الباب الثالث

الاستاتيكا الفراغية

في هذا الفرع من علم الاستاتيكا ندرس القوى المؤثرة على الأجسام في ثلاثة أبعاد. وتطبق سائر القوانين المستخدمة في الاستاتيكا المستوية عند الإنتقال إلى حالة الفراغ (الأبعاد الثلاثة) مع التعميم.

فمثلاً:

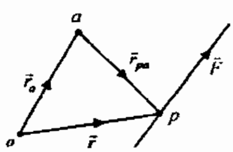
[١] القــوة: $\vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$

مقداراً: $F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

اتجاهاً: $\cos\alpha = \dfrac{F_x}{F}\,,\ \cos\beta = \dfrac{F_y}{F}\,,\ \cos\gamma = \dfrac{F_z}{F}$

[٢] العزوم:

(أ) عزم قوة حول نقطة الأصل o:



$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

(ب) عزم قوة حول أي نقطة a غير نقطة الأصل: $\vec{M}_a = \vec{r}_{pa} \wedge \vec{F}$

حيث $\vec{r}_{pa} = \vec{r} - \vec{r}_a$ $\leftarrow$ $\boxed{\vec{M}_a = \vec{M}_o - \vec{r}_a \wedge \vec{F}}$

[٣] شروط الاتزان: أي جسم يكون متزناً تحت تأثير مجموعة من القوى الفراغية (في الفراغ) إذا تحقق الشرطان:

(أ) محصلة القوى: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$

(ب) مجموع العزوم حول أي نقطة: $\sum \vec{M}_a = 0$

[٤] <u>إختزال مجموعات القوى</u>: يمكن إختزال مجموعات القوى إلى الحالات الآتية:

(١) الإختزال إلى قوة محصلة: $\vec{F} \neq 0 \rightarrow \vec{F}' = \vec{F}$

(٢) الإختزال إلى إزدواج: $\vec{F} = 0 \;,\; \vec{M}_o \neq 0 = \vec{C}$

حيث $\vec{C}$ عزم الإزدواج الذي تختزل إليه المجموعة

(٣) الإختزال إلى مجموعة متزنة: $\vec{F} = 0 \,,\, \vec{M}_o = 0$

وفي الاستاتيكا الفراغية (تعميم للاستاتيكا المستوية) ندرس ثلاث حالات أخرى من حالات إختزال مجموعات القوى هي:

(٤) <u>الإختزال إلى مجموعة محصلة</u>: وفيها تختزل المجموعة المعطاه إلى مجموعة محصلة تتكون من:

(أ) قوة واحدة تؤثر عند نقطة معينة $(\vec{F}')$ حيث $\vec{F}' = \vec{F}$

(ب) إزدواج عزمه $= \vec{C}'$ حيث: $\vec{C}' = \vec{M}_o - \vec{r}_a \wedge \vec{F}$

(٥) <u>الإختزال إلى مجموعة القوة الوحيدة</u>: وفيها تختزل المجموعة المعطاة إلى مجموعة القوة الوحيدة التي تتكون من:

(أ) قوة وحيدة $\vec{F}'$ بحيث $\vec{F}' = \vec{F}$

(ب) إزدواج عزمه متلاشى: $\vec{C}' = 0$، أي أن المجموعة الجديدة يتلاشى فيها عزم الإزدواج.

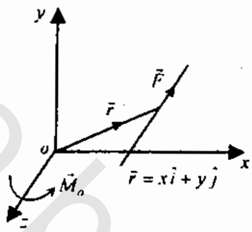
$$\therefore \vec{C}' = \vec{M}_o - \vec{r}_a \wedge \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{M}_o = \vec{r}_a \wedge \vec{F}}$$

وهذا يعني أن $\vec{M}_o$ تكون عمودية على كل من $\vec{F}\,,\,\vec{r}_a$، وشرط تعامد $\vec{M}_o$ مع $\vec{F}$ هو

$$\boxed{\vec{F} \cdot \vec{M}_o = 0}$$

وهو شرط الإختزال إلى مجموعة القوة الوحيدة.

ملاحظة هامة: شرط إختزال مجموعة القوى إلى مجموعة القوى الوحيدة أي الشرط $\vec{F}\cdot\vec{M}_o=0$ يتحقق في حالتين.



(أ) حالة القوى المستوية:

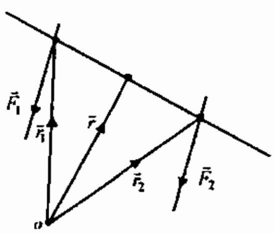
$$\vec{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}$$

$$\vec{M}_o=\vec{r}\wedge\vec{F}$$

$\vec{M}_o$ تكون عمودية على كل من $\vec{r},\vec{F}$ أي على المستوى xy، أي في إتجاه محور z.

$$\therefore\ \vec{F}\cdot\vec{M}_o=0$$

وهو شرط مجموعة القوة الوحيدة.



(ب) حالة القوى المتوازية:

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$$

$$M_o=\vec{r}_1\wedge\vec{F}_1+\vec{r}_2\wedge\vec{F}_2$$

وإذا كانت $\vec{r}$ هي متجه موضع محصلة القوتين فإن:

$$\vec{M}_o=\vec{r}\wedge\vec{F}=\vec{r}\wedge(\vec{F}_1+\vec{F}_2)$$

$$\therefore\ \vec{F}\cdot\vec{M}_o=\vec{F}\cdot(\vec{r}\wedge\vec{F})=0$$

(٦) **مجموعة اللولبية (البريمية):**

إذا أعطيت مجموعة من القوى والإزدواجات فإنه يمكن إختزالها إلى ما يعرف باللولبية (وهي الحالة السادسة من حالات الإختزال لمجموعات القوى).

تتكون مجموعة اللولبية من:

(١) **قوة اللولبية**: وهي عبارة عن قوة تساوي محصلة القوى المعطاة $\vec{F}'=\sum\vec{F}$ وتؤثر عند نقطة معينة Q: $\vec{\rho}=\vec{r}_Q$.

(٢) **إزدواج اللولبية**: عزمه $\vec{C}'$ في إتجاه $\vec{F}'$ أو مواز له حيث $\vec{C}'=\ell\vec{F}'$ ℓ ثابت يسمى خطوة اللولبية.

لتحديد اللولبية تحديداً تاماً يلزمنا تعيين:

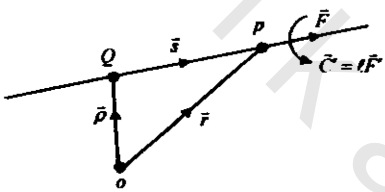
(١) خطوة اللولبية ℓ وتعطي بالعلاقة:

$$\ell = \frac{\vec{F} \cdot \overline{M}_O}{F^2} \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

(٢) نقطة تأثير قوة اللولبية $(\vec{F})$ وتعطي بالعلاقة:

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{F} \wedge \overline{M}_O}{F^2} \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

<u>الإثبات</u>: حيث أن $\vec{C}' = \vec{M}_o - \vec{r} \wedge \vec{F}$ فبوضع $\vec{C}' = \ell \vec{F}$



$$\therefore \ell\vec{F} = \vec{M}_o - \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\therefore \vec{M}_o = \ell \vec{F} + \vec{r} \wedge \vec{F}$$

وبضرب الطرفين قياسياً في $\vec{F}$:

$$\therefore \vec{F} \cdot \vec{M}_o = \ell(\vec{F} \cdot \vec{F}) + \vec{F} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{F}) = \ell\ F^2 + 0 \quad \therefore \ell = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M}_o}{F^2} \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

أيضاً: إذا كانت $\vec{\rho}$ متجه موضع نقطة Q على خط عمل $\vec{F}$ ولكنه عمودي على إتجاه $\vec{F}$ بمعنى أن: $\vec{\rho} \cdot \vec{F} = 0$

فمن السهل إثبات أن $\vec{\rho}$ متجه موضع نقطة التأثير Q للقوة $\vec{F}$ والذي هو عمودي على إتجاه القوة، يعطي بالعلاقة:

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{F} \wedge \vec{M}_o}{F^2} \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

فمن الشكل نجد أن: $\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{s} = \vec{\rho} + \lambda \vec{F}$

حيث λ عدد قياسي، $\lambda\vec{F}$ متجه يوازي للقوة $\vec{F}$.

$$\therefore \vec{M}_o = \ell \vec{F} + (\vec{\rho} \wedge \lambda\vec{F}) \wedge \vec{F} = \ell\vec{F} + \vec{\rho} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{F} \wedge \vec{M}_o = \ell(\vec{F} \wedge \vec{F}) + \vec{F} \wedge (\vec{\rho} \wedge \vec{F}) = \vec{F} \wedge (\vec{\rho} \wedge \vec{F})$$

$$= (\vec{F} \cdot \vec{F})\,\vec{\rho} - (\vec{F} \cdot \vec{\rho})\vec{F} = F^2\,\vec{\rho} \to \vec{\rho} = \frac{\vec{F} \wedge \vec{M}_o}{F^2}$$

<u>ملخص</u>: <u>حالات إختزال مجموعات القوى</u>:

(١) قوة محصلة: $\vec{F} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \vec{F}' = \vec{F}$

(٢) إزدواج: $\vec{F} = 0 \ , \ \vec{M}_0 \neq 0 \ \rightarrow \vec{M}_0 = \vec{C}$

(٣) إتزان: $\vec{F} = 0 \ , \ \vec{M}_0 = 0$

(٤) المجموعة المحصلة: $\vec{F} \neq 0 \ \rightarrow \vec{F}' = \vec{F}$

$$\vec{C}' \neq 0 \rightarrow \vec{C}' = \vec{C} = \vec{M}_a = \vec{M}_0 - \vec{r}_a \wedge \vec{F}$$

(٥) القوة الوحيدة: $\vec{F} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \vec{F}' = \vec{F}$

$$\vec{C}' = 0$$

وشرط ذلك هو: $\boxed{\vec{F} \cdot \vec{M}_0 = 0}$

وينطبق ذلك على: (١) القوى المستوية، (٢) القوى المتوازية

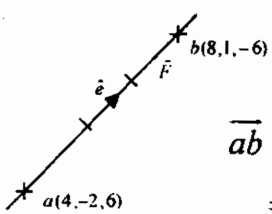
(٦) مجموعة اللولبية: ويلزمنا لتحديدها تعيين:

(أ) خطوة اللولبية ← $\ell = \dfrac{\vec{F} \cdot \vec{M}_o}{F^2}$

(ب) نقطة تأثير $\vec{F}$ ← $\rho = \dfrac{\vec{F} \wedge \vec{M}_o}{F^2}$

<u>أمثلة محلولة على الاستاتيكا الفراغية:</u>

<u>مثال(١):</u> أوجد متجه القوة التي مقدارها $F = 26$ والتي تؤثر في المستقيم الواصل بين النقطتين $a(4,-2,6)\ ,\ b(8,1,-6)$.



<u>الحل</u>: المستقيم $\overline{ab}$ يمثل خط عمل القوة

$$\overline{ab} = [8-4]\hat{i} + [1-(-2)]\hat{j} + [-6-6]\hat{k}$$

$$= 4\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k}$$

متجه الوحدة في إتجاه $\overline{ab}$ وليكن $\hat{e}$

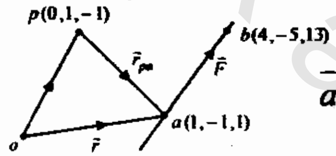
$$\hat{e} = \frac{\overrightarrow{ab}}{|\overrightarrow{ab}|} = \frac{4\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k}}{\sqrt{16+9+144}} = \frac{4}{13}\hat{i} + \frac{3}{13}\hat{j} - \frac{12}{13}\hat{k}$$

$\therefore$ القوة F كمتجه تكون:

$$\overline{F} = F\,\hat{e} = 26[\frac{4}{13}\hat{i} + \frac{3}{13}\hat{j} - \frac{12}{13}\hat{k}]$$
$$= 8\hat{i} + 6\hat{j} - 24\hat{k}$$

وهو المطلوب.

مثال(٢): قوة مقدارها $F = 10$ تؤثر في المستقيم الواصل بين النقطتين $b(4,-5,13)$, $a(1,-1,1)$. أوجد عزم هذه القوة حول نقطة الأصل o وحول النقطة $p(0,1,-1)$.



الحل:

$$\overrightarrow{ab} = [4-1]\hat{i} + [-5-(-1)]\hat{j} + [13-1]\hat{k}$$
$$= 3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$$

متجه الوحدة في إتجاه $\overrightarrow{ab}$

$$\hat{e} = \frac{\overrightarrow{ab}}{|\overrightarrow{ab}|} = \frac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}}{\sqrt{9+16+144}} = \frac{3}{13}\hat{i} - \frac{4}{13}\hat{j} + \frac{12}{13}\hat{k}$$

ويصبح متجه القوة بالصورة:

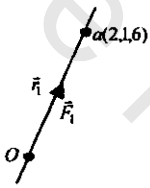
$$\overline{F} = F\,\hat{e} = 10[\frac{3}{13}\hat{i} - \frac{4}{13}\hat{j} + \frac{12}{13}\hat{k}]$$
$$= \frac{30}{13}\hat{i} - \frac{40}{13}\hat{j} + \frac{120}{13}\hat{k}$$

ولإيجاد العزم حول كل من o, p:

$$\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$
$$\vec{r}_{ap} = [1-0]\hat{i} + [-1-1]\hat{j} + [1-(-1)]\hat{k} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad , \quad \vec{M}_p = \vec{r}_{ap} \wedge \vec{F}$$

$$\therefore \vec{M}_p = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ \frac{30}{13} & -\frac{40}{13} & \frac{120}{13} \end{vmatrix} = \frac{20}{13} - (-8\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$$

<u>مثال(٣):</u> ثلاث قوى مقاديرها 20,15,30 متلاقية في نقطة الأصل o وتتجه نحو النقط التي إحداثياتها $(-3,-2,1)$, $(4,-2,5)$, $(2,1,6)$. أوجد محصلة (القوة المحصلة) لهذه المجموعة من القوى.



<u>الحل</u>: هذا المثال على الحالة الأولى من حالات الإختزال.

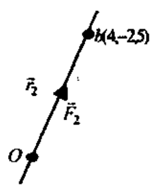
<u>القوة الأولى</u>: $F_1 = 20$

وخط عملها (الخط الذي تؤثر فيه القوة) هو:

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{oa} = 2\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\vec{F}_1 = F_1\,\hat{e}_{r_1} = 20[\frac{2\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}}{\sqrt{4+1+36}}] = \frac{40}{\sqrt{41}}\hat{i} + \frac{20}{\sqrt{41}}\hat{j} + \frac{120}{\sqrt{41}}\hat{k} \qquad \_\_\_(1)$$

<u>القوة الثانية</u>: $F_2 = 15$

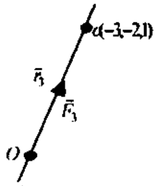


وتؤثر في الخط $\overrightarrow{ob}$ حيث:

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{ob} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore \vec{F}_2 = F_2\,\hat{e}_{r_2} = 15[\frac{4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{16+4+25}}] = \frac{60}{\sqrt{45}}\hat{i} - \frac{30}{\sqrt{45}}\hat{j} + \frac{75}{\sqrt{45}}\hat{k} \qquad \_\_\_(2)$$

<u>القوة الثالثة</u>: $F_3 = 30$



وتؤثر في الخط $\overrightarrow{oc}$ حيث:

$$\vec{r}_3 = \overrightarrow{oc} = -3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

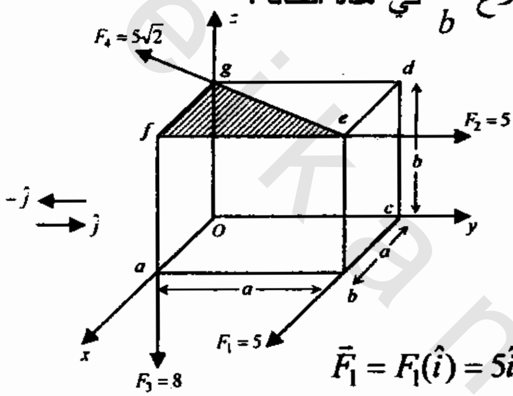
$$\therefore \vec{F}_3 = F_3\,\hat{e}_{r_3} = 30[\frac{-3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{9+4+1}}] = -\frac{90}{\sqrt{14}}\hat{i} - \frac{60}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{30}{\sqrt{14}}\hat{k} \qquad \_\_\_(3)$$

وتكون محصلة هذه القوى هي:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (14.389)\,\hat{i} - (1.883)\,\hat{j} + (19.753)\,\hat{k}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٤):</u> أوجد محصلة القوى الأربع المؤثرة على متوازي المستطيلات والمبينة بالشكل. ما هي القوة الواجب إضافتها عند الركن o من المتوازي حتى نصل إلى حالة الإتزان، وأوجد نسبة الأضلاع $\frac{a}{b}$ في هذه الحالة.



الحل:

الجزء الأول: على المحصلة

الجزء الثاني: على الإتزان

القوى المؤثرة:

$\vec{F}_1$ موازية لمحور x ومقدارها 5

$$\vec{F}_1 = F_1(\hat{i}) = 5\hat{i} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

$\vec{F}_2$ موازية لمحور y ومقدارها 5

$$\vec{F}_2 = F_2(\hat{j}) = 5\hat{j} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

$\vec{F}_3$ موازية لمحور z (إلى أسفل) ومقدارها 8

$$\vec{F}_3 = \hat{8}(-\hat{k}) = -8\hat{k} \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

$\vec{F}_4$ تؤثر في $\overline{eg}$ ومقدارها $5\sqrt{2}$:

$$\overline{eg} = \overline{ef} + \overline{fg} = -a\,\hat{j} - a\,\hat{i} = -a(\hat{i} + \hat{j})$$

$$\vec{F}_4 = F_4\,\hat{e}_{eg} = 5\sqrt{2}\,[\frac{-a(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{a^2+a^2}}] = -5\sqrt{2}\,\frac{a(\hat{i}+\hat{j})}{a\sqrt{2}} = -5(\hat{i}+\hat{j}) \qquad \_\_\_(4)$$

محصلة القوى:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 5\hat{i} + 5\hat{j} + (-8\hat{k}) + [-5\hat{i} - 5\hat{j}) = -8\hat{k}$$

∴ محصلة مجموعة القوى المؤثرة مقدارها $F = |\vec{F}| = 8$ واتجاهها هو إتجاه محور z إلى أسفل $(-\hat{k})$.

المطلوب الثاني:

نفرض أن القوة الواجب إضافتها عند o حتى يصل المتوازي إلى حالة الإتزان هي $\vec{p}$ فمن شرط الإتزان الأول:

$$\vec{F} + \vec{p} = 0$$

$$\therefore \vec{p} = -\vec{F} = -(-8\hat{k}) = 8\hat{k}$$

ومن الشرط الثاني للإتزان: مجموع العزوم حول o = صفر

$$\vec{M}_0 = 0$$

يمكن إيجاد النسبة $\frac{a}{b}$ كالتالي:

نوجد أولاً متجهات المواضع: $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ لنقط تأثير القوى الأربع: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$

(١) القوة $\vec{F}_1 = 5\hat{i}$ نقطة تأثيرها c حيث: $\vec{r}_1 = \overrightarrow{oc} = a\,\hat{j}$

(٢) القوة $\vec{F}_2 = 5\,\hat{j}$ نقطة تأثيرها f حيث: $\vec{r}_2 = \overrightarrow{of} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{af} = a\,\hat{j} + b\,\hat{k}$

(٣) القوة $\vec{F}_3 = -8\hat{k}$ نقطة تأثيرها a حيث: $\vec{r}_3 = \overrightarrow{oa} = a\,\hat{i}$

(٤) القوة $\vec{F}_4 = -5\,\hat{i} - 5\,\hat{j}$ نقطة تأثيرها g حيث: $\vec{r}_4 = \overrightarrow{og} = b\,\hat{k}$

وحيث أن مجموع العزوم حول o = صفر (حالة الإتزان).

$$\vec{M}_o = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \wedge \vec{F}_4 = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & a & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & 0 & b \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & b \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore -5a\hat{k} - 5b\hat{i} + 5a\hat{k} + 8a\hat{j} + 5b\hat{i} - 5b\hat{j} = 0$

$\therefore 8a\hat{j} - 5b\hat{j} = 0$

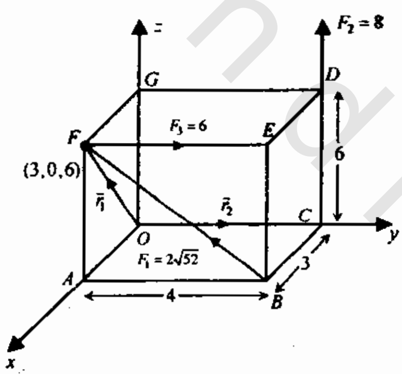
$\therefore (8a - 5b)\,\hat{j} = 0$

$\therefore 8a - 5b = 0 \qquad \rightarrow \qquad 8a = 5b$

$\therefore \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{8}$

وهو المطلوب.

مثال(٥): متوازي مستطيلات أبعاده(4,3,6)ft ،أثرت فيه القوى الثلاث المبينة بالشكل ، أوجد محصلة هذه المجموعة من القوى وكذلك عزمها المحصل حول نقطة الأصل . أوجد أيضا القوة $\overline{P}$ والازدواج C اللازم إضافتها عند نقطة O حتى يتزن هذا الشكل .



الحل:

القوى الثلاث المؤثرة هي :

(١) القوة $\overline{F_1}$: مقدارها $2\sqrt{52}$ وتؤثر في المستقيم $\overrightarrow{BF}$

حيث : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = -4\hat{j} + 6\hat{k}$

ويكون متجه الوحدة في اتجاهها :

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{BF}}{\left|\overrightarrow{BF}\right|} = \frac{-4\hat{j} + 6\hat{k}}{\sqrt{16+36}} = \frac{-4\hat{j} + 6\hat{k}}{\sqrt{52}}$$

$$\therefore \overline{F}_1 = (2\sqrt{52})(\frac{-4\hat{j}+6\hat{k}}{\sqrt{52}}) = -8\hat{j}+12\hat{k}$$

وتؤثر عند النقطة F حيث :

$$\vec{r}_1 = 3\hat{i}+6\hat{k}$$

(٢) القوة $\overline{F}_2$: مقدارها 8 وفي اتجاه محور z أي أن $\overline{F}_2 = 8\hat{k}$ وتؤثر في النقطة C حيث : $\vec{r}_2 = \overline{OC} = 4\hat{j}$

(٣) القوة $\overline{F}_3$: مقدارها 6 وموازية لمحور y أي أن $\overline{F}_3 = 6\hat{j}$ وتؤثر في النقطة F حيث : $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 = 3\hat{i}+6\hat{k}$

محصلة مجموعة القوى :

$$\overline{F} = \overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3 = -8\hat{j}+12\hat{k}+8\hat{k}+6\hat{j} = -2\hat{j}+20\hat{k} \qquad \_\_\_\_(1)$$

مجموع العزوم حول نقطة الأصل O :

$$\overline{M}_O = \vec{r}_1 \wedge \overline{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \overline{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \overline{F}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -8 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 44\hat{i} - 36\hat{j} - 6\hat{k} \qquad \_\_\_\_(2)$$

وإذا كانت $\overline{P}$ هي القوة المطلوب إضافتها ، $\overline{C}$ هو الازدواج اللازم إضافته عند نقطة O حتى يتزن متوازي المستطيلات المعطى فإن :

$$\overline{P}+\overline{F} = 0 \qquad \_\_\_\_(3)$$

$$\overline{C}+\overline{M}_O = 0 \qquad \_\_\_\_(4)$$

من (1),(3) : $\therefore \overline{P} = -\overline{F} = 2\hat{j} - 20\hat{k}$

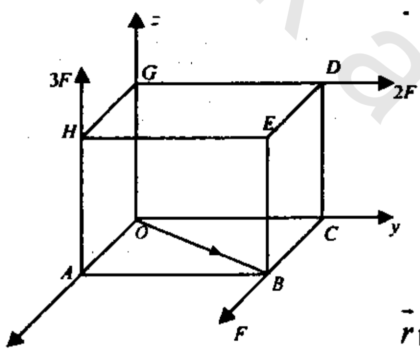
من(2),(4) : $\therefore \overline{C} = -\overline{M}_O = -44\hat{i}+36\hat{j}+6\hat{k}$

وهو المطلوب .

مثال(٦) : ثلاث قوى مقاديرها $\overrightarrow{F}$,$2\overrightarrow{F}$,$3\overrightarrow{F}$ تؤثر في ثلاثة أحرف مختلفة من مكعب طول ضلعه α كما بين في الشكل . اختزل المجموعة إلى مجموعة محصلة تتكون من قوة وحيدة تؤثر عند نقطة B وازدواج عزمه $\overrightarrow{C'}$.

وإذا كانت هذه القوة تمر بنقطة الأصل O فأوجد المجموعة المحصلة المكافئة في هذه الحالة .

الحل : هذا المثال على الحالة الرابعة حيث تتكون المجموعة المحصلة من قوة واحدة $\overrightarrow{F'}$ هي محصلة القوى المعطاة $\overrightarrow{F'}=\overrightarrow{F}$ وازدواج عزمه $\overrightarrow{C^1}$ يعطى من العلاقة $\overrightarrow{C'}=\overrightarrow{M_O}-\vec{r}\wedge\overrightarrow{F}$ حيث $\overrightarrow{M_O}$ تمثل العزوم حول O وحيث $\vec{r}$ نقطة تأثير القوة $\overrightarrow{F}$.



نوجد أولا القوى المؤثرة :

(١) $\overrightarrow{F_1}$: مقدارها F وتوازي محور x

أي أن : $\overrightarrow{F_1}=F\hat{i}$

وتؤثر عند نقطة C حيث :

$\vec{r}_1=\overrightarrow{OC}=a\,\hat{j}$

(٢) $\overrightarrow{F_2}$: مقدارها $2F$ وتوازي محور y

أي أن : $\overrightarrow{F_2}=2F\hat{j}$ وتؤثر عند نقطة G حيث :

$\vec{r}_2=\overrightarrow{OG}=\alpha\hat{k}$

(٣) $\overrightarrow{F_3}$: مقدارها $3F$ وتوازي محور z

أي أن : $\overrightarrow{F_3}=3F\hat{k}$ وتؤثر عند نقطة A حيث :

$\vec{r}_3=\overrightarrow{OA}=\alpha\hat{i}$

$$\overrightarrow{F'}=\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{F}_2+\overrightarrow{F}_3=F\hat{i}+2F\hat{j}+3F\hat{k}$$
$$=F(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$$

وتؤثر عند نقطة B حيث :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = a\hat{i} + a\hat{j} = a(\hat{i} + \hat{j})$$

أو عند نقطة O (الحالة الثانية) حيث $\vec{r} = \vec{O}$

مجموع العزوم حول نقطة الأصل هو $\vec{M}_O$ حيث :

$$\overrightarrow{M}_o = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & a & 0 \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 2F & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3F \end{vmatrix}$$

$$= -aF(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$

الازدواج $\overrightarrow{C'}$ يعطى من :

إذا كانت القوة تؤثر عند B :

$$\overrightarrow{C'} = \overrightarrow{M}_O - \vec{r} \wedge \vec{F}$$

إذا كانت القوة تؤثر عند O :

$$\overrightarrow{C'} = \overrightarrow{M}_O$$

ففي الحالة الأولى:

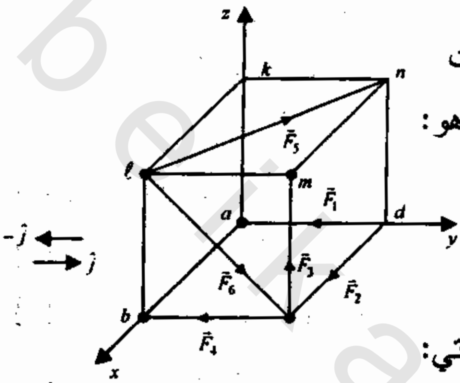
$$\overrightarrow{C'} = -aF(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & a & 0 \\ F & 2F & 3F \end{vmatrix}$$

$$= -aF(5\hat{i} + 2\hat{k})$$

وفي الحالة الثانية :

$$\overrightarrow{C'} = -aF(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$

<u>مثال(٧):</u> $abcdk\ell mn$ مكعب طول ضلعه a، تؤثر عليه القوى الست المبينة بالشكل، حيث مقدار كل من القوى الأربع الأولى هو F ومقدار كل من القوتين الخامسة والسادسة هو $\sqrt{2}F$. أثبت أن هذه المجموعة من القوى يمكن إختزالها (أو أنها تكافئ) إزدواجاً $\vec{c}$ وأوجد عزمه.



<u>الحل:</u> هذا المثال على الحالة الثانية من حالات إختزال المجموعات وشرط الإختزال هنا هو:

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \_\_\_(1)$$
$$\sum \vec{M}_o \neq 0 = \vec{c} \qquad \_\_\_(2)$$

بأخذ a كنقطة أصل.

ونكتب القوى الست في صورة إتجاهية كالآتي:

(١) $: F_1$ $\quad \vec{F}_1 = F(-\hat{j}) = -F\,\hat{j}$ $\quad [\vec{F}_1 //$ محور $y]$

(٢) $: F_2$ $\quad \vec{F}_2 = F(\hat{i}) = F\,\hat{i}$ $\quad [\vec{F}_2 //$ محور $x]$

(٣) $: F_3$ $\quad \vec{F}_3 = F(\hat{k}) = F\,\hat{k}$ $\quad [\vec{F}_3 //$ محور $z]$

(٤) $: F_4$ $\quad \vec{F}_4 = F(-\hat{j}) = -F\,\hat{j}$ $\quad [\vec{F}_4 //$ محور $y]$

(٥) $: F_5$ مقدارها $\sqrt{2}\,F$ وتؤثر في $\overrightarrow{\ell n}$ حيث:

$$\overrightarrow{\ell n} = \overrightarrow{\ell m} + \overrightarrow{mn} = a\hat{j} + (-a\,\hat{i}) = -a\hat{i} + a\hat{j}$$

$$\vec{F}_5 = F_5\,\hat{e}_{\ell n} = \sqrt{2}\,F\left[\frac{-a\hat{i} + a\hat{j}}{\sqrt{a^2 + a^2}}\right] = \sqrt{2}\,F\left[\frac{a(-\hat{i} + \hat{j})}{a\sqrt{2}}\right] = F(-\hat{i} + \hat{j})$$

(٦) $: F_6$ مقدارها $\sqrt{2}\,F$ وتؤثر في $\overrightarrow{\ell c}$ حيث:

$$\overrightarrow{\ell c} = \overrightarrow{\ell b} + \overrightarrow{bc} = -a\hat{k} + a\hat{j}$$

$$\vec{F}_6 = F_6\,\hat{e}_{\ell c} = \sqrt{2}\,F\left[\frac{-a\hat{k} + a\hat{j}}{\sqrt{a^2 + a^2}}\right] = \sqrt{2}\,F\left[\frac{a(-\hat{k} + \hat{j})}{a\sqrt{2}}\right] = F(-\hat{k} + \hat{j})$$

نوجد محصلة القوى الست:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6$$
$$= -F\hat{j} + F\hat{i} + F\hat{k} - F\hat{j} + F(-\hat{i} + \hat{j}) + F(-\hat{k} + \hat{j})$$
$$= -F\hat{j} + F\hat{i} + F\hat{k} - F\hat{j} - F\hat{i} + F\hat{j} - F\hat{k} + F\hat{j} = 0$$

وهو الشرط الأول.

والمطلوب الآن تطبيق الشرط الثاني: $\sum \vec{M}_a \neq 0 \rightarrow \sum \vec{M}_a = \vec{c}$

حيث $\vec{c}$ عزم الإزدواج الذي تختزل إليه المجموعة.

$$\sum \vec{M}_a = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \wedge \vec{F}_4 + \vec{r}_5 \wedge \vec{F}_5 + \vec{r}_6 \wedge \vec{F}_6$$

والمطلوب هنا هو إيجاد $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4, \vec{r}_5, \vec{r}_6$

(١) $\vec{r}_1$: $\vec{F}_1$ تمر بنقطة الأصل a $\leftarrow$ $\vec{r}_1 = 0$

(٢) $\vec{r}_2$: $\vec{F}_2$ تؤثر في d $\leftarrow$ $\vec{r}_2 = \overrightarrow{ad} = a\hat{j}$

(٣) $\vec{r}_3$: $\vec{F}_3$ تؤثر في c $\leftarrow$ $\vec{r}_3 = \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc} = a\hat{j} + a\hat{i}$

(٤) $\vec{r}_4$: $\vec{F}_4$ تؤثر في b $\leftarrow$ $\vec{r}_4 = \overrightarrow{ab} = a\hat{i}$

(٥) $\vec{r}_5$: $\vec{F}_5$ تؤثر في ℓ $\leftarrow$ $\vec{r}_5 = \overrightarrow{a\ell} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{b\ell} = a\hat{i} + a\hat{k}$

(٦) $\vec{r}_6$: $\vec{F}_6$ تؤثر في c $\leftarrow$ $\vec{r}_6 = \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc} = a\hat{j} + a\hat{i}$

$$\therefore \sum \vec{M}_a = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & a & 0 \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & -F & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & 0 & a \\ -F & F & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & F & -F \end{vmatrix}$$
$$= 0 + (-aF)\hat{k} + (aF)\hat{i} - \hat{j}(aF) + \hat{k}(-aF) + \hat{i}(-aF)$$
$$- \hat{j}(aF) + \hat{k}(aF) + \hat{i}(-aF) - \hat{j}(-aF) + \hat{k}(aF)$$
$$= -aF\,\hat{j} - aF\hat{i} = -aF(\hat{i} + \hat{j}) \neq 0$$

$$\therefore \sum \vec{M}_a = -aF(\hat{i} + \hat{j}) = \vec{c}$$

وهذا يعني أن المجموعة تختزل إلى إزدواج عزمه $\vec{c}$ حيث

$$\vec{c} = -aF(\hat{i} + \hat{j})$$

مثال(٨): أختزل المجموعة الآتية من القوى والإزدواجات:

(١) $\vec{F}_1 = 2\hat{i} - \hat{k}$ وتؤثر في النقطة $\vec{r}_1 = 3\hat{j}$

(٢) $\vec{F}_2 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ وتؤثر في النقطة $\vec{r}_2 = \hat{i} - 2\hat{j}$

(٣) $\vec{F}_3 = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ وتؤثر في النقطة $\vec{r}_3 = \hat{i} + \hat{j}$

(٤) الإزدواج الذي عزمه $\vec{c} = 8\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

إلى مجموعة محصلة تتكون من قوة وحيدة تؤثر عند النقطة $\vec{r}_a = \hat{j} + \hat{k}$ وإزدواج وأوجد عزمه.

الحل: هذا المثال على الحالة الرابعة (المجموعة المحصلة)، وتتكون المجموعة المحصلة من:

(١) قوة محصلة هي مجموع القوى المعطاة.

(٢) إزدواج عزمه $\vec{c}'$ يعطي بالعلاقة: $\vec{c}' = \vec{M}_o - \vec{r}_a \wedge \vec{F}$

أولاً: القوة المحصلة:

$$\vec{F} = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$
$$= (2\hat{i} - \hat{k}) + (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + (-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

وتؤثر في النقطة المعطاة $\vec{r}_a = \hat{j} + \hat{k}$

ثانياً: الإزدواج $\vec{c}'$:

عزم الإزدواج المعطي + مجموع عزوم القوى حول 0 $= \vec{M}_o$

$$\therefore \vec{M}_o = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3 + \vec{c}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + (8\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= -3\hat{i} - 6\hat{k} - 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} - 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + (8\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{c}' = \vec{M}_o - \vec{r}_a \wedge \vec{F} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٩):</u> جسم متماسك يقع تحت تأثير القوى الثلاث:

$\vec{F}_1 = 9\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ التي تؤثر في النقطة $\vec{r}_1 = 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{F}_2 = 3\hat{j} - 2\hat{k}$ التي تؤثر في النقطة $\vec{r}_2 = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{F}_3 = -6\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ التي تؤثر في النقطة $\vec{r}_3 = 4\hat{j}$

والازدواجان $\vec{C}_2 = 4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{C}_1 = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$

إختزل هذه المجموعة من القوى والإزدواجات إلى مجموعة محصلة تتكون من قوة وحيدة تؤثر عند النقطة $\vec{r}_a = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ وازدواج وأوجد عزمه . وإذا كانت هـذه القوة الوحيدة تمر بنقطة الأصل فأوجد المجموعة المكافئة في هذه الحالة.

<u>الحل:</u> هذا المثال على الحالة الرابعة(المجموعة المحصلة)، وتتكون تلك المجموعة من:

(١) قوة محصلة هي مجموع القوى المعطاة $\vec{F}' = \vec{F}$ $\vec{F}'$

(٢) إزدواج عزمه $\vec{C}'$ حيث: $\vec{C}' = \vec{M}_o - \vec{r}_a \wedge \vec{F}$

<u>أولاً: القوة المحصلة</u>

$$\vec{F}' = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$= (9\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + (3\hat{j} - 2\hat{k}) + (-6\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}) = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

وتؤثر في النقطة المعطاة $\vec{r}_a = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

ثانياً: الإزدواج $\overline{C'}$:

عزم الإزدواجات المعطاة + مجموع العزوم حول $\vec{M}_o = 0$

$$\therefore \overrightarrow{M}_O = \vec{r}_1 \wedge \overrightarrow{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \overrightarrow{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \overrightarrow{F}_3 + \overrightarrow{C}_1 + \overrightarrow{C}_2$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 5 & -2 \\ 9 & -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ (4\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + (4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 7\hat{i} - 45\hat{j} + 16\hat{k}$$

$$\overrightarrow{C'} = \vec{M}_o - \vec{r}_a \wedge \vec{F} = (7\hat{i} - 45\hat{j} + 16\hat{k}) - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 9\hat{i} - 45\hat{j} + 14\hat{k}$$

وهو المطلوب الأول.

المطلوب الثاني: إذا كانت القوة $\vec{F}$ تمر بنقطة الأصل فإن $\vec{r}_a = 0$ وتصبح المجموعة المحصلة مكونة من:

(١) قوة وحيدة (محصلة) هي:

$$\overrightarrow{F'} = \overrightarrow{F} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

(٢) ازدواج عزمه $\overrightarrow{C'}$ حيث

$$\overrightarrow{C'} = \overrightarrow{M}_O = 7\hat{i} - 45\hat{j} + 16\hat{k}$$

وهو المطلوب.

مثال(١٠) : استبدل مجموعة القوى والازدواجات الآتية، بقوة وحيدة، وأوجد مقدارها واتجاهها.

(١) $\vec{F}_1 = 3\hat{j}$ وتؤثر عند $\vec{r}_1 = \hat{i}$

(٢) $\vec{F}_2 = -2\hat{i}$ وتؤثر عند $\vec{r}_2 = 0$ (تمر بنقطة الأصل)

(٣) $\vec{F}_3 = \hat{i} - \hat{j}$ وتؤثر عند $\vec{r}_3 = 2\hat{j}$

(٤) والازدواج الذي عزمه $\vec{C} = 4\hat{k}$

<u>الحل :</u> هذا المثال على الحالة الخامسة.

شرط أن تؤول المجموعة المعطاة إلى قوة وحيدة (يتلاشى فيها عزم الازدواج) هو أن تكون : $\vec{F}\cdot\vec{M}_o = 0$، حيث $\vec{F}$ محصلة القوى المعطاة ، $\vec{M}_o$ مجموع العزوم حول نقطة الأصل 0

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (3\hat{j}) + (-2\hat{i}) + (\hat{i} - \hat{j}) = -\hat{i} + 2\hat{j} \qquad \_\_\_(1)$$

$$\vec{M}_o = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3 + \vec{C}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (4\hat{k})$$

$$= (3\hat{k}) + (0) + (-2\hat{k}) + (4\hat{k}) = 5\hat{k}$$

شرط القوة الوحيدة:

$$\vec{F}\cdot\vec{M}_o = 0$$

$$\therefore (-\hat{i} + 2\hat{j})\cdot(5\hat{k}) = 0$$

∴ المجموعة المعطاة تؤول إلى قوة وحيدة (قوة مستوية) $\vec{F} = -\hat{i} + 2\hat{j}$

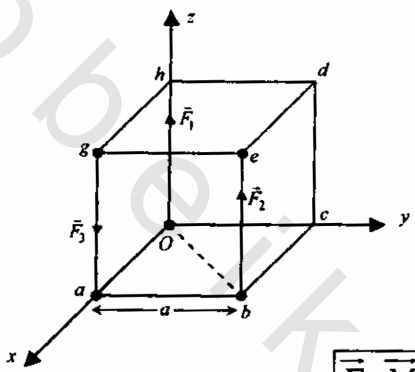
<u>مقداراً:</u> $F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$

<u>إتجاهاً:</u> $\tan\theta = \dfrac{2}{-1} = -2$

وهو المطلوب.

مثال(١١) : المكعب $abcogedh$ طـول ضـلعه a وتـؤثر فـي أضـلاعه ، $\overrightarrow{oh}, \overrightarrow{be}, \overrightarrow{ga}$ القوى الثلاث التي مقدار كل منها F ، أختزل هذه المجموعة مـن القوى إلى قوة وحيدة وأوجد مقدارها وإتجاهها.

الحل :



القوى المعطاة:

$\overrightarrow{F}_1 = F\hat{k}\,, \overrightarrow{F}_2 = F\hat{k}\,, \overrightarrow{F}_3 = -F\hat{k}$

وأضح أن القوى الثلاث هي قوى متوازية

$\therefore$ لابد أن تؤول إلى مجموعة القوة الوحيدة

(الحالة الخامسة) وشرط ذلك هو :

$$\boxed{\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{M}_O = 0}$$

لإيجاد $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 = F\hat{k} + F\hat{k} - F\hat{k} = F\hat{k} \qquad \_\_\_(1)$$

لإيجاد $\vec{M}_o$: نوجد $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$

$\vec{r}_1$ هي نقطة تأثير $\vec{F}_1$: $\vec{r}_1 = 0$ (القوة تمر بنقطة الأصل)

$\vec{r}_2$ هي نقطة تأثير $\vec{F}_2$: أي نقطة b حيث:

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ab} = a\hat{i} + a\hat{j}$$

$\vec{r}_3$ هي نقطة تأثير $\vec{F}_3$: أي نقطة a حيث:

$$\vec{r}_3 = \overrightarrow{oa} = a\hat{i}$$

$$\therefore \vec{M}_o = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F \end{vmatrix}$$

$$= (0) + [aF\,\hat{i} - aF\hat{j}] + [aF\hat{j}] = aF\hat{i}$$

تطبيق الشرط $\vec{F}\cdot\vec{M}_o=0$:

$$(F\hat{k})\cdot(-aF\hat{i})=0$$

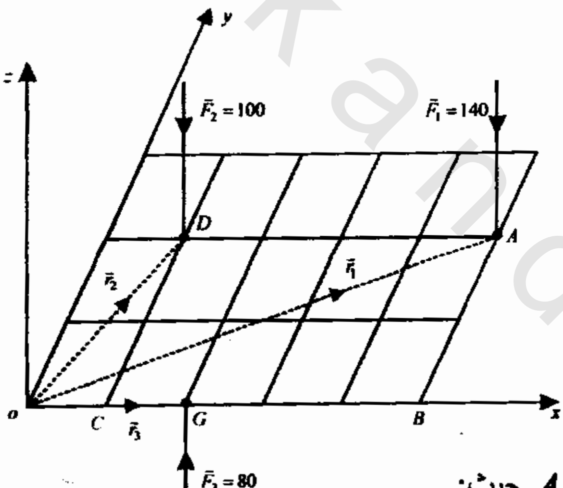
$$\therefore\ \vec{F}\cdot\vec{M}_o=0$$

∴ المجموعة المعطاة تؤول إلى مجموعة القوة الوحيدة حيث $\vec{F}=F\,\hat{k}$

مقداراً: $\left|\vec{F}\right|=F$

إتجاهاً: الإتجاه الموجب لمحور z

مثال(١٢) : أختزل (استبدل) القوى الثلاث المتوازية المبينة بالرسم بقــوة وحيــدة وأوجد مقدارها واتجاهها ونقطة تأثيرها ، علما بأن طول ضلع المربع الواحــد من الشبكة يساوي واحد متر .



الحل :

القوى المعطاة هي قوى متوازية فيجب أن تؤول إلى مجموعة القوة الوحيدة (الحالة الخامسة)

وشرط ذلك هو:

$$\vec{F}\cdot\vec{M}_o=0$$

(١) $\vec{F}_1=-140\hat{k}$ ونقطة تأثيرها A حيث:

$$\vec{r}_1=\overline{OA}=\overline{OB}+\overline{BA}=5\hat{i}+2\hat{j}$$

(٢) $\vec{F}_2=-100\hat{k}$ ونقطة تأثيرها D حيث:

$$\vec{r}_2=\overline{OD}=\overline{OC}+\overline{CD}=\hat{i}+2\hat{j}$$

(٣) $\vec{F}_3=80\hat{k}$ ونقطة تأثيرها G حيث:

$$\vec{r}_3=\overline{OG}=2\hat{i}$$

محصلة القوى :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$= (-140\hat{k}) + (-100\hat{k}) + (80\hat{k}) = -160\hat{k}$$

$$\overrightarrow{M}_O = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -140 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{vmatrix}$$

$$= -480\hat{i} + 640\hat{j}$$

$$\therefore \vec{F} \cdot \overrightarrow{M}_O = [160\hat{k}] \cdot [-480\hat{i} + 640\hat{j}] = 0$$

:. المجموعة المعطاة تؤول إلى مجموعة القوة الوحيدة حيث:

$$\vec{F} = -160\hat{k}$$

مقداراً: $\left|\vec{F}\right| = 160$

إتجاهاً: الإتجاه السالب لمحور z (عمودياً على المستوى xy إلى أسفل).

وهو المطلوب.

مثال(١٣): اختزل المجموعة المكونة من القوى الآتية:

$\overrightarrow{F}_1 = 2\hat{i} - \hat{k}$ التي تؤثر في النقطة $\vec{r}_1 = 3\hat{j}$

$\overrightarrow{F}_2 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ التي تؤثر في النقطة $\vec{r}_2 = \hat{i} - 2\hat{j}$

$\overrightarrow{F}_3 = -\hat{i} - +\hat{j} + 2\hat{k}$ التي تؤثر في النقطة $\vec{r}_3 = \hat{i} + \hat{j}$

والازدواج الذي عزمه $\overline{C} = 8\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ إلى مجموعة لولبية (بريمية) مكافئة.

الحل: تتكون المجموعة اللولبية من :

(١) قوة $\vec{F}$ هي محصلة القوى المعطاة (قوة اللولبية) وتؤثر في النقطة

$$\vec{\rho} = \frac{\overline{F} \wedge \overrightarrow{M}_O}{F^2}$$

(٢) إزدواج $\vec{C}'$ في إتجاه موازٍ للقوة $\vec{F}$ حيث: $\vec{C}'=\ell\vec{F}$، ℓ هو خطوة اللولبية ويعطي بالعلاقة:

$$\ell=\frac{\overline{F}\cdot\overline{M_O}}{F^2}$$

أولاً: إيجاد $\vec{F}$:

$$\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3=(2\hat{i}-\hat{k})+(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+(-\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$$
$$=2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$$

ثانياً: إيجاد $\vec{M}_0$:

$$\therefore \vec{M}_O=\vec{r}_1\wedge\vec{F}_1+\vec{r}_2\wedge\vec{F}_2+\vec{r}_3\wedge\vec{F}_3+\vec{C}$$
$$=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\0&3&0\\2&0&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&-2&0\\1&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&1&0\\-1&1&2\end{vmatrix}+(8\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$$
$$=(-3\hat{i}-6\hat{k})+(-2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})+(2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})+(8\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$$
$$=5\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}$$

ثالثاً: نوجد خطوة اللولبية

$$\ell=\frac{\overline{F}\cdot\overline{M_O}}{F^2}=\frac{(5\times2)+(-5\times2)+(1\times2)}{[\sqrt{2^2+2^2+2^2}]^2}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

نوجد نقطة تأثير القوة (قوة اللولبية)

$$\vec{\rho}=\frac{\overline{F}\wedge\overline{M_O}}{F^2}=\frac{1}{12}\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2&2&2\\5&-5&1\end{vmatrix}=\frac{1}{12}[12\hat{i}+8\hat{j}-20\hat{k}]$$

∴ مجموعة اللولبية المطلوبة تتكون من:

(١) قوة محصلة هي: $\vec{F}=2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ وتؤثر عند النقطة:

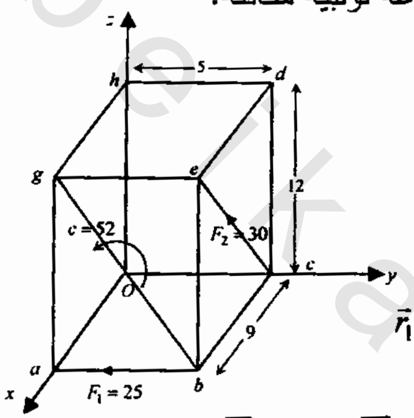
$$\vec{\rho}=\frac{1}{12}[12\hat{i}+8\hat{j}-20\hat{k}]=\frac{1}{3}(3\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k})$$

(٢) إزدواج $\bar{C}'$ يعطي بالعلاقة:

$$\bar{C}' = \ell \vec{F} = \frac{1}{6}[2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}] = \frac{1}{3}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

وهو المطلوب.

مثال(١٤): متوازي مستطيلات أبعاده هي (5,9,12) أثرت فيه القوتان والإزدواج المبينة بالشكل. أستبدل هذه المجموعة بمجموعة لولبية مكافئة.



الحل:

القوى المؤثرة:

(١) $\boxed{\vec{F}_1}$: $\vec{F}_1 = -25\hat{j}$ (عكس إتجاه y)

ونقطة تأثيرها a حيث:

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{oa} = 9\hat{i}$$

(٢) $\boxed{\vec{F}_2}$:

$$\vec{F}_2 = 30\hat{e}_{ce} = 30[\frac{\overrightarrow{ce}}{|\overrightarrow{ce}|}] = 30[\frac{\overrightarrow{cb} + \overrightarrow{be}}{|\overrightarrow{ce}|}] = 30[\frac{9\hat{i} + 12\hat{k}}{\sqrt{9^2 + 12^2}}]$$

$$= 30\,[\frac{9\hat{i} + 12\hat{k}}{15}] = 6(3\hat{i} + 4\hat{k})$$

ونقطة تأثيرها c حيث:

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{oc} = 5\hat{j}$$

الإزدواج $\bar{c}$: يؤثر في الإتجاه $\overrightarrow{bg}$ حيث:

$$\overrightarrow{bg} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ag} = -5\hat{j} + 12\hat{k}$$

متجه الوحدة في إتجاه $\overrightarrow{bg}$:

$$\hat{e}_{bg} = \frac{\overrightarrow{bg}}{|\overrightarrow{bg}|} = \frac{-5\hat{j} + 12\hat{k}}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{-5}{13}\hat{j} + \frac{12}{13}\hat{k}$$

$$\bar{c} = c\,\hat{e}_{bg} = 52[\frac{-5}{13}\hat{j} + \frac{12}{13}\hat{k}] = 4(-5\hat{j} + 12\hat{k})$$

اللولبية المطلوبة تتكون من:

(١) قوة $\vec{F}$ هي محصلة القوتين $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ وتؤثر عند النقطة $\vec{\rho} = \dfrac{\vec{F} \wedge \vec{M}_0}{F^2}$

(٢) إزدواج $\vec{c}'$ في إتجاه موازٍ للقوة $\vec{F}$ حيث $\vec{c}' = \ell \vec{F}$، ℓ تعطي من:

$$\ell = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M}_0}{F^2}$$

أولاً: إيجاد $\vec{F}$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-25\hat{j}) + 6(3\hat{i} + 4\hat{k}) = 18\hat{i} - 25\hat{j} + 24\hat{k}$$

ثانياً: إيجاد $\vec{M}_0$:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{c}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 18 & 0 & 24 \end{vmatrix} + 4(-5\hat{j} + 12\hat{k})$$

$$= 120\hat{i} - 20\hat{j} - 267\hat{k}$$

ثالثاً: إيجاد $\vec{\rho}, \ell$:

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{F} \wedge \vec{M}_0}{F^2}$$

$$= \frac{1}{[\sqrt{18^2 + 25^2 + 24^2}]^2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 18 & -25 & 24 \\ 120 & -20 & 267 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2525}[6195\hat{i} + 7686\hat{j} - 3000\hat{k}] = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\ell = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M}_0}{F^2} = \frac{1}{1525}[(18 \times 120) + (25 \times 20) - (24 \times 267)]$$

$$= \frac{-3748}{1525} = -2.46$$

:. مجموعة اللولبية المطلوبة تتكون من:

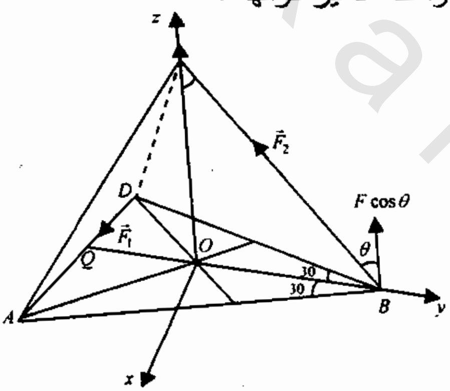
(١) قـــوة محـــصلة هـــي $\vec{F} = 18\hat{i} - 25\hat{j} + 24\hat{k}$ تـــؤثر عنـــد النقطـــة $\vec{\rho} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$

(٢) إزدواج $\vec{C}'$ في إتجاه موازٍ للقوة $\vec{F}$ حيث:

$$\vec{C}' = \ell\vec{F} = -2.46[18\hat{i} - 25\hat{j} + 24\hat{k}]$$

وهو المطلوب.

مثال(١٥) : قوتان مقدار كل منهما F تؤثران في ضلعين مــن الأضـــلاع غيــر المتقاطعة من هرم ثلاثي منتظم طول ضلعه 2α ، استبدل هذه المجموعة بمجموعة لولبية مكافئة وأوجد خطوتها ونقطة تأثير قوتها .



الحل : نختار المحاور كما بالشكل حيث:
محور y يمر بأحد المستقيمات المتوسطة (GB) في القاعدة وهي المثلث ABD، ومحور x عمودي عليه عند نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة والتي هي نقطة الأصل O ، أما محور z فهو عمودي عليهما .

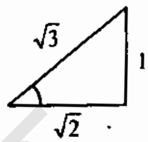
لتكن θ هي الزاوية التي يصنعها الضلع BC مع محور z فتكون :

$$\sin\theta = \frac{OB}{BC} = \frac{OB}{2a}$$

ولكن :

$$\frac{a}{OB} = \cos 30 \qquad \therefore OB = \frac{a}{\cos 30} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}}}{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\therefore \cos = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

القوى المؤثرة هي:

(١) القوة $\vec{F}_1$ المؤثرة في الضلع $D\vec{A}$ الموازي لمحور x

ومقدراها F فتكون : $\quad \vec{F}_1 = F\hat{i}$

ونقطة تأثيرها A حيث :

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{GA} = \frac{1}{2}(-\frac{2a}{\sqrt{3}}\hat{j}) + a\,\hat{i}$$
$$= a\hat{i} - \frac{a}{\sqrt{3}}\hat{j}$$

(٢) القوة $\vec{F}_2$ المؤثرة في الضلع $\overrightarrow{BC}$ ويمكن كتابتها :

$$\vec{F}_2 = F(-\sin\theta\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k})$$
$$= F(-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \sqrt{\frac{2}{3}}\ \hat{k}) = \frac{F}{\sqrt{3}}(-\hat{j} + \sqrt{2}\,\hat{k})$$

ونقطة تأثيرها B حيث :

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB} = \frac{2a}{\sqrt{3}}\hat{j}$$

مجموعة اللولبية المطلوبة تتكون من:

(١) قوة واحدة هي محصلة القوى المعطاة أي :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F\,\hat{i} + \frac{F}{\sqrt{3}}\left(-\hat{j} + \sqrt{2}\ \hat{k}\right)$$
$$= \frac{F}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\,\hat{i} - \hat{j} + \sqrt{2}\ \hat{k}\right)$$

ونقطة تأثيرها $\vec{\rho}$ العمودية على إتجاه القوة حيث:

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{F} \wedge \vec{M}_o}{F^2}$$

(٢) ازدواج $\overline{C'}$ يوازي القوة $\vec{F}$ حيث $\overline{C'} = \ell \overline{F}$ و ℓ هي خطوة اللولبية وتعطى من العلاقة :

$$\ell = \frac{\overline{F} \cdot \overline{M}_O}{F^2}$$

والآن :

$$\overline{M}_O = \vec{r}_1 \wedge \overline{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \overline{F}_2$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & \frac{-a}{\sqrt{3}} & 0 \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \frac{2a}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{-F}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}F \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} aF\hat{i} + \frac{a}{\sqrt{3}} F\hat{k} \;\; = \frac{aF}{3}(2\sqrt{2}\hat{i} + \sqrt{3}\hat{k})$$

خطوة اللولبية :

$$\ell = \frac{\overline{F} \cdot \overline{M}_O}{F^2} = \frac{aF^2(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}})}{F^2/3 \; (3+1+2)}$$

$$= \frac{\frac{a}{3}(2\sqrt{2} + \sqrt{2})}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \overline{C'} = \ell \overline{F} = \frac{aF}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\hat{i} - \hat{j} + \sqrt{2}\hat{k})$$

أيضا فإن نقطة تأثير القوة $\vec{F}$ هي:

$$\vec{\rho}=\frac{\vec{F}\wedge\vec{M}_O}{F^2}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ F & \frac{-F}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}F\\ \frac{2\sqrt{2}}{3}aF & 0 & \frac{a}{\sqrt{3}}F\end{vmatrix}\Bigg/\frac{F^2}{3}(3+1+2)$$

$$=\frac{\left(aF^2/3\right)\left(-\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\hat{k}\right)}{F^2/3\,(6)}=\frac{a}{6}\left(-\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\hat{k}\right)$$

$$=\frac{a}{6\sqrt{6}}(-\sqrt{3}\hat{i}+\hat{j}+2\sqrt{2}\hat{k})$$

وهو المطلوب.

مسائل على الاستاتيكا الفراغية

(١) أوجد عزم القوة التي مقدارها 10 وتؤثر في الخط الواصل بين النقطتين $P(2,0,4)$, $Q(5,1,1)$ وذلك حول نقطة الأصل.

(٢) أوجد عزم القوة التي مقدارها $10\sqrt{3}$ والتي تؤثر في الخط الواصل من النقطة $(5,3,-3)$ إلى النقطة $(4,4,-4)$ حول نقطة الأصل وحول النقطة $(3,5,-5)$.

(٣) إذا كان لدينا قوة $\vec{F} = 3\hat{i} + 9\hat{j} + 12\hat{k}$ وإتجاه ما هو إتجاه متجه الوحدة $\vec{e} = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$ فبين كيف تعبر عن $\vec{F}$ كمجموع مركبتين إحداهما $\vec{F}_1$ موازية لاتجاه $\vec{e}$ والأخرى $\vec{F}_2$ عمودية على هذا الاتجاه.

(٤) أوجد محصلة القوى الآتية وعزمها حول نقطة الأصل وحول النقطة $p(1,0,1)$:

(أ) $\vec{F}_1$ مقدارها $2\sqrt{3}$ وتمر بنقطة الأصل وتعمل في المستقيم الذي يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات الكرتيزية.

(ب) $\vec{F}_2$ مقدارها 13 وتعمل في الخط الواصل بين النقطتين $(-3,3,-11)$, $(0,-1,1)$.

(ج) $\vec{F}_3$ مقدارها 2 وهي عمودية على المستوى xy إلى أعلى وتمر بالنقطة $(2,4,0)$.

(٥) إزدواج يتكون من القوتين: $\vec{F}_1 = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ وتؤثر عند النقطة $(0,-5,2)$، $\vec{F}_2 = -2\hat{i} + 3\hat{j}$ وتؤثر عند النقطة $(1,-2,0)$.

أوجد متجه عزم الإزدواج $\vec{C}$ مقداراً وإتجاهاً.

(٦) إزدواج يتكون من القوتين: $\vec{F}_1 = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ ويمر خط عملها بالنقطة $(-1,2,4)$، $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ ويمر خط عملها بالنقطة $(2,3,-2)$.
أوجد متجه عزم الإزدواج $\bar{C}$ مقداراً وإتجاهاً.

(٧) تؤثر القوى الثلاث الآتية: $\vec{F}_1 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\ ,\ \vec{F}_2 = \hat{k}\ ,\ \vec{F}_3 = \hat{i}$ في النقاط $(0,2,0)\ ,\ (3,0,0)\ ,\ (0,0,0)$، فإذا كانت o هي نقطة الأصل وكانت a هي النقطة $(-2,3,1)$ فبين أن هذه المجموعة من القوى تحقق العلاقة $\bar{M}_a = \bar{M}_o - \bar{r}_a \wedge \bar{F}$ حيث $\bar{F}$ هي محصلة القوى الثلاث، $\bar{M}_o$ مجموع عزوم تلك القوى حول نقطة الأصل.

(٨) $abcdk\ell mn$ مكعب طول ضلعه a، تؤثر أربع قوى متساوية المقدار في الأحرف $\overline{cm}\ ,\ \overline{nd}\ ,\ \overline{ak}\ ,\ \overline{\ell b}$ على الترتيب، أثبت أن هذه المجموعة من القوى هي مجموعة متزنة.

(٩) أختزل مجموعة القوى الآتية إلى مجموعة محصلة تتكون من قوة وإزدواج عند نقطة الأصل.

$F_1 = 30$ وتعمل في الخط الواصل بين النقطتين $(3,2,0)\ ,\ (0,2,4)$

$F_2 = 10\sqrt{3}$ وتعمل في الخط الواصل بين النقطتين $(0,2,2)\ ,\ (2,0,4)$

$F_3 = 10\sqrt{3}$ وتعمل في الخط الواصل بين النقطتين $(5,2,4)\ ,\ (2,0,2)$

(١٠) أثرت المجموعة الآتية من القوى والإزدواج على جسم متماسك

$\vec{F}_1 = 9\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ وتؤثر عند النقطة $\vec{r}_1 = 5\hat{i} - 2\hat{k}$

$\vec{F}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{k}$ وتؤثر عند النقطة $\vec{r}_2 = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{F}_3 = -6\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ وتؤثر عند النقطة $\vec{r}_3 = 4\hat{i}$

والإزدواج: $\bar{C} = 7\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$.

أستبدل هذه المجموعة بمجموعة محصلة تتكون من قوة تــؤثر عنــد النقطــة $(1,1,1)$ وإزدواج، وأوجد عزمه.

وإذا أثرت القوة المكافئة عند نقطة الأصل فأوجد عــزم الإزدواج فــي هــذه الحالة.

(١١) مجموعة من القوى $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$ توازي فيها القوة $\vec{F}_1$ محور x وتمر بالنقطة $a(0,\alpha_2,-\alpha_3)$، وتوازي القوة $\vec{F}_2$ محور y وتمر بالنقطة $b(-\alpha,0,\alpha_3)$ وتوازي القوة $\vec{F}_3$ محور z وتمر بالنقطة $c(\alpha_1,-\alpha_2,0)$. أثبت أن شــرط إختزال هذه المجموعة من القوى إلى قوة وحيدة هو:

$$\frac{\alpha_1}{F_1}+\frac{\alpha_2}{F_2}+\frac{\alpha_3}{F_3}=0$$

(١٢) **(أ)** مجموعة مكونة من قوتين:

$\vec{F}_1=2\hat{i}-2\hat{j}$ وتؤثر في الخط المار بالنقطة $(4,4,5)$

$\vec{F}_2=3\hat{k}$ وتمر بنقطة الأصل.

استبدل هذه المجموعة بلولبية مكافئة وأوجد خطوتها ونقطة تأثير قوتها.

(ب) مجموعة مكونة من ثلاث قوى هي:

$\vec{F}_1=2\hat{i}+2\hat{j}$ وتؤثر عند النقطة $(0,1,0)$

$\vec{F}_2=\hat{j}-2\hat{k}$ وتؤثر عند النقطة $(1,0,1)$

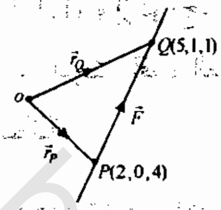
$\vec{F}_3=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ وتؤثر عند النقطة $(0,0,1)$

استبدل هذه المجموعة بلولبية مكافئة وأوجد خطوتها ونقطة تأثير قوتها.

حلول بعض المسائل

المسألة(١): المستقيم الذي تؤثر فيه القوة

$$\overrightarrow{PQ} = 3\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$$



متجه الوحدة في إتجاه هذا المستقيم

$$\hat{e} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{3\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{9+1+9}} = \frac{3}{\sqrt{19}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{19}}\hat{j} - \frac{3}{\sqrt{19}}\hat{k}$$

$$\therefore \vec{F} = F\hat{e} = 10[\frac{3}{\sqrt{19}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{19}}\hat{j} - \frac{3}{\sqrt{19}}\hat{k}]$$

$$= \frac{10}{\sqrt{19}}(3\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$$

عزم $\vec{F}$ حول o: يمكن أخذ P أو Q كنقطة تأثير القوة $\vec{F}$ ونحصل على نفس النتيجة، فبأخذ Q مثلاً:

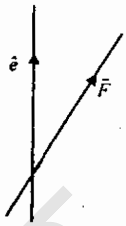
$$\vec{r}_Q = 5\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore \vec{M}_O = \vec{r}_Q \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ \frac{30}{\sqrt{19}} & \frac{10}{\sqrt{19}} & \frac{-30}{\sqrt{19}} \end{vmatrix} = \frac{20}{\sqrt{19}}(-2\hat{i} + 9\hat{j} + \hat{k})$$

وبأخذ P كنقطة تأثير:

$$\vec{r}_P = 2\hat{i} + 4\hat{k}$$

$$\therefore \vec{M}_O = \vec{r}_P \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ \frac{30}{\sqrt{19}} & \frac{10}{\sqrt{19}} & \frac{-30}{\sqrt{19}} \end{vmatrix} = \frac{20}{\sqrt{19}}(-2\hat{i} + 9\hat{j} + \hat{k})$$



المسألة(٣): مركبة $\vec{F}$ في إتجاه $\hat{e}$ هي: $F_1 = \vec{F}\cdot\hat{e}$

المركبة $\vec{F}_1$ الموازية لـــ $\hat{e}$ هي:

$$\therefore \vec{F}_1 = F_1\hat{e} = (\vec{F}\cdot\hat{e})\hat{e} = (2+3+8)[\frac{2}{3}\hat{i}+\frac{1}{3}\hat{j}+\frac{26}{3}\hat{k}]$$

$$= \frac{26}{3}\hat{i}+\frac{13}{3}\hat{j}+\frac{26}{3}\hat{k}$$

المركبة $\vec{F}_2$ العمودية على الاتجاه $\hat{e}$ حيث أن $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ أي $\vec{F}_2=\vec{F}-\vec{F}_1$

وبحيث أن $(\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2)=0$ (شرط التعامد) .

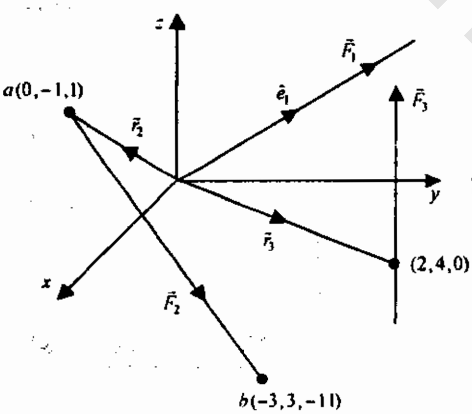
$$\therefore \vec{F}_2 = \vec{F}-\vec{F}_1 = (3\hat{i}+9\hat{j}+12\hat{k})-(\frac{26}{3}\hat{i}+\frac{13}{3}\hat{j}+\frac{26}{3}\hat{k})$$

$$= -\frac{17}{3}\hat{i}+\frac{14}{3}\hat{j}+\frac{10}{3}\hat{k}$$

$$\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2 = (\frac{26}{3}\times\frac{-17}{3})+(\frac{13}{3}\times\frac{14}{3})+(\frac{26}{3}\times\frac{10}{3}) = 0$$

وهو المطلوب.

المسألة(٤):



القوة $\vec{F}_1$: $\vec{F}_1 = F_1\hat{e}_1$

حيث $F_1 = 2\sqrt{3}$ ، ، $\hat{e}_1$ هو متجه الوحدة الذي يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات الكرتيزية :

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

الإثبات: حيث أن $\alpha=\beta=\gamma$ ، فإن: $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$

$$\therefore \hat{e} = \cos\alpha\,\hat{i}+\cos\beta\,\hat{j}+\cos\gamma\,\hat{k} = \cos\alpha(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

$$|\hat{e}|^2 = \cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha = 3\cos^2\alpha = 1$$

$$\rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \cos\alpha\,\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \hat{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = \hat{e}_1$$

ونعود للمسألة:

$$\therefore \vec{F}_1 = 2\sqrt{3}\,[\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})] = 2\,(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

وحيث أنها تمر بنقطة الأصل: $\therefore \vec{r}_1 = 0$

القوة $\vec{F}_2$: $\vec{F}_2 = F_2\,\hat{e}_2$ حيث $F_2 = 13$ ، $\hat{e}_2 = \frac{\overrightarrow{ab}}{|\overrightarrow{ab}|}$

$$\therefore \vec{F}_2 = 13[\frac{-3\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k}}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}] = 13\,[\frac{-3\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k}}{13}] = -3\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k}$$

وتؤثر في النقطة $(0,-1,1)$ (أي نقطة عليها) حيث: $\vec{r}_2 = -\hat{j}+\hat{k}$

القوة $\vec{F}_3$: $\vec{F}_3$ عمودية على مستوى xy $\leftarrow$ $\vec{F}_3 = 2\hat{k}$، ولأنها تمر بالنقطة $(2,4,0)$ فإن $\vec{r}_3 = 2\hat{i}+4\hat{j}$

محصلة القوى :

$$\vec{F} = \vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3 = -\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$$

مقداراً: $|\vec{F}| = \sqrt{1^2+6^2+8^2} = 10$

إتجاهاً :

$$\cos\alpha = -\frac{1}{10},\ \cos\beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}\ ,\ \cos\gamma = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

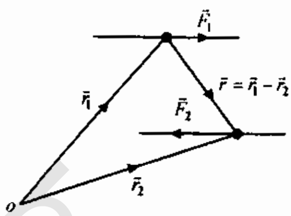
العزوم حول نقطة الأصل:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1\wedge\vec{F}_1+\vec{r}_2\wedge\vec{F}_2+\vec{r}_3\wedge\vec{F}_3$$

$$= \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & -1 & 1\\ -3 & 4 & -12\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 16\hat{i}-7\hat{j}-3\hat{k}$$

المسألة(٥):



$$\vec F_1 = -\vec F_2 = \vec F = 2\hat i - 3\hat j$$
$$\vec r_1 = -5\hat j + 2\hat k$$
$$\vec r_2 = \hat i - 2\hat j$$
$$\therefore \vec r = \vec r_1 - \vec r_2 = -\hat i - 3\hat j + 2\hat k$$

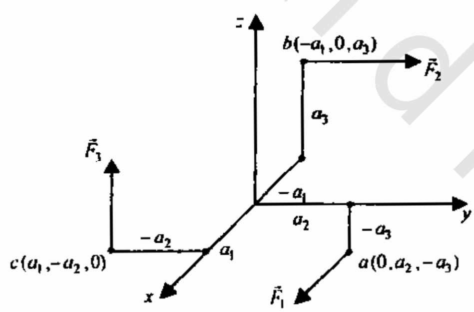
عزم الإزدواج:

$$\vec C = \vec r \wedge \vec F = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 6\hat i + 4\hat j + 9\hat k$$

مقداراً: $C = \left|\vec C\right| = \sqrt{6^2 + 4^2 + 9^2} = 11.53$

واتجاهاً : $\ell = \dfrac{6}{11.5}\ ,\ m = \dfrac{4}{11.5}\ , n = \dfrac{9}{11.5}$

المسألة(١١):



القوى المؤثرة

(١) $\vec F_1 = F_1 \hat i$ وتؤثر عند النقطة a، حيث: $\vec r_1 = a_2 \hat j - a_3 \hat k$

(٢) $\vec F_2 = F_2 \hat j$ وتؤثر عند النقطة b، حيث $\vec r_2 = -a_1 \hat i + a_3 \hat k$

(٣) $\vec F_3 = F_3 \hat k$ وتؤثر عند النقطة c، حيث $\vec r_3 = a_1 \hat i - a_2 \hat j$

شرط أن تؤول هذه المجموعة إلى مجموعة القوة الوحيدة التي يتلاشى فيها عزم الإزدواج هو: $\vec F \cdot \vec M_o = 0$

حيث: $\vec{F}$ هي القوة المحصلة

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=F_1\hat{i}+F_2\hat{j}+F_3\hat{k}$$

$\vec{M}_o$ هي مجموع العزوم حول نقطة الأصل:

$$\vec{M}_o=\vec{r}_1\wedge\vec{F}_1+\vec{r}_2\wedge\vec{F}_2+\vec{r}_3\wedge\vec{F}_3$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & a_2 & -a_3\\ F_1 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -a_1 & 0 & a_3\\ 0 & F_2 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & -a_2 & 0\\ 0 & 0 & F_3\end{vmatrix}$$

$$=(-F_1a_3\hat{j}-F_1a_2\hat{k})+(-F_2a_3\hat{i}-F_2a_1\hat{k})+(-F_3a_2\hat{i}-F_3a_1\hat{j})$$

$$=-(F_2a_3+F_3a_2)\hat{i}-(F_1a_3+F_3a_1)\hat{j}-(F_1a_2+F_2a_1)\hat{k}$$

بتطبيق الشرط $\vec{F}\cdot\vec{M}_o=0$ (شرط مجموعة القوة الوحيدة)

$$\therefore -F_1(F_2a_3+F_3a_2)-F_2(F_1a_3+F_3a_1)-F_3(F_1a_2+F_2a_1)=0$$

$$\therefore -2F_1F_2a_3-2F_2F_3a_1-2F_3F_1a_2=0$$

$$\therefore F_1F_2a_3+F_2F_3a_1+F_3F_1a_2=0$$

وبالقسمة على $F_1F_2F_3$:

$$\therefore \frac{a_1}{F_1}+\frac{a_2}{F_2}+\frac{a_3}{F_3}=0$$

وهو المطلوب.