائماً إلى أسفل.

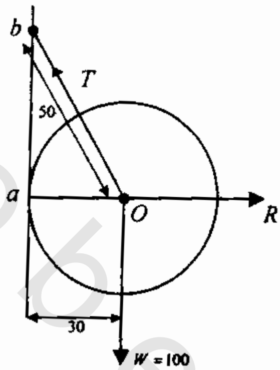
(٢) إذا استند جسم على جسم آخر فإن هذا الجسم يقابل الجسم الأول برد فعل (قوة) R.



(٣) إذا كان لدينا جسم معلق بخيط مثبت طرفه الآخر في نقطة ينتج لدينا شدة (T) في الخيط نحو نقطة التثبيت.



حل المثال:



الكرة تقع تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة O:

(١) الوزن 100 إلى أسفل.

(٢) رد فعل الحائط R.

(٣) الشد في الخيط T.

نلاحظ أن المثلث aob هو مثلث القوى حيث

الوزن 100 يقابله الضلع ab، رد الفعل R يقابله الضلع ao

الشد T يقابله الضلع ob

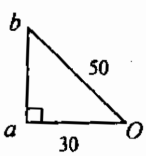
بتطبيق قاعدة مثلث القوى

$$\frac{100}{ab}=\frac{R}{ao}=\frac{T}{ob} \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

من هندسة الشكل:

$$ao=30 \quad , ob=50$$

ومن نظرية فيثاغورث:



$$ab=\sqrt{(50)^2-(30)^2}=40$$

بالتعويض في (1):

$$\frac{100}{40}=\frac{R}{30}=\frac{T}{50}$$

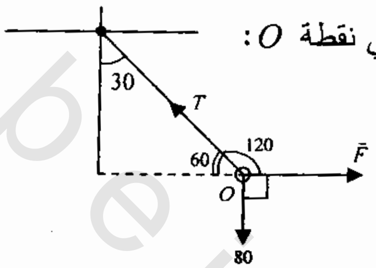
$$\therefore T=\frac{50\times 100}{40}=125$$

$$R=\frac{30\times 100}{40}=75$$

وهو المطلوب.

مثال(٢): علق ثقل مقداره 80 وحدة من طرف خيط خفيف مثبت طرفه الآخر في سقف حجرة، ثم جُذب الثقل بقوة أفقية فاتزن في وضع يميل فيه الخيط على الرأسي بزاوية قدرها 30°، عين مقدار كل من القوة الأفقية والشد في الخيط.

الحل: الثقل متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة O:



(١) الوزن 80 إلى أسفل.

(٢) القوة الأفقية F.

(٣) الشد في الخيط T

وهنا لا توجد أطوال بل زوايا فنطبق قاعدة لامي حيث الزاوية بين $F,80$ هي 90°، الزاوية بين $T,80$ هي 150° $(90+60)$، الزاوية بين T,F هي 120°.

بتطبيق قاعدة لامي:

$$\frac{80}{\sin 120}=\frac{T}{\sin 90}=\frac{F}{\sin 150}$$

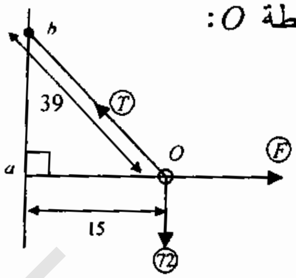
$$\therefore \frac{80}{\sqrt{3}/2}=\frac{T}{1}=\frac{F}{1/2} \qquad \begin{array}{|l} \sin 90 = 1 \\ \sin 120=\sqrt{3}/2 \\ \sin 150 = 1/2 \end{array}$$

$$\therefore F=80\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\simeq 46$$

$$T=\frac{1\times 80}{\sqrt{3}/2}=\frac{2\times 80}{\sqrt{3}}\simeq 92$$

وهو المطلوب.

مثال(٣): علق ثقل مقداره 72 وحدة في طرف خيط خفيف طوله $39cm$ مثبت طرفه الآخر في نقطة على حائط رأسي، ثم جذب الثقل بقوة أفقية فأتزن وهو علي بعد $15cm$ من الحائط، أوجد مقدار هذه القوة الأفقية وكذلك الشد في الخيط.



الحل: الثقل متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة O:

(١) الثقل 72 إلى أسفل.

(٢) القوة الأفقية F.

(٣) الشد في الخيط T.

نلاحظ أن المثلث aOb هو مثلث القوى حيث القوة F تمثل الضلع aO، القوة 72 تمثل الضلع ba، القوة T تمثل بالضلع Ob.

بتطبيق قاعدة مثلث القوى:

$$\frac{72}{ba}=\frac{F}{aO}=\frac{T}{Ob} \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

ومن هندسة الشكل:

$$aO=15\ ,\ Ob=39$$

ومن فيثاغورث:

$$ab=\sqrt{(39)^2-(15)^2}=36$$

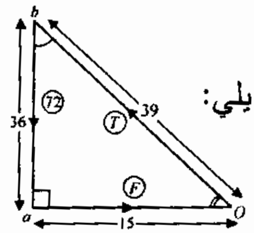
بالتعويض في (1):

$$\frac{72}{36}=\frac{F}{15}=\frac{T}{39}$$

$$\therefore F=\frac{15\times 72}{36}=30$$

$$T=\frac{39\times 72}{36}=78$$

وهو المطلوب.



ملحوظة: يمكن حل هذا المثال باستخدام قاعدة لامى كما يلي:

$$\frac{72}{\sin O}=\frac{F}{\sin b}=\frac{T}{\sin a}$$

ومن هندسة الشكل:

$$\sin\hat{a} = \sin 90 = 1$$

$$\sin\hat{O} = \frac{36}{39} \quad , \quad \sin\hat{b} = \frac{15}{39}$$

$$\therefore \frac{72}{36/39} = \frac{F}{15/39} = \frac{T}{1}$$

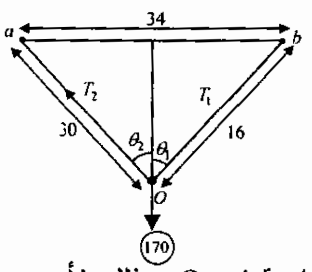
$$\therefore F = \frac{15/39 \times 72}{36/39} = \frac{15 \times 72}{36} = 30$$

$$T = \frac{1 \times 72}{36/39} = \frac{72 \times 39}{36} = 78$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): علق ثقل مقداره 170 وحدة بواسطة خيطين طوليهما $16cm$, $30cm$ مثبتين في نقطتين على خط أفقي واحد والبعد بينهما $34cm$، أوجد مقدار الشد في كل من الخيطين.

الحل: الثقل متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة O:



(١) الوزن 170 إلى أسفل

(٢) الشد T_1 في الخيط Ob

(٣) الشد T_2 في الخيط Oa

من هندسة الشكل: يمكن إثبات أن المثلث abO قائم الزاوية في O وذلك لأن

$$(30)^2 + (16)^2 = 1156$$

$$(34)^2 = 1156$$

$$\therefore (aO)^2 + (Ob)^2 = (ab)^2$$

وهذا يعني أن الزاوية $a\hat{O}b$ هي زاوية قائمة، إذاً الزاوية بين T_1, T_2 هي 90°.

أيضاً الزاوية بين $T_1, 170$ هي $(180-\theta_1)$، والزاوية بين $T_2, 170$ هي $(180-\theta_2)$

بتطبيق قاعدة لامي:

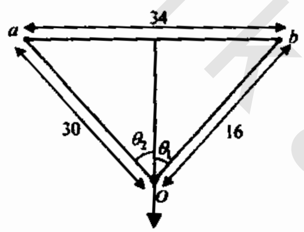
$$\frac{170}{\sin 90} = \frac{T_1}{\sin(180-\theta_2)} = \frac{T_2}{\sin(180-\theta_1)}$$

$$\therefore \frac{170}{1} = \frac{T_1}{\sin\theta_2} = \frac{T_2}{\sin\theta_1}$$

من الرسم: $\sin\theta_1 = \sin\hat{a} = \frac{16}{34}$, $\sin\theta_2 = \sin\hat{b} = \frac{30}{34}$

توضيح:

المثلث aOb قائم الزاوية في O



$$\therefore \sin a = \frac{16}{34}$$

$$\sin b = \frac{30}{34}$$

ولكن a متممه لـ θ_2، θ_1 متممه لـ θ_2

$\therefore \boxed{a = \theta_1}$

b متممه لـ θ_1، θ_2 متممه لـ θ_1

$\therefore \boxed{b = \theta_2}$

$$\therefore \frac{170}{1} = \frac{T_1}{30/34} = \frac{T_2}{16/34}$$

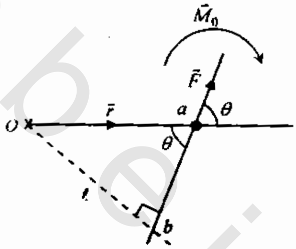
$$\therefore T_1 = \frac{30}{34} \times 170 = 150$$

$$T_2 = \frac{16}{34} \times 170 = 80$$

وهو المطلوب.

ثانياً: عزوم القوى

تعريفات أساسية:



تعريف(١): يعرف عزم قوة $\vec{F}$ بالنسبة لنقطة o بالمتجه

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

حيث $\vec{r}$ هي متجه موضع نقطة تأثير القوة

(النقطة a على خط عمل القوة).

تعريف(٢): إذا كانت θ هي الزاوية بين $\vec{r}, \vec{F}$ فإن ذراع العزم (ℓ) يعرف بأنه طول العمود الساقط من نقطة o على خط عمل القوة.

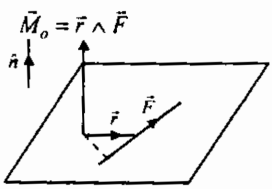
$$\ell = |\vec{r}| \sin\theta = r \sin\theta$$

$$[ob = oa \sin\theta]$$

تعريف(٣): يعرف مقدار متجه العزم بالعلاقة:

$$M_o = |\vec{M}_o| = |\vec{r} \wedge \vec{F}| = r\,F \sin\theta = F\,(r \sin\theta) = F\,\ell$$

أي أن مقدار العزم يساوي حاصل ضرب مقدار القوة في ذراع العزم:



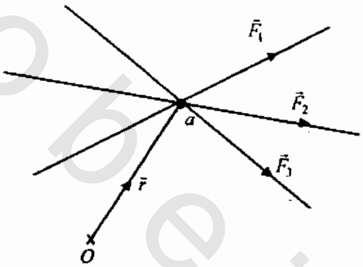
تعريف(٤): إيجاد إتجاه المتجه $\vec{M}_o$

المتجه $\vec{M}_o$ يكون في إتجاه العمودي على المستوى الذي يجمع $\vec{r}, \vec{F}$ فإذا كان $\hat{n}$ هو متجه وحدة في الإتجاه العمودي فإن:

$$\therefore\ \vec{M}_o = \vec{M}_0\,\hat{n} = (F\,\ell)\,\hat{n}$$

نظرية العزوم (نظرية فارينون):

" مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة حول نقطة o يساوي عزم المحصلة حول o".



الإثبات:

القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots$ هي عدة قوى متلاقية في نقطة a.

محصلة هذه القوى:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$$

تمر بنفس النقطة a

متجه موضع a: $\vec{r} = \overrightarrow{oa}$

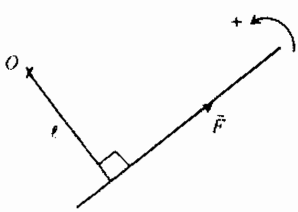
مجموع عزوم القوى حول o:

$$\vec{M}_o = \sum \vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}_1 + \vec{r} \wedge \vec{F}_2 + \vec{r} \wedge \vec{F}_3 + \cdots$$
$$= \vec{r} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots) = \vec{r} \wedge \vec{R}$$

إذاً مجموع عزوم القوى حول o = عزم المحصلة حول o.

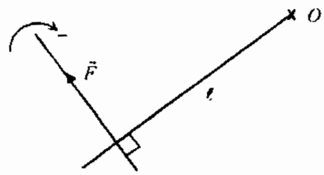
قاعدة الإشارات للعزوم:

عند إيجاد عزوم مجموعة من القوى المستوية يجب ملاحظة قواعد الإشارات التالية:

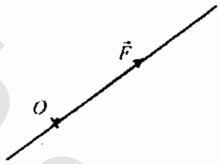


(١) إذا كانت القوة $\vec{F}$ تعمل على دوران الجسم ضد إتجاه عقارب الساعة: يكون العزم موجب:

$$M_o = +(F\,\ell)$$



(٢) إذا كانت القوى F تعمل على دوران الجسم مع عقارب الساعة: يكون العزم سالب: $M_o = -(F\,\ell)$

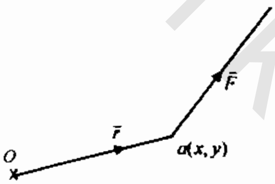


(٣) إذا كانت القوة تمر بالنقطة o (التي يؤخذ حولها العزم) فإن العزم يساوي صفراً.

ويعني ذلك أن:

إذا كان عزم قوة حول نقطة يساوي صفراً فإن خط عمل القوة يمر بتلك النقطة.

<u>إيجاد عزم قوة مستوية حول نقطة الأصل o:</u>



$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\,\hat{j}$$

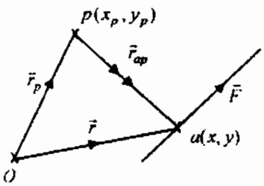
$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{M}_o = \vec{r}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (x F_y - y F_x)\,\hat{k}$$

ويكون مقدار العزم:

$$M_o = x F_y - y F_x = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

<u>إيجاد عزم قوة مستوية حول أي نقطة p غير نقطة الأصل:</u>



لإيجاد عزم $\vec{F}$ حول نقطة p:

متجه موضع p هو $\vec{r}_p$ حيث:

$$\vec{r}_p = x_p\,\hat{i} + y_p\,\hat{j}$$

أيضاً: فإن متجه موضع a هو:

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

متجه موضع a بالنسبة إلى p:

$$\vec{r}_{ap} = \vec{r} - \vec{r}_p$$

(من المتجهات $\vec{r} = \vec{r}_p + \vec{r}_{ap}$).

عزم $\vec{F}$ حول p:

$$\vec{M}_p = \vec{r}_{ap} \wedge \vec{F} = (\vec{r} - \vec{r}_p) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} - \vec{r}_p \wedge \vec{F} = \vec{M}_o - \vec{r}_p \wedge \vec{F}$$

ويكون مقدار العزم حول p:

$$\left|\left|\vec{r}_p \wedge \vec{F}\right|\right| = x_p F_y - y_p F_x \qquad M_p = M_o - (x_p F_y - y_p F_x)$$

حيث: $M_o = x F_y - y F_x$

<u>معادلة خط عمل المحصلة:</u> هي معادلة خط مستقيم (من الدرجة الأولى) ولها صورتان:

(١) <u>إذا كان العزم مأخوذ حول نقطة الأصل o</u> :

$$\boxed{M_o = x F_y - y F_x}$$

حيث (x, y) إحداثيات أي نقطة على خط عمل المحصلة.

(٢) <u>إذا كان العزم مأخوذ حول نقطة p</u> :

$$\boxed{M_p = M_o - (x_p F_y - y_p F_x)}$$

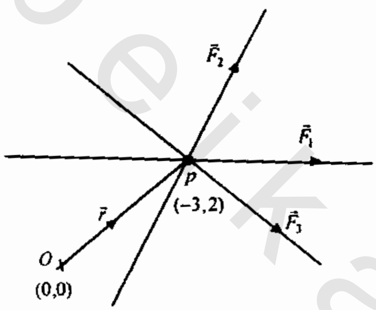
حيث (x_p , y_p) هي إحداثيات p.

أمثلة محلولة على عزوم القوى

مثال(١): تؤثر القوى المستوية الثلاث:

$\vec{F}_1 = 3\hat{i} + \hat{j} \quad , \vec{F}_2 = 2\hat{i} - 5\hat{j} \ , \vec{F}_3 = \hat{i} - 4\hat{j}$

في النقطة $p = (-3, 2)$ ، أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة الأصل o ثم أحسب طول العمود المرسوم من o على خط عمل محصلة هذه القوى.



الحل:

متجه موضع نقطة p:

$$\vec{r} = (-3 - o)\hat{i} + (2 - o)\hat{j}$$
$$= -3\hat{i} + 2\hat{j}$$

محصلة القوى:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$
$$= (3\hat{i} + \hat{j}) + (2\hat{i} - 5\hat{j}) + (\hat{i} - 4\hat{j}) = 6\hat{i} - 8\hat{j},$$

وهي تمر بالنقطة p

بتطبيق نظرية العزوم:

مجموع عزوم القوى حول o = عزم المحصلة حول o:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & -8 & 0 \end{vmatrix} = [24 - 12]\hat{k} = 12\hat{k}$$

وتكون قيمة العزم المطلوب $= \left|\vec{M}_o\right| = 12$

وإذا كان طول العمود المرسوم من o على خط عمل المحصلة هو ℓ فإن:

$$\left|\vec{M}_o\right| = \left|\vec{R}\right| \ell \quad , \quad [M_0 = R\,\ell]$$

$$\therefore \ell = \frac{M_o}{R} = \frac{12}{\sqrt{(6)^2+(8)^2}} = \frac{12}{\sqrt{36+64}} = \frac{12}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} = 1.2$$

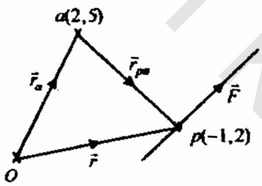
وهو المطلوب.

مثال(٢): القوة $\vec{F}=6\hat{i}+8\hat{j}$ تؤثر في النقطة $p=(-1,2)$ من جسم، المطلـــوب إيجاد الآتي:

(أ) عزم $\vec{F}$ حول نقطة الأصل o وحول النقطة $a=(2,5)$.

(ب) المركبة الجبرية للقوة $\vec{F}$ في إتجاه الخط $\overline{pa}$.

(ج) طول العمود الساقط من a على خط عمل القوة.



الحل:

$\vec{r}=-\hat{i}+2\hat{j}$ متجه موضع p

$\vec{r}_a=2\hat{i}+5\hat{j}$ متجه موضع a

متجه موضع p بالنسبة إلى a:

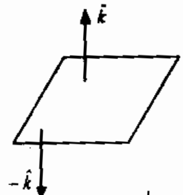
$$\vec{r}_{pa}=[-1-2]\hat{i}+[2-5]\hat{j}=-3\hat{i}-3\hat{j}=\overline{ap}$$

المطلوب الأول: عزم $\vec{F}$ حول o:

$$\vec{M}_o=\vec{r}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -1 & 2 & 0\\ 6 & 8 & 0\end{vmatrix}=[-8-12]\hat{k}=-20\hat{k}$$

وهذا يعني أن: قيمة العزم $=\left|\vec{M}_o\right|=20$

واتجاه العزم هو في اتجاه محور z إلى أسفل (إشارة −).



عزم $\vec{F}$ حول a:

$$\vec{M}_a=\vec{r}_{pa}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -3 & -3 & 0\\ 6 & 8 & 0\end{vmatrix}=[-24+18]\hat{k}=-6\hat{k}$$

وهذا يعني أن قيمة العزم = $\left|\vec{M}_a\right| = 6$

واتجاه العزم هو في اتجاه محور z إلى أسفل (إشارة −).

المطلوب الثاني:

حيث أن المتجه $\overrightarrow{ap}$ هو $(-3\hat{i}-3\hat{j})$، إذاً المتجه $\overrightarrow{pa}$ هو $(3\hat{i}+3\hat{j})$

ومن المتجهات: المركبة الجبرية لأي متجه $\vec{A}$ في إتجاه $\vec{B}$ هو:

$$A_B = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \vec{A}\cdot\hat{e}_B$$

حيث $\hat{e}_B = \dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$

فمثلاً: $A_x = \vec{A}\cdot\hat{i}\ ,\ A_y = \vec{A}\cdot\hat{j}\ ,\ \cdots$

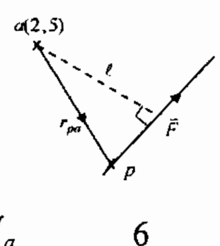
في المثال: المركبة الجبرية للقوة $\vec{F}$ في إتجاه $\overrightarrow{pa}$ ، $F_{pa} = \vec{F}\cdot\hat{e}_{pa}$

حيث $\hat{e}_{pa}$ هو متجه الوحدة في إتجاه $\overrightarrow{pa}$

$$\therefore\ \hat{e}_{pa} = \frac{\overrightarrow{pa}}{|\overrightarrow{pa}|} = \frac{3\hat{i}+3\hat{j}}{\sqrt{(3)^2+(3)^2}} = \frac{3\hat{i}+3\hat{j}}{3\sqrt{2}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}+\frac{\hat{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ F_{pa} = (6\hat{i}+8\hat{j})\cdot(\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}+\frac{\hat{j}}{\sqrt{2}}) = (6)(\frac{1}{\sqrt{2}})+(8)(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

المطلوب الثالث:



طول العمود الساقط من a

على خط عمل القوة هو ℓ حيث:

$$\left|\vec{M}_a\right| = \left|\vec{F}\right|\ell\ ,\quad [M_a = F\ell]$$

$$\therefore\ \ell = \frac{M_a}{F} = \frac{6}{\sqrt{(6)^2+(8)^2}} = \frac{6}{10} = 0.6$$

وهو المطلوب.

مثال(٣): تؤثر القوى المستوية الآتية في نقطة الأصل o

$$\vec{F}_1 = 4\hat{i} + \hat{j} \ , \ \vec{F}_2 = -2\hat{i} + 3\hat{j} \ , \ \vec{F}_3 = \hat{i} - 5\hat{j} \ , \ \vec{F}_4 = 3\hat{i} - 7\hat{j}$$

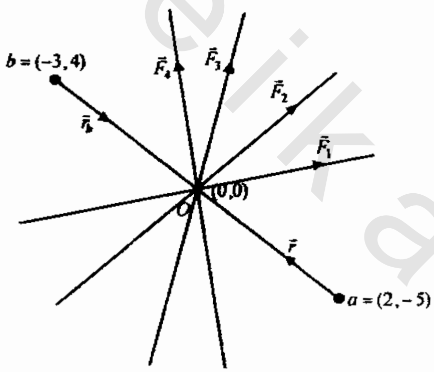
المطلوب:

(أ) إيجاد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة $a = (2,-5)$.

(ب) طول العمود المرسوم من a على خط عمل محصلة هذه القوى.

(ج) إثبات أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة $b = (-3,4)$.

الحل: محصلة القوى



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$
$$= 6\hat{i} - 8\hat{j}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_{oa} = [o-2]\hat{i} + [0-(-5)]\hat{j}$$
$$= -2\hat{i} + 5\hat{j}$$

من نظرية العزم (نظرية فـاريـنون):

مجموع عزوم القوى حول a = عزم المحصلة $\vec{R}$ حول a

$$\vec{M}_a = \vec{r} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 0 \end{vmatrix} = [16-30]\hat{k} = -14\hat{k}$$

وتكون قيمة العزم هي: $M_a = |\vec{M}_a| = 14$

المطلوب الثاني: طول العمود المرسوم من a على خط عمل المحـصلة هـو ℓ

حيث $M_a = R\,\ell$

$$\therefore \ \ell = \frac{M_a}{R} = \frac{14}{\sqrt{(6)^2 + (8)^2}} = \frac{14}{10} = 1.4$$

<u>المطلوب الثالث</u>: معنى أن محصلة قوى تمر بنقطة هو إنعدام عزم هذه المحصلة حول تلك النقطة.

فلإثبات أن المحصلة R تمر بنقطة $b=(-3,4)$ يجب أن نثبت إنعدام عزم R حول b

$$\vec{r}_b=[o-(-3)]\hat{i}+[o-(4)]\hat{j}=3\hat{i}-4\hat{j}$$

$$\vec{M}_b=\vec{r}_b\wedge\vec{R}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -4 & 0\\ 6 & -8 & 0\end{vmatrix}=[-24+24]\hat{k}=0$$

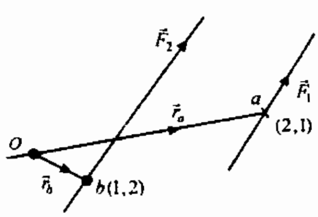
وهذا يعني أن عزم المحصلة $\vec{R}$ حول نقطة b يساوي صفراً أي أن المحصلة تمر بنقطة b، وهو المطلوب.

<u>مثال(٤)</u>: تؤثر القوتان المستويتان

$$\vec{F}_1=\hat{i}+2\hat{j}\ ,\ \vec{F}_2=2\hat{i}-\alpha\,\hat{j}$$

عند النقطتين: $a=(2,1)\ ,\ b(1,2)$

فإذا كان مجموع عزمي هاتين القوتين حول نقطة الأصل منعدما، فأوجد قيمة الثابت α.



<u>الحل</u>: متجهاً موضع النقطتين a,b (بالنسبة إلى o)

$$\vec{r}_a=2\hat{i}+\hat{j}\ ,\ \vec{r}_b=\hat{i}+2\hat{j}$$

عزم $\vec{F}_1$ حول نقطة الأصل o:

$$\vec{M}_{10}=\vec{r}_a\wedge\vec{F}_1$$
$$\vec{M}_{20}=\vec{r}_b\wedge\vec{F}_2$$

$$\vec{M}_{10}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=(4-1)\hat{k}=3\hat{k}$$

عزم $\vec{F}_2$ حول نقطة الأصل o:

$$\vec{M}_{20} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = (-\alpha - 4)\hat{k}$$

ومن رأس المسألة: مجموع العزمين = صفر

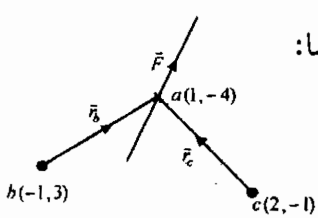
$$\vec{M}_{10} + \vec{M}_{20} = 0$$
$$\therefore 3k + (-\alpha - 4)\hat{k} = 0$$
$$\therefore (-\alpha - 1)\hat{k} = 0$$
$$\therefore -\alpha - 1 = 0$$

$$\therefore \qquad \boxed{\alpha = -1}$$

وهو المطلوب.

<u>**مثال(٥):**</u> القوة $\vec{F} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j}$ تؤثر في النقطة $a = (1,-4)$ ومتجه عزمها بالنسبة لنقطة $b = (-1,3)$ هو $13\hat{k}$ بينما متجه عزمها بالنسبة للنقطة $c = (2,-1)$ هو صفر. عين مقدار $\vec{F}$ واتجاهها.

<u>**الحل:**</u> متجهي موضع كل من b,c بالنسبة للنقطة a هما:



$$\vec{r}_b = [1-(-1)]\hat{i} + [-4-3]\hat{j} = 2\hat{i} - 7\hat{j}$$
$$\vec{r}_c = [1-2]\hat{i} + [-4-(-1)]\hat{j} = -\hat{i} - 3\hat{j}$$

عزم $\vec{F}$ حول b:

$$\vec{M}_b = \vec{r}_b \wedge \vec{F} = 13\hat{k}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -7 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = 13\hat{k}$$

$$\therefore \quad (2\beta + 7\alpha)\hat{k} = 13\hat{k}$$

$$\therefore 2\beta + 7\alpha = 13 \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

عزم $\vec{F}$ حول c:

$$\vec{M}_c = \vec{r}_c \wedge \vec{F} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -3 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \ (-\beta + 3\alpha)\hat{k} = 0$$

$$\therefore -\beta + 3\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \beta = 3\alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

من $(2),(1)$ نوجد α,β كالتالي

بالتعويض من (2) في (1):

$$2(3\alpha) + 7\alpha = 13$$

$$13\alpha = 13 \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = 1}$$

ومن (2) $\quad \boxed{\beta = 3}$

$$\therefore \ \vec{F} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} = \hat{i} + 3j$$

ويكون مقدارها:

$$F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$

واتجاهها:

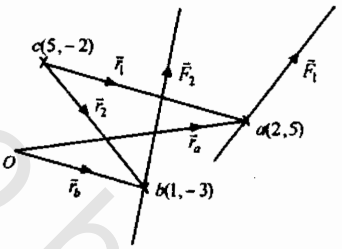
$$\tan\alpha = \frac{3}{1} = 3 \qquad \therefore \ \boxed{\alpha = \tan^{-1} 3}$$

<u>مثال(٦)</u> إذا كانت القوتان

$$\vec{F}_1 = \alpha\,\hat{i} + 3\hat{j} \quad , \quad \vec{F}_2 = \beta\,\hat{i} - 5\hat{j}$$

تؤثران في النقطتين $a = (2,5)$, $b = (1,-3)$ وكان مجموع عزمي القوتين حول نقطة الأصل وحول النقطة $c = (5,-2)$ منعدماً، فأوجد كل من α,β.

<u>الحل:</u> متجهاً موضعي النقطتين a,b بالنسبة لنقطة الأصل o



$$\vec{r}_a = 2\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\vec{r}_b = \hat{i} - 3\hat{j}$$

متجهاً موضعي النقطتين a,b بالنسبة لنقطة c:

$$\vec{r}_1 = [2-5]\hat{i} + [5-(-2)]\hat{j} = -3\hat{i} + 7\hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = [1-5]\hat{i} + [-3-(-2)]\hat{j} = -4\hat{i} - \hat{j}$$

وحيث أن مجموع عزمي القوتين حول o وحول c يكون منعدماً:

$$\vec{M}_o = \vec{r}_a \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_b \wedge \vec{F}_2 = 0 \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

$$\vec{M}_c = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 = 0 \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

فمن (1):

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 5 & 0 \\ \alpha & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ \beta & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (6-5\alpha)\hat{k} + (-5+3\beta)\hat{k} = 0$$

$$(1-5\alpha+3\beta)\hat{k} = 0 \quad \rightarrow \quad 1-5\alpha+3\beta = 0 \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

ومن (2):

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 7 & 0 \\ \alpha & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & -1 & 0 \\ \beta & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (-9-7\alpha)\hat{k} + (20+\beta)\hat{k} = 0$$

$$\therefore (11-7\alpha+\beta)\hat{k} = 0 \quad \rightarrow \quad 11-7\alpha+\beta = 0 \qquad \_\_\_\_\_(4)$$

بحل (4) ,(3) نوجد α,β كالتالي

بضرب (4) في العدد 3:

$$33-21\alpha+3\beta = 0 \qquad \_\_\_\_\_(5)$$

من (5) ,(3) بالطرح:

$$32-16\alpha=0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha=\frac{32}{16}=2}$$

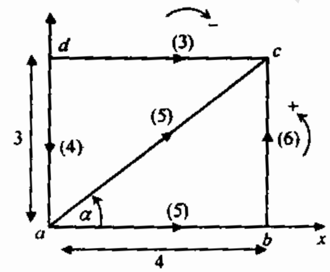
بالتعويض في (3):

$$1-5(2)+3\beta=0$$

$$\therefore 3\beta=9 \quad \rightarrow \quad \boxed{\beta=\frac{9}{3}=3}$$

وهو المطلوب.

مثال(٧): $abcd$ مستطيل فيه $ab=4,\ ad=3$ أثرت قوى مقاديرها $5,4,3,6,5$ في الأضلاع: $\overline{ac},\overline{da},\overline{dc},\overline{bc},\overline{ab}$ على الترتيب. عين المحصلة (محصلة مجموعة القوى المعطاه) مقداراً واتجاهاً، وأوجد معادلة خط عمل تلك المحصلة، ونقطة تقاطعها مع محور x:



الحل:

$$\cos\alpha=\frac{ab}{ac}=\frac{4}{5}$$

$$\sin\alpha=\frac{bc}{ac}=\frac{3}{5}$$

بأخذ a كنقطة أصل واختيار المحاور كما بالشكل.

مركبات القوى في اتجاهي x,y هما:

$$F_x=5+3+5\cos\alpha=5+3+5(\frac{4}{5})=12$$

$$F_y=-4+6+5\sin\alpha=-4+6+5(\frac{3}{5})=5$$

المحصلة:

$$\therefore \vec{R}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}=12\hat{i}+5\hat{j}$$

مقداراً:

$$R=\left|\vec{R}\right|=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$$

اتجاهاً:

$$\tan\theta=\frac{F_y}{F_x}=\frac{5}{12}\rightarrow\ \theta=\cdots$$

<u>الجزء الثاني</u>: معادلة خط عمل المحصلة:

$$\boxed{\left|\vec{M}_o\right|=xF_y-yF_x}$$

حيث $\left|\vec{M}_o\right|$ مقدار مجموع العزوم حول نقطة الأصل، (x,y) إحداثيات أي نقطة على خط عمل المحصلة.

إذاً يلزمنا أخذ العزوم حول نقطة الأصل التي هي نقطة a مع إعتبار قاعدة الإشارات عند اخذ العزوم.

القوى (5) ,(5) ,(4) تمر بنقطة a فعزمها يساوي صفراً، بينما القوى التي لها عزم هي فقط (6),(3)

$$\left|\vec{M}_a\right|=\sum M_a=-3\times3+6\times4=15$$

إذاً معادلة خط عمل المحصلة هي:

$$15=x(5)-y(12)\qquad\rightarrow\quad\therefore\quad\boxed{5x-12y=15}$$

وهي معادلة خط مستقيم (من الدرجة الأولى).

<u>هندسياً</u>: بأخذ $y=0$ نوجد نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور x

$$\therefore\ 5x=15\ \ \rightarrow\ \ x=\frac{15}{5}=3$$

إذاً خط عمل المحصلة يتقاطع مع محور x في النقطة $(3,0)$. وهو المطلوب.

مثال(٨): إذا كان المجموع الجبري لعزوم مجموعة من القوى المستوية حول النقاط الآتية: $a=(2,2)$,$b=(0,2)$, $c=(2,0)$ هو على الترتيب $10,4,3$، أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه المجموعة من القوى وكذلك معادلة خط عمل تلك المحصلة ونقطة تقاطعها مع محور x.

الحل: النقاط ومجموع العزوم هي:

$$a=(2,2) \quad \to \quad \sum M_a=10$$
$$b=(0,2) \quad \to \quad \sum M_b=4$$
$$c=(2,0) \quad \to \quad \sum M_c=3$$

معادلة خط عمل المحصلة في هذه الحالة هي:

$$\sum M_a=M_o-(x_a F_y-y_a F_x)$$

حيث $\sum M_a$ هي مجموع العزوم حول نقطة $a=(x_a,y_a)$.

M_o هو مجموع العزوم حول نقطة الأصل.

بتطبيق هذه العلاقة على النقاط الثلاثة a,b,c نحصل على:

$$[a]:\ 10=M_o-(2F_y-2F_x)=M_o-2F_y+2F_x \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

$$[b]:\ 4=M_o-(0-2F_x)=M_o+2F_x \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

$$[c]:\ 3=M_o-(2F_y-0)=M_o-2F_y \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

هذه المعادلات الثلاثة يمكن حلها لإيجاد M_o,F_x,F_y كالآتي:

من (3) ,(2) بالجمع:

$$7=2M_o+2F_x-2F_y \qquad \_\_\_\_\_(4)$$

من (4) ,(1) بالطرح: $-3=M_o$

$$\therefore \quad \boxed{M_o=-3}$$

بالتعويض في (2): $4=-3+2F_x$

$$\therefore 7 = 2F_x \quad \rightarrow \quad \boxed{F_x = \frac{7}{2}}$$

وبالتعويض في (3): $3 = -3 - 2F_y$

$$\therefore 2F_y = -6 \quad \rightarrow \quad \boxed{F_y = \frac{-6}{2} = -3}$$

إذاً محصلة مجموعة القوى هي:

$$\vec{R} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} = \frac{7}{2}\hat{i} - 3\hat{j}$$

<u>مقداراً:</u>

$$R = \sqrt{\frac{49}{4} + 9} = \sqrt{\frac{49+36}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2} = 3.07$$

<u>إتجاهاً:</u>

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-3}{7/2} = -\frac{6}{7}$$

<u>ولإيجاد معادلة خط عمل المحصلة:</u>

إذا كانت (x,y) نقطة تقع على خط عمل المحصلة وكان عزم المحصلة حول نقطة الأصل هو: $M_o = -3$، فإن معادلة خط عمل المحصلة تكون:

$$M_o = xF_y - yF_x$$

$$\therefore -3 = x(-3) - y(\frac{7}{2}) = -3x - \frac{7}{2}y$$

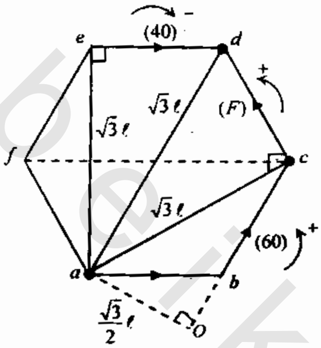
$$\therefore 3x + \frac{7}{2}y = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{6x + 7y = 6}$$

وهي معادلة خط مستقيم، يمكن إيجاد نقطة تقاطعه مع محور x بوضع $y = 0$

$$\therefore 6x = 6 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

إذاً خط عمل المحصلة يتقاطع مع محور x في النقطة $(1,0)$. وهو المطلوب.

مثال(٩): $abcdef$ شكل سداسي منتظم أثرت قوى مقاديرها $80,60,F,40$ في الأضلاع $\overline{ab},\overline{bc},\overline{cd},\overline{ed}$ على الترتيب، فإذا انعدم المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول الرأس a، فأوجد قيمة (مقدار) القوى F.



الحل: نأخذ العزوم حول a:

(من رأس المسألة) $\sum M_a = 0$

القوة (80) تمر بنقطة a فليس لها عزم

فباعتبار طول ضلع المسدس $= \ell$ فإن:

$$\sum M_a = 0 = 60 \times a0 + F \times ac - 40 \times ae$$

$$\therefore 0 = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\ell + F \times \sqrt{3}\,\ell - 40 \times \sqrt{3}\,\ell$$

$$\therefore 10\sqrt{3}\,\ell = F\sqrt{3}\,\ell \quad \rightarrow \quad \boxed{F = 10}$$

وهو المطلوب.

مثال(١٠): $abcd$ شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من a,d وفيه

$ab = 70\,cm \quad , \quad ad = cd = 40\,cm$

أخذت نقطة f على ab بحيث أن $af = 40\,cm$. أثرت قوى مقاديرها $25,\,F,\,10\sqrt{2}\,,\,35$ في الأضلاع $\overline{cb}\,,\,\overline{cf}\,,\,\overline{ca}\,,\,\overline{cd}$ على الترتيب، وكان مقدار محصلة هذه القوى هو 50 وحدة.

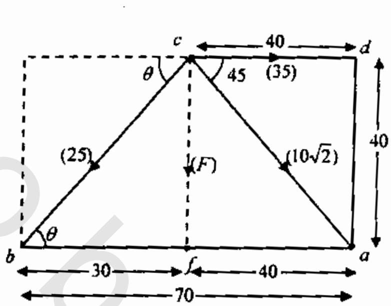
المطلوب: إيجاد مقدار القوة F ومقدار عزم المحصلة حول نقطة a.

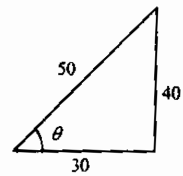
الحل: المعطى في رأس المسألة $R = 50$ حيث R محصلة مجموعة القوى

نحلل القوى في الإتجاهين x,y:

$$F_x = 35 + 10\sqrt{2}\cos 45 - 25\cos\theta = 35 + 10\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}) - 25(\frac{3}{5}) = 30$$

$$F_y = -F - 10\sqrt{2}\sin 45 - 25\sin\theta = -F - 10\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}) - 25(\frac{4}{5}) = -F - 30$$





$$\cos\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

وحيث أن محصلة مجموعة القوى $R = 50$

$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

$R^2 = F_x^2 + F_y^2 \quad \rightarrow \quad (50)^2 = (30)^2 + (-F-30)^2$

$\therefore\ F^2 + 60F - 700 = 0$

$\therefore (F-10)(F+70) = 0$

$\therefore\ \boxed{F = 10}$, $F = -70$ تهمل القيمة السالبة

وبذلك فإن المحصلة يكون لها المركبتان:

$\boxed{F_x = 30}$, $\boxed{F_y = -10 - 30 = -40}$

<u>المطلوب الثاني</u>: إيجاد عزم المحصلة حول نقطة a

بأخذ c كنقطة أصل فتؤول مجموعة

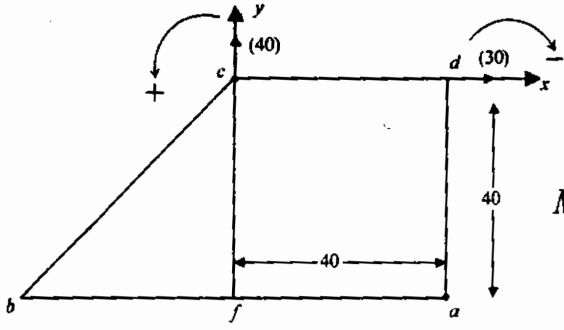
القوى إلى القوتين:

(30) في إتجاه x

(40) في إتجاه $(-y)$

$$M_a = -30\times 40 + 40\times 40$$
$$= -1200 + 1600 = 400$$

وهو المطلوب.



ثالثاً: مجموعات القوى المستوية غير المتلاقية

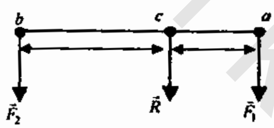
سوف ندرس من هذه المجموعات المجوعتين الآتيتين:

[١] مجموعة القوى المتوازية، [٢] مجموعة الإزدواج

[١] القوى المتوازية

محصلة قوتين متوازيتين: لدينا حالتان

(١) القوتان في نفس الإتجاه: $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ تؤثران في a,b

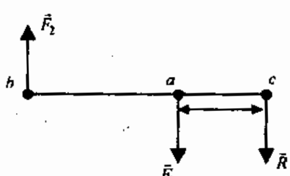


المحصلة: $R = F_1 + F_2$

وتؤثر في نقطة c بحيث أن

$$\boxed{F_1 \times ac = F_2 \times bc}$$

(٢) القوتان في إتجاهين متضادين: $\vec{F}_1 > \vec{F}_2$



المحصلة: $R = F_1 - F_2$

وفي إتجاه القوة الكبرى F_1 وتؤثر في نقطة c بحيث أن

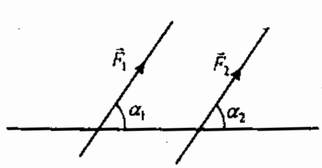
$$\boxed{F_1 \times ac = F_2 \times bc}$$

ملحوظة(١): إذا كانت القوتان متساويتان فإن المحصلة تساوي مجموعهما وتؤثر في منتصف المسافة بينهما.

ملحوظة(٢): إذا كانت:

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\,\hat{i} + F_{1y}\,\hat{j} \qquad , \qquad \vec{F}_2 = F_{2x}\,\hat{i} + F_{2y}\,\hat{j}$$

قوتان متوازيتان فإن:



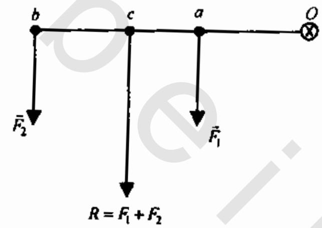
$$\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{F_{2y}}{F_{2x}}}$$

<u>نظرية</u>: المجموع الجبري لعزمي قوتين متوازيتين حول أي نقطة في مستويهما يساوي عزم محصلتهما حول نفس النقطة.

<u>الإثبات:</u>

$$\sum M_o = F_1 \times ao + F_2 \times bo$$
$$= F_1 \times (co - ca) + F_2 \times (bc + co)$$
$$= (F_1 + F_2) \times co - F_1 \times ca + F_2 \times bc$$



ولكن: $F_1 + F_2 = R$

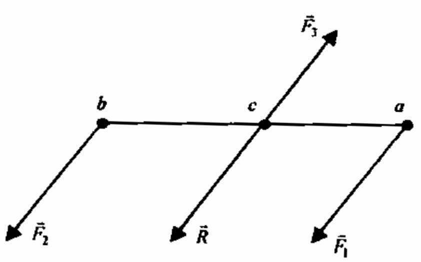
$F_1 \times ca = F_2 \times bc$

عزم المحصلة حول O $\therefore \sum M_o = R \times co$

وهو المطلوب.

<u>إتزان ثلاث قوى متوازية:</u>

إذا كانت $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ثلاث قوى متوازية فإن: $\vec{F}_3$ تساوي مقداراً وتضاد إتجاهاً محصلة القوتين $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ويكون لها نفس خط العمل.



<u>الإثبات</u>: إذا إتزن جسم تحت تأثير القوى الثلاثة فإن:

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ (شرط الإتزان)

$\therefore\ \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -\vec{R}$

حيث $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$، وهو المطلوب.

<u>إتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية:</u>

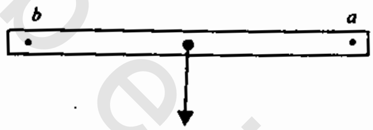
لكي يتزن الجسم تحت تأثير هذه المجموعة يجب تطبيق الشرطين الآتيتين:

(أ) مجموع القوى تساوي صفر $\boxed{\sum F_i = 0}$

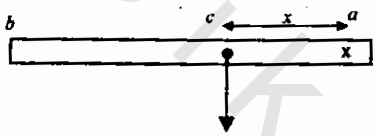
(ب) مجموع العزوم حول أي نقطة 0 تساوي صفر $\boxed{\sum M_o = 0}$

<u>ملاحظات هامة في حل المسائل</u>

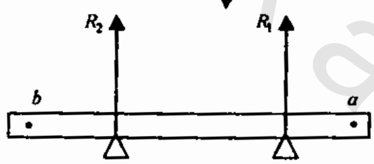
(١) <u>القضيب الخفيف</u>: هو عبارة عن ساق حديدية منتظمة مهملة الوزن.



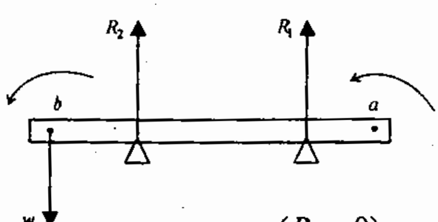
(٢) <u>القضيب المنتظم</u>: يؤثر وزنه في منتصفه.



(٣) <u>القضيب الثقيل وغير المنتظم</u>: هو عبارة عن ساق حديدية لها وزن ويؤثر وزنه في نقطة ما عليه (c) تبعد مسافة x عن أحد طرفيه (a).



(٤) إذا أرتكز قضيب على حاملين فإن هناك ردي فعل R_1, R_2 عند نقطتي الأرتكاز.



(٥) إذا علق ثقل وزنه w من أحد طرفي القضيب (b) فإن القضيب يكون على وشك الإنقلاب (أو الدوران) حول b إذا انعدم رد الفعل عند الحامل البعيد $(R_1 = 0)$.

(٦) يكون القضيب على وشك الإنقلاب (أو الدوران) حول نقطة ما (c) عليـــه، إذا كان:

$$\boxed{M_c = 0}$$

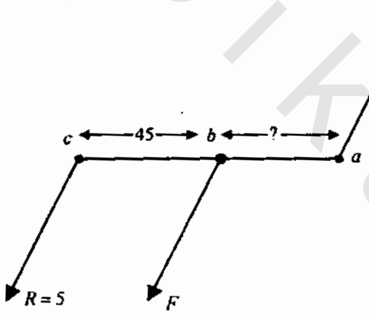
أي أذا كان مجموع العزوم حول نقطة c تساوي صفراً.

أمثلة محلولة على القوى المتوازية

مثال(١): قوتان متوازيتان $15, F$ حيث $F>15$ تؤثران في النقطتين a,b على الترتيب، فإذا كان مقدار محصلتهما هو 5 وتؤثر في نقطة c الواقعة على ab بحيث أن $bc = 45\,cm$، أوجد المسافة ab بين القوتين.

الحل: حيث أن $F>15$

$\therefore$ القوتان تكونان في إتجاهين متضادين، ومحصلتهما تكون في إتجاه القوة الأكبر F



$$R = F - 15 \;,\; 5 = F - 15 \;\rightarrow\; \boxed{F = 20}$$

أيضاً فإن:

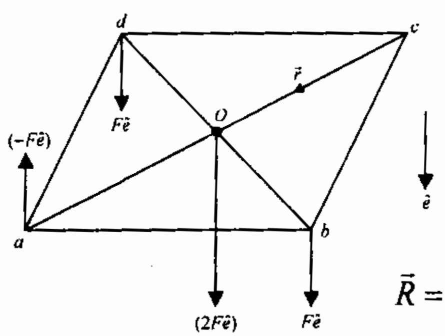
$$15 \times ac = F \times bc = 20 \times 45 = 900$$

$$ac = \frac{900}{15} = 60$$

$$\therefore ab = ac - bc = 60 - 45 = 15\,cm$$

وهو المطلوب.

مثال(٢): $abcd$ متوازي أضلاع، تؤثر في رؤوسه a,b,d القوى المتوازية $-F\hat{e}\,,\,F\hat{e}\,,\,F\hat{e}$ على الترتيب حيث $\hat{e}$ متجه وحدة ما، أثبت أن محصلة هذه القوى المتوازية هي $F\hat{e}$ وأن خط عملها يمر بالرأس c.



الحل:

محصلة القوتين $F\hat{e}$ (عند d)، $F\hat{e}$ (عند b) هي $2F\hat{e}$ وتؤثر عند o (قاعدة).

$\therefore$ محصلة القوى: $\vec{R} = -F\hat{e} + 2F\hat{e} = F\hat{e}$

ولإثبات أن خط عمل $\vec{R}$ يمر بنقطة c نأخذ العزوم حول c فإذا كان مجموع العزوم يساوي صفراً فهذا يعني أن المحصلة تمر بالنقطة c (قاعدة أخرى).

بأخذ $\overrightarrow{co} = \vec{r}$ $\therefore$ متجه موضع c بالنسبة إلى a هو:

$$\vec{r}_a = \overrightarrow{co} = 2\vec{r}$$

مجموع العزوم حول c:

$$\sum \vec{M}_c = (\overrightarrow{co}) \wedge (2F\hat{e}) + (\overrightarrow{ca}) \wedge (-F\hat{e})$$
$$= \vec{r} \wedge (2F\hat{e}) + (2\vec{r}) \wedge (-F\hat{e}) = 2\vec{r} \wedge F\hat{e} - 2\vec{r} \wedge F\hat{e} = 0$$

$\therefore$ المحصلة تمر بنقطة c، وهو المطلوب.

<u>مثال(٣):</u> القوتان $\vec{F}_2 = -6\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{F}_1 = 2\hat{i} + \alpha\hat{j}$ متوازيتان، أوجد قيمة α.

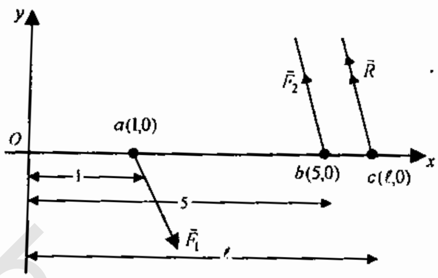
وإذا أثرت القوتان في النقطتين $a(1,0)$, $b(5,0)$ على الترتيب فأوجد نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع محور x.

<u>الحل</u>: حيث أن القوتان متوازيتان فإن:

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2 \quad \rightarrow \quad \frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{F_{2y}}{F_{2x}}$$
$$\vec{F}_1 = 2\hat{i} + \alpha\hat{j} \quad \rightarrow \quad F_{1x} = 2 \quad , \quad F_{1y} = \alpha$$
$$\vec{F}_2 = -6\hat{i} + 3\hat{j} \quad \rightarrow \quad F_{2x} = -6 \quad , \quad F_{2y} = 3$$
$$\therefore \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{-6} \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = -1}$$
$$\therefore \vec{F}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} \quad , \quad \vec{F}_2 = -6\hat{i} + 3\hat{j}$$

واضح أن القوتين في إتجاهين متضادين، حيث $F_2 > F_1$ فتكون المحصلة في إتجاه القوة F_2 حيث:

$$\vec{R} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = (-6\hat{i} + 3\hat{j}) - (2\hat{i} - \hat{j}) = -8\hat{i} + 4\hat{j}$$



وبفرض أن المحصلة $\vec{R}$ تؤثر عند نقطة $c(\ell, o)$ أي أنها تمر بنقطة c فيكون عزمها حول c يساوي صفراً.

$$\sum \vec{M}_c = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{ca} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{cb} \wedge \vec{F}_2 = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \ell-1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \ell-5 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

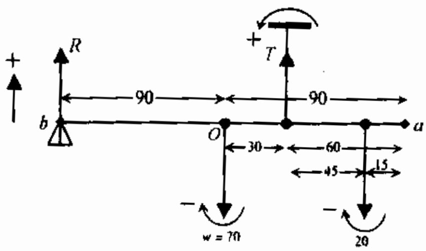
$$\therefore (-\ell+1)\hat{k} + (3\ell-15)\hat{k} = 0$$

$$\therefore (2\ell-14)\hat{k} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\ell = 14$$

$$\therefore \ell = 7 \quad \rightarrow \quad \therefore c \equiv (7,0)$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): ab قضيب منتظم طوله $180cm$ ووزنه 70 وحدة، يرتكز في وضع أفقي على حامل عند طرفه b ويحفظ القضيب في حالة توازن بواسطة خيط خفيف رأسي مثبت من نقطة فيه تبعد مسافة $60cm$ عن طرفه a ويحمل القضيب ثقلاً مقداره 20 عند نقطة تبعد مسافة $15cm$ عن a.



المطلوب: إيجاد مقدار كل من الشد في الخيط ورد الفعل عند الحامل.

الحل: حيث أن القضيب في حالة توازن فإن شرطي التوازن هما:

(١)مجموع القوى = صفر.

(٢)مجموع العزوم حول نقطة ما = صفر.

(١) مجموع القوى:

$$R+T-70-20=0$$

$$\therefore R+T=70+20=90 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

(٢) مجموع العزوم: بأخذ العزوم حول b مع ملاحظة أن القوة R تمر بنقطة b فليس لها عزم.

$$\sum M_b = T\times120-70\times90-20\times165=0$$

$$\therefore 120T=6300+3300=9600$$

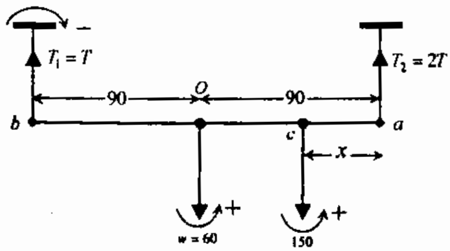
$$\therefore T=\frac{9600}{120}=80$$

ولإيجاد R: نعوض عن T في (1): $R=90-80=10$

وهو المطلوب.

مثال(٥): ab قضيب منتظم طوله $180cm$ ووزنه 60 وحدة معلق في وضع أفقي بواسطة خيطين خفيفين رأسيين من طرفيه a,b ويحمل القضيب ثقلاً مقداره 150 وحدة عند نقطة c الواقعة على القضيب على بعد x من a .

فإذا كان مقدار الشد في الخيط عند a ضعف مقدار الشد في الخيط عند b فأوجد مقدار المسافة x، وكذلك الشد في الخيط عند طرفي القضيب.



الحل:

إذا كان الشد في الخيط عند b هو: $T_1=T$

فإن الشد عند a هو: $T_2=2T$

بتطبيق شرطي الإتزان:

(١) مجموع القوى = صفر.

(٢) مجموع العزوم حول نقطة ما = صفر.

(١) مجموع القوى:

$$T_1 + T_2 - 60 - 150 = 0$$

$$\therefore T + 2T - 60 - 150 = 0$$

$$3T = 210 \quad \rightarrow \quad \boxed{T = \frac{210}{3} = 70}$$

$$\therefore \quad \boxed{T_1 = 70} \quad , \quad \boxed{T_2 = 2T = 140}$$

(٢) مجموع العزوم: بأخذ العزوم حول a مع ملاحظة أن T_2 ليس لها عزم (لأنها تمر بالنقطة a).

$$-T_1 \times 180 + 60 \times 90 + 150 \times (x) = 0$$

$$\downarrow$$

$$-70 \times 180 + 60 \times 90 + 150 \times (x) = 0$$

$$-12600 + 5400 + 150x = 0$$

$$150x = 12600 - 5400 = 7200$$

$$\therefore x = \frac{7200}{150} = 48$$

وهو المطلوب.

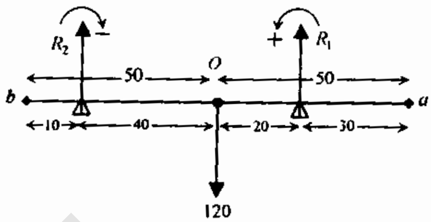
مثال(٦): ab قضيب منتظم طوله $100cm$ ووزنه 120 وحدة، يرتكز في وضع أفقي على حاملين أحدهما يبعد مسافة $30cm$ عن a والثاني يبعد مسافة $10cm$ عن b. أوجد مقدار رد فعل كل من الحاملين (R_1, R_2)، وكذلك مقدار الثقل w الذي يجب أن يعلق عند b حتى يتساوى ردي الفعل عند الحاملين.

الحل: هذه المسألة مكونة من جزئين:

(١) قبل تعليق الثقل w عند b.

(٢) بعد تعليق الثقل w عند b.

(١) <u>قبل تعليق الثقل</u>: نطبق شرطي الإتزان:



<u>مجموع القوى</u>:

$$R_1 + R_2 - 120 = 0$$

$$\therefore R_1 + R_2 = 120 \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

<u>مجموع العزوم</u>: بأخذ العزوم حول O مع ملاحظة

أن (120) ليس لها عزم لأنها تمر بالنقطة O.

$$\sum M_0 = R_1 \times 20 - R_2 \times 40 = 0$$

$$\therefore 20R_1 = 40R_2 \rightarrow R_1 = 2R_2 \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

بالتعويض في (1):

$$2R_2 + R_2 = 120$$

$$3R_2 = 120 \rightarrow R_2 = \frac{120}{3} = 40$$

ومن (2):

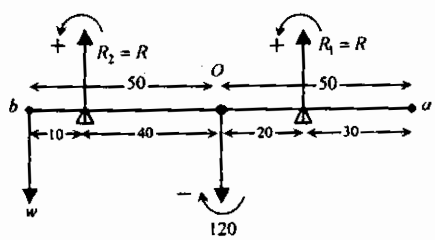
$$R_1 = 2 \times 40 = 80$$

$$\therefore \quad \boxed{R_1 = 80} \quad , \quad \boxed{R_2 = 40}$$

(٢) <u>بعد تعليق الثقل</u>:

يتساوى الضغط (أو رد الفعل)

عند الحاملين أي أن:



$$R_1 = R_2 = R$$

وبتطبيق شرطي الإتزان:

<u>مجموع القوى</u>:

$$R_1 + R_2 - w - 120 = 0$$

$$R + R = w + 120 \rightarrow 2R = w + 120 \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

مجموع العزوم: بأخذ العزوم حول b: $R_1 \times 70 + R_2 \times 10 - 120 \times 50 = 0$

$$\therefore\ 70R + 10R = 120 \times 50$$

$$\therefore\ 80R = 6000 \ \rightarrow\ R = \frac{6000}{80} = 75$$

وبالتعويض في (3): $2 \times 75 = w + 120$

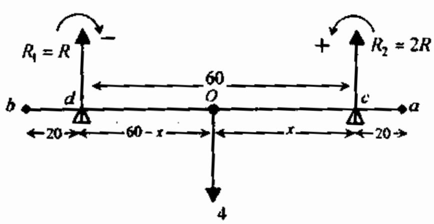
$$\therefore\ w = 150 - 120 = 30$$

وهو المطلوب.

مثـــال(٧): ab قضيب غير منتظم وزنه 4 وحدات وطوله $100cm$، يرتكز فـــي وضع أفقي على حاملين c,d بحيث كان $ac = bd = 20\,cm$، فـــإذا كـــان رد الفعل عند الحامل c ضعف رد الفعل عند الحامل d، فأوجد الآتي:

(١) بعد نقطة تأثير وزن القضيب عن طرفه a.

(٢) مقدار الثقل w الذي يجب أن يعلق عند الطرف b بحيث يكون القضيب على وشك الدوران (أو الإنقلاب) حول نقطة d.



الحل: حيث أن القضيب غير منتظم فـــإن وزنه لا يؤثر في منتصفه، وليكن هذا الوزن يؤثر عند نقطة o التـــي تبعـــد مسافة x عن نقطة c

$$\therefore\ oc = x \ \rightarrow\ od = 60 - x$$

رد الفعل عند d: $R_1 = R$، رد الفعل عند c: $R_2 = 2R$

المطلوب الأول: إيجاد المسافة oa حيث $\boxed{oa = x + 20}$

ولإيجاد x: نأخذ العزوم حول o:

$$-R_1 \times (60 - x) + R_2 \times (x) = 0$$

$$-R(60 - x) + 2R(x) = 0$$

بالقسمة على R:

$$-60+x+2x=0$$

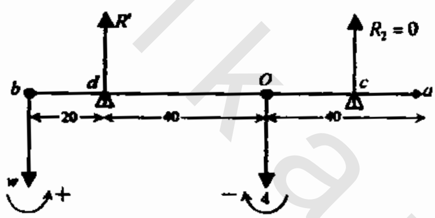
$$\therefore 3x=60 \quad \rightarrow \quad \boxed{x=20}$$

$$\therefore\ oa=20+20=40$$

وهو المطلوب أولاً.

<u>المطلوب الثاني</u>: عندما يكون القضيب على وشك الدوران حول نقطة d فإن رد الفعل عند الحامل الآخر (نقطة c) يساوي صفراً ويصبح رد الفعل الجديد عند d هو R' مثلاً.

بأخذ العزوم حول d:



$$w\times 20-4\times 40=0$$

$$\therefore 20w=160$$

$$\therefore\ w=\frac{160}{20}=8$$

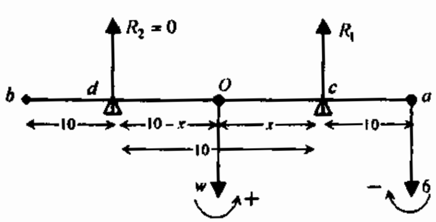
وهو المطلوب ثانياً.

<u>مثال(٨):</u> ab قضيب غير منتظم طوله $30cm$ يرتكز في وضع أفقي على حاملين عند c,d بحيث أن: $ac=cd=db$، فإذا علق ثقل مقداره 6 وحدات عند نقطة a يصبح القضيب على وشك الدوران حول c، وإذا علق ثقل مقداره 9 وحدات عند نقطة b يصبح القضيب على وشك الدوران d. أوجد الآتي:

(١) مقدار وزن القضيب w.

(٢) بعد نقطة تأثير هذا الوزن عن a.

<u>الحل:</u> حيث أن القضيب غير منتظم فإن وزنه لا يؤثر في منتصفه فنفرض أن هذا الوزن يؤثر عند نقطة o التي تبعد مسافة x عن c



$$\therefore\ oc=x$$

أولاً: إذا علق الثقل 6 عند a يصبح القضيب على وشك الدوران حول c وهــذا يعني أن:

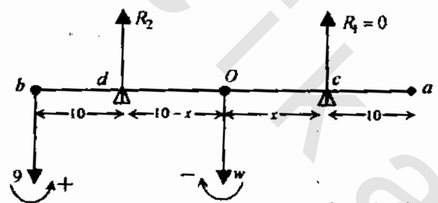
$$\boxed{R_2 = 0}$$

بأخذ العزوم حول c:

$$w \times (x) - 6 \times (10) = 0$$

$$\therefore xw = 60 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

ثانياً: إذا علق الثقل 9 عند b يصبح القضيب على وشك الدوران حول d، وهذا يعني أن:



$$\boxed{R_1 = 0}$$

بأخذ العزوم حول d:

$$9 \times (10) - w \times (10 - x) = 0$$

$$\therefore w(10 - x) = 90 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

المطلوب:

(١) الوزن w: نوجد x أولاً، من (2) ,(1) بالقسمة:

$$\frac{x}{10 - x} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ 3x = 20 - 2x$$

$$\therefore 5x = 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 4}$$

بالتعويض في (1):

$$4w = 60$$

$$\therefore \quad w = \frac{60}{4} = 15$$

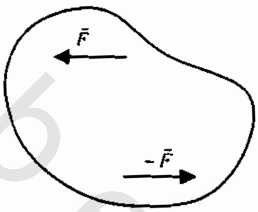
(٢) البعد oa:

$$oa = x + 10 = 4 + 10 = 14\,cm$$

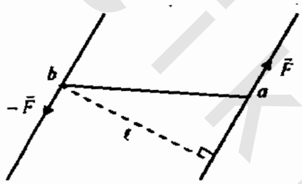
وهو المطلوب.

رابعاً: الإزدواج ومجموعات القوى المتكافئة - إختزال مجموعات القوى

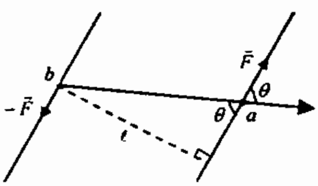
تعريفات أساسية:



تعريف(١): يعرف الإزدواج بأنه مجموعة مكونة من قوتين متوازيتين متساويتين مقداراً ومتضادتين إتجاهاً.



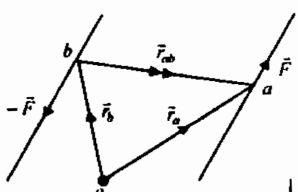
تعريف(٢): يعرف ذراع الازدواج (ℓ) بأنه البعد العمودي بين خطي عمل قوتي الازدواج.



$$\boxed{\ell = ba\sin\theta}$$

تعريف(٣): يعزم عزم الإزدواج حول نقطة ما (o) بأنه مجموع عزمي قوتي الإزدواج حول النقطة (o).

$$\begin{aligned}
\vec{c}_o &= \vec{r}_a \wedge \vec{F} + \vec{r}_b \wedge (-\vec{F}) \\
&= \vec{r}_a \wedge \vec{F} - \vec{r}_b \wedge \vec{F} \\
&= (\vec{r}_a \wedge \vec{r}_b) \wedge \vec{F} \\
&= \vec{r}_{ab} \wedge \vec{F}
\end{aligned}$$



حيث: $[\vec{r}_a = \vec{r}_b + \vec{r}_{ab}]$, $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$

<u>مقدار عزم الإزدواج:</u>

$$\begin{aligned}
\left|\vec{c}_o\right| &= \left|\vec{r}_{ab} \wedge \vec{F}\right| = (ba)\times(F)\times\sin\theta \\
&= F(ba\sin\theta) = F\times\ell
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{c_o = F\,\ell}$$

أي أن مقدار عزم الإزدواج يساوي مقدراً إحدى القوتين × ذراع الإزدواج.

إشارة c_o:

(١) الإزدواج يعمل على الدوران في عكس إتجاه عقارب الساعة

$\therefore \quad \boxed{c_o = +F\,\ell}$

(٢) الإزدواج يعمل على الدوران في إتجاه عقارب الساعة

$\therefore \quad \boxed{c_o = -F\,\ell}$

تعريف(٤): إتزان إزدواجين:

يتزن إزدواجين إذا كان مجموع مقداري عزميهما متلاشياً

$$c_1 + c_2 = 0$$

تعريف(٥): تكافؤ إزواجين:

يقال لإزدواجين أنهما متكافئان إذا تساوى مقدار عزميهما

$$c_1 = c_2$$

تعريف(٦): محصلة إزدواجين:

هو مجموع مقداري عزميهما $\qquad c = c_1 + c_2$

ملحوظة: إذا أوجدنا محصلة إزدواجين (c) فنقول أننا اختزلنا الإزدواجين إلى إزدواج محصل أو مكافئ.

القوى المتكافئة (تكافؤ مجموعات القوى المستوية):

يقصد بتكافؤ مجموعتين من القوى (والإزدواجات) هو أن تأثيرهما على جسم ما يكون واحداً.

رياضياً: إذا كانت المجموعة الأولى تتكون من قوة محصلة $\vec{R}$ وازدواج عزمه $\vec{C}$.

وكانت المجموعة الثانية تتكون من قوة محصلة $\vec{R}'$ وازدواج عزمه $\vec{C}'$.

∴ شرط التكافؤ:

$$(1)\quad \vec{R}=\vec{R}'$$

$$[\sum R_x=\sum R'_x\ ,\ \sum R_y=\sum R'_y]$$

$$(2)\quad \sum\vec{C}=\sum\vec{C}'$$

(في حالة وجود أكثر من ازدواج)

<u>إختزال مجموعات القوى:</u>

يقصد بعملية الاختزال الاستعاضة عن المجموعة بمجموعة أخرى تكافئها (يكون لها نفس التأثير على الجسم).

وتؤول عملية الاختزال لمجموعات القوى (أو استبدالها بمجموعة مكافئة) إلى إحدى الحالات الثلاثة الآتية.

[١] <u>إختزال المجموعة إلى قوة محصلة</u> (R):

وهي عبارة عن محصلة مجموعة القوى المعطاة مع عدم تلاشي مركبتيها $R_x\ ,\ R_y$ أو إحداهما.

[٢] <u>إختزال المجموعة إلى إزدواج عزمه</u> C:

وشرط ذلك هو:

$$(1)\quad R_x=0\ ,\ R_y=0$$

$$(2)\quad \sum M_0\neq 0\ \rightarrow\ \boxed{\sum M_0=C}$$

[٣] <u>حالة الإتزان (الإختزال إلى مجموعة متزنة)</u>:

وشرط ذلك هو:

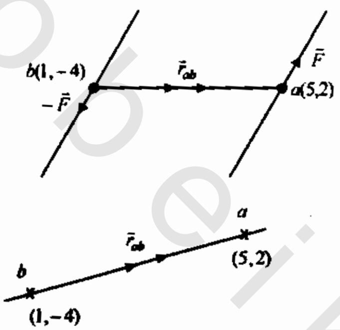
(أ) إذا كانت القوى متفرقة (غير متلاقية في نقطة) (سواء كانت متوازية أو غير متوازية)

$$R_x=0\ ,\quad R_y=0\quad ,\quad \sum M_0=0$$

(ب) إذا كانت القوى متلاقية: $R_x=0\quad ,\quad R_y=0$

أمثلة محلولة:

مثال(١): إزدواج إحدى قوتيه $\vec{F}=4\hat{i}-3\hat{j}$ وخط عملها يمر بالنقطة $a(5,2)$، فإذا كان خط عمل القوة الأخرى يمر بالنقطة $b(1,-4)$، أوجد قيمة عزم هذا الإزدواج وكذلك طول ذراعه.



الحل: عزم الإزدواج:

$$\vec{C}=\vec{r}_{ab}\wedge\vec{F}$$
$$\vec{r}_{ab}=[5-1]\hat{i}+[2-(-4)]\hat{j}$$
$$=-4\hat{i}+6\hat{j}$$

أيضاً فإن: $\vec{F}=4\hat{i}-3\hat{j}$

$$\therefore\ \vec{C}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & 6 & 0\\ 4 & -3 & 0\end{vmatrix}=[-12-24]\hat{k}=-36\hat{k}$$

وقيمته هذا العزم هي:

$$C=\left|\vec{C}\right|=\left|-36\hat{k}\right|=36 \quad , \quad \left|\hat{k}\right|=1$$

واتجاهه هو إتجاه $(-\hat{k})$ أي اتجاه محور z إلى أسفل (المحور العمودي على المستوى xy إلى أسفل).

ولإيجاد ذراع العزم:

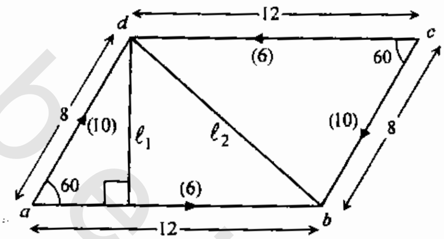
$$\boxed{C=F\ell}$$

حيث: $C=36$، $F=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

$$\therefore 36=5\ell \quad \rightarrow \quad \ell=\frac{36}{5}=7.2$$

وهو المطلوب.

مثال(٢): $abcd$ متوازي أضلاع، فيه $ab = 12cm$ m $bc = 8cm$، والزاوية $d\hat{a}b = 60°$، أثرت قوى مقاديرها $6,10,6,10$ في الأضلاع $\overline{ab}, \overline{cb}, \overline{cd}, \overline{ad}$ على الترتيب، إثبت أن هذه المجموعة من القوى تكافئ إزدواجاً وأوجد مقدار وإتجاه عزمه.



الحل:

القوى المعطاة تؤول إلى:

(١) إزدواج مكون من القوتين $(6,6)$، ومقدار عزمه $= c_1$

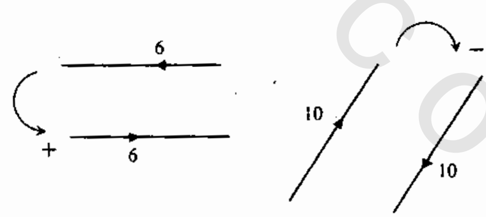
(٢) إزدواج مكون من القوتين $(10,10)$ ومقدار عزمه $= c_2$

$\therefore$ مجموعة القوى المعطاة تكافئ إزدواجاً مقدار عزمه $c = c_1 + c_2$.

ولإيجاد مقدار وإتجاه c:

نسقط العمودين ℓ_1, ℓ_2 الممثلين لذراعي عزمي c_1, c_2، فمن هندسة الشكل نجد أن:

$$\ell_1 = 8\sin 60 = 4\sqrt{3}$$
$$\ell_2 = 12\sin 60 = 6\sqrt{3}$$
$$c_1 = 6\times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$
$$c_2 = -10\times 6\sqrt{3} = -60\sqrt{3}$$

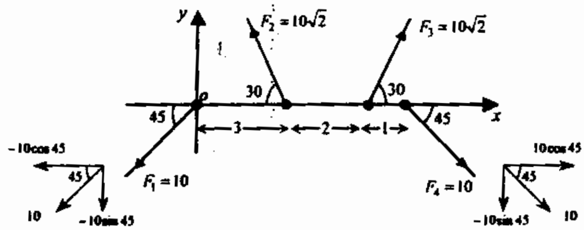


$$\therefore\ c = c_1 + c_2 = 24\sqrt{3} - 60\sqrt{3} = -36\sqrt{3}$$

$\therefore$ مقدار العزم $= 36\sqrt{3}$

وإتجاهه هو إتجاه دوران عقارب الساعة (لأن إشارته سالبة). وهو المطلوب.

مثال(٣): إختزل مجموعة القوى المبينة بالشكل إلى إزدواج مكافئ وأوجد مقــدار وإتجاه عزمه.



الحل: هذا المثال على الحالة الثانية (إختزال المجموعة إلى إزدواج عزمه c)
وشرط ذلك هو:

$$R_x = 0 \ , R_y = 0 \ , \sum M_0 \neq 0 \to \boxed{=c}$$

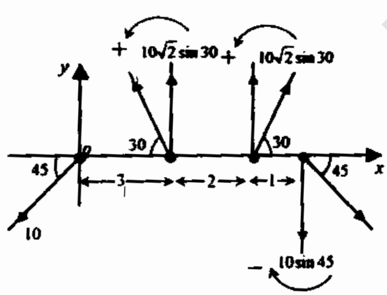
بتحليل القوى في إتجاهي x, y:

$$R_x = -10\cos 45 - 10\sqrt{2}\cos 30 + 10\sqrt{2}\cos 30 + 10\cos 45 = 0$$

$$R_y = -10\sin 45 + 10\sqrt{2}\sin 30 + 10\sqrt{2}\sin 30 - 10\sin 45$$

$$= -\frac{10}{\sqrt{2}} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \frac{10}{\sqrt{2}} = -\frac{20}{\sqrt{2}} + 10\sqrt{2} = -10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 0$$

بأخذ العزوم حول o:

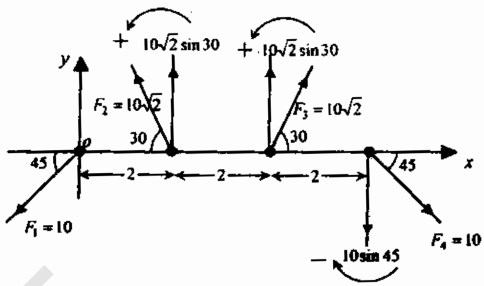


$$\sum M_0 = (10\sqrt{2}\sin 30) \times (3) + (10\sqrt{2}\sin 30) \times (5) - (10\sin 45) \times (6) = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore \ \sum M_0 \neq 0 \ \to \ \boxed{c = 10\sqrt{2}}$$

∴ مجموعة القوى المعطاة أختزلت إلى إزدواج مقدار عزمه = $10\sqrt{2}$ وإتجاهه ضد دوران عقارب الساعة (لأن إشارته موجبة). وهو المطلوب.

مثال(٤): أثبت أن مجموعة القوى المبينة بالشكل الآتي هي مجموعة متزنة



الحل هذا المثال على الحالة الثالثة (المجموعة المتزنة)

وحيث أن هذه القوى متفرقة (غير متلاقية في نقطة) فيكون شرط الإتزان:

$$R_x = 0 \;\; , \;\; R_y = 0 \;\; , \;\; \sum M_0 = 0$$

فإذا إنطبقت هذه الشروط فإن المجموعة تكون متزنة.

نحلل في إتجاهي x,y:

$$R_x = -10\cos 45 - 10\sqrt{2}\cos 30 + 10\sqrt{2}\cos 30 + 10\cos 45 = 0 \qquad \_\_\_(1)$$

$$R_y = -10\sin 45 + 10\sqrt{2}\sin 30 + 10\sqrt{2}\sin 30 - 10\sin 45$$

$$= -\frac{10}{\sqrt{2}} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \frac{10}{\sqrt{2}} = -\frac{20}{\sqrt{2}} + 10\sqrt{2} = -10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 0 \quad \_(2)$$

بأخذ العزوم حول o:

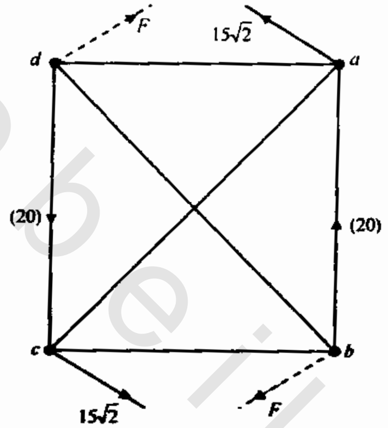
$$\sum M_0 = (10\sqrt{2}\sin 30)\times(2) + (10\sqrt{2}\sin 30)\times(4) - (10\sin 45)\times(6)$$

$$= 10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} - \frac{60}{\sqrt{2}} = 30\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = 0 \qquad \_\_\_(3)$$

ومن (3),(2),(1) يتضح أن المجموعة المعطاة هي مجموعة متزنة.

وهو المطلوب.

<u>مثال(٥):</u> $abcd$ مربع طول ضلعه $10cm$، أثرت قوتان مقدارهما $20,20$ في $\overline{ab},\overline{cd}$ على الترتيب، كما أثرت في a,c قوتان مقدار كل منهما $15\sqrt{2}$ في إتجاهي $\overline{bd},\overline{db}$ على الترتيب، أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجاً، وأوجد مقدار عزمه، وأوجد أيضاً مقدار وإتجاه قوتين تؤثران في b,d وتوازيان $\overline{ac}$ وتجعلان المجموعة في حالة إتزان.

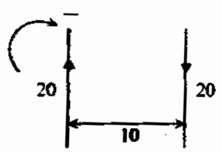


<u>الحل:</u>

مجموعة القوى المعطاة تكون الإزدواجات الآتية:

(١) الإزدواج المكون من (20) ,(20) ومقدار عزمه = c_1

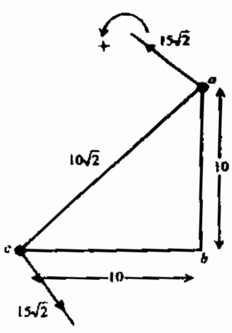
حيث:



$$c_1 = -20 \times 10 = -200$$

(٢) الإزدواج المكون من $(15\sqrt{2})$, $(15\sqrt{2})$ ومقدار عزمه = c_2

حيث:



$$c_2 = (15\sqrt{2}) \times (10\sqrt{2}) = 300$$

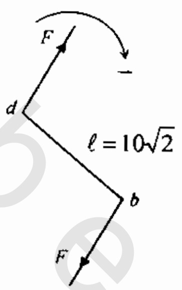
وذلك لأن المسافة: $ac = 10\sqrt{2}$ (فيثاغورث).

$\therefore$ مجموعة القوى المعطاة تكافئ إزدواجاً مقدار عزمه:

$$c = c_1 + c_2 = -200 + 300 = 100$$

$\therefore$ مقدار عزم الإزدواج المكافئ هو 100 وإتجاهه عكس إتجاه عقارب الساعة (إشارته موجبة).

المطلوب الثاني: القوتان اللتان تؤثران في b,d وتوازيان $\overline{ac}$ وتجعلان المجموعة في حالة إتزان يجب أن يكونا إزدواجاً عزمه $c'=-100$ حيث $c+c'=0$ (شرط إتزان إزدواجين).



فإذا كان مقدار كل من القوتين $= F$ فإن:

$$c'=-F\times\ell$$

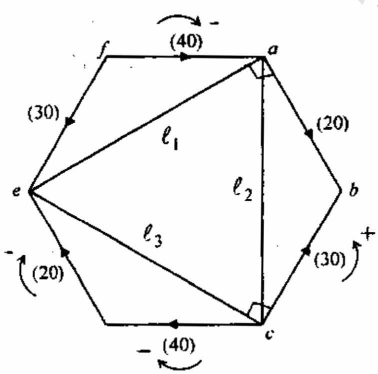
$$\therefore -100=-F\wedge(10\sqrt{2})$$

$$\therefore \boxed{F=5\sqrt{2}}$$

وفي الإتجاه المبين

وهو المطلوب.

مثال(٦): $abcdef$ شكل سداسي منتظم طول ضلعه $\ell=10cm$، أثرت قوى مقاديرها $20,30,40,20,30,40$ في الأضلاع $\overline{ab},\overline{cb},\overline{cd},\overline{de},\overline{fe},\overline{fa}$ على الترتيب.



أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجاً وأوجد مقدار عزمه، وأوجد أيضاً مقدار وإتجاه قوتين تؤثران في b,e وعموديتين على $\overline{be}$ بحيث تصبح المجموعة في حالة إتزان.

الحل: من خواص المسدس:

طول الضلع: $\ell=10$

$$\ell_1=ea=\ell\sqrt{3}=10\sqrt{3}$$

$$\ell_2=ac=\ell\sqrt{3}=10\sqrt{3}$$

$$\ell_3=ec=\ell\sqrt{3}=10\sqrt{3}$$

القوى المعطاة تكون الإزدواجات التالية:

(١) الإزدواج المكون من $(20),(20)$ وذراعه $= \ell_1$ ومقدار عزمه:

$c_1 = -20 \times \ell_1 = -20 \times 10\sqrt{3} = -200\sqrt{3}$

(٢) الإزدواج المكون من $(40),(40)$ وذراعه $= \ell_2$ ومقدار عزمه:

$c_2 = -40 \times \ell_2 = -40 \times 10\sqrt{3} = -400\sqrt{3}$

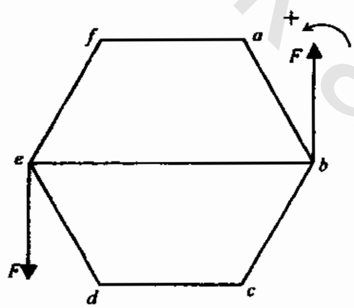
(٣) الإزدواج المكون من $(30),(30)$ وذراعه $= \ell_3$ ومقدار عزمه:

$c_3 = 30 \times \ell_3 = 30 \times 10\sqrt{3} = 300\sqrt{3}$

$\therefore$ المجموعة المعطاة تكافئ إزدواجاً مقدار عزمه:

$c = c_1 + c_2 + c_3 = -200\sqrt{3} - 400\sqrt{3} + 300\sqrt{3} = -300\sqrt{3}$

$\therefore$ مقدار عزم الإزدواج المكافئ هو $300\sqrt{3}$ وإتجاهه هو إتجاه دوران عقارب الساعة (إشارته سالبة).



<u>المطلوب الثاني</u>: القوتان اللتان تؤثران في b, e وعموديتان على $\overline{be}$ وتجعلان المجموعة في حالة إتزان يجب أن يكونا إزدواجاً عزمه:

$c' = 300\sqrt{3}$

حيث $c + c' =$ (شرط إتزان إزدواجين).

فإذا كان مقدار كل من القوتين $= F$ فإن:

$c' = F \times \ell = F \times eb$

ومن خواص الشكل السداسي:

$eb = 2\ell = 2 \times 10 = 20$

$\therefore\ 300\sqrt{3} = F \times (20)$

$\therefore\ \boxed{F = 15\sqrt{3}}$

وفي الإتجاه المبين

وهو المطلوب.

مسائل على الباب الثاني
(الإستاتيكا المستوية)

(١) قوتان مقدارهما $4, F$ تؤثران في جسم ما، وكانت الزاوية بينهما 135°، أوجد قيمة F، وإذا كان خط عمل محصلة القوتين يميل على القوة 4 بزاوية 45° فأوجد مقدار المحصلة.

(٢) أثرت القوة $\vec{F} = 5\hat{i} + 12\hat{j}$ في النقطة $a(-1,2)$، أوجد عزم هذه القوة حول النقطة $b(0,3)$، ثم أوجد طول العمود الساقط من b على خط عمل القوة، وكذلك المركبة الجبرية للقوة في إتجاه $\overrightarrow{ab}$.

(٣) القوى $\vec{F}_1 = \hat{i} + 3\hat{j}\ , \vec{F}_2 = \hat{i} + 2\hat{j}\ , \vec{F}_3 = \hat{i} - 4\hat{j}$ تؤثر في النقطة $a(-1,1)$، أوجد عزم محصلة هذه القوى حول النقطة $b(0,8)$ وكذلك طول العمود الساقط من النقطة b على خط عمل المحصلة.

(٤) قوتان $\vec{F}_1 = 14\hat{i} + 4\hat{j}\ ,\ \vec{F}_2 = \alpha\hat{i} + 6\hat{j}$، مجموع عزميهما حول نقطة الأصل o يساوي $(-40\hat{k})$ وحول النقطة $a(0,9)$ يساوي $(176\hat{k})$، أوجد محصلة القوتين مقداراً وإتجاهاً وأحسب طول العمود الساقط من نقطة الأصل على خط عمل محصلة القوتين.

(٥) إذا كانت القوة $\vec{F}_1 = 3\hat{i} + \alpha\hat{j}$ تؤثر في النقطة $a(-1,2)$ والقوة $\vec{F}_2 = \beta\hat{i} - 4\hat{j}$ تؤثر في النقطة $b(0,1)$، وكانت $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ تكونان إزدواجاً فأوجد، α, β وكذلك مقدار عزم الإزدواج.

(٦) كرة منتظمة ملساء وزنها 800 وحدة ونصف قطرها 30 معلقة من نقطة على سطحها بواسطة خيط طوله 20 مربوط طرفه الأخر في مسمار مثبت في حائط رأسي أملس، أثبت أنه في وضع التوازن يميل الخيط على الرأسي بزاوية ظلها $(\frac{3}{4})$ وأن رد فعل الحائط يساوي 600 وحدة ثم أوجد الشد في الخيط.

(٧) ab قضيب غير منتظم وزنه 150 وحدة يؤثر في النقطة d من القضيب. علق القضيب من طرفيه بخيط يمر على بكرة ملساء c فاتزن عندما كان $bc = \frac{1}{2} ac$ والزاوية $a\hat{b}c$ قائمة، أوجد الشد في الخيط وكذلك زاوية ميل القضيب على الأفقي.

(٨) ab قضيب وزنه 400 وحدة وطوله 120 ووزنه يؤثر في نقطة d على القضيب حيث $ad = 30$. علق هذا القضيب أفقياً بواسطة خيطين يتصل أحدهما بالطرف a والأخر بالطرف b فإذا كان الخيط عند a يصنع زاوية مقدارها $60°$ مع القضيب فأوجد مقدار الزاوية التي يصنعها الخيط عند b مع القضيب وكذلك مقدار الشد في كل من الخيطين.

(٩) $abcdef$ مسدس منتظم طول ضلعه 8، أثرت قوى مقاديرها $9, 5\sqrt{3}, 9, 5\sqrt{3}$ في $\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{bc}, \overrightarrow{df}, \overrightarrow{ef}$ على الترتيب، كما أثرت قوتان مقدارهما F, F في a, d في الإتجاهين $\overrightarrow{bf}, \overrightarrow{ec}$ على الترتيب فاتزنت المجموعة، أحسب قيمة F.

(١٠) $abcdef$ شكل سداسي منتظم طول ضلعه 20، أثرت قوى مقاديرها $100, 200, F_1, F_2, 500, 600$ في الإتجاهات $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc}, \overrightarrow{dc}, \overrightarrow{ed}, \overrightarrow{ef}, \overrightarrow{af}$ على الترتيب، فإذا كانت المجموعة تكافئ إزدواجاً فأوجد قيمتي F_1, F_2 وكذلك عزم الإزدواج مقداراً وإتجاهاً.

(١١) $abcd$ مستطيل فيه $ab = 4$, $bc = 8$، أثرت قوى مقاديرها $4, 9, 6, 5, 2\sqrt{5}$ في $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{cb}, \overrightarrow{cd}, \overrightarrow{ad}, \overrightarrow{ac}$ على الترتيب، أثبت أن هذه المجموعة من القوى تتزن مع إزدواج مقدار عزمه يساوي (12) ويعمل في الإتجاه $\overline{dcba}$.

(١٢) $abcd$ مربع طول ضلعه 20، أثرت القوى التي مقاديرها $1,2,1,8,2\sqrt{2},4\sqrt{2}$ في $\overrightarrow{ab},\overrightarrow{bc},\overrightarrow{dc},\overrightarrow{da},\overrightarrow{ac},\overrightarrow{bd}$ على الترتيب، أثبت أن هذه المجموعة من القوى تكافئ إزدواجاً وأوجد مقدار عزمه، ثم أوجد القوتين اللتان تعملان في b,d وتوازيان القطر $\overrightarrow{ac}$ لتصبح المجموعة في حالة إتزان.

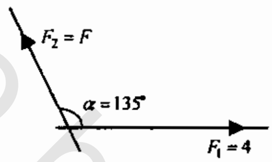
(١٣) مجموعة من القوى المستوية المجموع الجبري لمركباتها في الإتجاه x (ab) هو (5) وعزمها حول نقطة a هو $(100\sqrt{3})$ وحول نقطة b هو $(-50\sqrt{3})$ والمسافة $ab=30$، أوجد مقدار وإتجاه محصلة مجموعة القوى، وأوجد معادلة خط عملها ونقطة تقاطع هذا الخط مع ab (محور x).

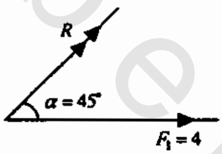
(١٤) ad قضيب غير منتظم يرتكز أفقياً على وتدين (حاملين) عند النقطتين b,c منه حيث $ab=bc=cd$، إذا علق من a ثقل مقداره 5 وحدات يصبح القضيب على وشك الدوران حول b، وإذا علق من d ثقل قدره 10 وحدات يصبح القضيب على وشك الدوران حول c، أوجد وزن القضيب وأثبت أن نقطة تأثير هذا الوزن تقسم ad بنسبة $4:5$.

(١٥) مجموعة من القوى المستوية تؤول إلى إزدواج عزمه $\vec{C}$، فإذا دارت كل قوة من قوى المجموعة حول نقطة تأثيرها بزاوية قائمة فإن عزم الإزدواج يصبح $\vec{D}$، أثبت أنه إذا دارت كل قوة من قوى المجموعة حول نقطة تأثيرها بزاوية مقدارها α فإن عزم الإزدواج الناتج يكون $\vec{M}$ حيث: $\vec{M}=\vec{C}\cos\alpha+\vec{D}\sin\alpha$.

حلول بعض المسائل

حل المسألة(١):





$$F_1 = 4\ ,\ F_2 = F$$

$$\theta = 45^\circ\ ,\ \alpha = 135^\circ$$

$$\tan\theta = \frac{F_2\sin\theta}{F_1 + F_2\cos\alpha}$$

$$\therefore \tan 45 = \frac{F\sin 135}{4 + F\cos 135}$$

$$\sin 135 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore 1 = \frac{F\times\sqrt{2}/2}{4 + F\times(-\sqrt{2}/2)}$$

$$\therefore 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}F = \frac{\sqrt{2}}{2}F \quad \therefore 4 = \sqrt{2}\,F \quad \therefore F = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

المحصلة:

$$R^2 = (4)^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2\times 4\times 2\sqrt{2}\cos 135^\circ = (2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore R = 2\sqrt{2}$$

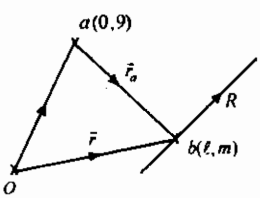
حل المسألة(٤):

$$\vec{F}_1 = 14\hat{i} + 4\hat{j}\quad ,\ \vec{F}_2 = \alpha\hat{i} + 6\hat{j}$$

المحصلة:

$$\vec{R} = (14+\alpha)\hat{i} + 10\hat{j}$$

نفرض أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة $b(\ell, m)$.



$$\vec{M}_0 = \vec{r}\wedge\vec{R} = -40\hat{k}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \ell & m & 0 \\ 14+\alpha & 10 & 0 \end{vmatrix} = -40\hat{k}$$

$$\therefore 10\ell - 14m - m\alpha = -40 \qquad \_\_\_\_(1)$$

أيضاً:

$$\vec{M}_a = \vec{r}_a \wedge \vec{R} = 176\,\hat{k}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \ell & m-9 & 0 \\ 14+\alpha & 10 & 0 \end{vmatrix} = 176\,\hat{k}$$

$$\therefore 10\ell - 14m - m\alpha + 126 + 9\alpha = 176 \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

من (2) ,(1) بالطرح:

$$126 + 9\alpha = 216 \rightarrow \boxed{\alpha = 10}$$

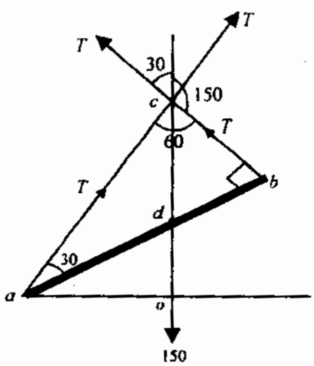
$$\therefore \vec{R} = (14+10)\hat{i} + 10\,\hat{j} = 24\,\hat{i} + 10\,\hat{j}$$

$$\therefore R = \sqrt{(24)^2 + (10)^2} = 26 \;\; , \;\; \tan\alpha = \frac{10}{24} = 0.416$$

ولإيجاد طول العمود ℓ الساقط من o على خط عمل المحصلة:

$$M_0 = R \times \ell \quad \therefore \ell = \frac{M_0}{R} = \frac{40}{26} = 1.54$$

حل المسألة(٧):



في حالة إتزان القضيب فإن

$$bc = \frac{1}{2} ac$$

والزاوية $a\hat{b}c = 90^\circ$ ، وبذلك فإن:

$$\sin a\hat{b}c = \frac{bc}{ac} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a\hat{b}c = 30^\circ$$

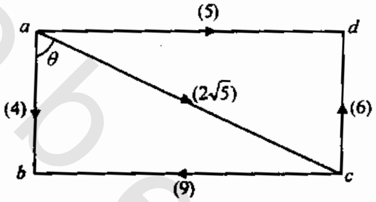
وحيث أن الخيط يمر على بكرة ملساء فإن الشد في جزئية أي في $\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ac}$ يكــون واحداً وليكن T.

بتطبيق قاعدة لامي:

$$\frac{T}{\sin 150} = \frac{150}{\sin 60}$$

$$\therefore \frac{T}{1/2} = \frac{150}{\sqrt{3}/2} \rightarrow T = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$$

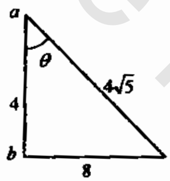
وحيث أن $\overline{cd}$ ينصف الزاوية $a\hat{b}c$ فإن: $o\hat{a}d = b\hat{c}d = 30^\circ$



<u>**حل المسألة(١١):**</u> مجموع القوى في إتجاه $\overrightarrow{ab}$:

$$= 4 + 2\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}) = 6$$

$\therefore$ القوتان (6), (6) تكافئان إزدواجاً عزمه



$$c_1 = 6 \times 8 = 48$$

مجموع القوى في إتجاه $\overrightarrow{ad}$:

$$= 5 + 2\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}) = 9$$

$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ القوتان (9), (9) تكافئان إزدواجاً عزمه:

$$c_2 = -9 \times 4 = -36$$

$\therefore$ عزم الإزدواج الكلي المكافئ للمجموعة:

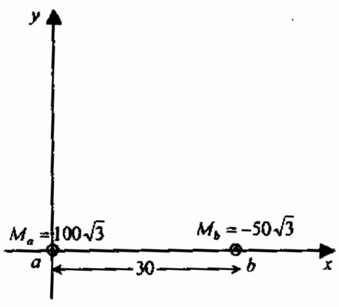
$$c = c_1 + c_2 = 48 - 36 = 12$$

ويعمل في الإتجاه الموجبة $\overline{abcd}$.

$\therefore$ هذه المجموعة تتزن مع إزدواج عزمه $= -12$ ويعمل في الإتجاه المعاكس

أي $\overline{dcba}$.

<u>**حل المسألة(١٣):**</u>



بأخذ ab يمثل محور x، a نقطة أصل

$\therefore R_x = 5$ ____(1)

معادلة خط عمل المحصلة

(بإعتبار أن $a \equiv 0$ $\leftarrow$ $\therefore M_0 = M_0 = 100\sqrt{3}$)

بالنسبة للنقطة a:

$$M_a = M_0 - (x_a R_y - y_a R_x) \qquad (2)$$

بالنسبة للنقطة b:

$$M_b = M_0 - (x_b R_y - y_b R_x) \qquad (3)$$

حيث: $(x_a , y_a) = (0,0)$ ، $(x_b , y_b) = (30,0)$

فمن (2): $100\sqrt{3} = 100\sqrt{3} - (0-0) = 100\sqrt{3}$

ومن (3): $-50\sqrt{3} = 100\sqrt{3} - (30R_y - 0)$

$$\therefore 30R_y = 150\sqrt{3} \rightarrow R_y = \frac{150\sqrt{3}}{30} = 5\sqrt{3} \qquad (4)$$

من (5) ,(1) تكون المحصلة: $\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} = 5\hat{i} + 5\sqrt{3}\,\hat{j}$

ويكون مقدارها: $R = \sqrt{(5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10$

واتجاهها: $\tan\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60^\circ$

معادلة خط عمل المحصلة: $M_0 = x R_y - y R_x$

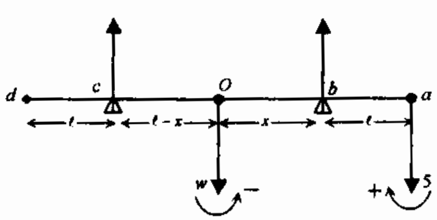
$$\therefore\ 100\sqrt{3} = x(5\sqrt{3}) - y(5) \rightarrow \sqrt{3}x - y = 20\sqrt{3} \qquad (6)$$

وهي معادلة خط مستقيم، ولإيجاد نقطة تقاطعها مع محور x:

نضع $y = 0 \rightarrow x = 20$

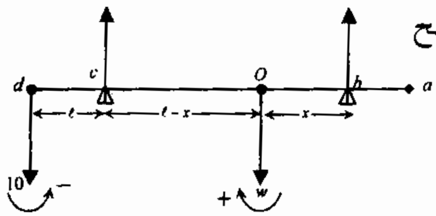
$\therefore$ خط عمل المحصلة يقطع محور x في النقطة $(20,0)$.

حل المسألة(١٤):



نفرض وزن القضيب يؤثر عند o، فعند تعليق الوزن (5) عند a: يصبح القضيب على وشك الدوران حول b، وبأخذ العزوم حول b:

$$5 \times \ell - w \times (x) = 0 \rightarrow 5\ell = wx \qquad (1)$$



عند تعليق الـوزن (10) عنـد d: يـصبح القضيب على وشك الدوران حول c.

فبأخذ العزوم حول c:

$$-10\times\ell + w\times(\ell - x) = 0 \to 10\ell = w(\ell - x) \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

من (2), (1) بالجمع:

$$\therefore\ w = 15 \ \leftarrow\ 15\ell = w\ell$$

ومن (1) $15\ell = w\ell \leftarrow x = \frac{1}{3}\ell$

$$\therefore\ \frac{ao}{od} = \frac{\ell + 1/3\,\ell}{\ell + 2/3\,\ell} = \frac{4/3\,\ell}{5/3\,\ell} = \frac{4}{5}$$

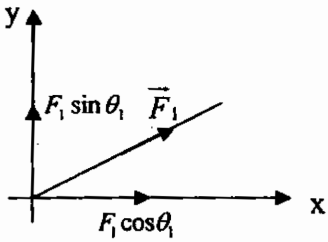
وهو المطلوب.

حل المسألة(١٥):

نفرض أن القوى المعطاة (قوى مستوية) هي: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots, \vec{F}_n$،

متجهات موضعها هي : $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \cdots, \vec{r}_n$

يمكن تحليل كل قوة من هذه القوى إلى مركبتين أحدهما أفقيه والأخرى رأسية بحيث أن :



$$\vec{F}_1 = F_1\cos\theta_1\hat{i} + F_1\sin\theta_1\hat{j}$$
$$\vec{F}_2 = F_2\cos\theta_2\hat{i} + F_2\sin\theta_2\hat{j}$$
$$\vdots$$
$$\vec{F}_n = F_n\cos\theta_n\hat{i} + F_n\sin\theta_n\hat{j}$$

وإذا آلت هذه المجموعة إلى ازدواج فإن عزمه حول نقطة الأصل هو :

$$\vec{C} = \sum_{n=1}(\vec{r}_n \wedge \vec{F}_n) = \sum F_n\left(\vec{r}_n \wedge (\cos\theta_n\,\hat{i} + \sin\theta_n\,\hat{j})\right) \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

إذا دارت المجموعة المعطاة خلال زاوية قائمة فإن : $\theta'_n = \theta_n + \frac{\pi}{2}$

ويكون العزم حينئذ :

$$\overline{D} = \sum F_n \left[\vec{r}_n \wedge (\cos n\theta'_n \,\hat{i} + \sin \theta'_n \,\hat{j})\right]$$
$$= \sum F_n \left[\vec{r}_n \wedge (\cos(\theta_n + \frac{\pi}{2})\hat{i} + \sin(\theta_n + \frac{\pi}{2})\hat{j})\right]$$
$$= \sum F_n \left[\vec{r}_n \wedge (-\sin \theta_n \hat{i} + \cos \theta_n \hat{j})\right] \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

وإذا دارت المجموعة خلال زاوية α فإن : $\theta''_n = \theta_n + \alpha$

ويكون العزم في هذه الحالة :

$$\overline{M} = \sum F_n [\vec{r}_n \wedge \{(\cos\theta''_n \hat{i} + \sin\theta''_n \hat{j})\}]$$
$$= \sum F_n [\vec{r}_n \wedge \{(\cos(\theta_n + \alpha)\hat{i} + \sin(\theta_n + \alpha)\hat{j}\}]$$
$$= \sum F_n [r_n \wedge \{(\cos\theta_n \cos\alpha - \sin\theta_n \sin\alpha)\hat{i} + (\sin\theta_n \cos\alpha + \cos\theta_n \sin\alpha)\hat{j}\}]$$
$$= \sum F_n [\cos\alpha \,\vec{r}_n \wedge (\cos\theta_n \hat{i} + \sin\theta_n \hat{j}) + \sin\alpha \,\vec{r}_n \wedge (\cos\theta_n \hat{j} - \sin\theta_n \hat{i})] \quad (3)$$

وباستخدام (2) ,(1) نجد أن (3) تؤول إلى :

$$\overline{M} = \overline{C}\cos\alpha + \overline{D}\sin\alpha$$

وهو المطلوب .