الباب الرابع

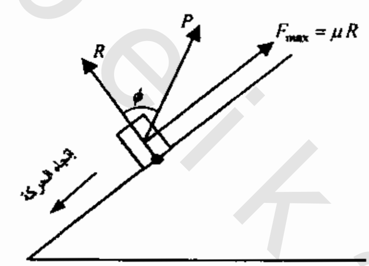
تطبيقات إستاتيكية (I)

في هذا الباب سوف ندرس بعض التطبيقات الإستاتيكية وهي:

(١) الإحتكاك.

(٢) الإنقلاب والإنزلاق.

(٣) التدحرج.



أولاً: الإحتكاك

إذا ارتكز جسم خشن على جسم آخر تظهر قوة إحتكاك F بين الجسمين، يزداد مقدارها بالتدريج كلما اقترب الجسم المرتكز من الحركة حتى تصل إلى نهاية عظمى عندما يكون الجسم المرتكز على وشك الإنزلاق على الجسم الآخر، ويكون إتجاهها عكس إتجاه الحركة.

وقد وجد أن النهاية العظمى لقوة الإحتكاك (قوة الإحتكاك النهائية) تتناسب مع رد الفعل العمودي R بين الجسمين

$$F_{max} \propto R \rightarrow \boxed{F_{max} = \mu R}$$

حيث μ يسمى معامل الإحتكاك بين الجسمين.

زاوية الإحتكاك: إن محصلة رد الفعل العمودي R وقوة الإحتكاك النهائي F_{max} تسمى برد الفعل الكلي P، وتسمى الزاوية بين P,R بزاوية الإحتكاك ϕ حيث:

$$\tan\phi = \frac{F_{max}}{R} = \frac{\mu R}{R} = \mu$$

أي أن: ظل زاوية الإحتكاك يساوي معامل الإحتكاك.

ملحوظة:

(١) إذا كانت $F = F_{\max} = \mu R$ فإن الجسم يكون على وشك الإنزلاق على الجسم الآخر (أي على وشك الحركة).

(٢) إذا كانت $F < F_{\max}$ أي $F < \mu R$ فإن الجسم لن ينزلق أي يكون في حالة إتزان.

أمثلة محلولة:

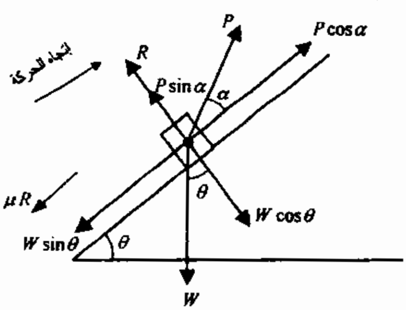
مثال(١): كتلة وزنها W موضوعة على مستوى مائل خشن يميل بزاوية θ على الأفقي، فإذا كانت زاوية الإحتكاك بين هذه الكتلة والمستوى هي ϕ فأثبت أن:

أقل قوة تلزم لتحريك الكتلة إلى أعلى المستوى هي:

$$P_{\min} = W \sin(\theta + \phi)$$

وأن هذه القوة تميل على المستوى بزاوية $\alpha = \phi$

الحل:



بتحليل القوى في إتجاه المستوى والإتجاه العمودي عليه وكتابة معادلتي الإتزان في هذين الإتجاهين:

(١) في إتجاه المستوى:

$$P\cos\alpha - W\sin\theta - \mu R = 0 \qquad (1)$$

(٢) في الإتجاه العمودي:

$$R + P\sin\alpha - W\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

من (2), (1) نوجد P كالآتي:

من (2):

$$R = W\cos\theta - P\sin\alpha$$

بالتعويض في (1) وإعتبار أن $\mu = \tan\phi$

$$P\sin\alpha - W\cos\theta - \tan\phi(W\cos\theta - P\sin\alpha) = 0$$

$$\therefore P(\cos\alpha + \tan\phi\ \sin\alpha) = W(\sin\theta + \tan\phi\cos\theta)$$

$$\therefore P(\cos\alpha\cos\phi + \sin\alpha\sin\phi) = W(\sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta)$$

(وذلك بضرب الطرفين في $\cos\theta$)

$$\therefore P\cos(\alpha - \phi) = W\sin(\theta + \phi)$$

$$\therefore \boxed{P = W\frac{\sin(\theta+\phi)}{\cos(\alpha-\phi)}} \qquad \_\_\_\_(3)$$

وهي العلاقة العامة التي تعطينا القوة P. ولكي تكون P أقل ما يمكن، يجب أن يكون المقام في (3) أكبر من يمكن، وأكبر قيمة لـ $\cos$ هي 1

$$\therefore P \to P_{\min} \ :\ \cos(\alpha-\phi) = 1$$

$$\therefore \alpha - \phi = 0 \qquad \to \qquad \boxed{\alpha = \phi}$$

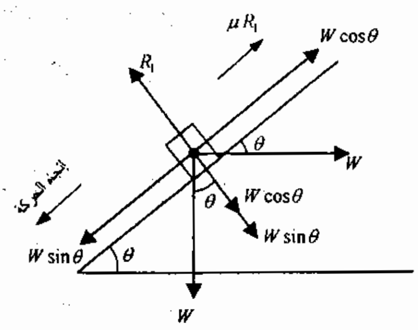
$$\therefore \quad \boxed{P_{\min} = W\sin(\theta+\phi)}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u> جسم وزنه W موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية θ، فإذا كانت W هي أقل قوة أفقية تؤثر على الجسم وتمنعه من الإنزلاق هابطاً على المستوى، وكانت القوة (αW) هي أقل قوة أفقية تجعل الجسم على وشك الحركة صاعداً إلى أعلى المستوى، فأثبت أن الزاوية θ تعطي من: $\tan 2\theta = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$

<u>الحل:</u> هناك حالتان

<u>الحالة الأولي:</u> إذا قلت القوة الأفقية عن W فإن الجسم سوف ينزلق إلى أسفل المستوى وتكون قوة الإحتكاك نهائية واتجاهها إلى أعلى: $F = \mu R_1$



معادلتي الإتزان:

(١) في إتجاه المستوى

$$\mu R_1 + W\cos\theta - W\sin\theta = 0 \qquad \text{(1)}$$

(٢) في الإتجاه العمودي:

$$R_1 - W\cos\theta - W\sin\theta = 0 \qquad \text{(2)}$$

من (2) ,(1) نوجد معامل الإحتكاك μ كالآتي:

من (2):

$$R_1 = W\cos\theta + W\sin\theta$$

بالتعويض في (1):

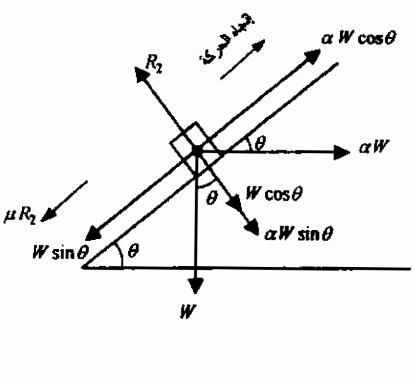
$$\mu(W\cos\theta + W\sin\theta) + W\cos\theta - W\sin\theta = 0$$

$$\mu W(\cos\theta + \sin\theta) = W(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$\therefore \quad \boxed{\mu = \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}} \qquad \text{(3)}$$

الحالة الثانية:

إذا زادت القوة الأفقية عن αW فإن الجسم سوف يصعد إلى أعلى ويكون الإحتكاك نهائياً إلى أسفل ويساوي μR_2



معادلتي الإتزان:

(١) في إتجاه المستوى:

$$\alpha W\cos\theta - \mu R_2 - W\sin\theta = 0 \qquad \text{(4)}$$

(٢) في الإتجاه العمودي:

$$R_2 - W\cos\theta - \alpha W\sin\theta = 0 \qquad \text{(5)}$$

من (5) ,(4) نوجد μ كالآتي:

من (5):

$$R_2 = W\cos\theta + \alpha W\sin\theta$$

بالتعويض في (4):

$$\alpha W\cos\theta - \mu(W\cos\theta + \alpha W\sin\theta) - W\sin\theta = 0$$

$$\mu W(\alpha\sin\theta + \cos\theta) = W(\alpha\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\therefore \boxed{\mu = \frac{\alpha\cos\theta - \sin\theta}{\alpha\sin\theta + \cos\theta}} \qquad \_\_\_\_(6)$$

من (6) ,(3) نجد أن:

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\alpha\cos\theta - \sin\theta}{\alpha\sin\theta + \cos\theta} \qquad \_\_\_\_(7)$$

ومن ذلك يمكن إستنتاج المطلوب $\tan 2\theta = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ كالآتي:

من العلاقة (7) بضرب الطرفين في الوسطين:

$$(\sin\theta - \cos\theta)(\alpha\sin\theta + \cos\theta) = (\alpha\cos\theta - \sin\theta)(\sin\theta + \cos\theta)$$

$$\therefore \alpha\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - \alpha\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$$

$$= \alpha\cos\theta\sin\theta + \alpha\cos^2\theta - \sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore 2\sin\theta\cos\theta - 2\alpha\sin\theta\cos\theta = \cos^2\theta + \alpha\cos^2\theta - \sin^2\theta - \alpha\sin^2\theta$$

$$\therefore 2\sin\theta\cos\theta(1-\alpha) = \cos^2\theta(1+\alpha) - \sin^2\theta(1+\alpha)$$

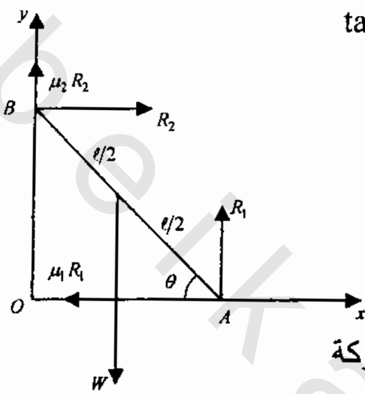
$$\therefore \sin 2\theta\cdot(1-\alpha) = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cdot(1+\alpha) = \cos 2\theta\cdot(1+\alpha)$$

$$\therefore \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \tan 2\theta$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٣):</u> سلم منتظم طوله ℓ موضوع على أرض أفقية خشنة معامل إحتكاكها μ_1 ويرتكز بطرفه الأخر مستنداً إلى حائط رأسي خشن معامل إحتكاكه μ_2، أثبت أن أقل زاوية θ يميل بها السلم على الأفقي في وضع الإتزان تعطي بالعلاقة:

$$\tan\theta = \frac{1-\mu_1\,\mu_2}{2\,\mu_1}$$



<u>الحل:</u>

إذا كان الطرف A على وشك الحركة فإن الحركة تكون إلى اليمين وتكون قوة الإحتكاك النهائي هي: $\mu_1 R_1$ إلى اليسار، وإذا كان الطرف B على وشك الحركة فإن الحركة تكون إلى أسفل وتكون قوة الإحتكاك النهائي $\mu_2 R_2$ إلى أعلى كما بالشكل.

<u>معادلات الإتزان:</u>

(١) <u>في إتجاه x</u> :

$$R_2 - \mu_1 R_1 = 0 \qquad \_\_\_\_(1)$$

(٢) <u>في إتجاه y</u> :

$$\mu_2 R_2 + R_1 - W = 0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

المعادلتان (2) ,(1) غير كافيتين لإيجاد $\tan\theta$ المطلوبة فنلجأ لمعادلة ثالثة هي معادلة العزوم.

<u>مجموع العزم حول</u> A : القوتان $R_1 , \mu_1 R_1$ تمران بـــ A فليس لهما عزم

$$\_\_\_(2)$$

$$\therefore W\times\frac{\ell}{2}\cos\theta - R_2\times\ell\sin\theta - \mu_2 R_2\cdot\ell\cos\theta = 0$$

من (3) ,(2) ,(1) نوجد المطلوب $\tan\theta = \dfrac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}$ كالأتي:

من (3):

$$\frac{W}{2}\ell\cos\theta = R_2\,\ell(\sin\theta + \mu_2\cos\theta)$$

$$\therefore R_2 = \frac{W\cos\theta}{2(\sin\theta + \mu_2\cos\theta)} \qquad \_\_\_\_(4)$$

ومن (1):

$$R_2 = \mu_1 R_1 \rightarrow R_1 = \frac{R_2}{\mu_1}$$

وباستخدام (4):

$$\therefore R_1 = \frac{W\cos\theta}{2\mu_1(\sin\theta + \mu_2\cos\theta)} \qquad \_\_\_\_(5)$$

وبالتعويض من (5) ,(4) في (2):

$$\frac{\mu_1 W\cos\theta}{2(\sin\theta + \mu_2\cos\theta)} + \frac{W\cos\theta}{2\mu_1(\sin\theta + \mu_2\cos\theta)} = W$$

$$\therefore \frac{\mu_1\mu_2\cos\theta}{2\mu_1(\sin\theta + \mu_2\cos\theta)} + \frac{\cos\theta}{2\mu_1(\sin\theta + \mu_2\cos\theta)} = 1$$

$$\therefore \frac{\cos\theta + \mu_1\mu_2\cos\theta}{2\mu_1(\sin\theta + \mu_2\cos\theta)} = 1$$

$$\therefore \cos\theta + \mu_1\mu_2\cos\theta = 2\mu_1(\sin\theta + \mu_2\cos\theta)$$

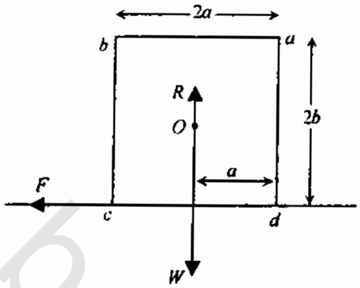
$$\therefore \cos\theta - \mu_1\mu_2\cos\theta = 2\mu_1\sin\theta$$

$$\therefore \cos\theta(1 - \mu_1\mu_2) = 2\mu_1\sin\theta$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1} = \tan\theta$$

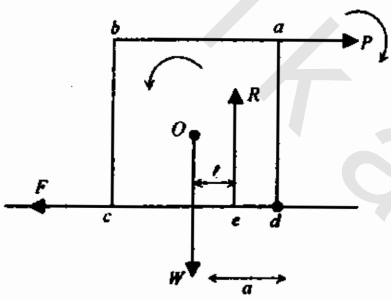
وهو المطلوب.

ثانياً: الإنزلاق والإنقلاب



(١) نفرض لدينا صفيحة مستطيلة الشكل $abcd$ أبعادها $2a, 2b$ ووزنها W يؤثر في منتصفها O.

وضعت الصفيحة على أرض خشنه ونتيجة لذلك تتولد قوة إحتكاك $\vec{F}$ ورد فعل عمودي R، فمن إتزان الصفيحة: $R = W$



(٢) إذا أثرت قوة متزايدة P عند الحرف a فإنها تكون مع قوة الإحتكاك F إزدواج يعمل على دوران (أو إنقلاب) الصفيحة حول نقطة d وينتقل رد الفعل R إلى النقطة e التي تبعد مسافة ℓ عن مركز الصفيحة.

ويعمل رد الفعل R مع الوزن W إزدواجاً مضاداً يعمل على إستقرار الإتزان (أي عدم حدوث إنقلاب).

ويكون لدينا حالتان:

(أ) إذا تساوت القوتان P, F ووصلت قوة الإحتكاك إلى نهايتها العظمى حيث: $F = F_{max} = \mu R$ فإن الصفيحة تنزلق، وتعرف P حينئذ بقوة الإنزلاق (P_1):

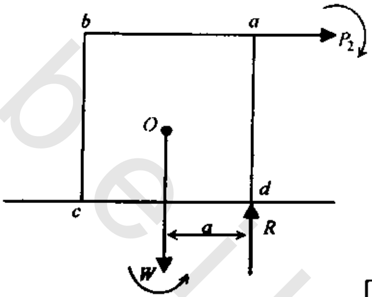
$$P_1 = F_{max} = \mu R \quad , \quad R = W$$

$$\therefore \boxed{P_1 = \mu W} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

ويلاحظ أن موضع R (نقطة e) تقع داخل حدود الجسم أي أن:

$$\boxed{\ell < a}$$

(ب) إذا قلت قوة الإحتكاك عن μR أي إذا كانت $F < \mu R$ فإن الجسم لا ينزلق ولكن يكون على وشك الإنقلاب، وعندما تتلاشى F وتنتقل نقطة e إلى d يحدث إنقلاب للجسم (الصفيحة) حول d.



وتعرف القوة P حينئذ بقـوة الإنقـلاب (P_2)

حيث: بأخذ العزوم حول d:

$$W \times a - P_2 \times 2b = 0$$

$$\therefore Wa = P_2(2b)$$

$$\therefore \boxed{P_2 = W\left(\frac{a}{2b}\right)} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

ويلاحظ أن موضع R يكون عند d أي أن $\boxed{\ell = a}$

<u>سؤال</u>: متى يحدث الإنزلاق قبل الإنقلاب أو العكس؟

<u>الإجابة</u>:

<u>أولاً</u>: إذا كانت القوة P أكبر من قوة الإحتكاك النهائية (التي تسبب الإنزلاق) أي إذا كانت $\boxed{P_2 > P_1}$ فإن الجسم يكون على وشك الإنزلاق.

وفي هذه الحالة:

$$P_2 > \mu R \rightarrow \frac{P_2}{R} > \mu$$

وفي نفس الوقت: $\ell < a$

<u>ثانياً</u>: إذا كانت القوة P أقل من قوة الإحتكاك النهائية (التي تسبب الإنزلاق) أي إذا كانت $\boxed{P_2 < P_1}$ فإن الجسم يكون على وشك الإنقلاب.

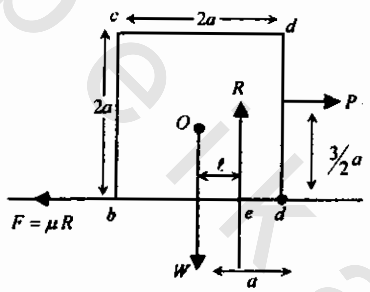
وفي هذه الحالة:

$$P_2 < \mu R \rightarrow \frac{P_2}{R} < \mu$$

وفي نفس الوقت $\ell = a$ (في حالة الإنقلاب).

أمثلة محلولة:

مثال(١): مكعب طول ضلعه $2a$ ووزنه W. تؤثر عند وجهه الأيمن قوة أفقية P تزداد تدريجياً، وتؤثر عند مسافة $\frac{3}{2}a$ من أرضيه أفقيه خشنه معامل إحتكاكها $\mu = 0.7$ بحيث تجعل المكعب على وشك الحركة. أدرس حالتي الإنزلاق والإنقلاب للمكعب.



الحل:

أولاً: بفرض أن المكعب ينزلق نحو اليمين في هذه الحالة (حالة الإنزلاق):

$$F = \mu R$$

ورد الفعل العمودي يؤثر عند e حيث $\ell < a$

معادلات الإتزان:

رأسياً:

$$R = W \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

أفقياً:

$$P = F = \mu R \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

من (1), (2):

$$P = \mu W = 0.7W \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

بأخذ العزوم حول e:

$$W \times \ell - P \times \frac{3}{2}a = 0$$

$$\therefore W\ell = \frac{3}{2}Pa \qquad \text{\_\_\_\_\_(4)}$$

بالتعويض من (3) في (4):

$$W\,\ell = \frac{3}{2}(0.7W)\,a$$

$$\therefore\ \ell = 1.05\,a \quad \rightarrow \quad \boxed{\ell > a}$$

وهذا يخالف الفرض (الجسم في حالة إنزلاق وأن $\ell < a$) وبالتالي فإن المكعب لا ينزلق ولكن ينقلب.

__ولإثبات ذلك:__ __ندرس حالة الإنقلاب:__

في هذه الحالة: $\frac{F}{R} < M \leftarrow F < \mu R$

أيضاً: $\ell = a$ (R يكون عند حرف المكعب a)

__معادلات الإتزان:__

$R = W$ ______(1)

$P = F$ ______(2)

العزوم حول نقطة a:

$$W \times a - P \times \frac{3}{2}a = 0$$

$$\therefore\ W = \frac{3}{2}P \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(3)}$$

من (1), (2), (3):

$$R = \frac{3}{2}F$$

$$\therefore\ \frac{F}{R} = \frac{2}{3} = 0.67$$

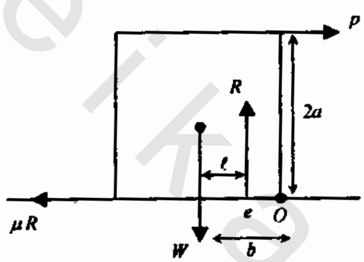
$$\therefore\ \frac{F}{R} < 0.7\,(\mu)$$

$\therefore$ تحققت العلاقة $\frac{F}{R} < \mu \leftarrow \boxed{F < \mu R}$

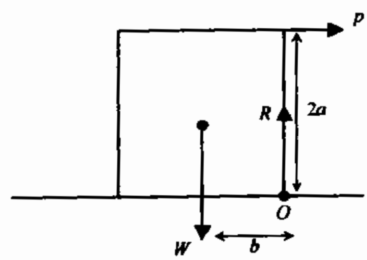
وذلك فإن المكعب لا ينزلق ولكن ينقلب.

<u>مثال(٢):</u> جسم على شكل متوازي مستطيلات إرتفاعه $2a$ وطول قاعدته $2b$، وضع على منضدة أفقية خشنة معامل الإحتكاك بينها وبين الجسم μ ، فإذا أثرت قوة أفقية متزايدة P في منتصف حرف علوي لأحد الأوجه الرأسية بحيث تكون عمودية على هذا الحرف وازداد مقدار القوة حتى أختل التوازن، أثبت أن الجسم ينقلب أو ينزلق تبعاً لكون $\mu \gtrless \dfrac{b}{2a}$

<u>الحل:</u>



حالة الإنزلاق



حالة الإنقلاب

<u>معادلات الإتزان</u>: إذا كان الجسم على وشك الإنزلاق:

$$R = W \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$P = \mu R \qquad \_\_\_\_(2)$$

من $(1), (2)$

$$P = \mu W = P_1 \qquad \_\_\_\_(3)$$

حيث P_1 قوة الإنزلاق.

إذا كان الجسم على وشك الإنقلاب: بأخذ العزوم حول O:

$$W \times b - P \times 2a = 0$$

$$\therefore\ W b = 2a P$$

$$\therefore\ P = \frac{W b}{2a} = P_2 \qquad \_\_\_\_(4)$$

حيث P_2 قوة الانقلاب.

إذا أختل التوازن بالإنزلاق:

الإنزلاق يحدث قبل الإنقلاب وشرط ذلك: $P_2 > P_1$

من $(3), (4)$:

$$\frac{Wb}{2a} > \mu W$$

شرط حدوث الإنزلاق: $\therefore \boxed{\mu < \frac{b}{2a}}$

إذا أختل التوازن بالإنقلاب: الإنقلاب يحدث قبل الإنزلاق وشرط ذلك هو:

$$P_2 < P_1$$

من $(3), (4)$:

$$\frac{Wb}{2a} < \mu W$$

شرط حدوث الانقلاب: $\therefore \boxed{\mu > \frac{b}{2a}}$

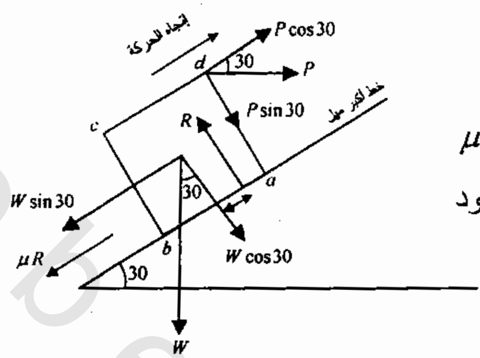
وهو المطلوب.

مثال(٣): وضعت صفيحة منتظمة على شكل مربع بحيث كان مستواها رأسياً، وأحد أحرفها ينطبق على خط أكبر ميل لمستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية $30°$. فإذا أثرت قوة أفقية P على أعلى نقطة من الصفيحة بحيث كانت تعمل إلى أعلى المستوى، وتم زيادة هذه القوة بالتدريج حتى أختل توازن الصفيحة.

أثبت أن الصفيحة تنقلب قبل أن تنزلق إذا كان معامل الإحتكاك:

$$\mu > \frac{3-\sqrt{3}}{7+\sqrt{3}}$$

الحل:



أولاً: ندرس حالة الإنزلاق

قوة الإحتكاك تكون نهائية وتساوي μR

بتحليل القوة في إتجاه المستوى والعمود عليه

(أ) في إتجاه المستوى:

$$P\cos 30 - W\sin 30 - \mu R = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

(ب) في الإتجاه العمودي:

$$R - W\cos 30 - P\sin 30 = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

وحيث أن $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30 = \frac{1}{2}$ فإن (2),(1) تصبح:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}P - \frac{1}{2}W = \mu R \qquad \text{\_\_\_\_\_(3)}$$

$$\frac{1}{2}P + \frac{\sqrt{3}}{2}W = R \qquad \text{\_\_\_\_\_(4)}$$

بضرب (4) في μ :

$$\frac{1}{2}\mu P + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu W = \mu R \qquad \text{\_\_\_\_\_(5)}$$

فمن (5) ,(3) بالطرح:

$$\therefore P(\sqrt{3} - \mu) - (1 + \mu\sqrt{3})W = 0$$

$$\therefore P = \frac{1 + \mu\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \mu}W = P_1 \quad \text{(قوة الإنزلاق)} \qquad \text{\_\_\_\_\_(6)}$$

ثانياً: ندرس حالة الإنقلاب:

إذا كان الجسم على وشك الإنقلاب فإن R تكون عند a فبأخذ العزوم حول a فإن:

$$P\cos 30 \times 2\ell - W\cos 30 \times \ell - W\sin 30 \times \ell = 0$$

(حيث 2ℓ طول ضلع الصفيحة)

$$\therefore\ P\times\frac{\sqrt{3}}{2}(2\ell)-W\times\frac{\sqrt{3}}{2}(\ell)-W\times(\frac{1}{2})(\ell)=0 \quad \therefore\ \sqrt{3}P=\frac{W}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$\therefore\ P=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}W=P_2 \ \text{(قوة الإنقلاب)} \qquad \_\_\_\_\_(7)$$

والآن: لكي تنقلب الصفيحة فإن: $P_2 < P_1$ (شرط الإنقلاب)

$$\therefore\ \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}W<\frac{1+\mu\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mu}W \ \rightarrow\ \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}<\frac{1+\mu\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mu}$$

$$\therefore\ 2\sqrt{3}(1+\mu\sqrt{3})>(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\mu)$$

$$\therefore 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+\frac{1}{\mu})>(1+\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{\mu}-1)$$

$$\therefore\ 6+\frac{2\sqrt{3}}{\mu}>\frac{\sqrt{3}}{\mu}-1+\frac{3}{\mu}-\sqrt{3}$$

$$\therefore\ 7+\frac{\sqrt{3}}{\mu}>\frac{3}{\mu}-\sqrt{3}\ \rightarrow\ 7\mu+\sqrt{3}>3-\mu\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \mu(7+\sqrt{3})>3-\sqrt{3}\ \rightarrow\ \ \mu>\frac{3-\sqrt{3}}{7+\sqrt{3}}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٤):</u> وضع مخروط دائري قائم مصمت زاوية رأسه 2θ بحيث تلامس قاعدته مستوى مائل خشن يميل بزاوية α على الأفقي، فإذا أثرت قوة P عند رأس المخروط في إتجاه المستوى فأثبت أن المخروط ينزلق قبل أن ينقلب إذا كانت :

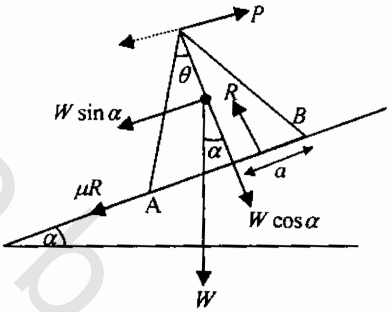
1. $\mu < \tan\theta-\frac{3}{4}\tan\alpha$

في حالة ما إذا كانت القوة P تؤثر إلى أعلى .

2. $\mu < \tan\theta+\frac{3}{4}\tan\alpha$

في حالة ما إذا كانت القوة P تؤثر إلى أسفل .

<u>الحل:</u>



بإعتبار أن مركز ثقل المخروط المصمت يقع على محوره ويقسمه بنسبة $3:1$ من جهة القاعدة فهو يبعد عن القاعدة بمقدار $\frac{h}{4}$ حيث h ارتفاع المخروط (أنظر الباب الخاص بمركز الثقل) .

<u>الحالة الأولى:</u> <u>إذا كانت P تؤثر إلي أعلي المستوى .</u>

يكون الجسم على وشك الإنزلاق إذا كان :

$$P = W\sin\alpha + \mu R \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

$$R = W\cos\alpha \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

من (1) ، (2) نجد أن :

$$P = W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

وهي قوة الإنزلاق.

يكون الجسم على وشك الإنقلاب عندما تؤثر R عند B وتتلاشى قوة الإحتكاك ، فبأخذ العزوم حول B :

$$P\cdot h - a\cdot W\cos\alpha - \frac{h}{4}\cdot W\sin\alpha = 0$$

حيث a نصف قطر قاعدة المخروط .

وبالقسمة على h واعتبار أن $a = h\tan\alpha$

$$\therefore P = W\left(\frac{a}{h}\cos\alpha + \frac{1}{4}\sin\alpha\right) = W\left(\tan\theta\cos\alpha + \frac{1}{4}\sin\alpha\right) \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

وهي قوة الإنقلاب .

وينزلق المخروط قبل أن ينقلب إذا كانت قوة الإنزلاق أصغر من قوة الإنقلاب

$$\therefore W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) < W\left(\tan\theta\cos\alpha + \frac{1}{4}\sin\alpha\right)$$

ومنها (بعد الإختصار) نجد أن : $\mu < \tan\theta - \frac{3}{4}\tan\alpha$

<u>**الحالة الثانية:** إذا كانت P تؤثر أسفل المستوى</u>

(فيكون الإحتكاك μR في عكس الإتجاه أي أعلى المستوى) :

ويكون الجسم على وشك الإنزلاق إذا كان :

$$P + W\sin\alpha = \mu R \qquad \text{\_\_\_\_\_(5)}$$

$$R = W\cos\alpha \qquad \text{\_\_\_\_\_(6)}$$

من (6) ، (5) نجد أن :

$$P = W(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \qquad \text{\_\_\_\_\_(7)}$$

وهي قوة الإنزلاق .

ويكون الجسم على وشك الإنقلاب عندما تؤثر R عند B وتتلاشى قوة الإحتكاك ، فبأخذ العزوم حول B :

$$\therefore P\cdot h - a\cdot W\cos\alpha + \frac{h}{4}\cdot W\sin\alpha = 0$$

وبالقسمة على h واعتبار أن $a = h\tan\theta$

$$\therefore P = W(\tan\theta\cos\alpha - \frac{1}{4}\sin\alpha) \qquad \text{\_\_\_\_\_(8)}$$

وهي قوة الإنقلاب .

وينزلق المخروط قبل أن ينقلب إذا كانت قوة الإنزلاق أصغر من قوة الإنقلاب .

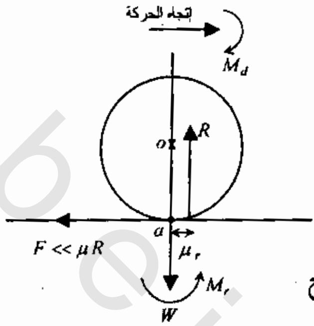
$$\therefore W(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) < W(\tan\theta\cos\alpha - \frac{1}{4}\sin\alpha)$$

ومنها (بعد الاختصار) نجد أن : $\mu < \tan\theta + \frac{3}{4}\tan\alpha$

وهو المطلوب .

ثالثاً: التدحرج

إذا كان لدينا شكلاً دائرياً (كرة أو أسطوانة دائرية) تتحرك حركة تدحرجية هي عبارة عن سلسلة من الإنقلابات المتتالية بحيث أن:



(أ) قوة الإحتكاك تكون أقل بكثير جداً عن قيمتها العظمى $\boxed{F << \mu R}$

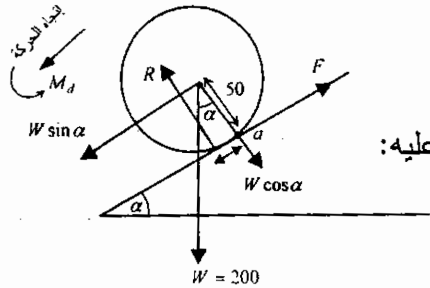
(ب) رد الفعل العمودي R يبعد عن الوزن W بمسافة صغيرة جداً تسمى ذراع مقاومة التدحرج (أو معامل إحتكاك التدحرج) μ_r.

ويلاحظ أن R تكون دائماً في النصف القريب من إتجاه الحركة.

(ج) إلى جانب عزم التدحرج M_d يوجد عزم الإحتكاك الناتج عن التدحرج M_r يعطي بالعلاقة $M_r = \mu_r R$

ويضاد إتجاه الحركة الدورانية لكي يحافظ على إتزان الجسم أثناء التدحرج.

مثال(١): إسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها $50cm$ ووزنها 200 تتدحرج بإنتظام على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية α حيث $\tan\alpha = \frac{1}{20}$، فإذا كان معامل الإحتكاك (الإنزلاقي) بين الأسطوانة والمستوى $\mu = 0.5$ فأثبت أن الحركة هي حركة تدحرجية وأوجد معامل إحتكاك التدحرج (μ_r) للأسطوانة.



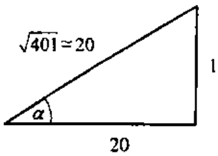
الحل:

بالتحليل في إتجاه المستوى المائل والعمودي عليه:

(أ) في إتجاه المستوى:

$$F - W\sin\alpha = 0$$

$$\therefore F = W \sin\alpha = 200 \times \frac{1}{20} = 10 \qquad \_\_\_\_(1)$$



$\tan\alpha = \frac{1}{20}$, $\sin\alpha = \frac{1}{20}$

$\cos\alpha = \frac{20}{20} = 1$

(ب) <u>في الإتجاه العمودي</u>:

$$R - W\cos\alpha = 0$$

$$\therefore R = W\cos\alpha = 200 \times 1 = 200 \qquad \_\_\_\_(2)$$

<u>لإثبات أن الحركة تدحرجية</u> :

نثبت أن $F << \mu R$ ، أي أن $\frac{F}{R} << \mu$

من (2) ,(1):

$$\frac{F}{R} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} << \frac{1}{2} \quad , \quad \mu = 0.5 = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ الحركة هي حركة تدحرجية.

<u>ولإيجاد معامل إحتكاك التدرج</u> μ_r:

نأخذ العزوم حول نقطة التماس a:

$$W\sin\alpha \times 50 - R \times \mu_r = 0$$

$$\therefore 200 \times \frac{1}{20} \times 50 - 200 \times \mu_r = 0$$

ومنها نوجد μ_r:

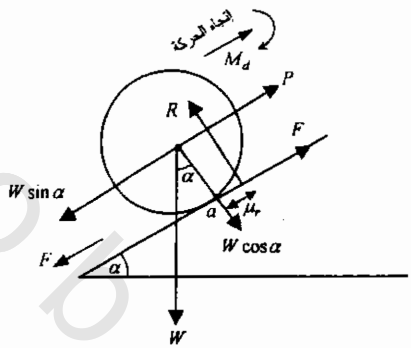
$$\boxed{\mu_r = 2.5}$$

ويلاحظ أن: μ_r صغيرة جداً بالنسبة للمسافة r(50). وهو المطلوب.

<u>مثال(٢)</u>: في المثال السابق إذا أثرت قوة P في مركز الأسطوانة موازية للمستوى المائل فإن الأسطوانة تتدحرج صاعدة إلى أعلى المستوى، فإذا علم أن معامل إحتكاك التدحرج $\mu_r = 2.5$ فأوجد القوة P وتحقق من أن الحركة تدحرجية.

الحل:

بالتحليل في إتجاه المستوى والعمودي عليه



(أ) في إتجاه المستوى:

$$P - F - W\sin\alpha = 0$$

$$\therefore\ F = P - W\sin\alpha = P - 200\times\frac{1}{20} = P - 10 \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

(ب) في الإتجاه العمودي:

$$R - W\cos\alpha = 0$$

$$\therefore\ F = W\cos\alpha = 200\times 1 = 200 \qquad \_\_\_\_\_\_(2)$$

بأخذ العزوم حول نقطة التماس a:

$$R\times\mu_r + W\sin\alpha\times 50 - P\times 50 = 0$$

$$\therefore 200\times 2.5 + 200\times\frac{1}{20}\times 50 - P\times 50 = 0$$

$$\therefore 500 + 500 - 50P = 0$$

$$\therefore 50P = 1000$$

$$\therefore\ P = \frac{1000}{50} = 20 \qquad \_\_\_\_\_\_(3)$$

وهو المطلوب الأول.

للتحقق من أن الحركة تدحرجية:

نثبت أن $\mu << \frac{F}{R}$، أي $\frac{F}{R} << \frac{1}{2}$ $[\mu = \frac{1}{2}]$

بالتعويض من (3) في (1):

$$F = P - 10 = 20 - 10 = 10$$

$$\frac{F}{R} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} << \frac{1}{2}$$

وهو المطلوب ثانياً.

مسائل على الباب الرابع

(١) سلم AB طوله $3m$ ووزنه 400 وحدة يؤثر عند نقطة C التي تبعد مسافة $1m$ عن طرفه السفلي B الذي يستند على أرض خشنه معامل الإحتكاك بينها وبين السلم $\mu = 0.4$، فإذا كان السلم يستند بطرفه A على حائط أملس على أرتفاع $2.4m$ من سطح الأرض، فإلى أية مسافة يمكن لرجل وزنه 640 أن يصعد على السلم قبل أن يبدأ السلم في الإنزلاق.

(٢) AB قضيب منتظم ثقيل وزنه W يستند على مستويين CA, CB يميلان بزاوية 45° على الأفقي ومتصلان عند C، وكان المستوى CA خشناً ومعامل إحتكاكه μ والمستوى CB أملساً، بين أن القضيب يمكن أن يتزن في أي وضع وهو مائل بزاوية θ على المستوى الأملس بحيث تكون θ محصورة بين $\tan^{-1}(1 \pm 2\mu)$.

(٣) سلم منتظم يرتكز بأحد طرفيه على أرض خشنه معامل إحتكاكها μ وبالطرف الآخر على حائط أملس فإذا كانت الأرض تميل على الأفقي بزاوية α فأثبت أنه إذا كان السلم على وشك الإنزلاق فإن زاوية ميله على الرأسي تعطي بالعلاقة: $\tan\theta = 2\tan(\lambda - \alpha)$ حيث λ زاوية الإحتكاك ($\mu = \tan\lambda$).

(٤) $ABCD$ صفيحة مربعة الشكل وضعت بحيث كان مستواها رأسياً وحرفها BC ينطبق على خط أكبر ميل لمستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ بحيث كانت B إلى أعلى، فإذا جذبت الصفيحة من الركن A بقوة أفقية تزداد تدريجياً، فأثبت أن الصفيحة تنقلب قبل أن تنزلق إذا كان معامل الإحتكاك $\mu > \frac{4}{53}$.

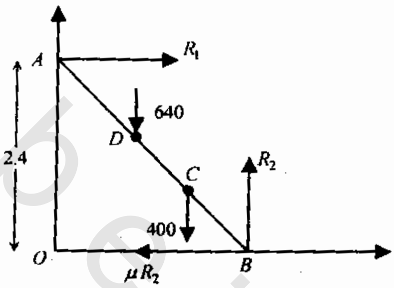
(٥) جسم مقطعه على شكل مسدس $ADCDEF$ طوله ضـــلعه a ووزنـــه W يستقر على مستوى مائل خشن زاوية ميله $30°$ ومعامل إحتكاكه μ. عـــين القوة الأفقية اللازمة لاحداث الإنقلاب حول الحرف A، وأثبت أن الـــشرط اللازم لكي ينزلق الجسم قبل أن ينقلب هو أن يكون: $\mu < \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

(٦) صفيحة مربعة الشكل $ABCD$ وضعت على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية α حيث $\alpha < \frac{\pi}{4}$ وبحيث ينطبق الضلع AB على خط أكبـــر ميـــل ويكون مستوى الصفيحة رأسياً.

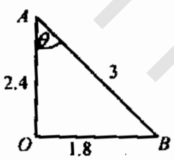
أثرت قوة متزايدة أفقية (P) في نقطة D بحيث يقع خط عملها في مستوى الصفيحة أعلى المستوى، فإذا كان معامل الإحتكاك هو μ حيث $\mu < \tan\alpha$ فأوجد القوة اللازمة لكي تبدأ الصفيحة في الإنزلاق وكذلك القوة اللازمة لكي تبدأ الصفيحة في الإنقلاب، أثبت أيضاً أن الصفيحة تنقلب أو تنزلق أولاً على حسب ما إذا كانت $\mu \gtrless \frac{2\ell^2 - \ell + 1}{\ell^2 - \ell + 2}$ حيث $\ell = \tan\alpha$.

حلول بعض المسائل

المسألة(١):



نفرض أن وزن الرجل يؤثر عند D حيث $\overline{DB} = S$ هذه المسافة تتغير تبعاً لتغير قوة الإحتكاك بين السلم والأرض حتى تصل إلى قيمتها القصوى وهي μR_2.



$(OB)^2 = (3)^2 - (2.4)^2 = 3.24$

$\therefore OB = 1.8$

$\sin\theta = \frac{1.8}{3} = 0.6$

معادلات الإتزان:

أفقياً:

$$R_1 = \mu R_2 = 0.4\,R_2 \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

رأسياً:

$$R_2 = 640 + 400 = 1040 \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

من (1), (2):

$$R_1 = 0.4\,(1040) = 416 \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

بأخذ العزوم حول B:

$$\sum M_B = 0$$

$$\therefore\ 400 \times \overline{CB}\sin\theta + 640 \times \overline{DB}\sin\theta - R_1 \times 2.4 = 0$$

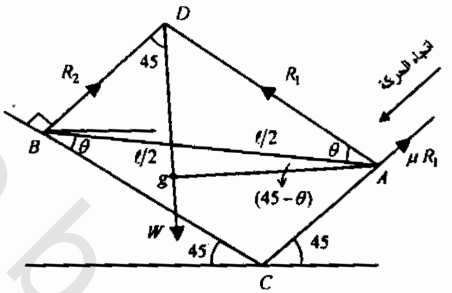
$$\therefore\ 400 \times 1 \times 0.6 + 640 \times S \times 0.6 - 416 \times 2.4 = 0$$

$$\therefore\ 240 + 384S - 998.4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad 384S = 758.4$$

$$\therefore\ S = 1.975\,m$$

وهي أقصى مسافة يمكن أن يصعدها الرجل على السلم قبل أن يبدأ السلم في الإنزلاق (أي وهو في حالة إتزان).

المسألة(٢):



ليكن طول القضيب ℓ ورد الفعل R_1 عند A عمودي علـى CA ورد الفعل R_2 عند B عمـودي على CB ويوازي CA.

في حالة الإتزان النهائي يكون الإحتكاك عند $A = \mu R_1$ وهو إلى أعلى إذا إنزلقت A إلى أسفل والعكس بالعكس.

بالتحليل في الإتجاهين المتعامدين CA, CB نحصل على:

في إتجاه CA:

$$R_2 = W\cos 45^\circ \mp \mu R_1 \qquad \_\_\_\_(1)$$

حيث الإشارة (−) عندما تنزلق A إلى أسفل، الإشارة (+) عندما تنزلق A أعلى.

في الإتجاه CB:

$$R_1 = W\sin 45^\circ \qquad \_\_\_\_(2)$$

بالتعويض من (2) في (1):

$$R_2 = W\cos 45 \mp \mu W\sin 45^\circ = \frac{W}{\sqrt{2}}(1 \mp \mu) \qquad \_\_\_\_(3)$$

وبأخذ العزوم حول A:

$$-R_2 \times \overline{DA} + W \times \overline{gA} = 0$$

$$\therefore -R_2 \times \ell\cos\theta + W \times \frac{\ell}{2}\cos(45-\theta) = 0$$

وبالتعويض عن R_2 من (3):

$$\frac{W}{\sqrt{2}}(1 \mp \mu)\,\ell\cos\theta = W \times \frac{\ell}{2}\cos(45-\theta)$$

$$\therefore \cos(45-\theta) = \frac{2}{\sqrt{2}}(1 \mp \mu)\cos\theta = \sqrt{2}\,(1 \mp \mu)\,\cos\theta$$

$\therefore \cos 45 \cos\theta + \sin 45 \sin\theta = \sqrt{2}\,(1 \mp \mu)\,\cos\theta$

$\therefore \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,(1 \mp \mu)\,\cos\theta$

$\therefore \cos\theta + \sin\theta = 2\,(1 \mp \mu)\,\cos\theta$

$\therefore \sin\theta = 2\,(1 \mp \mu)\,\cos\theta - \cos\theta = (1 \mp 2\mu)\,\cos\theta$

$\therefore \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = 1 \mp 2\mu$

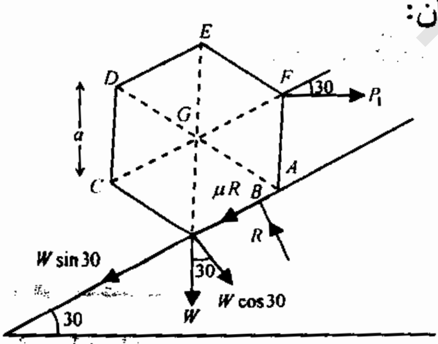
وعلى هذا فإن الزاوية θ في حالة الإحتكاك النهائي تكون محصورة بين:

$\theta = \tan^{-1}(1 \pm 2\mu)$

وهو المطلوب.

المسألة(٥):

المسدس $AOCDEF$ وزنه W يقع في مركزه المتوسط G ويستند بضلعه OA على المستوى المائل، ويكون لدينا حالتان:



(١) **إذا كان المسدس على وشك الإنزلاق**

القوة P_1 الأفقية هي القـوة اللازمـة لإحداث الإنزلاق أعلى المستوى (أي جعل المسدس على وشك الإنـزلاق إلى أعلى)

في هذه الحالة رد الفعل R يكون في موضع ما على يسار A ويكون الإحتكاك في أقصى قيمة له (μR).

بالتحليل في إتجاه المستوى والعمودي عليه:

$P_1 \cos 30 - W \sin 30 - \mu R = 0$ ____(1)

$R - W \cos 30 - P_1 \sin 30 = 0$ ____(2)

بحذف R بين (2) ,(1) نحصل على:

$$P_1 = W\frac{1+\sqrt{3}\,\mu}{\sqrt{3}-\mu} \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

وهي قوة الإنزلاق.

(٢) إذا كان المسدس على وشك الإنقلاب

في هذه الحالة لا تصل قوة الإحتكاك إلى نهايتها العظمى، كما أن رد الفعل العمودي R يؤثر عند الحرف A حتى يحفظ المسدس في حالة إتزان.

فإذا كانت القوة الأفقية اللازمة لإحداث الإنقلاب هي P_2، فبأخذ العزوم حول A:

$$P_2 \times a - W\cos 30 \times a = 0$$

ومنها:

$$P_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}W \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

شرط أن يحدث الإنزلاق قبل الإنقلاب هو: $P_1 < P_2$

$$\therefore W\frac{1+\sqrt{3}\,\mu}{\sqrt{3}-\mu} < \frac{\sqrt{3}}{2}W \quad \rightarrow \quad 2(1+\sqrt{3}\,\mu) < \sqrt{3}(\sqrt{3}-\mu)$$

$$\therefore 2+2\sqrt{3}\,\mu < 3-\sqrt{3}\,\mu \rightarrow 3\sqrt{3}\,\mu < 1$$

$$\therefore \boxed{\mu < \frac{1}{3\sqrt{3}}}$$

وهو المطلوب.

المسألة(٦) : سوف نثبت أن الصفيحة $ABCD$ تبدأ في الإنزلاق عندما:

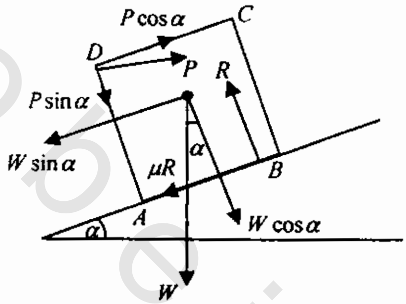
$$P = W\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \qquad \text{(القوة اللازمة للإنزلاق)}$$

وأنها تبدأ في الإنقلاب عندما :

$$P = {W}/{2}\,\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \qquad \text{(القوة اللازمة للإنقلاب)}$$

وأن الصفيحة تنقلب أو تنزلق أولاً على حسب ما إذا كانت

$$\ell = \tan\alpha \quad \text{حيث} \quad \mu \gtrless \frac{2\ell^2 - \ell + 1}{\ell^2 - \ell + 2}$$



الإثبات:

ندرس أولاً حالة الإنزلاق :

تكون الصفيحة على وشك الإنزلاق عندما :

$$P\cos\alpha = W\sin\alpha + \mu R \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$R = W\cos\alpha + P\sin\alpha \qquad \_\_\_\_(2)$$

بالتعويض عن R من (2)، (1) :

$$\therefore P\cos\alpha = W\sin\alpha + \mu(W\cos\alpha + P\sin\alpha)$$

$$\therefore P(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$\therefore P = \frac{W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \qquad \_\_\_\_(3)$$

وهي قوة الإنزلاق.

ندرس ثانياً حالة الإنقلاب : تكون الصفيحة على وشك الإنقلاب عندما :

تكون R عند B، فبأخذ العزوم حول B (باعتبار 2ℓ طول ضلع المربع) :

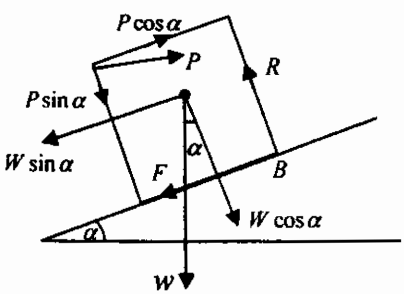
$$\therefore P\sin\alpha \cdot 2\ell + W\sin\alpha \cdot \ell + W\cos\alpha \cdot \ell - P\cos\alpha \cdot 2\ell = 0$$

بالقسمة على ℓ :

$$\therefore 2P(\cos\alpha - \sin\alpha) = W(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$\therefore P = W/2\,\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \qquad \_\_\_\_(4)$$

وهي قوة الإنقلاب .



ولكي ينقلب الجسم قبل أن ينزلق فإن قوة الإنقلاب

يجب أن تكون أصغر من قوة الإنزلاق أي :

$$W/2\,\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} < W\,\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

وبالقسمة على $\cos\alpha$ ووضع $\ell = \tan\alpha$ ، فإن :

$$\therefore \frac{\ell+1}{2(1-\ell)} < \frac{\ell+\mu}{1-\mu\ell}$$

$$\therefore 2(1-\ell)(\ell+\mu) < (\ell+1)(1-\mu\ell)$$

$$\therefore 2\ell+2\mu-2\ell^2-2\ell\mu < \ell-\mu\ell^2+1-\mu\ell$$

$$\therefore -2\ell^2+\ell-1 < -\mu\ell^2+\mu\ell-2\mu$$

$$\therefore 2\ell^2-\ell+1 < \mu(\ell^2-\ell+2)$$

$$\therefore \mu > \frac{2\ell^2-\ell+1}{\ell^2-\ell+2}$$

ولكي ينزلق الجسم قبل أن ينقلب فإن قوة الإنزلاق يجب أن تكون أصغر من قوة الإنقلاب أي :

$$W\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha} < W/_2\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

ومنها نجد أن :

$$W < \frac{2\ell^2-\ell+1}{\ell^2-\ell+2}$$

وهو ا لمطلوب .