الباب السابع

تطبيقات استاتيكية (3)

في هذا الباب سوف ندرس موضوعين هامين من موضوعات علم الاستاتيكا هما:

(١) الشغل الإفتراضي،　　　　　(٢) استقرار الإتزان

أولاً: الشغل الإفتراضي:

تعريف الشغل الافتراضي: في علم الديناميكا فإن الإزاحة التي يعملها جسم تحت تأثير قوة هي إزاحة فعليه ، أما في علم الاستاتيكا فحيث أن الجسم في حالة اتزان فلا توجد حركة وبالتالي لا توجد إزاحة فعلية . وقد وجد في عدد من المسائل أنه المناسب السماح للجسم بأن إزاحة تخيلية تسمى بالإزاحة الافتراضية.

وفي كلتا حالتي الإزاحة الفعلية أو الافتراضية فإن القوى المؤثرة تبذل شغلاً .

ويسمى الشغل المبذول بواسطة قوة في مثل تلك الإزاحة الافتراضية بالشغل الافتراضي.

وعلى هذا فإن الشغل الافتراضي لقوة هو حاصل ضرب القوة ومسقط الإزاحة الافتراضية لنقطة تأثيرها في اتجاهها، أو حاصل ضرب الإزاحة الافتراضية في مركبة القوة في اتجاه الإزاحة. ويلاحظ أن الإزاحة الافتراضية يجب أن تكون ضئيلة للغاية بحيث تظل القوة ثابتة المقدار والاتجاه خلال الإزاحة .

قاعدة الشغل الافتراضي:

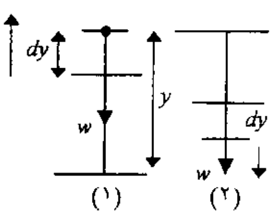
تنص هذه القاعدة على الآتي: " إذا أثرت مجموعة من القوى المستوية على الجسم المتماسك وكانت هذه المجموعة من القوى في حالة اتزان فإن : المجموع الجبري للشغل الافتراضي المبذول بواسطة هذه القوى لجميع الإزاحات الصغيرة التي تتفق مع الشروط الهندسية للمجوعة يساوي صفراً "

وعكس القاعدة صحيح :

" إذا كان المجموع الجبري للشغل الافتراضي الذي تبذله مجموعة من القوى المستوية المؤثرة على جسم متماسك لجميع الإزاحات الصغيرة التي تتفق والشروط الهندسية للمجموعة يساوي صفرا كانت المجموعة متزنة "

<u>ولتطبيق قاعدة الشغل الافتراضي يلاحظ ما يلي :</u>

(١) من المناسب عند حساب الشغل الذي يبذله ثقل أحد أجزاء المجموعة تعيين بعد مركز ثقل هذا الجزء عن مستوى أفقي ثابت وليكن هذا البعد y . وتكون الإزاحة الافتراضية dy إلى أعلى(موجبة) إذا كان الثقل فوق المستوى الثابت وتكون الإزاحة dy إلى أسفل(سالبة) إذا كان الثقلw تحت المستوى الثابت.



ففي الحالة الأولى (الإزاحة في الاتجاه المضاد للثقل w)
يكون الشغل المبذول سالبا ويساوي $-w\cdot dy$
وفي الحالة الثانية (الإزاحة في اتجاه الثقل w) يكون
الشغل المبذول موجبا ويساوي $w\cdot dy$

(٢) الشغل الافتراضي الذي يبذله شد في خيط أو ضغط في قضيب خفيف نتيجة إزاحة صغيرة جدا $d\ell$ حيث ℓ طول الخيط أو القضيب يكون :

في حالة الشد في الخيط : الشغل المبذول $= -Td\ell$

في حالة الضغط في القضيب : الشغل المبذول $= pd\ell$

(٣) <u>القوى التي لا تبذل شغلاً</u> :

هناك بعض القوى التي لا تبذل شغلا للإزاحات الصغيرة ، ولذلك يجب إهمالها عند تطبيق قاعدة الشغل الافتراضي، ومن هذه القوى:

(أ) الشد في الخيوط غير المرنة أو القضبان إذا استمر طول الخيط أو القضيب ثابتا أثناء الإزاحة .

(ب) رد فعل أي سطح أملس عند نقطة تماسه مع جسم . وذلك لأن رد الفعل يكون عموديا على السطح وبالتالي عموديا على اتجاه إزاحة نقطة تـأثيره فلا يكون هناك شغل مبذول .

(ج) رد الفعل عند نقطة تماس جسم يتدحرج بدون إنزلاق على سطح ثابت وذلك لأن نقطة التماس تكون في حالة سكون لحظي فيكون رد الفعـل العمـودي والاحتكاك عند هذه النقطة ذو إزاحة صفرية فلا يكون هناك شغل

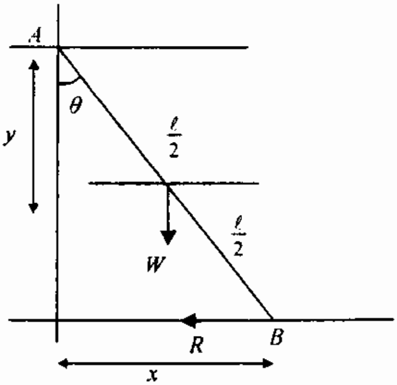
وتتضح كل هذه الملاحظات من الأمثلة المحلولة الآتية:

أمثلة محلولة:

مثال(١): سلم AB طوله ℓ يرتكز بطرفه السفلي B علـى أرض أفقيـة خـشنة وبطرفة العلوي على حائط رأسي أملس. أثبت أن قوة الاحتكـاك بـين الـسلم والأرض هي $\frac{w}{2}\tan\theta$ حيث w وزن السلم، θ زاوية ميله على الرأسي

الحل: نأخذ المستوى المار بنقطة A مبدأ للقياس وليكن x هو بعد الطرف B عـن الحائط الرأسي المار بنقطة A ، y هو عمق مركز ثقل القضيب عن A .

$$\therefore x = \ell\sin\theta \quad , \quad y = \frac{\ell}{2}\cos\theta$$



معادلة الشغل الافتراضي هي: $wdy + Rdx = 0$

$$\therefore wd(\frac{\ell}{2}\cos\theta) + Rd(\ell\sin\theta) = 0$$

$$\therefore -\frac{w\ell}{2}\sin\theta\, d\theta + R\ell\cos\theta\, d\theta = 0$$

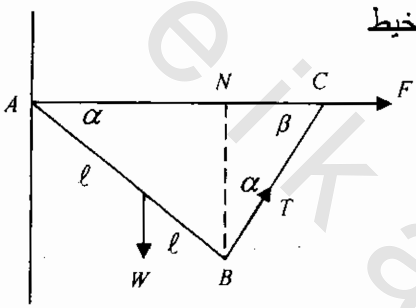
$$\therefore \frac{w}{2}\sin\theta = R\cos\theta$$

$$\therefore R = \frac{w}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{w}{2}\tan\theta$$

وهو المطلوب .

مثال(٢): قضيب منتظم AB يتحرك بسهولة حول طرفه A وطرفه الآخر B مربوط بخيط خفيف ينتهي بحلقة ملساء تنزلق على سلك أفقي أملس يمر بالطرف A . أثبت أن القوة الأفقية التي تؤثر على الحلقة وتحفظ اتزان القضيب تساوي: $w[\frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}]$

حيث w هو وزن القضيب، α,β هما زاويتا ميل القضيب والخيط على الأفقي



الحل: ليكن 2ℓ هو طول القضيب و a طول الخيط

فحيث أن الخيط ثابت الطول فان الشد فيه T لا يبذل شغلا (أي لا يدخل في معادلة الشغل الافتراضي).

بالنسبة للوزن w :

نأخذ مستوى القياس هو AC فيكون عمق w أسفل A هو $y=\ell\sin\alpha$

بالنسبة للقوة F :

نأخذ المستوى الرأسي المار بنقطة A هو أساس للقياس فتكون المسافة x هي :

$$x=Ac=2\ell\cos\alpha+\alpha\cos\beta$$

معادلة الشغل الافتراضي هي:

$$Wdy+Fdx=0$$

$$\therefore Wd(\ell\sin\alpha)+Fd(2\ell\cos\alpha+\alpha\cos\beta)=0$$

$$\therefore W\ell\cos\alpha d\alpha-F(2\ell\sin\alpha d\alpha+a\sin\beta d\beta)=0$$

$$\therefore (W\ell\cos-2F\ell\sin\alpha)d\alpha=Fa\sin\beta d\beta \qquad \_\_\_\_(1)$$

ولكن المتغيران α,β غير مستقلين (أي تربطهما علاقة) وذلك الآن :

$$NB=2\ell\sin\alpha=a\sin\beta$$

$$\therefore\ 2\ell\cos\alpha d\alpha=a\cos\beta d\beta \qquad \_\_\_\_(2)$$

من (2) ,(1) بالقسمة :

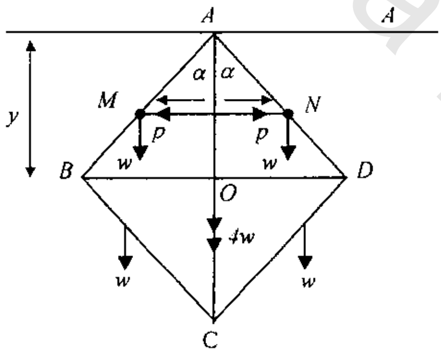
$$\therefore \frac{W\ell\cos\alpha - 2F\ell\sin\alpha}{2\ell\cos\alpha} = \frac{Fa\sin\beta}{a\cos\beta}$$

$$\therefore W\cos\alpha\cos\beta - 2F\sin\alpha\cos\beta = 2F\cos\alpha\sin\beta$$

$$\therefore W\cos\alpha\cos\beta = 2F(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = 2F\sin(\alpha+\beta)$$

$$\therefore F = \frac{w\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

مثال(٣): 4 قضبان ثقيلة متساوية ومنتظمة متصلة بحيث تكون معينـــا $ABCD$ ، علق المعين من الرأس A ، واتصل منتصفا القضيبين العلويين AD , AB بواسطة قضيب خفيف MN لكن يحتفظ المعين بشكله . أثبت أن الضغط في القضيب MN يساوي $4w\tan\alpha$ حيث w وزن أي من القضبان الأربعة المكونة للمعـــين ، 2α زاوية رأس المعين عند نقطة التعليق .



الحل:

نأخذ المستوى المار بنقطة التعليق A هو مستوى القياس وتكون المسافات مقاسه من هذا المستوى .

يمكن تجميع أوزان القضبان في وزن واحد $4w$ يؤثر عند o (نقطة تلاقي القطرين)

نفرض أن p هو الضغط في القضيب MN ونتخيل إزاحة افتراضية بحيث تظـــل أطوال القضبان ثابتة بينما تتغير الزاوية α إلى $\alpha + d\alpha$

معادلة الشغل الافتراضي هي :

$$4wd(AO) + pd(MN) = 0$$

$$\therefore 4wd(2a\cos\alpha) + pd(2a\sin\alpha) = 0$$

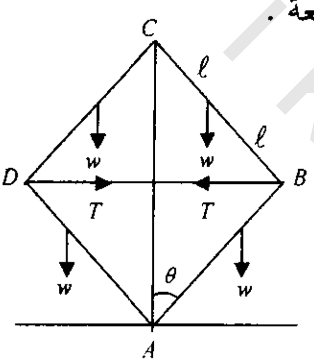
حيث $2a$ طول كل قضيب .

$\therefore -4w \cdot 2a\sin\alpha\, d\alpha + p \cdot 2a\cos\alpha\, d\alpha = 0$

$\therefore p = 4w\tan\alpha$

وهو المطلوب .

مثال(٤): تتصل أربعة قضبان متساوية عند أطرافها بمفاصل سهلة الحركة مكونة المعين $ABCD$، اتزنت المجموعة عندما كان مستوى المعين رأسيا والــرأس A مستندة على مستوى أفقي أملس، والرأسانB,D متصلتان بخيط خفيف غير مرن. فإذا احتفظ المعين بشكله بحيث كانت الزاوية $B\hat{A}C = 30°$ فاثبــت أن الــشد فــي الخيط يساوي $\frac{2w}{\sqrt{3}}$ حيث w هو وزن أي من القضبان الأربعة .



الحل : ليكن طول كل قضيب 2ℓ

نأخذ المستوى السفلي المار بنقطة الاستناد A هو مستوى القياس فتكون معادلة الشغل الافتراضي

$$-2wdy_1 - 2wdy_2 - Tdx = 0$$

حيث y_1 هو ارتفاع مركز ثقل القضيب AB أو AD فوق A :

$$y_1 = \ell\cos\theta$$

y_2 هو ارتفاع مركز تثقل القضيب CB أو CD فوق A :

$$y_2 = 3\ell\cos\theta$$

x هو طول الخيط $= 2\ell\sin\theta + 2\ell\sin\theta = 4\ell\sin\theta$

∴ معادلة الشغل الافتراضي هي:

$$-2wd(\ell\cos\theta) - 2wd(3\ell\cos\theta) - Td(4\ell\sin\theta) = 0$$

$$\therefore 2w\ell\sin\theta\, d\theta + 6w\ell\sin\theta\, d\theta - 4T\ell\cos\theta\, d\theta = 0$$

$$\therefore 4T\cos\theta = 8w\tan\theta$$

$$\therefore T = 2w\tan\theta$$

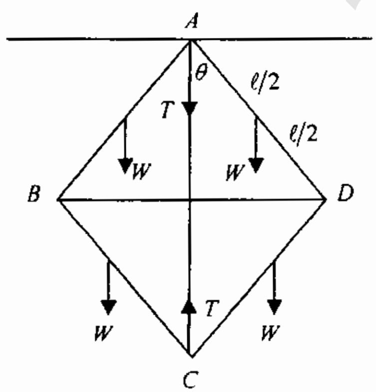
ولكن $\theta = 30^0 \leftarrow \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\therefore T = 2w \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2w}{\sqrt{3}}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٥) :</u> إطار مكون من 4 قضبان متساوية طول كل منها ℓ ووزنه w متصلة اتصالا أملساً سهلا عند أطرافها، علق من أحد أركانه بحث كان هذا الركن يتصل بالركن المقابل بخيط مرن طوله الطبيعي a وثابت مرونته k ، وذلك حتى يحتفظ الإطار بشكله . أثبت أن ميل أي من القضبان على الرأسي يعطى من العلاقة : $\cos\theta = \dfrac{1}{2\ell}(a + \dfrac{2w}{k})$.

<u>الحل:</u> نأخذ المستوى الأفقي المار نقطة التعليق A مبدأ القياس .



معادلة الشغل الافتراضي هي :

$$2w dy_1 + 2w dy_2 - T dy_3 = 0$$

حيث y_1 هو بعد مركز ثقل القضيبين العلويين : $y_1 = \ell/2 \cos\theta$ ،

y_2 هو بعد مركز ثقل القضيبين السفليين : $y_2 = 3/2\, \ell\cos\theta$ ،

y_3 هو طول الخيط $y_3 = 2\ell\cos\theta$

$$\therefore 2wd(\ell/2\cos\theta) + 2wd(3/2\,\ell\cos\theta) - Td(2\ell\cos\theta) = 0$$

$$\therefore -w\sin\theta\, d\theta - 3w\sin\theta\, d\theta + 2T\sin\theta\, d\theta = 0$$

$$\therefore -4w\sin\theta + 2T\sin\theta = 0$$

$$\therefore T = 2w \qquad \_\_\_\_(1)$$

ولكن من قانون هوك للخيوط المرنة :

إذا كان طول الخيط الطبيعي هو a وطوله بعد الاستطالة هو x فإن قوة الشد تعطي من : $T = k(x-a)$

حيث k يسمى ثابت الخيط.

ولكن الطول الحالي للخيط $x = 2\ell\cos\theta$

$$\therefore T = k(2\ell\cos\theta - a) \qquad \_\_\_\_(2)$$

من $(1),(2)$:

$$2w = k(2\ell\cos\theta - a)$$

$$\therefore 2\ell\cos\theta = \frac{2w}{k} + a$$

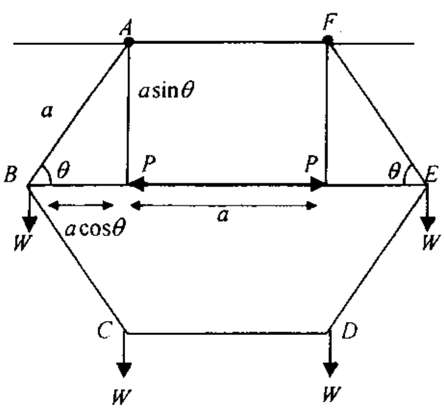
$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2\ell}\left(a + \frac{2w}{k}\right)$$

وهو المطلوب .

مثال(٦) : يتكون شكل سداسي منتظم $ABCDEF$ من ستة قضبان خفيفة متساوية، على الشكل من نقطتي A,F بحيث كان AF أفقياً. احتفظ المسدس بشكله المنتظم بواسطة قضيب خفيف BE ذو طول يجعل القضيبين AB,FE يميلان بزاوية 45° مع الرأسي.

علقت 4 أوزان متساوية كل منها W من النقاط B,C,D,E

أوجد الضغط في القضيب BE



الحل: نفرض أن طول أي قضيب هو a

وأن AB يعمل زاوية θ مع الأفقي .

نلاحظ أنه عند وضع الاتزان فإن :

$$\theta = 45^\circ$$

نأخذ AF مستوى ثابت

وتكون الإزاحة الافتراضية أسفل هذا المستوى .

القوى التي تبذل شغلاً : الأوزان الأربعة W ، الضغط في القضيب p

عمق B أو E أسفل AF : $y_1 = a\sin\theta$

عمق C أو D أسفل AF : $y_2 = 2a\sin\theta$

طول القضيب BE : $x = a + 2a\cos\theta$

معادلة الشغل الافتراضي : $2wdy_1 + 2wdy_2 + pdx = 0$

$$2wd(a\sin\theta) + 2wd(2a\sin\theta) + pd(a + 2a\cos\theta) = 0$$

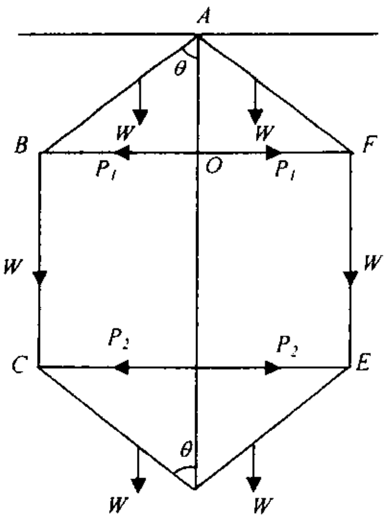
$$\therefore 6wa\cos\theta\, d\theta - 2pa\sin\theta\, d\theta = 0$$

$$\therefore P = 3w\cos\theta$$

وفي حالة الاتزان فان $\theta = 45^\circ \leftarrow \cot\theta = 1$ $\quad \therefore P = 3w$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٧):</u> شكل سداسي منتظم $ABCDEF$ يتكون من 6 قضبان ثقيلة متساوية وزن كل قضيب W وطوله 2ℓ ومتصلة اتصالا سهلاً عند أطرافها – علق هذا الشكل من نقطة A واحتفظ بالشكل المنتظم بواسطة قضيبين خفيفين BF,CE أوجد الضغط في هذين القضيبين ، وأثبت أن النسبة بينهما هي 5:1



<u>الحل:</u> نفرض أن ميل AB على الرأس هو θ

<u>فلإيجاد الضغط p_1 في القضيب BF :</u>

نفرض أن طول BF زاد زيادة طفيفة بحيث يزيد ميل AB على الرأسي من θ إلى $\theta + d\theta$، وبحيث لا يحدث أي تغيير في طول القضيب السفلي CE .

نعتبر أوزان القضبان الأربعة السفلية مركزه عند منتصف BF أي O

فيكون عمق O عن A هو : $y_2 = 2\ell\cos\theta$

أيضاً : عمق منتصف AB هو: $y_1 = \ell\cos\theta$

طول القضيب BF هو : $x = 4\ell\sin\theta$

معادلة الشغل الافتراضي هي :

$$2wdy_1 + 4wdy_2 + p_1dx = 0$$
$$\therefore 2wd(\ell\cos\theta) + 4wd(2\ell\cos\theta) + p_1d(4\ell\sin\theta) = 0$$
$$\therefore -2w\ell\sin\theta\,d\theta - 4w(2\ell\sin\theta\,d\theta) + p_1(4\ell\cos\theta\,d\theta) = 0$$
$$\therefore 10w\ell\sin\theta\,d\theta = 4P_1\ell\cos\theta\,d\theta$$
$$\therefore p_1 = \frac{5}{2}w\tan\theta \qquad \text{\_\_\_\_\_(I)}$$

ولإيجاد p_2 (الضغط في القضيب CF):

نفرض أن طول القضيب CF زاد زيادة طفيفة بحيث أن طول BF يظل ثابتاً .

ويحدث إزاحة علوية طفيفة لمركزي القضيبين السفليين CD,ED .

وتصبح معادلة الشغل الافتراضي :

$$2wd(\ell\cos\theta) + p_2d(4\ell\sin\theta) = 0$$
$$\therefore -2w(\ell\sin\theta\,d\theta) + p_2(4\ell\cos\theta\,d\theta) = 0$$
$$\therefore 2w\ell\sin\theta\,d\theta = 4p_2\ell\cos\theta\,d\theta$$
$$\therefore p_2 = \frac{w}{2}\tan\theta \qquad \text{\_\_\_\_(II)}$$

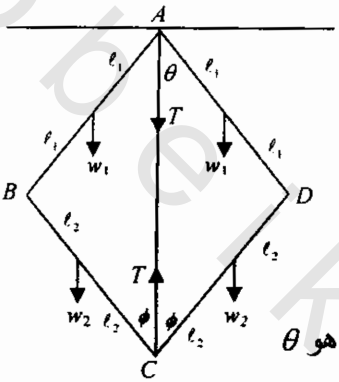
من (II) ، (I) نجد أن : $p_1 : p_2 = 5:1$

أيضا عند الاتزان فإن : $\theta = 60^\circ \leftarrow \tan\theta = \sqrt{3}$

$$\therefore p_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2}w \quad , \quad p_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}w$$

وهو المطلوب.

مثال(٨): يتكون شكل رباعي $ABCD$ من أربعة قضبان منتظمة متصلة عند أطرافها بمفاصل ملساء فإذا كان القضيبان العلويان AB,AD متساويان ووزن كل منهما w_1 وكذلك القضيبان السفليان BC,CD ووزن كل منهما w_2 وعلق الشكل من نقطة A وربط AC بخيط خفيف بحيث أصبحت $A\hat{B}C = 90^0$ ، أثبت أن الشد في الخيط هو :



$$T = w_2 + (w_1 + w_2)\sin^2\theta$$

حيث 2θ هي الزاوية $= B\hat{A}D$

الحل:

نأخذ نقطة A هي مبدأ القياس .

نفرض أن ميل أي من القضيبين العلويين على الرأسي هو θ

وميل أي من القضيبين السفليين على الرأسي هو ϕ

عمق مركز ثقل القضيبين AD أو AB

عن A هو : $y_1 = \ell_1\cos\theta$

حيث $2\ell_1$ طول أي من القضيبين .

عمق مركز ثقل BC أو CD عن A هو: $y_2 = 2\ell_1\cos\theta + \ell_2\cos\phi$

طول الخيط AC هو : $y = 2\ell_1\cos\theta + 2\ell_2\cos\phi$

معادلة الشغل الافتراضي هي :

$$2w_1dy_1 + 2w_2dy_2 - Tdy = 0$$

$$\therefore 2w_1d(\ell_1\cos\theta) + 2w_2d(2\ell_1\cos\theta + \ell_2\cos\phi)$$
$$- Td(2\ell_1\cos\theta + 2\ell_2\cos\phi) = 0$$

$$\therefore -w_1\ell_1\sin\theta\, d\theta - 2w_2\sin\theta\, d\theta - w_2\ell_2\sin\phi\, d\phi$$
$$+ T\ell_1\sin\theta\, d\theta + T\ell_2\sin\phi\, d\phi = 0$$

$$\therefore -\ell_1\sin\theta(w_1 + 2w_2 - T)d\theta = \ell_2\sin\phi(w_2 - T)\ d\phi \qquad \_\_\_\_(1)$$

وحيث أن θ,ϕ ليستا مستقلتين أي توجد بينهما علاقة وذلك لأنه :

$$BD = 4\ell_1 \sin\theta = 4\ell_2 \sin\phi$$

$$\therefore \ell_1 \cos\theta\, d\theta = \ell_2 \cos\phi\, d\phi \qquad \_\_\_\_(2)$$

بقسمة (2) على (1) :

$$\therefore -\tan\theta(w_1 + 2w_2 - T) = \tan\phi \cdot (w_2 - T)$$

$$\therefore T(\tan\theta + \tan\phi) = (w_1 + 2w_2)\tan\theta + w_2 \tan\phi \qquad \_\_\_\_(3)$$

ولكن في وضع الاتزان فإن : $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \phi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\therefore \tan\phi = \cot\theta$$

بالتعويض في (3) :

$$\therefore T(\tan\theta + \cot\theta) = (w_1 + 2w_2)\tan\theta + w_2 \cot\theta$$

بالضرب في $\tan\theta$ واستخدام العلاقة $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$

$$\therefore T\sec^2\theta = (w_1 + 2w_2)\tan^2\theta + w_2$$

$$\therefore T = (w_1 + 2w_2)\sin^2\theta + w_2\cos^2\theta$$

$$= (w_1 + w_2)\sin^2\theta + w_2$$

وهو المطلوب .

مثال(٩): قضيبان منتظمان AB,BC وزناهما w_1,w_2 على الترتيب ، متصلان اتصالا سهلا عند نقطة B ومعلقان رأسيا من الطرف A ، إذا أثرت قوة أفقيه p عند الطرف C ، وكان ميل AB,BC على الرأسي هما θ,ϕ في حالة التوازن أثبت أن :

$$\tan\theta = \frac{2p}{w_1 + 2w_2} \quad , \quad \tan\phi = \frac{2p}{w_2}$$

الحل:

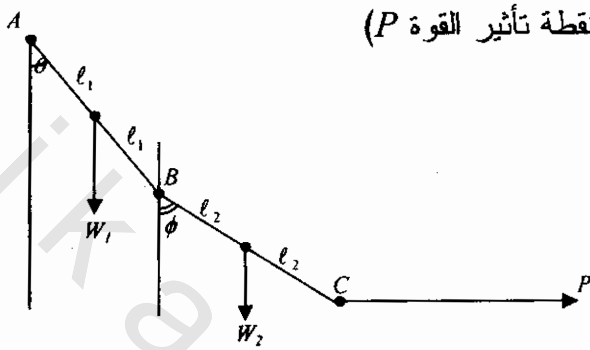
نفرض طول القضيب AB هو $2\ell_1$ وطول القضيب BC هو $2\ell_2$

نأخذ نقطة A هي مبدأ القياس .

عمق منتصف AB عن A هو: $y_1 = \ell_1 \cos\theta$

عمق منتصف BC عن A هو : $y_2 = 2\ell_1 \cos\theta + \ell_2 \cos\phi$

بعد نقطة C (نقطة تأثير القوة P)



عن الرأسي المار بـــ A هو : $x = 2\ell_1 \sin\theta + 2\ell_2 \sin\phi$

معادلة الشغل الافتراضي هي :

$$w_1 dy_1 + w_2 dy_2 + p dx = 0$$

$$\therefore w_1 d(\ell_1 \cos\theta) + w_2 d[2\ell_1 \cos\theta + \ell_2 \cos\phi] + pd[2\ell_1 \sin\theta + 2\ell_2 \sin\phi] = 0$$

$$\therefore w_1(-\ell_1 \sin\theta\, d\theta) + w_2\ [-2\ell_1 \sin\theta\, d\theta - \ell_2 \sin\phi\, d\phi]$$
$$+ p[2\ell_1 \cos\theta\, d\theta + 2\ell_2 \cos\phi\, d\phi] = 0$$

$$\therefore \ell_1 [2p\cos\theta - w_1 \sin\theta - 2w_2 \sin\theta] d\theta = -\ell_2 [2p\cos\phi - w_2 \sin\phi] d\phi$$

ولكن المتغيرين θ, ϕ مستقلان أي لا توجد بينهما علاقة بمعنى أن $d\theta, d\phi$ اختياريان فيمكن أخذ معامل كل منهما يساوي صفراً [نظرية] .

فبأخذ معامل $d\theta$ يساوي صفراً نحصل على :

$$\ell_1 [2p\cos\theta - w_1 \sin\theta - 2w_2 \sin\theta] = 0$$

$$\therefore 2p\cos\theta - (w_1 + 2w_2)\sin\theta = 0$$

$$\therefore 2p\cos\theta = (w_1 + 2w_2)\sin\theta$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{2p}{w_1 + 2w_2}$$

وهو المطلوب أولاً .

وبأخذ معامل $d\phi$ يساوي صفراً نحصل على :

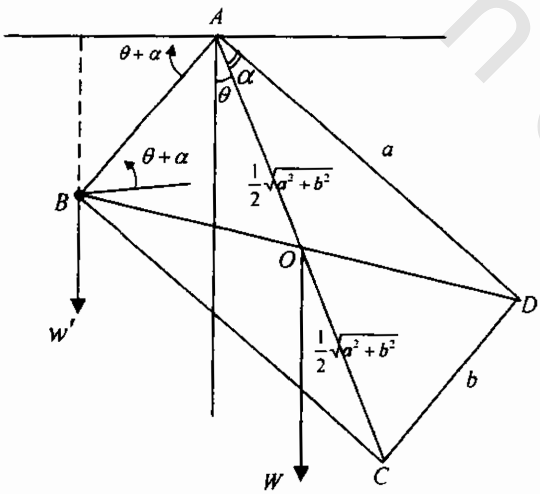
$$\ell_1[2p\cos\phi - w_2\sin\phi] = 0$$

$$\therefore 2p\cos\phi = w_2\sin\phi$$

$$\therefore \tan\phi = \frac{2p}{w_2}$$

مثال(١٠): صفيحة منتظمة على شكل مستطيل $ABCD$ طوله a وعرضه b ووزنه w علق من أحد أركانه وعلق وزن w' من ركنه العلوي غير المثبت B ، أثبت أن ميل القطر AC المار بنقطة التعليق على الرأسي يعطى من العلاقة :

$$\tan\theta = \frac{2w'ab}{w(a^2+b^2)+2w'b^2}$$



الحـــل:

نفرض أن $D\hat{A}C = \alpha$

بحيث أن $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.

نأخذ المستوى المار بنقطة التعليق A مستوى للقياس فيكون بعد الوزن w عن A :

$$y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta$$

وبعد الوزن w' عن A :

$$y_2 = b\sin(\theta+\alpha)$$

معادلة الشغل الافتراضي :

$$wdy_1 + w'dy_2 = 0$$

$$wd[\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta] + w'd[b\sin(\theta+\alpha)] = 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2}w\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta + w'b\cos(\theta+\alpha) = 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2}w\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta + w'b[\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha] = 0$$

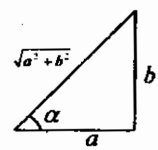
$$\therefore \sin\theta(\frac{1}{2}w\sqrt{a^2+b^2} + w'b\sin\alpha) = \cos\theta(w'b\cos\alpha)$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{w'b\cos\alpha}{\frac{1}{2}w\sqrt{a^2+b^2} + w'b\sin\alpha}$$

$$= \frac{w'b\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{1}{2}w\sqrt{a^2+b^2} + w'b\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$= \frac{\frac{w'ba}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{w(a^2+b^2)+2w'b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$= \frac{2w'ab}{w(a^2+b^2)+2w'b^2}$$



$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

وهو المطلوب.

مسائل على الشغل الافتراضي

(١) 4 قضبان متساوية متصلة عند أطرافها اتصالاً مفصلياً سهلاً مكونة المعين $ABCD$ ، اتزنت المجموعة عندما كان مستوى المعين رأسيا والرأس A مستنده على مستوى أفقي أملس والرأسان B,D متصلان بخيط خفيف . فإذا اتزنت المجموعة عندما كان القطر AC رأسيا ، أثبت أن الشد في الخيط يساوي $2w\tan\theta$ حيث w وزن أي من القضبان الأربعة ، 2θ هي زاوية المعين عند نقطة الارتكاز .

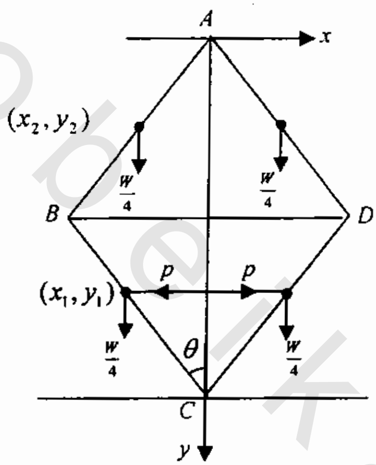
(٢) 4 قضبان متساوية متصلة من أطرافها لتكون المربع $ABCD$ ، ضغط شكل المربع بواسطة خيط خفيف يصل بين B,D ، ووضع الهيكل فوق مستوى أفقي بطرفه A ملامساً للمستوى بحيث كان AC رأسياً . إذا كان وزن كل قضيب هو w وإذا وضع ثقل قدره w' عند الرأس C ، أثبت أن الشد في الخيط هو $T = w' + 2w$.

(٣) معين $ABCD$ مكون من 4 قضبان منتظمة متساوية ومتصلة عند أطرافها اتصالا مفصلياً سهلاً ، ومعلق من نقطة A . حفظ شكل المعين بواسطة قضيب يصل بين منتصفي BC,CD ، أثبت أن الضغط في القضيب هو $p = w\tan\alpha/2$ حيث w وزن المعين ، 2α هي زاوية رأس المعين .

(٤) مسدس منتظم يتكون من 6 قضبان متساوية متصلة من أطرافها اتصالاً مفصليا سهلا ، وضع المسدس في مستوى رأسي مرتكزا بأحد القضبان على مستوى أفقي ، اتصل منتصفا القضيبين العلويين المائلين بزاوية θ على الأفقي بواسطة خيط غير وزن ، أثبت أن الشد في الخيط يساوي $6w\cot\theta$ حيث w وزن أي قضيب .

(٥) خماسي منتظم $ABCDE$ مكون من خمسة قضبان منتظمة وزن كل منهـا w ومتصلة من أطرافها بمفاصل سهلة . علقت المجموعة من نقطة A وحفظ شكل الهيكل بواسطة قضيب خفيف يصل بين B,E ، أثبت أن الضغط في القـضيب يساوي $w\cot 18$.

حلول بعض المسائل على الشغل الافتراضي



المسألة(٣):

القوى التي لها شغل افتراضي هي أوزان القضبان والضغط في القضيبين

$y_1 = \ell\cos\theta \;\rightarrow\; dy_1 = -\ell\sin\theta\, d\theta$

$y_2 = 3\ell\cos\theta \rightarrow dy_2 = -3\ell\sin\theta\, d\theta$

$x_1 = \ell\sin\theta \;\rightarrow\; dx_1 = \ell\cos\theta\, d\theta$

معادلة الشغل الافتراضي :

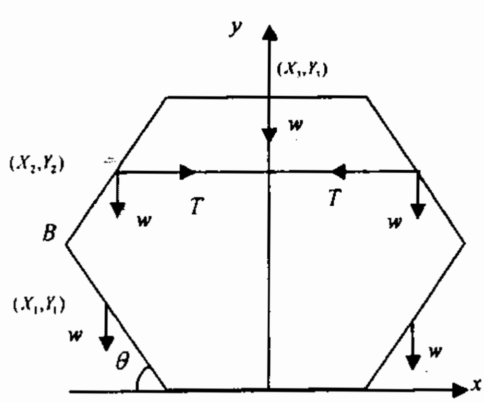
$$dw = 2(\frac{w}{4})\cdot dy_1 + 2(\frac{w}{4})dy_2 + 2P\,dx_1 = 0$$

$$\therefore 2(\frac{w}{4})\left(-\ell\sin\theta\, d\theta\right) + 2(\frac{w}{4})\left(-3\ell\sin\theta\, d\theta\right) + 2P\left(\ell\cos\theta\, d\theta\right) = 0$$

$$\therefore \frac{w}{4}\sin\theta + \frac{3w}{4}\sin\theta = P\cos\theta$$

$$\therefore w\sin\theta = P\cos\theta \qquad \therefore P = w\tan\theta$$

وهو المطلوب .



المسألة (٤) :

$y_1 = \ell\sin\theta \;\rightarrow\; dy_1 = -\ell\cos\theta\, d\theta$

$y_2 = 3\ell\sin\theta \rightarrow dy_2 = 3\ell\cos\theta\, d\theta$

$y_3 = 4\ell\sin\theta \rightarrow dy_3 = 4\ell\cos\theta\, d\theta$

$x_2 = \ell\cos\theta + \ell \rightarrow dx_2 = -\ell\sin\theta\, d\theta$

معادلة الشغل الافتراضي :

$$dw = -2wdy_1 - 2wdy_2 - wdy_3 - 2Tdx_2 = 0$$

$$\therefore (2w\ell\cos\theta + 6w\ell\cos\theta + 4w\ell\cos\theta - 2T\ell\sin\theta)d\theta = 0$$

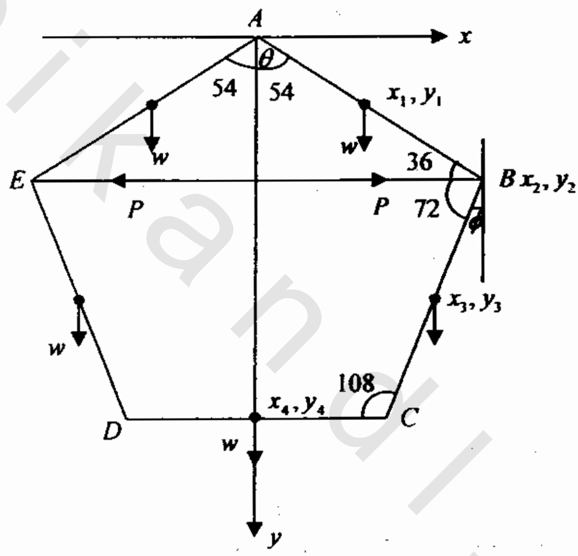
$$\therefore 12w\ell\cos\theta - 2T\ell\sin\theta = 0$$

$$\therefore 6w\cos\theta = T\sin\theta$$

$$\therefore T = 6w\cot\theta$$

وهو المطلوب .

المسألة(٥):



القوى التي تبذل شغلا هي الأوزان والضغوط

$$y_1 = \ell\cos\theta \rightarrow dy_1 = -\ell\sin\theta\, d\theta$$

$$x_2 = 2\ell\sin\theta \rightarrow dx_2 = 2\ell\cos\theta\, d\theta$$

$$y_3 = 2\ell\cos\theta + \ell\cos\phi$$

$$\therefore dy_3 = -(2\ell\sin\theta\, d\theta + \ell\sin\phi\, d\phi)$$

$$y_4 = 2\ell\cos\theta + 2\ell\cos\phi$$

$$dy_4 = -(2\ell\sin\theta\, d\theta + 2\ell\sin\phi\, d\phi)$$

معادلة الشغل الافتراضي

$$2wdy_1 + 2wdy_3 + wdy_4 + 2Pdx_2 = 0$$

$$\therefore -2w\ell\sin\theta\, d\theta - 2w(2\ell\sin\theta\, d\theta + \ell\sin\phi\, d\phi)$$

$$- w(2\ell\sin\theta\, d\theta + 2\ell\sin\phi\, d\phi) + 2p(2\ell\cos\theta\, d\theta) = 0$$

$$\therefore 4p\cos\theta\, d\theta = 8w\sin\theta\, d\theta + 4w\sin\phi\, d\phi$$

$$\therefore p\cos\theta\, d\theta = 2w\sin\theta\, d\theta + w\sin\phi\, d\phi \qquad (1)$$

وحيث أن : $\ell + 2\ell\sin\phi = 2\ell\sin\theta$ فإن :

$$\cos\phi\, d\phi = \cos\theta\, d\theta \rightarrow d\phi = \frac{\cos\theta}{\cos\phi}d\theta$$

بالتعويض في (1) :

$$p\cos\theta = 2w\sin\theta + w\sin\phi(\frac{\cos\theta}{\cos\phi})$$

$$= 2w\sin\theta + w\tan\phi\cos\theta$$

وبالقسمة على $\cos\theta$:

$$\therefore p = 2w\tan\theta + w\tan\phi$$

وعند الاتزان فان الشكل الخماسي يأخذ وضعه بحيث تكون $\theta = 54^0$, $\phi = 18^0$

$$\therefore p = w(2\tan 54 + \tan 18) = w(2\cot 36 + \tan 18)$$

$$= w(2\frac{\cos 36}{\sin 36} + \tan 18) = w(2\frac{\cos 36}{2\sin 18\cos 18} + \frac{\sin 18}{\cos 18})$$

$$= w(\frac{2\cos 36 + \sin^2 18}{2\sin 18\cos 18}) = w(\frac{2\cos^2 18 - 2\sin^2 18 + 2\sin^2 18}{2\sin 18\cos 18}) = w\cot 18$$

وهو المطلوب .

ثانياً : استقرار الاتزان

أنواع الإتزان :

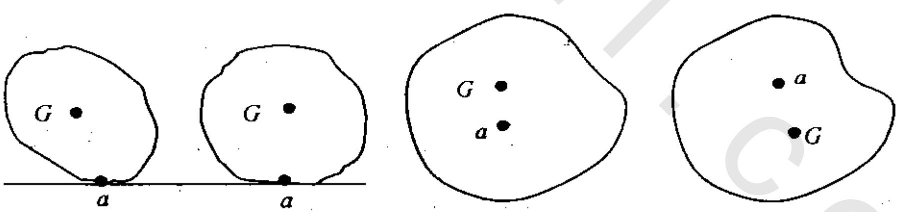
إذا إتزن جسم عند تعليقة من نقطة فيه ولتكن a فإن مركز ثقله G يقـــع علـــى الخط الرأسي المار بنقطة التعليق، وإذا أعطينا للجسم إزاحة صغيرة حول محـــور التعليق فتنشأ لدينا ٣ حالات:

حالة(١): إذا وقع مركز الثقل G أسفل نقطة التعليق a، فيحاول الجسم الرجـــوع إلى

وضعه الأصلي، ويقال أن الجسم في حالة إتزان مستقر .

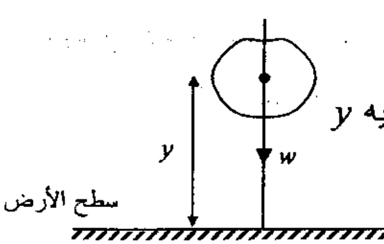
حالة(٢): إذا وقع مركز الثقل G أعلى نقطة التعليق a ، فلا يحاول الجسم الرجوع إلى وضعه الأصلي، ويقال أن الجسم في حالة إتزان غير مستقر .

حالة (٣) : إذا أتخذ الجسم وضعاً مماثلاً لوضعه الأول فيقال أن الجسم في حالـــة إتزان متعادل .



حالة (٣) حالة (٢) حالة (١)

تعيين مواضع الإتزان باستخدام دالة الجهد:



من المعلوم أنه عند انتقال جسم وزنه w لمسافة رأسيه y فإن طاقة جهده (أو طاقة وضعه)

هي : $u = w \cdot y$

وتعرف u بدالة الجهد وهي دالة في الموضع . أي أن $u = w\cdot(y)$.

وغالباً ما يكون الارتفاع عـن سـطح الأرض y دالـة لمتغيـر آخـر θ مـثلاً أي أن : $y = y(\theta)$

وتعرف مواضع الإتزان لجسم بأنها المواضع التي تكون فيها دالة الجهد u نهاية صغرى أو نهاية عظمى ، أي أن مواضع الإتزان تتحدد من العلاقة : $du = 0$

ولما كانت u تعتمد على y وكانت y تعتمد على θ فإن مواضع الإتزان تتعين من المعادلة :

$$\frac{du}{d\theta} = 0 \quad \text{أو من المعادلة} \quad \frac{dy}{d\theta} = 0$$

ولتعيين نوع الإتزان باستخدام دالة الجهد :

من قانون ثبوت الطاقة فإن : طاقة الحركة + طاقة الجهد = مقداراً ثابتاً

فإذا أزيح الجسم إزاحة صغيرة فإنه يبدأ في الحركة أي يكتسب طاقة حركة وبالتالي تقل طاقة جهده عن قيمتها في وضع الإتزان، وهذا يعني أن الجسم يميل دائماً إلى الحركة في الجهة التي تقل فيها طاقة الجهد، ويكون لدينا حالتان :

حالة(١) : إذا كانت دالة الجهد u نهاية صغرى .

في هذه الحالة إذا أزيح الجسم من وضع الإتزان إزاحة صغيرة فإنه يحاول أن يعود إلى وضعه الأصلي للإتزان إذ أن هذه هي الجهة التي تقل فيها طاقة الجهـد، ويكون الإتزان حينئذ مستقر .

∴ شرط الإتزان المستقر هو أن تكون u نهاية صغرى وشرط ذلك هو :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = + \quad \text{أو} \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = +$$

حالة(٢) : إذا كانت دالة الجهد u نهاية عظمى

في هذه الحالة إذا أزيح الجسم من وضع الإتزان إزاحة صغيرة فإنه يتحرك مبتعداً عن وضع الإتزان الأصلي له إذا أن هذه هي الجهة التي تقل فيها طاقة الجهد، ويكون الإتزان حينئذ غير مستقر .

$\therefore$ شرط الإتزان غير المستقر هو أن تكون u نهاية عظمى وشرط ذلك هو :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = - \qquad \text{أو} \qquad \frac{d^2y}{d\theta^2} = -$$

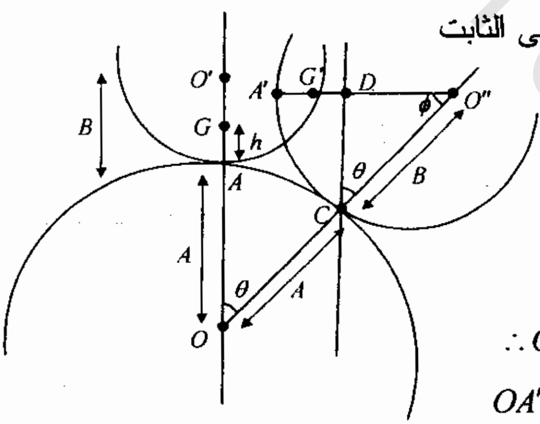
ملحوظة : إذا لم تكن $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ كافية لتعيين نوع الإتزان (كأن حصلنا مثلاً على $\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$) فيجب أن تبحث عن $\frac{d^3u}{d\theta^3}$ أو $\frac{d^4u}{d\theta^4}$ لتحديد نوع الإتزان .

إتزان جسم ذو سطح منحن على جسم آخر مثبت وذي سطح منحن :

نفرض أن O هي مركز السطح المنحنى الثابت

وأن O' مركز السطح العلوي

وأن G مركز ثقله



فإذا كانت A هي نقطة التماس فإن

(نصف قطر الجسم الثابت) $\therefore OA = A$

(نصف قطر الجسم المتحرك) $OA' = A$

(إرتفاع مركز ثقل الجسم المتحرك عن A) $AG = h$

فإذا حدثت إزاحة صغيرة خلال زاوية θ فأصبحت C هي نقطة التماس الجديدة ، ولتكن A', G', O'' هي موضع A, G, O' بعد الإزاحة والزاوية $AOC = \theta$ والزاوية $CO''A' = \phi$ أيضاً فإن : $AC = A'C$ ومنها :

$$A\theta = B\phi \quad \therefore \frac{A}{B} = \frac{\phi}{\theta} \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

شرط استقرار الجسم العلوي هو كون مركز ثقله G' يقع على يسار الرأسي من C أي على يسار النقطة D

$$A'G' \langle A'D$$

$$\therefore h \langle B - O''D \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

ومن المثلث $O''DC$ فإن :

$$\frac{O''D}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin(\theta+\phi)} \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

وحيث أن الإزاحة صغيرة فإن

$$\sin\theta \cong \theta \ , \sin\phi \cong \phi$$

$$\sin(\theta+\phi) = \theta + \phi$$

وتصبح (3) :

$$\frac{O''D}{\theta} = \frac{B}{\theta+\phi}$$

$$\therefore O''D = \frac{B\theta}{\theta+\phi} = \frac{B}{1+\frac{\phi}{\theta}} = \frac{B}{1+\frac{A}{B}} = \frac{B}{\frac{A+B}{B}} = \frac{B^2}{A+B}$$

وبالتعويض (2) :

$$h \langle B - \frac{B^2}{A+B} \langle \frac{AB}{A+B}$$

$$\therefore \frac{1}{h} \rangle \frac{A+B}{AB} \qquad \boxed{\therefore \frac{1}{h} \rangle \frac{1}{A} + \frac{1}{B}} \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

وهو شرط الإتزان المستقر .

وبالمثل : فإن شرط الإتزان غير المستقر يكون :

$$\frac{1}{h} \langle \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \qquad \text{\_\_\_\_(5)}$$

ملاحظات:

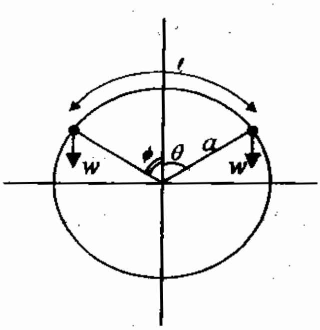
(١) إذا كانت $\frac{1}{h}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$ فهي الحالة التي تناظر $\frac{d^2u}{d\theta^2}=0$ وبالتالي فإن الإتزان يكون غير معلوم، حتى نوجد $\frac{d^3u}{d\theta^3}$ ونرى إذا كانت سالبة (فيكون الإتزان غير مستقر) أو موجبة(فيكون الإتزان مستقراً) ، وهكذا .

(٢) إذا كان السطح الثابت مستو فإن $A=\infty$ ويكون الإتزان مستقراً أو غير مستقر تبعاً لكون : $\frac{1}{h}\gtrless\frac{1}{B}$.

(٣) إذا كان السطح الكروي الثابت مقعراً فإن $A=-$ ويكون الإتزان مستقراً أو غير مستقر تبعاً لكون $\frac{1}{h}\gtrless\frac{1}{B}-\frac{1}{A}$

أمثلة محلولة :

مثال(١): جسمين صغيرين متساويين في الوزن ووزن كل منهما w - مربوطين بخيط خفيف يمر على دائرة رأسية ملساء ، أثبت أن وضع الإتزان هو وضع غير مستقر.



الحل: نأخذ مستوى المركز مبدءاً لقياس الجهد

فبفرض أن نصف قطر الدائرة a وطول الخيط ℓ

$$\therefore \ell=a(\theta+\phi)$$

$$\therefore \theta+\phi=\frac{\ell}{a} \qquad \_\_\_(1)$$

دالة الجهد للجسمين هي :

$$u=wy_1+wy_2=wa\cos\theta+wa\cos\phi=wa[\cos\theta+\cos\phi]$$

$$=wa\,[\cos\theta+\cos\,(\frac{\ell}{a}-\theta)] \qquad \_\_\_(2)$$

نقط الإتزان تعطى من العلاقة :

$$\frac{du}{d\theta}=0$$

$$\therefore w\,a[-\sin\theta+\sin(\frac{\ell}{a}-\theta)]=0$$

$$\therefore \sin\theta=\sin(\frac{\ell}{a}-\theta)\;=\sin\frac{\ell}{a}\cos\theta-\cos\frac{\ell}{a}\sin\theta$$

بالقسمة على $\cos\theta$:

$$\therefore \tan\theta=\sin\frac{\ell}{a}-\cos\frac{\ell}{a}\tan\theta$$

$$\therefore (1+\cos\frac{\ell}{a})\tan\theta=\sin\frac{\ell}{a}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\frac{\ell}{a}}{1+\cos\frac{\ell}{a}}=\frac{2\sin\frac{\ell}{2a}\cos\frac{\ell}{2a}}{2\cos^2\frac{\ell}{2a}}=\tan\frac{\ell}{2a}$$

$$\therefore \theta=\frac{\ell}{2a} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(3)}$$

ولإثبات أن وضع الإتزان هذا غير مستقر : نوجد $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ فمن (2) :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=w\,a[-\cos\theta-\cos(\frac{\ell}{a}-\theta)]=w\,a[-\cos\frac{\ell}{2a}-\cos\;(\frac{\ell}{a}-\frac{\ell}{2a})]$$

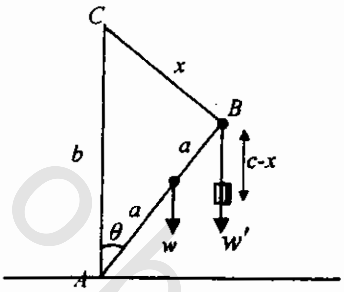
$$=-w\,a[\cos\frac{\ell}{2a}+\cos\frac{\ell}{2a}]=-2w\,a\cos\frac{\ell}{2a}\langle\;0$$

$\therefore$ الإتزان غير مستقر وهو المطلوب .

<u>**مثال(٢):**</u> قضيب AB وزنه w يتحرك بسهولة حول A . إذا ربط خيط خفيف من نقطة C رأسياً أعلى A ومر خلال ثقب في B حاملاً وزناً w' في طرفه الحر فأثبت أن الطول BC في حالة الإتزان يعطى من :

$$BC=\frac{w'}{w'+\frac{w}{2}}AC$$

وأثبت أن الإتزان غير مستقر .



<u>الحل:</u> نأخذ المستوى الأفقي المار بنقطة A هو

مستوى قياس الجهد

نفرض طول القضيب = $2a$ والأرتفاع $b=Ac$

وطول الخيط = c والطول $x = BC$

ارتفاع وزن القضيب(w) عن مستوى القياس = $a\cos\theta$

ارتفاع وزن الثقل (w') عن مستوى القياس $= a\cos\theta-(c-x)$

فتكون دالة الجهد هي :

$$u = Wa\cos + w'\left[2a\cos\theta-(c-x)\right] \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

ولكن من هندسة الشكل : في المثلث ABC :

$$x^2 = (b+2a)^2$$

$$= b^2+4a^2-4ab\cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{b^2+4a^2-x^2}{4ab} = \frac{b^2+4a^2}{4ab} - \frac{x^2}{4ab} = A - \frac{x^2}{4ab}$$

حيث A ثابت.

$$\therefore u = wa\left(A-\frac{x^2}{4ab}\right) + w'\left[2a\left(A-\frac{x^2}{4ab}\right)-(c-x)\right]$$

$$= \underbrace{(waA+2w'aA-w'c)} + w'x + (w+2w')a\left(\frac{-x^2}{4ab}\right)$$

$$= B + w'x - (w+2w')\left(\frac{x^2}{4b}\right) \quad , B = waA+2w'aA-w'c$$

نقط الإتزان تتحقق من العلاقة : $\frac{du}{dx}=0$

$$\therefore w' - (w+2w')\left(\frac{x}{2b}\right) = 0$$

$$\therefore x = \frac{w'}{w'+\frac{w}{2}}b \qquad \therefore BC = \frac{w'}{w'+\frac{w}{2}}AC$$

وهو المطلوب أولاً .

ولإثبات أن الإتزان غير مستقر : نفاضل مرة ثانية بالنسبة إلى x

$$\therefore \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{-(w+2w')}{2b} < 0$$

∴ الإتزان غير مستقر .

مثال(٣): قضيبان AC , AB طول كل منهما ℓ ووزنه w متصلان إتصالاً سهلاً عند A بينما النهايتان B,C متصلتان بخيط مرن طوله الطبيعي a وثابته k ، وضع القضيبان بحيث يلامس B,C مستوى أفقي أملس وتكون A في المستوى العمودي ، أثبت أن طول الخيط في وضع الإتزان (x) يعطي بالعلاقة :

$$w^2x^2 = 4k^2(4\ell^2 - x^2)(x-a)^2$$

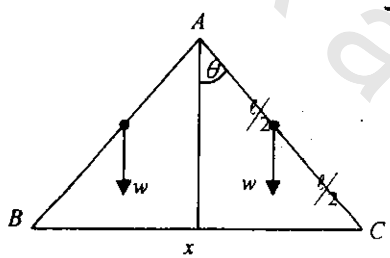
الحل: نأخذ المستوى الأفقي مستوى لقياس الجهد

فبمعلومية أن جهد الخيط المرن يساوي

الشغل اللازم لاستطالة الخيط

من الطول a إلى الطول x

يعطي بالعلاقة :



$$u_1 = \frac{1}{2}k(x-a)^2 \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

حيث k ثابت الخيط ، $(x-a)$ الاستطالة في الخيط

أيضاً : الجهد الناتج عن وزني القضيبين :

$$u_2 = 2w(\ell/2 \cos\theta) = w\ell \cos \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

حيث θ ميل القضيب على الرأسي .

$$\sin\theta = \frac{x}{2\ell}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{x}{2\ell})^2} = \sqrt{\frac{4\ell^2 - x^2}{4\ell^2}} = \frac{1}{2\ell}\sqrt{4\ell^2 - x^2}$$

دالة الجهد الكلية :

$$u = u_1 + u_2 = \frac{1}{2}k(x-a)^2 + w\ell\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}k(x-a)^2 + \frac{1}{2}w\sqrt{4\ell^2 - x^2}$$

وتتحدد مواضع الإتزان من العلاقة : $\frac{du}{dx} = 0$

$$\therefore k(x-a) + \frac{1}{2}w(4\ell^2 - x^2)^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(-2x) = 0$$

$$\therefore k(x-a) - \frac{1}{2}w\frac{x}{\sqrt{4\ell^2 - x^2}} = 0$$

$$\therefore wx = 2k(x-a)\sqrt{4\ell^2 - x^2}$$

وبالتربيع :

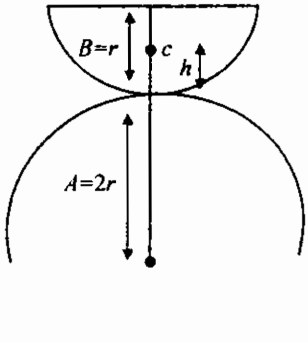
$$w^2x^2 = 4k^2(x-a)^2(4\ell^2 - x^2)$$

وهوا لمطلوب .

مثال(٤): نصف كرة تتزن على كرة نصف قطرها ضعف الأولى بحيث يكون وجهها المستوى لأعلى، أثبت أن أكبر وزن يمكن وضعه في مركز دائرة نصف الكرة دون أن يؤثر في استقرار التوازن هو : $\frac{1}{8}$ وزن نصف الكرة .

الحل: نفرض كتلة نصف الكرة $= M$

بينما الوزن الذي سنحاول وضعه في مركز دائرة نصف الكرة هو m



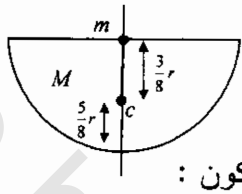
شرط استقرار التوازن :

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$$

$$\therefore \frac{1}{h} > \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} \quad \therefore \frac{1}{h} > \frac{3}{2r} \qquad \text{\_\_\_\_\_ (1)}$$

حيث h هو بعد مركز ثقل نصف الكرة والكتلة عن نقطة التماس

وحيث أن مركز ثقل نصف الكرة يقع على بعد $\frac{3}{8}r$ من المركز المستوى



فإن ارتفاع مركز ثقل نصف الكرة والكتلة عن سطح التماس يكون :

$$m_1 = M \quad , y_1 = \frac{5}{8}r$$

$$m_2 = m \; , y_2 = r$$

$$h = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{M(\frac{5}{8}r) + m(r)}{m + M}$$

$$\therefore h = r\,\frac{m + \frac{5}{8}M}{m + M} \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

ويصبح (1) :

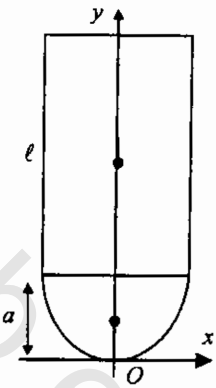
$$\frac{m + M}{m + \frac{5}{8}M} \rangle \frac{3}{2}$$

$$\therefore 2(m + M) \rangle 3(m + \frac{5}{8}M) \qquad \therefore 2M - \frac{15}{8}M \rangle 3m - 2m$$

$$\therefore \frac{1}{8}M \rangle m$$

أي أن الوزن m الذي يمكن وضعه في مركز دائرة نصف الكرة دون أن تؤثر في استقرار الإتزان يكون دائماً أقل من $\frac{1}{8}$ وزن نصف الكرة .

مثال(٥): جسم أجوف يتكون من اسطوانة إرتفاعها ℓ ونصف كرة متحدين في نصف القطر (a) . وضع الجسم بسطحه الكروي على مستوى خشن فأثبت أن الإتزان يكون مستقرا إذا كان $\ell \rangle a$ ، وإذا أضيف للجسم غطاء للأسطوانة على شكل قرص رقيق لاسمك له نصف قطره مساوي لنصف قطر الاسطوانة فأثبت أن الإتزان يكون مستقرا أو غير مستقر تبعاً لكون $a^2 - a\ell - \ell^2 \gtrless 0$



<u>الحل :</u> نفرض أن الكثافة لوحدة المساحات

من الجسم هي ρ ، فتكون :

كتلة نصف الكرة : $w_1 = 2\pi a^2 \cdot \rho$

وإرتفاع مركز ثقلها عن المستوى (محور x) : $h_1 = \frac{a}{2}$

كتلة الاسطوانة : $w_2 = 2\pi a\ell \cdot \rho$

وإرتفاع مركز ثقلها عن المستوى (محور x):

$h_2 = \ell/2 + a$

كتلة القرص : $w_3 = \pi 2a^2 \cdot \rho$

وارتفاع مركز ثقله عن المستوى (محور x) : $h_3 = \ell + a$ (القرص مهمل السمك) .

<u>**المطلوب الأول : قبل وضع الغطاء للاسطوانة :**</u>

نفرض أن بعد مركز ثقل المجموعة عن محور x $H =$ حيث :

$$H = \frac{w_1h_1 + w_2h_2}{w_1 + w_2} = \frac{a+\ell}{2}$$

شرط استقرار الإتزان في هذه الحالة : $\frac{1}{H} \rangle \frac{1}{A}$

حيث $A = a$ ← $\frac{1}{H} \rangle \frac{1}{a}$

$$\frac{2}{a+\ell} \rangle \frac{1}{a} \quad \therefore 2a \rangle a+\ell \qquad \therefore a \rangle \ell$$

<u>**المطلوب الثاني: عند إضافة الغطاء للاسطوانة :**</u>

$$H = \frac{w_1h_1 + w_2h_2 + w_3h_3}{w_1 + w_2 + w_3} = \frac{2a^2 + 3\ell a + \ell^2}{3a + 2\ell}$$

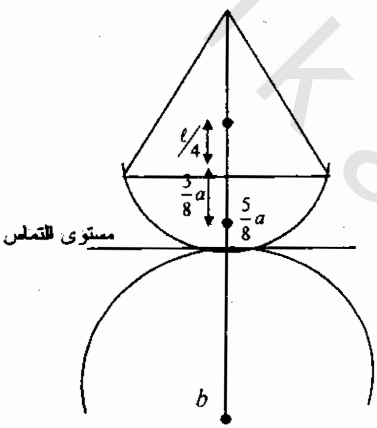
ويكون الإتزان مستقرا أو غير مستقر تبعاً لكون : $\frac{1}{H} \lessgtr \frac{1}{a}$

$$\frac{3a+2\ell}{2a^2+3\ell a+\ell^2} \lessgtr \frac{1}{a} \;\rightarrow\; a^2-a\ell-\ell^2 \lessgtr 0$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٦):</u> مخروط يعلو نصف كرة نصف قطرها a وارتفاع المخروط هو ℓ فإذا كان المخروط مشتركاً في القاعدة المستوية مع نصف الكرة ، فأثبت أن الإتزان يكون مستقراً إذا كان : $\ell^2 \langle a(3a+\frac{5}{2}\ell)$

وإذا وضع الجسم على كرة ثابتة نصف قطرها $b = 3a$ ، فأوجد شرط استقرار الإتزان في هذه الحالة .



<u>**الحل :**</u>

بفرض أن الكثافة لوحدة الحجوم من الجسم هي σ فتكون :

كتلة نصف الكرة الصغرى : $w_1 = \frac{2}{3}\pi a^3 \cdot \sigma$

وتؤثر على بعد : $h_1 = \frac{5}{8}a$ من المستوى الأسفل.

كتلة المخروط : $w_2 = \frac{1}{3}\pi a^3 \cdot \ell \cdot \sigma$

وارتفاع مركز ثقله عن المستوى الأسفل : $h_2 = \frac{\ell}{4} + \frac{3}{8}a$

المطلوب الأول :

نفرض أن بعد مركز ثقل المجموعة عن المستوى الأسفل $= H$ حيث :

$$H = \frac{w_1h_1 + w_2h_2}{w_1 + w_2} = \frac{10a^2 + \ell(2\ell + 3a)}{8(2a+\ell)}$$

شرط استقرار الإتزان هو : $\frac{1}{H} \rangle \frac{1}{A}$

حيث $A = a$.

$$\frac{1}{H} \rangle \frac{1}{a} \qquad \therefore \qquad \frac{8(2a+\ell)}{10a^2+\ell(2\ell+3a)} \rangle \frac{1}{a}$$

$$\therefore 8a(2a+\ell) \rangle 10a^2+\ell(2\ell+3a) \quad \therefore\ 2\ell^2 \langle 6a^2+5\ell a$$

$$\therefore \ell^2 \langle 3a^2+5/_2\,\ell a \quad \therefore \ell^2 \langle a(3a+5/_2\,\ell)$$

المطلوب الثاني : شرط استقرار الإتزان :

$$\frac{1}{H} \rangle \frac{1}{A}+\frac{1}{B} \rightarrow \quad \therefore \frac{1}{H} \rangle \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \rangle \frac{1}{a}+\frac{1}{3a} \rangle \frac{4}{3a}$$

$$\therefore\ H \langle \frac{3a}{4} \quad \therefore\ \frac{10a^2+\ell(2\ell+3a)}{8(2a+\ell)} \langle \frac{3a}{4}$$

$$\therefore 40a^2+4\ell(2\ell+3a) \langle 24a(2a+\ell)$$

$$\therefore 8\ell^2 \langle 8a^2+12a\ell \qquad \therefore \ell^2 \langle a^2+\frac{3}{2}a\ell$$

$$\therefore \ell^2 \langle a(a+\frac{3}{2}\ell)$$

وهو الشرط المطلوب في هذه الحالة .

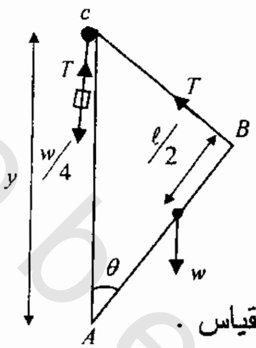
مسائل على استقرار الإتزان

(١) قضيب AB وزنه w وطوله ℓ متصل بمفصل أملس عند A بنقطة ثابتة بينما الطرف B متصل بخيط خفيف يمر فوق بكرة ملساء تقع رأسياً فوق A وتبعد مسافة y ويحمل الخيط في نهايته ثقل $(\frac{w}{4})$ ، فإذا كان $2\ell \rangle y \rangle \ell$ فأثبت أن القضيب يكون في حالة إتزان مستقر عندما يكون AB رأسياً إلـــى أعلـــى ، وأثبت أنه يوجد وضع آخر للإتزان يميل فيه القضيب على الرأسي بزاوية θ حيث : $\cos\theta = \dfrac{4\ell^2 + 3y^2}{8\ell y}$

(٢) وعاء منتظم أجوف يتكون من مخروط ونصف كرة متحدة معه في القاعـــدة ، فإذا ارتكز الوعاء بسطحه الكروي على مستوى أفقي خشن وكانـــت زاويـــة رأس المخروط $60°$ فأثبت أن الوعاء يتزن إتزاناً غير مستقر .

(٣) يشترك مخروط دائري قائم مصمت ارتفاعه ثلاث أمثال نصف قطر قاعدتـــه مع كرة مصمتة في القاعدة أثبتي أن النسبة بين كثـــافتي مـــادتي المخـــروط ونصف الكرة لكي يكون الإتزان مستقراً على سطح أفقي هي : $\frac{\rho_1}{\rho_2} \rangle 3$.

حلول المسائل



مسألة(١):

نلاحظ أولا أن الشد في الخيط لا يبذل شغلاً حيث أنه يمكن عمل إزاحة صغيرة للقضيب والكتلة بدون تغيير طول الخيط .

نفرض أن طول الخيط Z ونأخذ نقطة A نقطة أصل أو مبدأ للقياس .

إرتفاع نقطة تأثير الوزن w عن A = $\frac{1}{2}\ell\cos\theta$

إرتفاع نقطة تأثير الوزن $\frac{w}{4}$ عن A = $y-[z-\sqrt{\ell^2+y^2-2\ell y\cos\theta}]$

نفرض أن إرتفاع مركز ثقل المجموعة عند A = H

$$\therefore H=\frac{w\cdot\frac{1}{2}\ell\cos\theta+\frac{w}{4}\cdot[y-z+\sqrt{\ell^2+y^2-2\ell y\cos\theta}]}{w+\frac{w}{4}}$$

$$=\frac{2}{5}\ell\cos\theta+\frac{1}{5}[y-z+\sqrt{\ell^2+y^2-2\ell y\cos\theta}]$$

ولإيجاد أوضاع الإتزان : نضع $\frac{dH}{d\theta}=0$

$$\therefore -\frac{2}{5}\ell\sin\theta+\frac{1}{10}\left[\frac{2\ell y\sin\theta}{\sqrt{\ell^2+y^2-2\ell y\cos\theta}}\right]=0$$

$$\therefore \frac{2}{5}\ell\sin\theta\left[-1+\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{\ell^2+y^2-2\ell y\cos\theta}}\right]=0$$

وهذا يعني أنه أما : $\frac{2}{5}\ell\sin\theta=0$ ومنها $\theta=0$ أي أن القضيب يكون رأسيا

أو : $\ell^2+y^2-2\ell y\cos\theta=\frac{y^2}{4}$

أي $\cos\theta = \dfrac{4\ell^2 + 3y^2}{8\ell y}$ وهو وضع آخر للإتزان يميل فيه القضيب على الرأسي بهذه الزاوية ، ولإيجاد شرط حدوث هذا الوضع :

$$\cos\theta \langle 1 \to 4\ell^2 + 3y^2 \langle 8\ell y$$

$$\therefore 4\ell^2 - 8\ell y + 4y^2 \langle y^2$$

$$\therefore 4(y-\ell)^2 \langle y^2 \quad \therefore 2(y-\ell) \langle y$$

$$\therefore y \langle 2\ell$$

ولإثبات أن الإتزان يكون مستقراً عندما يكون القضيب رأسيا $(\theta = 0)$:

$$\frac{d^2H}{d\theta^2} = -\frac{2}{5}\ell\cos + \frac{1}{5}\frac{\ell y\cos\theta}{\sqrt{\ell^2 + y^2 - 2\ell y\cos\theta}} - \frac{1}{10}\frac{\ell y\sin\theta\cdot(2\ell y\sin\theta)}{(\ell^2 + y^2 - 2\ell y\cos\theta)^{3/2}}$$

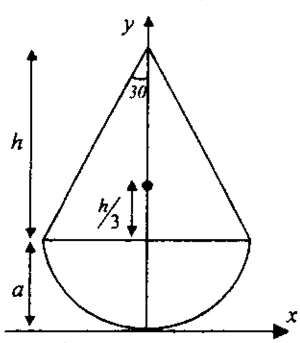
وعندما $\theta = 0$ فإن :

$$\frac{d^2H}{d\theta^2} = -\frac{2}{5}\ell + \frac{1}{5}\frac{\ell y}{y-\ell} = \frac{-2\ell y + 2\ell^2 + \ell y}{5(y-\ell)} = \frac{2\ell^2 - \ell y}{5(y-\ell)}$$

$$= \frac{\ell(2\ell - y)}{5(y-\ell)} = +$$

[وذلك لأن : $2\ell \rangle y \rangle \ell$]

$\therefore$ الإتزان مستقر وهو المطلوب .



مسألة(٢): بالنسبة لنصف الكرة :

$$w_1 = 2\pi a^2 \cdot \rho \quad , \quad h_1 = \frac{a}{2}$$

بالنسبة للمخروط :

$$w_2 = \pi a^2 \ell \cdot \rho \quad , \quad h_2 = \frac{h}{3} + a$$

ومن الشكل :

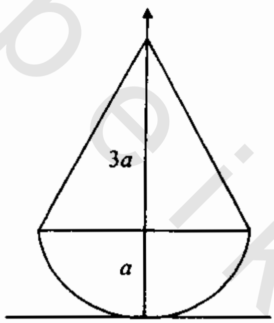
$$a = h\tan 30 \to h = a\cot 30 = a\sqrt{3}$$

وإذا كانت H هي إرتفاع مركز ثقل المجموعة عن المستوى :

$$\therefore H = \frac{w_1 h_1 + w_2 h_2}{w_1 + w_2} = a \frac{3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{4} \qquad \therefore \frac{H}{1} = \frac{4}{3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}} \; \frac{1}{a}$$

ولما كان الكسر $\rangle 1$ فإن : $\frac{1}{H} \langle \frac{1}{a}$

$\therefore$ الإتزان يكون غير مستقر وهو المطلوب .



<u>**مسألة(٣):**</u> بالنسبة لنصف الكرة :

$$w_1 = \frac{2}{3}\pi a^3 \cdot \rho_1 \quad , \quad h_1 = \frac{5}{8}a$$

بالنسبة للمخروط :

$$w_2 = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot 3a \cdot \rho_2 \quad , \quad h_2 = \frac{3}{4}a + a = \frac{7}{4}a$$

وذلك حيث أن بعد مركز ثقل المخروط المصمت عن قاعدته هو $\frac{h}{4}$ ،

حيث $h = 3a$ في هذه المسألة .

وإذا كان H هو بعد مركز ثقل المجموعة عن المستوى فإن :

$$H = \frac{w_1 h_1 + w_2 h_2}{w_1 + w_2} = \frac{a(\frac{5}{3}\rho_1 + 7\rho_2)}{4(\frac{2}{3}\rho_1 + \rho_2)}$$

شرط الإتزان المستقر على المستوى هو :

$$\frac{1}{H} \rangle \frac{1}{a} \quad \therefore \frac{4(\frac{2}{3}\rho_1 + \rho_2)}{a(\frac{5}{3}\rho_1 + 7\rho_2)} \rangle \frac{1}{a} \qquad \therefore 4(\frac{2}{3}\rho_1 + \rho_2) \; \rangle \; (\frac{5}{3}\rho_1 + 7\rho_2)$$

$$\therefore \frac{8}{3}\rho_1 + 4\rho_2 \rangle \frac{5}{3}\rho_1 + 7\rho_2 \qquad \therefore \rho_1 \rangle 3\rho_2 \quad \therefore \frac{\rho_1}{\rho_2} \rangle 3$$

وهو المطلوب .