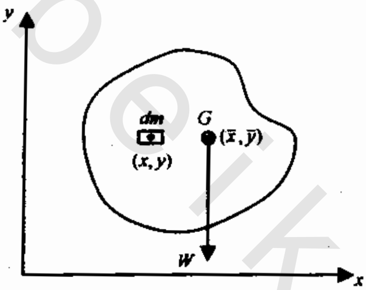
الباب السادس

مركــز الثقــل

تعريف: يعرف مركز ثقل جسم بأنه تلك النقطة التي يمر بها خط عمــل وزن أو ثقل الجسم في جميع أوضاعه.



تعيين إحداثيات مركز الثقل:

نقسم الجسم إلى عناصر صغيرة جداً كتلة كل عنصر dm وإحداثيات مركزه (x, y) فتكون إحداثيات مركز ثقل الجسم هي:

$$\therefore \quad \boxed{\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm}} \quad , \quad \boxed{\bar{y} = \frac{\int y\,dm}{\int dm}}$$

ويلاحظ أن التكاملات مأخوذة على الجسم كله (طول أو مساحة أو حجم).

ملحوظة:

(١) في حالة سلك (طول): نفرض أن كتلة وحدة الأطوال λ (الكثافة الطولية).

حيث $d\ell$ الطول $\qquad \therefore dm = \lambda \cdot d\ell$

(٢) في حالة صفيحة (مساحة): نفرض أن كتلة وحدة المساحات σ (الكثافة المساحية).

حيث dS المساحة $\qquad \therefore dm = \sigma \cdot dS$

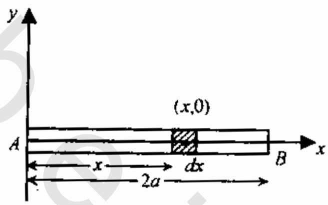
(٣) في حالة حجم: نفرض أن كتلة وحدة الحجوم ρ (الكثافة الحجمية).

حيث dV الحجم $\qquad \therefore dm = \rho \cdot dV$

أمثلة محلولة:

مثال(١): أوجد مركز ثقل قضيب (سلك مستقيم) منتظم طوله $2a$.

الحل:



نأخذ عنصر طوله dx يبعد مسافة x عن الطرف A فيكون مركز ثقله $(x,0)$ وتكون كتلة العنصر: $dm = \lambda \cdot dx$ حيث λ الكثافة الطولية وهي كمية ثابتة (القضيب المنتظم).

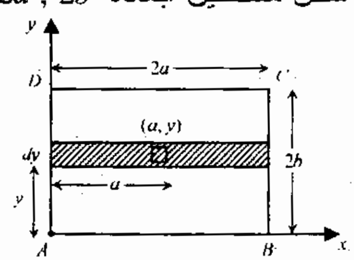
من الواضح أن مركز ثقل القضيب يقع على محور x:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x\,(\lambda dx)}{\int \lambda\,dx} = \frac{\lambda \int x\,dx}{\lambda \int dx}$$

$$= \frac{\int_0^{2a} x\,dx}{\int_0^{2a} dx} = \frac{[x^2/2]\Big|_0^{2a}}{[x]\Big|_0^{2a}} = \frac{1/2[(2a)^2 - 0]}{[(2a) - 0]} = \frac{1/2\,(4a^2)}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

أي أن مركز ثقل القضيب يقع في منتصفه.

مثال(٢): أوجد مركز ثقل صفيحة منتظمة على شكل مستطيل أبعاده $2a$, $2b$.



الحل: نأخذ عنصر على شكل قضيب رفيع منتظم سمكه dy وطوله $2a$ فتكون مساحته $dS = (2a)(dy)$

وإذا كانت σ هي الكثافة المساحية

فإن كتلة العنصر $dm = \sigma\,dS = 2a\,\sigma\,dy$

وإحداثيات مركز العنصر: (a, y)

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int a\,dm}{\int dm} = \frac{a\int dm}{\int dm} = a$$

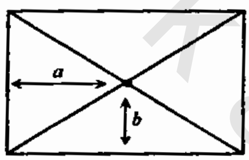
$$\bar{y} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int y(2a\sigma\,dy))}{\int (2a\sigma\,dy))} = \frac{2a\sigma\int y\,dy}{2a\sigma\int dy}$$

$$= \frac{\int_0^{2b} y\,dy}{\int_0^{2b} dy} = \frac{[y^2/2]\Big|_0^{2b}}{[y]\Big|_0^{2b}} = \frac{1/2[(2b)^2 - 0]}{[(2b) - 0]} = \frac{1/2(4b^2)}{2b} = \frac{2b^2}{2b} = b$$

∴ إحداثيات مركز ثقل المستطيل هي (a,b)

أي أن مركز ثقل المستطيل يقع في

نقطة تلاقي القطرين.



<u>مثال(٣):</u> أوجد مركز ثقل سلك على هيئة قوس دائري منتظم زاويته المركزية 2α، ومن ذلك أوجد مركز ثقل سلك منتظم على شكل نصف دائرة.

<u>الحل:</u> نفرض القوس الدائري AB وزاويته المركزية هي 2α

نستخدم الإحداثيات القطبية وذلك بأخذ العنصر قوس طوله:

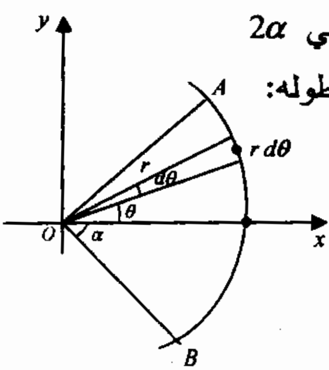
$$d\ell = r\,d\theta$$

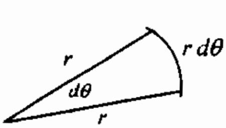
وإحداثيات مركزه: $(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)$

كتلة العنصر: $dm = \lambda\,d\ell = \lambda\,r d\theta$

حيث λ الكثافة الطولية لمادة السلك.

من الواضح أن مركز ثقل القوس يقع على نصف قطر التماثل أي على محور x.

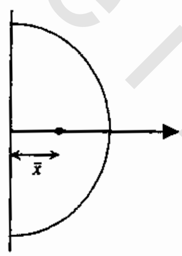




$$\bar{x}=\frac{\int x\,dm}{\int dm}=\frac{\int (r\cos\theta)(\lambda r\,d\theta)}{\int (\lambda r\,d\theta)}=\frac{\lambda r^2\int \cos\theta\,d\theta}{\lambda r\int d\theta}$$

$$=r\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta}=r\frac{[\sin\theta]\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}=r\frac{[\sin\alpha-\sin(-\alpha)]}{[\alpha-(-\alpha)]}$$

$$=r\frac{[\sin\alpha+\sin\alpha]}{[\alpha+\alpha]}=r\frac{2\sin\alpha}{2\alpha}=r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$



حالة خاصة: إذا كان القوس على شكل نصف دائرة فإن:

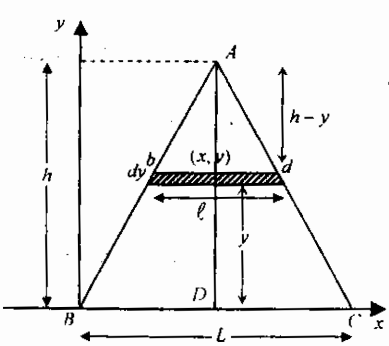
$$\alpha=\frac{\pi}{2}$$

ويكون مركز الثقل في هذه الحالة:

$$\bar{x}=r\frac{\sin\pi/2}{\pi/2}=r\frac{1}{\pi/2}=\frac{2r}{\pi}$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): أوجد مركز ثقل صفيحة مستوية منتظمة الكثافة على شكل مثلث.



الحل: لتكن h هي إرتفاع المثلث، L هي طول قاعدته، نأخذ العنصر على شكل شريحة مستطيلة طولها ℓ وعرضها dy فتكون مساحتها $dS=\ell\,dy$ وكتلتها $dm=\sigma\,dS=\sigma\,\ell\,dy$ حيث σ الكثافة المساحية.

ومركز ثقلها هو النقطة (x,y).

من الواضح أن مركز ثقل المثلث يقع على المستقيم المتوسط المار بالرأس A (أي المستقيم AD).

$$\therefore\ \bar{y}=\frac{\int y\,dm}{\int dm}=\frac{\int \sigma\ell y\,dy}{\int \sigma\ell\,dy}=\frac{\sigma\int \ell y\,dy}{\sigma\int \ell\,dy} \qquad \_\_\_\_(1)$$

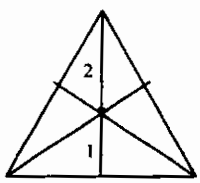
ومن تشابه المثلثين ABC , ABD.

$$\frac{\ell}{L}=\frac{h-y}{h} \quad \therefore\ \ell=\frac{L}{h}(h-y)$$

بالتعويض عن ℓ في (1):

$$\therefore\ \bar{y}=\frac{\int y\cdot L/h(h-y)\,dy}{\int L/h(h-y)\,dy}=\frac{L/h\int y(h-y)\,dy}{L/h\int (h-y)\,dy}$$

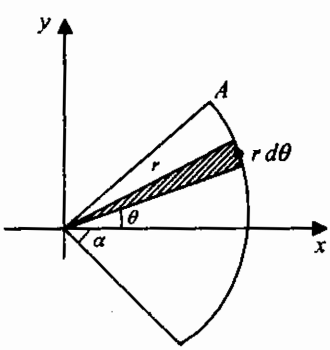
$$=\frac{\int_0^h (yh-y^2)\,dy}{\int_0^h (h-y)\,dy}=\frac{[y^2h/2-y^3/3]\Big|_0^h}{[hy-y^2/2]\Big|_0^h}=\frac{h^3/2-h^3/3}{h^2-h^2/2}=\frac{h^3/6}{h^2/2}=\frac{h}{3}$$



أي أن مركز ثقل المثلث يقع على بعد ثلث الأرتفاع من جهة القاعدة أي يقسم الأرتفاع بنسبة $1:2$ من جهة القاعدة.

أي أنه يقع على ملتقي المستقيمات المتوسط للمثلث.

__مثال(٥):__ أوجد مركز ثقل قطاع دائري زاويته المركزية 2α ومن ذلك أوجد مركز ثقل صفيحة على شكل نصف دائرة.



__الحل:__ القطاع الدائري هو عبارة عن صفيحة مستوية يحدها قوس دائري زاويته المركزية 2α فمن التماثل: مركز ثقل القطاع يقع على محور التماثل (محور x).

نأخذ العنصر مساحة صغيرة جداً على شكل مثلث قاعدته $= r\,d\theta$ وأرتفاعه $= r$ فتكون مساحته:

$$dS = \frac{1}{2}\ (\text{القاعدة} \times \text{الأرتفاع}) = \frac{1}{2}(r\,d\theta)(r) = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

وكتلته: $dm = \sigma\,ds = \frac{1}{2}\sigma\,r^2\,d\theta$

حيث σ الكثافة المساحية.

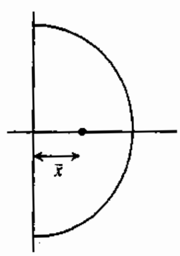
ومركز ثقله (يقع على بعد $\frac{2}{3}$ من الرأس) أي أن إحداثياته هي:

$$\left(\frac{2}{3}r\cos\theta\ ,\ \frac{2}{3}r\sin\theta\right)$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int(2/3\,r\cos\theta)(1/2\,\sigma\,r^2\,d\theta)}{\int(1/2\,\sigma\,r^2\,d\theta)}$$

$$= \frac{2}{3}r\,\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta} = \frac{2}{3}r\,\frac{[\sin\theta]|_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]|_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{2}{3}r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

<u>**حالة خاصة:**</u> مركز ثقل صفيحة على شكل $\frac{1}{2}$ دائرة (نصف قرص).



نضع $\alpha = \frac{\pi}{2}$

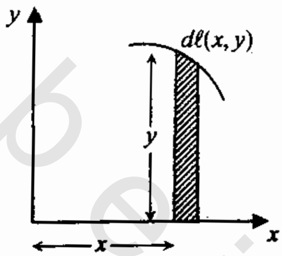
$$\bar{x} = \frac{2}{3}r\,\frac{\sin\pi/2}{\pi/2} = \frac{2}{3}r\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{4r}{3\pi}$$

وهو المطلوب.

مركز ثقل السطوح الدورانية

تعريف: يعرف السطح الدوراني بأنه السطح الناتج عن دوران منحنى حول أحد المحورين، ويكون المحور الذي يتم الدوران حوله هو محور تماثل.

في حالة الإحداثيات الكرتيزية:



نأخذ العنصر عبارة عن قوس من المنحنى طوله $d\ell$ عند (x,y) فإذا دار العنصر حول محور x دورة كاملة فإنه يكون حلقة مساحتها:

$ds =$ المحيط × الطول (السمك)

$= 2\pi\, y \times d\ell$

وكتلتها: $dm = \sigma\, ds$ حيث σ هي الكثافة المساحة.

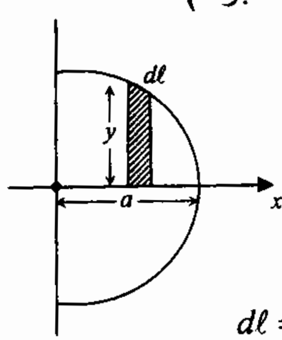
ويلاحظ أن: طول قوس من منحنى في الإحداثيات الكرتيزية يعطي بالعلاقة:

$$\boxed{d\ell = \sqrt{1+y'^2}\, dx}$$

حيث $y' = \frac{dy}{dx}$ وتعطي من معادلة المنحنى $y = f(x)$.

أمثلة محلولة

مثال(١): أوجد مركز ثقل قشرة نصف كروية (نصف كرة مجوفة).



الحل: نأخذ العنصر $d\ell$ عبارة عن جزء من دائرة (قوس دائري) معادلتها: $x^2 + y^2 = a^2$

حيث a نصف قطر الدائرة.

الطول $d\ell$ يعطي بالعلاقة:

$$d\ell = \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

حيث y' يمكن إيجادها من معادلة الدائرة: $x^2 + y^2 = a^2$.

فبالتفاضل بالنسبة لـ x:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = y'$$

$$\therefore d\ell = \sqrt{1 + (-\frac{x}{y})^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx$$

ولكن: $y^2 = a^2 - x^2$

$$\therefore d\ell = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}\, dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

إذا دار العنصر $d\ell$ حول محور x دورة كاملة فإنه يكون حلقة مساحتها: $ds = 2\pi\, y \cdot d\ell$ وكتلتها:

$$dm = \sigma\, ds = 2\pi\, \sigma y\, d\ell$$

وحيث أن محور x هو محور تماثل فإن مركز الثقل يقع عليه:

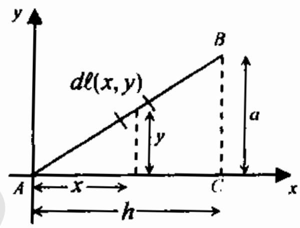
$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int x \cdot (2\pi\, \sigma\, y\, d\ell)}{\int 2\pi\, \sigma\, y\, d\ell} = \frac{\int x\, y\, d\ell}{\int y\, d\ell} \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

وبالتعويض عن $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ، $d\ell = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx}{\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx} = \frac{\int_0^a x\, dx}{\int_0^a dx} = \frac{[\frac{x^2}{2}]\Big|_0^a}{[x]\Big|_0^a} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a} = \frac{a}{2}$$

أي أن مركز ثقل النصف كرة المجوفة (القشرة نصف الكروية) يقع على بعد $\frac{a}{2}$ من المركز. وهو المطلوب.

مثال(٢): أوجد مركز ثقل سطح مخروطي (مخروط دائري قائم أجوف) نصف قطر قاعدته a وارتفاعه h.



الحل: ينتج السطح المخروطي (المخروط الدائري القائم الأجوف) من دوران المستقيم AB المبين بالشكل حول محور x دورة كاملة.

نأخذ العنصر $d\ell$ عند النقطة (x,y) فإذا دار حول محور x دورة كاملة فإنه يكون حلقة مساحتها: $dS = 2\pi y \cdot d\ell$، وكتلتها $dm = \sigma\, dS = 2\pi \sigma\, y\, d\ell$

الطول $d\ell$ يعطي بالعلاقة: $d\ell = \sqrt{1+y'^2}\, dx$

حيث y' يمكن إيجادها من معادلة المنحنى (المستقيم AB) كالآتي:

من هندسة الشكل: $\frac{x}{y} = \frac{h}{a}$ ← $y = \frac{a}{h}x$

$$\therefore\ dy = \frac{a}{h}dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a}{h} = y'$$

$$\therefore\ d\ell = \sqrt{1+(\frac{a}{h})^2}\, dx = \sqrt{\frac{a^2+h^2}{h^2}}\, dx = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h} dx$$

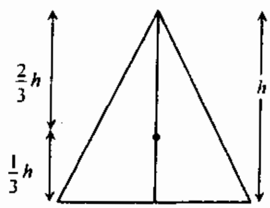
وحيث أن محور x هو محور تماثل فإن مركز الثقل يقع عليه:

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int x\cdot(2\pi\sigma\, y\, d\ell)}{\int 2\pi\sigma\, y\, d\ell} = \frac{\int x\, y\, d\ell}{\int y\, d\ell}$$

وبالتعويض عن $y = \frac{a}{h}x$ وعن $d\ell = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h} dx$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int x\cdot(\frac{a}{h}x)\cdot \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{h} dx}{\int (\frac{a}{h}x)\cdot \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{h} dx} = \frac{\int_0^h x^2\, dx}{\int_0^h x\, dx} = \frac{[\frac{x^3}{3}]\Big|_0^h}{[\frac{x^2}{2}]\Big|_0^h} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{2}{3}h$$

أي أن مركز ثقل المخروط الأجوف (السطح المخروطي) يقع على محور تماثله وعلى مسافة تساوي $\frac{1}{3}h$ من القاعدة أو $\frac{2}{3}h$ من الرأس، حيث h هي أرتفاع المخروط. وهو المطلوب.

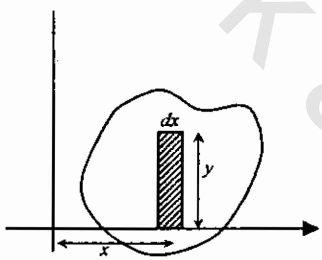


مركز ثقل الحجوم الدورانية:

تعريف: يعرف الحجم الدوراني بأنه الحجم الناتج عن دوران مساحة حول أحد المحورين، فإذا كان الدوران حول محور x مثلاً فإن مركز الثقل يقع على هذا المحور كمحور تماثل.

في حالة الإحداثيات الكرتيزية:

نأخذ العنصر جزء من المساحة على شكل مستطيل طوله y وعرضه dx، فإذا دار دورة كاملة حول محور x فإنه يكون قرصاً حجمه:



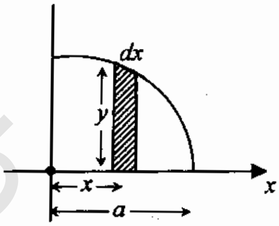
$$dV = \text{السمك} \times \text{المساحة}$$
$$= \pi y^2 \times dx$$

وتكون كتلته: $dm = \rho\, dV$ حيث ρ الكثافة الحجمية

$$\therefore \boxed{dm = \pi \rho y^2 dx}$$

أمثلة محلولة:

مثال(١): أوجد مركز ثقل نصف كرة مصمتة نصف قطرها a .



الحل: تتولد نصف الكرة من دوران مساحة على شكل $\frac{1}{4}$ دائرة حول أحد حافتيها، وليكن الدوران حول محور x

نأخذ العنصر مستطيل مساحته $y\,dx$

فإذا دار حول محور x فإنه يكون قرصاً حجمه: $dV = \pi y^2 dx$، وكتلته

$$dm = \rho\, dV = \pi \rho y^2 dx$$

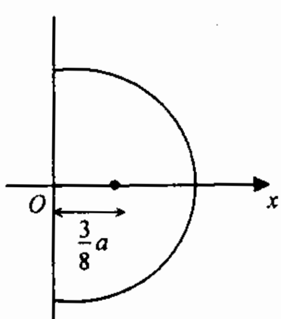
ومن معادلة الدائرة المولدة للكرة:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\therefore y^2 = a^2 - x^2 \rightarrow dm = \pi \rho (a^2 - x^2)\, dx$$

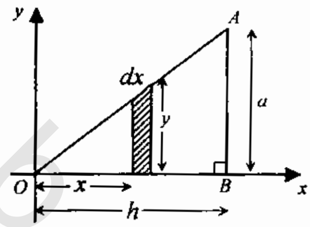
$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int x \cdot \pi \rho (a^2 - x^2)\, dx}{\int \pi \rho (a^2 - x^2)\, dx} = \frac{\int x (a^2 - x^2)\, dx}{\int (a^2 - x^2)\, dx}$$

$$= \frac{\int_0^a (xa^2 - x^3)\, dx}{\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx} = \frac{[\frac{x^2 a^2}{2} - \frac{x^4}{4}]_0^a}{[a^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^a} = \frac{\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}}{a^3 - \frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{2}{3} a^3} = \frac{3}{8} a$$



أي أن مركز ثقل نصف الكرة المصمتة يقع على محور تماثلها ويبعد مسافة $\frac{3}{8}a$ من مركز الكرة.

مثال(٢): أوجد مركز ثقل مخروط دائري قائم مصمت نصف قطر قاعدته a وارتفاعه h.



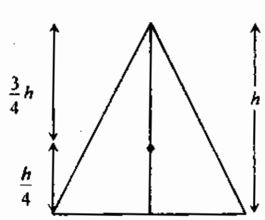
الحل: يتولد المخروط الدائري القائم المصمت من دوران مساحة على شكل مثلث قائم الزاوية حول أحد الضلعين المجاور للزاوية القائمة.

نأخذ العنصر مستطيل مساحته $y\,dx$ فإذا دار حول محور x فإنه يكون قرصاً حجمه $dV = \pi\, y^2 \cdot dx$، وكتلته $dm = \rho\, dV = \rho\, \pi\, y^2\, dx$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int x\,(\rho\, \pi\, y^2\, dx)}{\int \rho\, \pi\, y^2\, dx} = \frac{\int x\, y^2\, dx}{\int y^2\, dx}$$

ومن هندسة الشكل: $\dfrac{x}{h} = \dfrac{y}{a} \leftarrow \boxed{y = \dfrac{a}{h}\, x}$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int x(\frac{a}{h}\, x)^2\, dx}{\int (\frac{a}{h}\, x)^2\, dx} = \frac{\int x\,(\frac{a^2}{h^2}\, x^2)\, dx}{\int \frac{a^2}{h^2}\, x^2\, dx} = \frac{\int_0^h x^3\, dx}{\int_0^h x^2\, dx} = \frac{[\frac{x^4}{4}]_0^h}{[\frac{x^3}{3}]_0^h} = \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3}{4}\, h$$

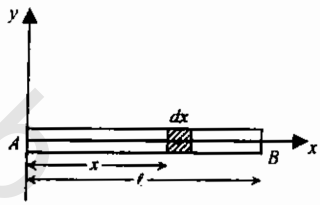


أي أن مركز ثقل المخروط المصمت يقع على محور تماثله ويبعد عن القاعدة بمسافة $\frac{1}{4}\, h$، وعن الرأس بمسافة $\frac{3}{4}\, h$.

وهو المطلوب.

مراكز أثقال الأجسام ذات الكثافة المتغيرة:

مثال(١): أوجد مركز ثقل قضيب غير منتظم الكثافة تتغير كثافته مع مربع البعد عن أحد طرفيه.



الحل: بإعتبار أن طول القضيب ℓ وأن A هي نقطة الأصل، فتكون الكثافة:

$$\lambda \propto x^2 \;\rightarrow\; \therefore \lambda = \mu x^2$$

حيث x بعد العنصر dx من طرف القضيب A، كتلة العنصر $dm = \lambda\, dx$

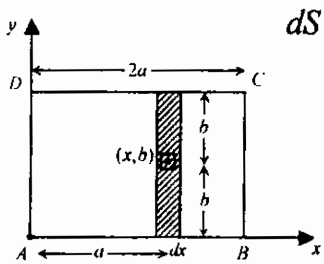
من التماثل: مركز ثقل القضيب يقع على محور x حيث:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int x(\lambda\, dx)}{\int \lambda\, dx} = \frac{\int x \cdot \mu x^2\, dx}{\int \mu x^2\, dx}$$

$$= \frac{\int_0^{\ell} x^3\, dx}{\int_0^{\ell} x^2\, dx} = \frac{[\frac{x^4}{4}]\Big|_0^{\ell}}{[\frac{x^3}{3}]\Big|_0^{\ell}} = \frac{\frac{\ell^4}{4}}{\frac{\ell^3}{3}} = \frac{3}{4}\ell$$

أي أن مركز الثقل يقع على بعد $\frac{3}{4}$ طول القضيب من الطرف A.

مثال(٢): صفيحة على شكل مستطيل $ABCD$ أبعادها $AB = 2a$ ، $AD = 2b$ ، فإذا كانت مادة الصفيحة ذات كثافة تتناسب مع مربع بعدها من AD.



الحل: نأخذ العنصر مستطيل مساحته: $dS = (2b)(dx)$

ومركز ثقله يقع في منتصفه أي عند النقطة (x, b).

كثافة مادة العنصر: $\sigma \propto x^2$

$$\therefore \sigma = \mu x^2$$

وتكون الكتلة: $dm = \sigma\, ds$، وبذلك فإن إحداثيات مركز ثقل الصفيحة تكون:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int b\, dm}{\int dm}$$

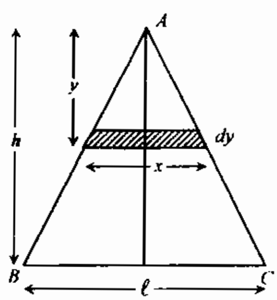
$$\bar{x} = \frac{\int x(2\sigma\, b dx)}{\int 2\sigma\, b dx} = \frac{\int x(2\mu x^2 \cdot b dx)}{\int 2(\mu x^2) b dx}$$

$$= \frac{\int_0^{2a} x^3 dx}{\int_0^{2a} x^2\, dx} = \frac{[\frac{x^4}{4}]\Big|_0^{2a}}{[\frac{x^3}{3}]\Big|_0^{2a}} = \frac{\frac{1}{4}(2a)^4}{\frac{1}{3}(2a)^3} = \frac{3}{2}a$$

$$\bar{y} = \frac{\int b\, dm}{\int dm} = \frac{b\int dm}{\int dm} = b$$

∴ إحداثيات مركز ثقل الصفيحة هي: $(\frac{3}{2}a, b)$.

<u>مثال(٣):</u> أوجد بعد مركز ثقل صفيحة على شكل مثلث عن الرأس A إذا كانت كثافة مادة الصفيحة تتناسب مع البعد عن A.



<u>الحل:</u> نأخذ العنصر شريحة على شكل مستطيل مواز لقاعدة المثلث

مساحته: $ds = x\, dy$، وكثافته $\sigma = \mu y$

حيث y بعد العنصر عن الرأس A.

فإذا كان h هو أرتفاع المثلث، ℓ هو طول القاعدة BC، فإن

$$\boxed{x = \frac{\ell}{h} y} \leftarrow \frac{x}{\ell} = \frac{y}{h}$$

من الواضح أن مركز الثقل يقع على المستقيم المتوسط الواصل من الرأس A إلى القاعدة.

فإذا كان بعده عن A هو $\bar{y}$ فإن:

$$\bar{y}=\frac{\int y\,dm}{\int dm}=\frac{\int y\,\sigma\,ds}{\int \sigma\,ds}=\frac{\int y\cdot(\mu\,y)(x\,dy)}{\int(\mu\,y)(x\,dy)}=\frac{\int y^2\,x\,dx}{\int yx\,dy}$$

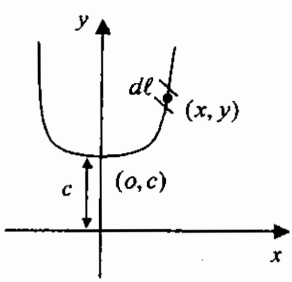
وبالتعويض عن $x=\frac{\ell}{h}y$ فإن:

$$\bar{y}=\frac{\int y^2(\frac{\ell}{h}y)\,dy}{\int y(\frac{\ell}{h}y)\,dy}=\frac{\int_0^h y^3\,dy}{\int_0^h y^2\,dy}=\frac{[\frac{y^4}{4}]_0^h}{[\frac{y^3}{3}]_0^h}=\frac{3}{4}h$$

وهو المطلوب.

أمثلة عامة على مركز الثقل

مثـــال(١): أوجد مركز ثقل قوس من منحنـــى الكتينـــة $y=c\cosh\frac{x}{c}$ يقـــع بـــين الرأس (o,c) وأي نقطة على المنحنى (x,y) .



الحل: القوس المطلوب إيجاد مركز ثقله محصور بين الرأس (o,c) والنقطة (x,y) على المنحنى

نأخذ عنصر طوله $d\ell$ عند (x,y)

وباستخدام معادلة المنحنى $y=c\cosh\frac{x}{c}$

$$\therefore d\ell=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx=\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{c}}\,dx=\cosh\frac{x}{c}\,dx$$

وتكون إحداثيات مركز ثقل القوس:

$$\bar{x}=\frac{\int x\lambda\,d\ell}{\int \lambda\,d\ell}=\frac{\int x\,d\ell}{\int d\ell}=\frac{\int_0^x x\cosh\frac{x}{c}\,dx}{\int_0^x \cosh\frac{x}{c}\,dx}$$

تكامل البسط :

$$\int_0^x x\cosh\frac{x}{c}dx = \int_0^x x\,c[d(\sinh\frac{x}{c})] = xc\sinh\frac{x}{c}\Big|_0^x - \int_0^x c\sinh\frac{x}{c}$$

$$= xc\sinh\frac{x}{c} - c^2\cosh\frac{x}{c} + c^2$$

تكامل المقام :

$$\int_0^x \cosh\frac{x}{c}dx = c\sinh\frac{x}{c}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{xc\sinh\frac{x}{c} - c^2\cosh\frac{x}{c} + c^2}{c\sinh\frac{x}{c}} = \frac{x\sinh\frac{x}{c} + c(1-\cosh\frac{x}{c})}{\sinh\frac{x}{c}}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^x y\lambda d\ell}{\int_0^x \lambda d\ell} = \frac{\int_0^x y d\ell}{\int_0^x d\ell} = \frac{\int_0^x (c\cosh\frac{x}{c})\cosh\frac{x}{c}dx}{\int_0^x \cosh\frac{x}{c}dx}$$

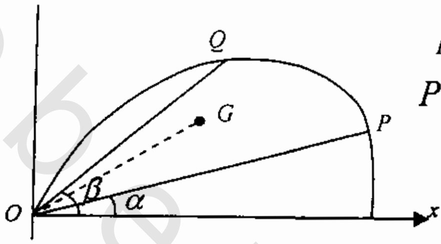
$$= \frac{\int_0^x c\cosh^2\frac{x}{c}dx}{\int_0^x \cosh\frac{x}{c}dx}$$

تكامل البسط :

$$\int_0^x \cosh^2\frac{x}{c}dx = \int_0^x \frac{1}{2}(1+\cosh\frac{2x}{c})dx = \frac{1}{2}(x + \frac{c}{2}\sinh\frac{2x}{c})$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{c/2\,(x + \frac{c}{2}\sinh\frac{2x}{c})}{c\sinh\frac{x}{c}} = \frac{x + \frac{c}{2}\sinh\frac{x}{c}}{2\sinh\frac{x}{c}}$$

مثال(٢): إذا كانت نقطة Q تمثل قطب منحنى اللمنسكيت $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ،
وكانت G هي مركز ثقل أي قوس PQ من المنحنى
أثبت أن OG ينصف الزاوية POQ حيث O نقطة الأصل



الحـل: نفرض أن : $p\hat{o}x = \alpha \ , \quad Q\hat{o}x = \beta$

نوجد أولا إحداثيات مركز الثقل G للقوس PQ

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y\, dm}{\int dm}$$

حيث: $dm = \lambda\, d\ell$

(طول قوس في الإحداثيات القطبية) $d\ell = \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}\ d\theta$

ولكن من معادلة المنحنى : $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

فبالتفاضل: $\therefore 2r\, dr = -2a^2 \sin 2\theta\, d\theta$

ومنها : $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a^2}{r} \sin 2\theta$

$$\therefore d\ell = \sqrt{r^2 + \frac{a^4}{r^2}\sin^2 2\theta}\ d\theta = \frac{\sqrt{r^4 + a^4 \sin^2 2\theta}}{r}\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{a^4 \cos^2 2\theta + a^4 \sin^2 2\theta}}{r}\, d\theta = \frac{a^2}{r}\, d\theta$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_\alpha^\beta \frac{a^2}{r} x\, d\theta}{\int_\alpha^\beta \frac{a^2}{r}\, d\theta} = \frac{\int_\alpha^\beta \frac{a^2}{r} r\cos\theta\, d\theta}{\int_\alpha^\beta \frac{a^2}{r}\, d\theta} = \frac{\int_\alpha^\beta \cos\theta\, d\theta}{\frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_\alpha^\beta \frac{a^2}{r} y\, d\theta}{\int_\alpha^\beta \frac{a^2}{r}\, d\theta} = \frac{\int_\alpha^\beta \frac{a^2}{r} r\sin\theta\, d\theta}{\int_\alpha^\beta \frac{a^2}{r}\, d\theta} = \frac{\int_\alpha^\beta \sin\theta\, d\theta}{\frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

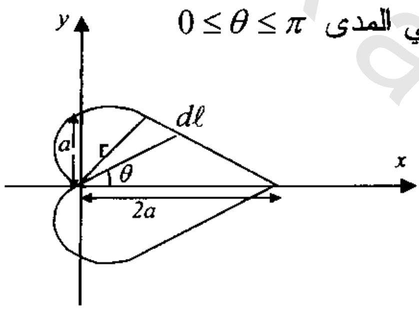
إن حساب التكامل في المقام في العلاقتين (2) ، (1) ليس ضروريا لأن المطلــوب هو إثبات أن OG ينصف الزاوية POQ أي إثبات أن

$$\tan G\hat{O}X = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \sin\theta \, d\theta}{\int_{\alpha}^{\beta} \cos\theta \, d\theta} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

أي أن
$$G\hat{O}X = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

وهو المطلوب .

مثال(٣): أوجد مركز ثقل سلك على شكل المنحنى القلبي (الكاردويد) الذي معادلته $r = a(1+\cos\theta)$ في المدى $0 \le \theta \le \pi$



الحل: المنحنى متماثل حول محور x

وعلى ذلك فإن مركز الثقل يقع على محور التماثل أي أن $\bar{y} = 0$

نأخذ العنصر طوله $d\ell$ عند النقطة $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ومن معادلة المنحنى $r = a(1+\cos\theta)$

$$\therefore d\ell = \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}\, d\theta = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta}\, d\theta = \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

وتكون إحداثيات مركز ثقل المنحنى $(\bar{x}, O)$ حيث :

$$\bar{x}=\frac{\int x\,d\ell}{\int d\ell}=\frac{\int_0^{\pi} r\cos\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}=\frac{\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\cos\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}$$

$$=a\frac{\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}$$

تكامل البسط :

$$I=\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\int_0^{\pi}(2\cos^2\frac{\theta}{2})\cdot(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)\cdot\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}(4\cos^5\frac{\theta}{2}-2\cos^3\frac{\theta}{2})d\theta$$

بوضع $d\theta=2d\phi\leftarrow\theta=2\phi\leftarrow\frac{\theta}{2}=\phi$

$$\theta=0\to\phi=0\quad,\quad\theta=\pi\to\phi=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore I=2\int_0^{\pi}(4\cos^5\phi-2\cos^3\phi)d\phi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\phi\,d\phi=\frac{4\times 2}{5\times 3}=\frac{8}{15}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\phi\,d\phi=\frac{2}{3\times 1}=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta=\frac{(n-1)(n-3)\cdots}{n(n-2)\cdots}\times\begin{cases}1 & (n\ \text{فردية})\\ \pi/2 & (n\ \text{زوجية})\end{cases}$$

$$\therefore I=2[4\cdot\frac{8}{15}-2\cdot\frac{2}{3}]=\frac{8}{3}[\frac{8}{5}-1]=\frac{8}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

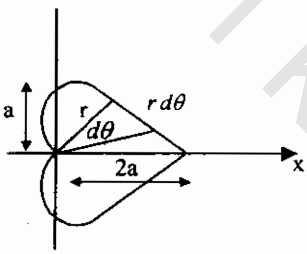
تكامل المقام :

$$\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\,d\phi = 2\sin\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$\therefore\ \bar{x} = a\frac{8/5}{2} = \frac{4}{5}a$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): أوجد مركز ثقل المساحة المحدودة بمنحنى الكاردويد $r = a(1+\cos\theta)$



الحل: المنحنى متماثل بالنسبة لمحور x فيكون $\bar{y} = 0$

نأخذ العنصر مثلث مساحته : $ds = \frac{1}{2}r^2 d\theta$

ومركز ثقله : $(\frac{2}{3}r\cos\theta\ ,\ \frac{2}{3}r\sin\theta)$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2 d\theta\cdot\frac{2}{3}r\cos\theta}{\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2 d\theta} = \frac{2}{3}\frac{\int_0^{\pi} r^3\cos\theta\,d\theta}{\int_0^{\pi} r^2 d\theta}$$

$$= \frac{2}{3}a\frac{\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta}{\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta}$$

$$= \frac{2}{3}a\frac{\int_0^{\pi}(1+3\cos\theta+2\cos^2\theta+\cos^3\theta)\cos\theta\,d\theta}{\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta}$$

ولكن :

$$\therefore \int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta = 0 \quad , \quad \int_0^{\pi} \cos^3\theta\, d\theta = 0$$

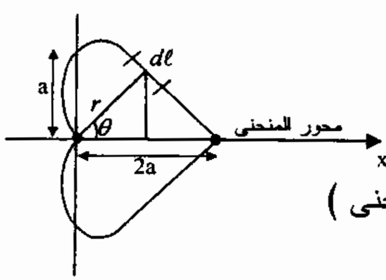
$$\int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = 2[\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}] = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^4\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = 2[\frac{3\times 1}{4\times 2}\times\frac{\pi}{2}] = \frac{3\pi}{8}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{2}{3}a\frac{(0+3\cdot\frac{\pi}{2}+0+\frac{3\pi}{8})}{(\pi+0+\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{3}a\frac{\frac{15}{8}\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{5}{6}a$$

وهو المطلوب.

مثال(٥): أوجد مركز ثقل المساحة الناتجة عن دوران المنحنى القلبي $r = a(1+\cos\theta)$ حول محوره .



الحل:

نأخذ العنصر $d\ell$ عند $(r\cos\theta, r\sin\theta)$

فإذا دار دورة كاملة حول محور x (محور المنحنى)

فإنه يكون حلقة مساحتها $ds = 2\pi r\sin\theta\cdot d\ell$

حيث

$$d\ell = \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}\; d\theta \quad = \sqrt{a^2(1+\cos)^2 + (-a\sin\theta)^2}\; d\theta$$

$$= \sqrt{a^2 + 2a^2\cos\theta + a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}\; d\theta$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta}\; d\theta = \sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}\; d\theta$$

$$= \sqrt{2a^2(2\cos^2\frac{\theta}{2})}\; d\theta = 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x\, dm}{dm} = \frac{\int r\cos\theta\cdot 2\pi r\sin\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\int 2\pi r\sin\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta} = \frac{\int_0^\pi r^2\sin\theta\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\int_0^\pi r\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2\sin\theta\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\int_0^\pi a(1+\cos\theta)\,\sin\theta\,\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}$$

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$
$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= a\,\frac{\int_0^\pi (2\cos^2\frac{\theta}{2})^2\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)\cdot\cos\frac{\theta}{2}\;d\theta}{\int_0^\pi (2\cos^2\frac{\theta}{2})\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\;d\theta}$$

$$= a\,\frac{\int_0^\pi (4\cos^8\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - 2\cos^6\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2})\;d\theta}{\int_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta}$$

$$= a\,\frac{\int_0^\pi [-4\cos^8\frac{\theta}{2}\,d(\cos\frac{\theta}{2}) + 2\cos^6\frac{\theta}{2}\,d(\cos\frac{\theta}{2})]}{\int_0^\pi -\cos^4\frac{\theta}{2}\,d(\cos\frac{\theta}{2})}$$

$$= a\,\frac{-4[\frac{2}{9}\cos^9\frac{\theta}{2}]_0^\pi + 2[\frac{2}{7}\cos^7\frac{\theta}{2}]_0^\pi}{[-\frac{2}{5}\cos^5\frac{\theta}{2}]_0^\pi} = 2a\,\frac{-\frac{4}{9}[0-1] + \frac{2}{7}[0-1]}{-\frac{1}{5}[0-1]}$$

$$= 2a\,\frac{\frac{4}{9}-\frac{2}{7}}{\frac{1}{5}} = 2a\,\frac{\frac{5}{63}}{\frac{1}{5}} = 2a\cdot\frac{25}{63} = \frac{50}{63}\,a$$

وهو المطلوب.

مسائل على مركز الثقل

(١) أوجد مركز ثقل المساحة المحصورة داخل المنحنى $y=\sin x$ بين $x=0,\ x=\pi$.

(٢) أوجد مركز ثقل المساحة المحدودة بالقطع المكافئ $y^2=4ax$ ومحور x والمستقيم الرأسي $x=b$.

(٣) أوجد مركز ثقل المساحة المحدودة بالقطع المكافئ $y^2=4ax$ ومحور y والمستقيم الأفقي $y=c$.

(٤) أوجد مركز ثقل شبه منحرف قاعدتيه المتوازيتين a,b وأرتفاعه h.

(٥) أوجد مركز ثقل المجسم الدوراني المكافئ الناتج عن دوران القطع المكافئ $y^2=4ax$ حول محور x بين $x=0\ ,\ x=h$.

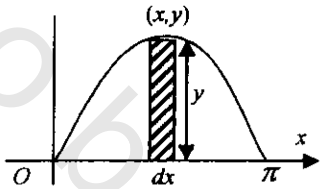
(٦) أوجد مركز ثقل الحجم الناتج عن دوران المساحة المحصورة بين القطع المكافئ $y^2=4ax$ ومحور y والمستقيم $y=2a$ حول محور y دورة كاملة.

(٧) أوجد مركز ثقل صفيحة منتظمة على شكل $\frac{1}{4}$ قطع ناقص محصورة في الربع الأول.

حلول المسائل

المسألة(١): نأخذ العنصر مستطيل مساحته $ds = y\,dx$

ومركز ثقله هو $(x, \frac{y}{2})$



إحداثيات مركز ثقل المساحة المذكورة :

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x\sigma\, ds}{\int \sigma\, ds} = \frac{\int x\cdot\sigma\, ydx}{\int \sigma\, ydx} = \frac{\int xydx}{\int ydx} = \frac{\int_0^\pi x\sin xdx}{\int_0^\pi \sin xdx}$$

تكامل البسط :

$$\int_0^\pi x\sin xdx = -\int_0^\pi xd(\cos x)$$

$$= -[x\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos xdx] = -[-\pi - \sin x\Big|_0^\pi] = \pi$$

تكامل المقام :

$$\int_0^\pi \sin xdx \quad = -\cos\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1 = 2$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int ydm}{\int dm} = \frac{1}{2}\frac{\int y\cdot\sigma\, y\, dx}{\int \sigma\, y\, dx} = \frac{1}{2}\frac{\int y^2 dx}{\int y\, dx} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^\pi \sin^2 x\, dx}{\int_0^\pi \sin x\, dx}$$

تكامل البسط :

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}[x+\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\pi} = \frac{1}{2}[\pi+0] = \frac{\pi}{2}$$

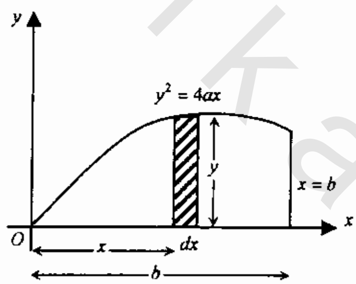
تكامل المقام :

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = 2$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{1}{2}\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{8} \qquad \therefore (\bar{x},\bar{y}) = (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{8})$$

وهو المطلوب .

<u>المسألة(٢)</u>: نقسم المساحة إلى عناصر على شكل مستطيلات وليكن مساحة أحدها $ds = y\,dx$



وإحداثيات مركز العنصر $(x,\frac{y}{2})$

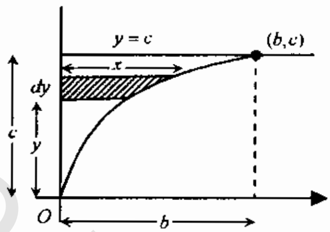
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x(\sigma\,y\,dx)}{\int(\sigma y\,dx)} = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$$

ولكن: $y^2 = 4ax \rightarrow y = \sqrt{4ax}$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_0^b x\sqrt{4ax}\,dx}{\int_0^b \sqrt{4ax}\,dx} = \frac{\int_0^b x^{3/2}\,dx}{\int_0^b x^{1/2}\,dx} = \frac{[\frac{x^{5/2}}{5/2}]_0^b}{[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_0^b} = \frac{3}{5}\frac{b^{5/2}}{b^{3/2}} = \frac{3}{5}b$$

$$\bar{y} = \frac{\int\frac{y}{2}\,dm}{\int dm} = \frac{1}{2}\frac{\int y(\sigma\,y\,dx)}{\int(\sigma\,y\,dx)} = \frac{1}{2}\frac{\int y^2 dx}{\int y\,dx} = \frac{1}{2}\frac{\int 4\,ax\,dx}{\int\sqrt{4ax}\,dx}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4a\int_0^b x\,dx}{2\sqrt{a}\int_0^{\pi} x^{1/2}dx} = a^{1/2}\frac{[\frac{x^2}{2}]_0^b}{[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_0^b} = a^{1/2}\,\frac{3}{4}\frac{b^2}{b^{3/2}} = \frac{3}{4}\sqrt{ab}$$



المسألة(٣): نقسم المساحة إلى عناصر على شكل مستطيلات وليكن مساحة أحدها: $ds = x\,dy$

وإحداثيات مركز العنصر: $(\frac{x}{2}, y)$

$$\bar{x} = \frac{\int \frac{x}{2} dm}{\int dm} = \frac{1}{2}\frac{\int x(\sigma x\,dy)}{\int \sigma x\,dy} = \frac{1}{2}\frac{\int x^2\,dy}{\int x\,dy} = \frac{1}{2}\frac{(\frac{y^2}{4a})^2\,dy}{(\frac{y^2}{4a})\,dy} = \frac{1}{8a}\frac{\int_0^c y^4\,dy}{\int_0^c y^2\,dy}$$

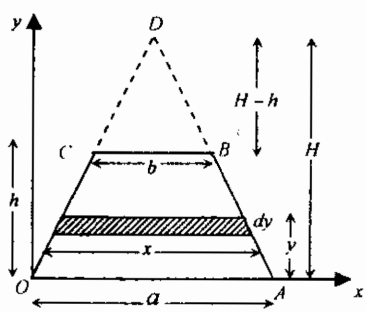
$$= \frac{1}{8a}\frac{[\frac{y^5}{5}]_0^c}{[\frac{y^3}{3}]_0^c} = \frac{1}{8a}\frac{3}{5}\frac{y^5}{c^3} = \frac{1}{8a}\frac{3}{5}c^2 = \frac{1}{8a}\frac{3}{5}[4ab] = \frac{3}{10}b$$

وذلك بكتابة $c^2 = 4ab$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int y(\sigma x\,dy)}{\int (\sigma x\,dy)} = \frac{\int yx\,dy}{\int x\,dy} = \frac{\int y(\frac{y^2}{4a})\,dy}{\int (\frac{y^2}{4a})\,dy}$$

$$= \frac{\int_0^c y^3\,dy}{\int_0^c y^2\,dy} = \frac{[\frac{y^4}{4}]_0^c}{[\frac{y^3}{3}]_0^c} = \frac{3}{4}\frac{c^4}{c^3} = \frac{3}{4}c = \frac{3}{4}\sqrt{4ab} = \frac{3}{2}\sqrt{ab}$$

حيث $c^2 = 4ab \leftarrow c = \sqrt{4ab}$



المسألة(٤): نفرض شبه المنحرف $OABC$ المبين بالشكل ونأخذ العنصر مستطيل يوازي القاعدتين ومساحته $ds = x\,dy$ وكتلته $dm = \sigma x\,dy$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int y(\sigma x\, dy)}{\int(\sigma x\, dy)} = \frac{\int yx\, dy}{\int x\, dy} \qquad \_\_\_\_(1)$$

ولإيجاد x بدلالة y: من تشابه المثلثات:

$$\frac{b}{a} = \frac{H-h}{H} \quad \therefore\ Ha - ha = Hb \quad \therefore\ H(a-b) = ah \ \therefore\ H = \frac{ah}{a-b}$$

أيضاً فإن:

$$\frac{x}{a} = \frac{H-y}{H} \ \therefore\ x = a(1-\frac{y}{H}) = a[1-\frac{a-h}{ah}y] = a - \frac{a-b}{h}y$$

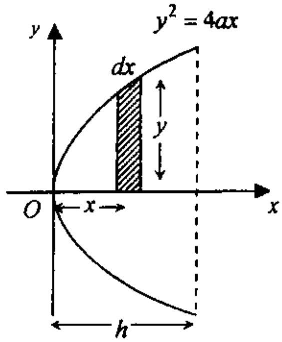
بالتعويض في (1):

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y[a-\frac{a-b}{h}y]dy}{\int_0^h [a-\frac{a-b}{h}y]dy} = \frac{[\frac{ay^2}{2} - \frac{a-b}{h}\frac{y^3}{3}]_0^h}{[ay - \frac{a-b}{h}\frac{y^2}{2}]_0^h}$$

$$= \frac{\frac{ah^2}{2} - \frac{a-b}{h}\frac{h^3}{3}}{ah - \frac{a-b}{h}\frac{h^2}{2}} = \frac{\frac{ah^2}{2} - \frac{a-b}{3}h^2}{ah - \frac{a-b}{2}h} = \frac{\frac{h^2}{3}[\frac{3a}{2} - a + b]}{h[a - \frac{a}{2} + \frac{b}{2}]}$$

$$= \frac{h}{3}\frac{\frac{a}{2}+b}{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}} = \frac{h}{3}\ \frac{a+2b}{a+b}$$

وهو المطلوب.



المسألة(٥): نأخذ العنصر مستطيل طوله y وعرضه dx فإذا دار دورة كاملة حول محور x فإنه يكون قرصاً حجمه: $dV = \pi y^2 \cdot dx$

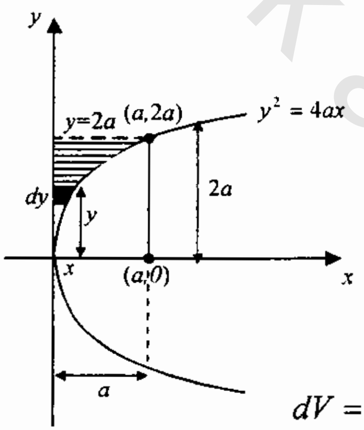
وكتلته $dm = \pi \rho y^2 dx$

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{\int x\,dm}{\int dm}=\frac{1}{2}\,\frac{\int x(\pi\rho\,y^2dx)}{\int \pi\rho\,y^2dx}=\frac{\int xy^2\,dx}{\int y^2\,dx}=\frac{\int x(4ax)\,dx}{\int (4ax)\,dx}$$

$$=\frac{\int_0^h x^2\,dx}{\int_0^h x\,dx}=\frac{[\frac{x^3}{3}]_0^h}{[\frac{x^2}{2}]_0^h}=\frac{2}{3}\frac{h^3}{h^2}=\frac{2}{3}h$$

أي أن مركز ثقل المجسم الدوراني المكافئ يقع في ثلثي أرتفاعه من جهة الرأس 0.

<u>المسألة(٦):</u> لإيجاد مركز ثقل الحجم الناتج عن دوران المساحة المظللة في الشكل حول محور y.



نأخذ شريحة على شكل مستطيل مواز لمحور x وعرضه dy فإذا دارت الشريحة دورة كاملة حول محور y فإنها تنتج قرصا حجمه :

$$dV=\pi\,x^2\cdot dy\qquad \therefore dm=\rho\pi\,x^2dy$$

ومركز ثقله على ارتفاع y من محور x :

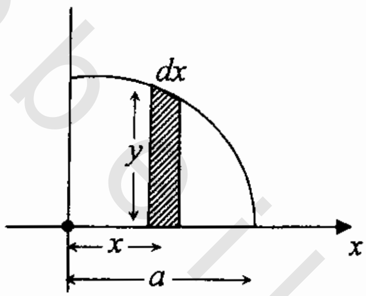
$$\therefore\ \bar{y}=\frac{\int y\,dm}{\int dm}=\frac{\int \rho\pi\,x^2dy\cdot y}{\int \rho\pi\,x^2dy}$$

ولكن من معادلة القطع المكافئ : $y^2=4ax$

$$\therefore x=\frac{y^2}{4a}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\int_0^{2a} (\frac{y^2}{4a})^2 \cdot y dy}{\int_0^{2a} (\frac{y^2}{4a})^2 dy} = \frac{\int_0^{2a} y^5 dy}{\int_0^{2a} y^4 dy} = \frac{(\frac{y^6}{6})_0^{2a}}{(\frac{y^5}{5})_0^{2a}} = \frac{5}{6}\frac{(2a)^6}{(2a)^5} = \frac{5}{6}(2a) = \frac{5}{3}a$$

وهو المطلوب.



المسألة(٧): نأخذ العنصر مستطيل مساحته

$ds = y\,dx$ ومركز ثقله $(x, \frac{y}{2})$

ومن معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore\ y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x\sigma y\,dx}{\int \sigma y\,dx} = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\frac{b}{a}\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx}{\frac{b}{a}\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx}$$

$$= \frac{\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}}{\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx} = \frac{I_1}{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^a x(a^2 - x^2)^{1/2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^a (-2x)(a^2 - x^2)^{1/2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Big]_0^a = -\frac{1}{3}[(a^2 - a^2)^{3/2} - (a^2 - 0)^{3/2}]$$

$$= -\frac{1}{3}[0 - a^3] = \frac{1}{3}a^3$$

نضع $x = a\sin\theta \leftarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$

$x = 0 \rightarrow \sin\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$

$x = a \rightarrow \sin\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$I_2 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$\downarrow$$

$$\therefore I_2 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta} \cdot (a\cos\theta\, d\theta) = \int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot (a\cos\theta\, d\theta)$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} [1 + \cos 2\theta]\, d\theta = \frac{a^2}{2} [\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{a^2}{2} [\frac{\pi}{2} + 0] = \frac{a^2\pi}{4}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{a^2\pi}{4}} = \frac{4a}{3\pi}$$

أيضاً فإن:

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{y}{2}(\sigma y\, dx)}{\int (\sigma y\, dx)} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^a y^2\, dx}{\int_0^a y\, dx} = \frac{1}{2} \frac{\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx}{\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{b}{a}) \frac{\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx}{\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx} = \frac{1}{2}(\frac{b}{a})(\frac{I_1}{I_2})$$

$$I_1 = \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = (a^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

$$I_2 = \frac{\pi a^2}{4}$$ (كما سبق)

$$\therefore \ \bar{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{4}} = \frac{4b}{3\pi}$$

∴ إحداثيات مركز ثقل الصفيحة المذكورة هي:

$$\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$$

وهو المطلوب.