

obeikandi.com

الباب الأول
علم الكنييماتيك
(علم الحركة المجردة)

obeikandi.com

الباب الأول

علم الكينماتيكا (الحركة المجردة)

مقدمة:

أنواع الحركة :

(١) حركة خطية :



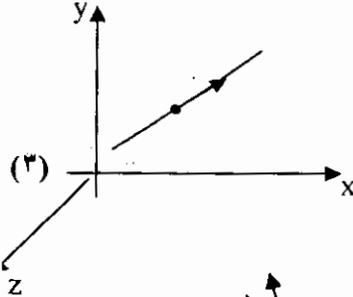
تتم في خط مستقيم (في بعد واحد)

(٢) حركة مستوية:



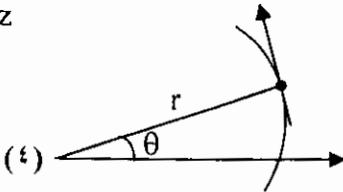
تتم في المستوى (في بعدين)

(٣) حركة فراغية:



تتم في الفراغ (في ٣ أبعاد)

(٤) حركة في منحنى (حركة زاوية):



تتم على منحنى (خلال زاوية معينة)

وكمثال لها :

الحركة الدائرية (على محيط دائرة).

الكميات الأساسية التي تحدد الحركة:

(١) الإزاحة (\vec{r}): هي كمية متجهة (لها مقدار واتجاه): وتعرف بأنها المسافة

المقطوعة في اتجاه معين. القيمة العددية أو مقدار الإزاحة يسمى المسافة

$$r = |\vec{r}| = ab$$

↓

(كمية قياسية)

∴ المسافة هي القيمة العددية للإزاحة.

(٢) السرعة (\vec{v}): وهي كمية متجهة: وتعرف بأنها معدل التغير الزمني للإزاحة.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

مقدار السرعة: $v = |\vec{v}|$ (كمية قياسية) $v = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$

(٣) العجلة أو التسارع (\vec{a}): كمية متجهة، هي معدل التغير الزمني للسرعة.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \quad (\text{كمية متجهة})$$

مقدار العجلة: $a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ (كمية قياسية)

صور أخرى للعجلة:

$$(١) \quad \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r}$$

$$(٢) \quad \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \underbrace{\frac{dr}{dt}}_v = v \frac{dv}{dr}$$

$$\therefore \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = v \frac{dv}{dr}$$

$\downarrow_{(v,t)} \quad \downarrow_{(r,t)} \quad \downarrow_{(v,r)}$

حالة خاصة: إذا كان الجسم يتحرك حركة خطيه (في بعد واحد)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = v \frac{dv}{dx} \quad | r = x$$

أنواع خاصة من الحركة:

- (١) الحركة بسرعة منتظمة: إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة المقدار والاتجاه.
- (٢) الحركة بعجله منتظمة: إذا تحرك الجسم بسرعة تتغير بمعدل زمني ثابت.
- (٣) الحركة بعجلة متغيرة: إذا تحرك الجسم بسرعة تتغير مع الزمن بالزيادة أو

النقصان.

السرعة تتغير بالنقصان الحركة
بعجلة متناقصة (تقصيرية)

السرعة تتغير بالزيادة الحركة
بعجلة متزايدة (تزايدية)

(٤) الحركة تحت تأثير الجاذبية: هي حركة تتم في خط رأسي بعجله ثابتة تسمى

عجلة الجاذبية الأرضية

$$g = 9.8 \text{ m/sec}^2 \text{ (متر/ث}^2\text{)} = 32 \text{ ft/sec}^2 \text{ (قدم/ث}^2\text{)}$$

<p>الحركة إلى أسفل (مع الجاذبية)</p> <p style="text-align: center;">↓ $g = +$</p>	<p>الحركة إلى أعلى (ضد الجاذبية)</p> <p style="text-align: center;">↑ $g = -$</p>
--	--

السرعة الزاوية (w): إذا تحرك جسم على محيط دائرة فقطع مسافة S هي

$$\therefore S = r \theta$$

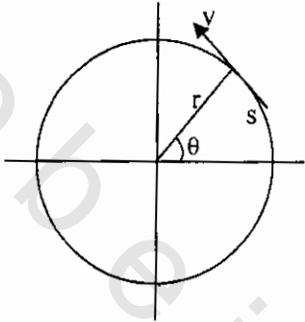
عبارة عن قوس من الدائرة

ويسمى معدل تغير الزاوية θ بالنسبة للزمن بالسرعة الزاوية (w)

$$w = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

العلاقة بين السرعة الخطية v والسرعة الزاوية ω : إذا تحرك جسيم على محيط

دائرة فان سرعته الخطية تكون دائما في اتجاه المماس .



$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r \dot{\theta} = r \omega$$

$$\therefore v = r\omega \longrightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

وهي العلاقة المطلوبة .

الحركة الخطية بعجلة منتظمة: إذا بدأ جسيم بسرعة ابتدائية v_0 وتحرك في خط

مستقيم بعجلة ثابتة α فقطع مسافة x في زمن t ، وكانت سرعته أثناء الحركة

هي v ، فان المعادلات الآتية تسمى معادلات الحركة الخطية بعجلة منتظمة:

(١) $v = v_0 + \alpha t$ (علاقة بين v, t)

(٢) $x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ (علاقة بين x, t)

(٣) $v^2 = v_0^2 + 2\alpha x$ (علاقة بين v, x)

[v_0 , α ثابتان]

البرهان: العلاقة الأولى:

$$a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = a dt$$



(فصل المتغيرات)

$$\int dv = \alpha \int dt$$

وبإجراء التكامل :

$$\therefore v = \alpha t + c_1 \dots\dots\dots(١)$$

ولإيجاد c_1 : من الشروط الابتدائية للحركة:

$v = v_0$ ، $t = 0$ في البداية:

بالتعويض في (١) :

$$v_0 = 0 + c_1$$

$$\therefore c_1 = v_0$$

$$v = \alpha t + v_0$$

وتصبح (١) :

$$\therefore v = v_0 + \alpha t \dots\dots\dots(I)$$

العلاقة الثانية :

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \alpha t$$

$$dx = (v_0 + \alpha t) dt$$

بفصل المتغيرات :

وبإجراء التكامل :

$$\int dx = \int (v_0 + \alpha t) dt$$

$$\therefore x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 + c_2 \dots\dots\dots(2)$$

ولإيجاد c_2 :

في البداية $x = 0$ ، $t = 0$

بالتعويض في (٢) :

$$0 = 0 + 0 + c_2$$

$$\therefore c_2 = 0$$

$$\therefore x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \dots\dots\dots(II)$$

العلاقة الثالثة :

$$\alpha = v \frac{dv}{dt} \longrightarrow v dv = \alpha dx$$

↓

(فصل المتغيرات)

$$\int v dv = \alpha \int dx$$

وبإجراء التكامل :

$$\therefore \frac{1}{2}v^2 = \alpha x + c_3 \dots\dots\dots(3)$$

ولإيجاد c_3 : في البداية: $x = 0$ ، $v = v_0$

$$\frac{1}{2}v_0^2 = 0 + c_3$$

بالتعويض في (3) :

$$\therefore c_3 = \frac{1}{2}v_0^2$$

وتصبح المعادلة (3):

$$\frac{1}{2}v^2 = \alpha x + \frac{1}{2}v_0^2$$

بضرب الطرفين في 2 :

$$\boxed{\therefore v^2 = v_0^2 + 2\alpha x} \dots\dots\dots(III)$$

ملخص: قوانين الحركة الخطية بعجله ثابتة:

$$v = v_0 + \alpha t$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha x$$

ملاحظات :

(1) إذا بدأ الجسم الحركة من السكون : $v_0 = 0$ وتصبح معادلات الحركة:

$$v = \alpha t \quad , \quad x = \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad , \quad v^2 = 2\alpha x$$

(٢) إذا تحرك الجسم بعجلة تقصيرية منتظمة: فإن عجلته تكون سالبة الإشارة
وتصبح معادلات الحركة:

$$v = v_0 - at \quad , \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} at^2 \quad , \quad v^2 = v_0^2 - 2ax$$

(٣) إذا تحرك الجسم حركه رأسيه خطيه تحت تأثير عجلة الجاذبية g : نضع
 $\alpha = g$ في معادلات الحركة :

(i) في الحركة إلي أسفل (مع الجاذبية): ($g = +$)

$$v = v_0 + gt \quad , \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \quad , \quad v^2 = v_0^2 + 2gx$$

(ii) في الحركة إلي أعلى (ضد الجاذبية): ($g = -$)

$$v = v_0 - gt \quad , \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \quad , \quad v^2 = v_0^2 - 2gx$$

أمثلة محلولة

مثال (١): يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة ثابتة O

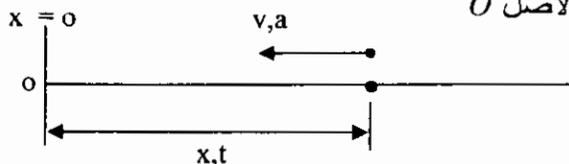
(نقطة الأصل) x يرتبط بالزمن t بالعلاقة : $x = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 18$

أوجد الآتي :

(١) سرعة وعجلة الجسم عند أي لحظة t

(٢) موضع الجسم وعجلته عندما تتلاشى سرعته

(٣) متى يمر الجسم بنقطة الأصل O



الحل:

العلاقة بين x, t :

$$x = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 18 \dots\dots\dots (١)$$

المطلوب الأول :

إيجاد v :

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6t - 12 = 6(t^2 - t - 2) \dots\dots\dots (2)$$

إيجاد a :

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 6 = 6(2t - 1) \dots\dots\dots (3)$$

المطلوب الثاني: إيجاد x, a عندما $v = 0$

عندما تتلاشى السرعة: $v = 0$

فمن (2):

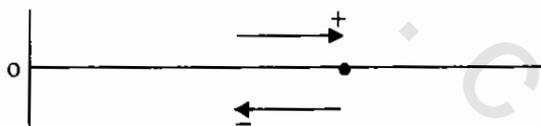
$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t - 2)(t + 1) = 0 \quad \therefore t = -1 \quad (\text{مرفوض حيث لا يوجد زمن سالب})$$

أي أن السرعة تتلاشى بعد زمن $t = 2 \rightarrow t = 2$

وعند هذا الزمن : يكون الموضع (من (1)) :

$$x = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 18 = -2 \text{ cm}$$



(معنى إشارة سالب أن الجسم يتحرك نحو O أي في اتجاه تناقص x).

أيضاً:

لإيجاد العجلة : من (3):

$$a = 6[2(2) - 1] = 18 \text{ cm/sec}^2$$

المطلوب الثالث: يمر الجسم بنقطة الأصل عندما $x = 0$ فبالتعويض في (١):

$$2t^3 - 3t^2 - 12t + 18 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثالثة في t (لها ٣ قيم) يمكن حلها كالاتي :

$$\underbrace{2t^3 - 12t}_{2t(t^2-6)} - \underbrace{3t^2 + 18}_{-3(t^2-6)} = 0$$

$$\therefore (2t - 3)(t^2 - 6) = 0 \quad \therefore 2t = 3 \rightarrow t = \frac{3}{2}$$

$$t^2 = 6 \rightarrow t = \pm\sqrt{6}$$

يرفض الزمن السالب \therefore يمر الجسم بنقطة الأصل عند الزمنين :

$$t = \frac{3}{2}, \quad t = \sqrt{6}$$

مثال (٢): إذا كانت العلاقة بين المسافة x والزمن t لجسيم يتحرك في خط

مستقيم هي : $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ ، حيث A, B, ω ثوابت ، أثبت الآتي :

$$(١) \text{ عجلة الجسم هي : } \alpha = -\omega^2 x$$

$$(٢) \text{ سرعة الجسم هي : } v^2 = \omega^2 (A^2 + B^2 - x^2)$$

الحل: المطلوب هو α, v بدلالة x ، العلاقة بين x, t هي :

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(١)$$

المطلوب الأول: لإيجاد α نوجد v أولاً:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

$$= \omega [-A \sin \omega t + B \cos \omega t] \quad \dots\dots\dots(٢)$$

$$\therefore \alpha = \frac{dv}{dt} = \omega [-\omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t]$$

$$= -\omega^2 [A \cos \omega t + B \sin \omega t] = -\omega^2 x \quad \dots\dots\dots(٣)$$

المعادلة (٣) هي معادلة العجلة.

المطلوب الثاني: إيجاد v بدلالة x ، يلزمنا حذف t
فبتربيع العلاقة (١):

$$x^2 = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)^2 \quad \dots\dots\dots (٤)$$

$$\frac{v}{\omega} = (-A \sin \omega t + B \cos \omega t) \quad \text{ومن (٢):}$$

بتربيع الطرفين :

$$\therefore \frac{v^2}{\omega^2} = (-A \sin \omega t + B \cos \omega t)^2 \quad \dots\dots\dots (٥)$$

بجمع (٥) و (٤):

$$\begin{aligned} \therefore x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} &= (A \cos \omega t + B \sin \omega t)^2 + (-A \sin \omega t + B \cos \omega t)^2 \\ &= A^2 \cos^2 \omega t + 2AB \cos \omega t \sin \omega t + B^2 \sin^2 \omega t \\ &\quad + A^2 \sin^2 \omega t - 2AB \sin \omega t \cos \omega t + B^2 \cos^2 \omega t \\ &= A^2 \underbrace{(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)}_{=1} + B^2 \underbrace{(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)}_{=1} = A^2 + B^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 + B^2 - x^2 \quad \therefore v^2 = \omega^2 (A^2 + B^2 - x^2)$$

وهو المطلوب ثانياً.

مثال (٣): إذا كان بعد جسيم (x) عن نقطة ثابتة O على خط مستقيم يعطى بدلالة الزمن (t) بالعلاقة الآتية :

$$x = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \quad \dots\dots\dots (١)$$

حيث A, B, ω ثوابت ، $i = \sqrt{-1}$

فأثبت أن :

$$(١) \text{ العجلة تعطى بالعلاقة } a = -\omega^2 x$$

$$(٢) \text{ العلاقة بين المسافة والسرعة هي : } v^2 = \omega^2 (4AB - x^2)$$

$$x = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \dots\dots\dots(1)$$

نوجد السرعة v بتفاضل (1) بالنسبة للزمن :

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} &= A e^{i\omega t} (i\omega) + B e^{-i\omega t} (-i\omega) \\ &= i\omega (A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}) \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

ولإيجاد العجلة α نفاضل (2) بالنسبة للزمن :

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{dv}{dt} &= i\omega [A e^{i\omega t} (i\omega) - B e^{-i\omega t} (-i\omega)] \\ &= (i\omega)^2 [A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}] = -\omega^2 x \dots\dots(3) \end{aligned}$$

وهو المطلوب أولاً.

المطلوب الثاني: علاقة بين المسافة والسرعة

فمن (1) بالتربيع:

$$x^2 = (A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t})^2 \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{v}{\omega} = i (A e^{i\omega t} - B e^{-i\omega t}) \quad \text{ومن (2):}$$

وبالتربيع:

$$\frac{v^2}{\omega^2} = -(A e^{i\omega t} - B e^{-i\omega t})^2 \dots\dots\dots(5)$$

من (5) و (4) بالجمع :

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} &= (A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t})^2 - (A e^{i\omega t} - B e^{-i\omega t})^2 \\ &= A^2 e^{2i\omega t} + 2AB + B^2 e^{-2i\omega t} - (A^2 e^{2i\omega t} - 2AB + B^2 e^{-2i\omega t}) = 4AB \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{v^2}{\omega^2} = 4AB - x^2 \quad \therefore v^2 = \omega^2 (4AB - x^2)$$

وهو المطلوب ثانياً.

مثال(٤): إذا كانت العلاقة بين المسافة x والزمن t لجسيم متحرك هي علاقة

$$x^2 = At^2 + 2Bt + c$$

حيث A, B, c ثوابت ، فأثبت أن العجلة α تتناسب عكسياً مع مكعب

المسافة إلا في الحالة الخاصة عندما : $B = \pm\sqrt{AC}$

الحل :

$$x^2 = At^2 + 2Bt + c \dots\dots\dots(١)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\therefore 2x \cdot \frac{dx}{dt} = 2At + 2B$$

$$\frac{dx}{dt} = v \text{ حيث}$$

$$\therefore x \cdot v = At + B \dots\dots\dots(٢)$$

$$x \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{dx}{dt} = A$$

بالتفاضل ثانيةً :

$$\therefore x \cdot a + v^2 = A \dots\dots\dots(٣)$$

$$\alpha = \frac{dv}{dt} \text{ حيث العجلة}$$

المطلوب: إيجاد علاقة بين العجلة α والمسافة x : ولذلك نحذف

السرعة v بين (٢) و (٣) .

$$v = \frac{At + B}{x}$$

فمن (٢):

بالتعويض في (٣):

$$x \cdot \alpha = A - v^2 = A - \left(\frac{At + B}{x} \right)^2 = \frac{Ax^2 - (At + B)^2}{x^2}$$

$$\alpha = \frac{Ax^2 - (At + B)^2}{x^3}$$

بقسمة الطرفين على x :

بالتعويض في البسط بقيمة x^2 من (1)

$$\alpha = \frac{A(At^2 + 2Bt + c) - (A^2t^2 + 2ABt + B^2)}{x^3} = \frac{AC - B^2}{x^3} = \frac{k}{x^3}$$

$$\therefore \alpha = \frac{k}{x^3} \rightarrow \therefore \alpha \propto \frac{1}{x^3}$$

حيث $k = AC - B^2$

∴ العجلة تتناسب عكسياً مع مكعب المسافة إلا في الحالة الخاصة عندما $k = 0$

أي عندما $AC = B^2$ ، أي عندما $B = \pm\sqrt{Ac}$. وهو المطلوب .

مثال (5): يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين المسافة التي

يقطعها x والسرعة v بعد زمن معين هي: $x = A\sqrt{v} - B$ ، حيث A, B

ثابتان . المطلوب :

(1) إيجاد الزمن اللازم حتى تبلغ سرعة الجسيم ضعف قيمتها الابتدائية v_0

(2) إثبات أن العجلة α تعطى بدلالة السرعة بالعلاقة: $\alpha = \frac{2}{A}v^{\frac{3}{2}}$

الحل: أولاً : نوجد v_0

$$x = A\sqrt{v} - B \dots\dots\dots(1)$$

حيث أن :

وذلك عند زمن t .

وعند بداية الحركة :

$$v = v_0 , \quad x = 0 , \quad t = 0$$

$$0 = A\sqrt{v_0} - B$$

فبالتعويض في (1) :

$$A\sqrt{v_0} = B \Rightarrow v_0 = \frac{B^2}{A^2} \dots\dots\dots(2)$$

وهي السرعة الابتدائية للحركة .

المطلوب الأول: هو إيجاد علاقة بين الزمن والسرعة :

$$\sqrt{v} = \frac{x}{A} + \frac{B}{A} = \frac{x+B}{A} \quad \text{من (1) :$$

$$\therefore v = \left(\frac{x+B}{A} \right)^2 \dots \dots \dots (3)$$

↓

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{x+B}{A} \right)^2 = \frac{(x+B)^2}{A^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int dt = A^2 \int \frac{dx}{(x+B)^2}$$

$$\therefore t = A^2 \left[\frac{-1}{(x+B)} \right] + c = -\frac{A^2}{x+B} + c \dots \dots \dots (4)$$

لإيجاد c : في البداية : $x=0$, $t=0$

$$0 = -\frac{A^2}{B} + c \longrightarrow c = \frac{A^2}{B} \quad \text{من (4) :$$

$$t = -\frac{A^2}{\underbrace{x+B}_{=A\sqrt{v}}} + \frac{A^2}{B} \quad \text{وتصبح (4) :$$

$$= -\frac{A^2}{A\sqrt{v}} + \frac{A^2}{B} = \frac{A^2}{B} - \frac{A}{\sqrt{v}} \dots \dots \dots (5)$$

$$v = 2v_0 = 2 \frac{B^2}{A^2} \quad \text{عندما تبلغ السرعة ضعف قيمتها الابتدائية فإن :$$

ويكون الزمن اللازم للوصول إلى هذه السرعة هو :

$$t = \frac{A^2}{B} - \frac{A}{\sqrt{2 \frac{B^2}{A^2}}} = \frac{A^2}{B} - \frac{A}{\sqrt{2}B} = \frac{A^2}{B} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \underline{0.293} \frac{A^2}{B}$$

وهو المطلوب الأول .

المطلوب الثاني: علاقة بين العجلة والسرعة :

$$\sqrt{v} = \frac{x}{A} + \frac{B}{A} \quad \text{من (1):}$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{A} \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{1}{2\sqrt{v}} \alpha = \frac{1}{A} v \quad \therefore \alpha = \frac{2\sqrt{v}}{A} v \quad \therefore a = \frac{2}{A} v^{\frac{3}{2}}$$

وهو المطلوب ثانياً .

مثال (٦): قطار بدأ حركته من السكون من نقطة الأصل O ، ووصل في حركته

إلى نقطة A بعجلة ثابتة α حتى أصبحت سرعته v عند A ، ثم ظلت

سرعته ثابتة لفترة زمنية معينة (من نقطة A إلى B) ثم تناقصت سرعته إلى

الصفر عند نقطة C ، حيث كان متحركاً من B إلى C بعجلة تقصيرية r .

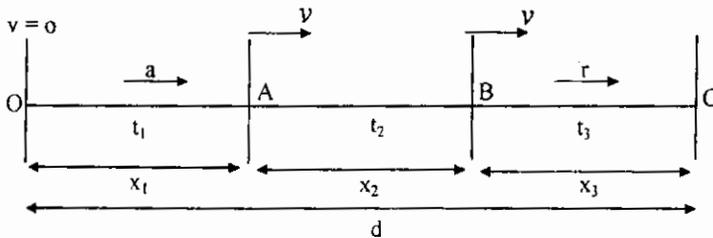
فإذا كانت المسافة الكلية المقطوعة بواسطة القطار هي d فأثبت أن :

$$t = \frac{d}{v} + \frac{v}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} \right) \quad \text{الزمن الكلي لرحلة القطار هو :}$$

وأوجد قيمة السرعة v التي تجعل هذا الزمن أقل ما يمكن ، وأثبت أن أقل

$$t_{\min} = \sqrt{2d \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} \right)} \quad \text{قيمة للزمن } t \text{ هي :}$$

الحل :



القطار يمر أثناء حركته بثلاث مراحل :

(١) في المسافة من O إلى $A(x_1)$: السرعة الابتدائية $v_0 = 0$ ، العجلة ثابتة $\alpha =$ ، وصل القطار إلى A في زمن t_1 بسرعة v .

معادلات الحركة :

$$v = v_0 + at \longrightarrow v = \alpha t_1 \dots\dots\dots(١)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \longrightarrow v^2 = 2\alpha x_1 \dots\dots\dots(٢)$$

(٢) في المسافة من A إلى $B(x_2)$: السرعة v منتظمة ، العجلة = صفر
(لثبات السرعة) ، الزمن $t_2 =$

معادلات الحركة :

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \longrightarrow x_2 = v t_2 \dots\dots\dots(٣)$$

(٣) في المسافة من B إلى $C(x_3)$: السرعة الابتدائية $v =$ ، والعجلة
تقصيرية $= -r$ ، والسرعة النهائية = صفر خلال زمن $t = t_3$

$$v = v_0 + at \longrightarrow 0 = v - r t_3 \dots\dots\dots$$

معادلات الحركة :

$$\therefore v = r t_3 \dots\dots\dots(٤)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2at \longrightarrow 0 = v^2 - 2r x_3$$

$$\therefore v^2 = 2r x_3 \dots\dots\dots(٥)$$

لإيجاد الزمن الكلي لحركة القطار :

$$t_1 = \frac{v}{\alpha} \dots\dots\dots(٦)$$

من (١) ←

$$t_2 = \frac{x_2}{v} \dots\dots\dots(٧)$$

من (٣) ←

$$t_3 = \frac{v}{r} \dots\dots\dots(٨)$$

من (٤) ←

وللتخلص من x_2 في (٧) :

$$x_1 = \frac{v^2}{2\alpha} \quad \dots\dots\dots (٩) \quad \leftarrow \text{من (٢)}$$

$$x_3 = \frac{v^2}{2r} \quad \dots\dots\dots (١٠) \quad \leftarrow \text{من (٥)}$$

ولكن: المسافة الكلية :

$$d = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\therefore x_2 = d - x_1 - x_3$$

$$x_2 = d - \frac{v^2}{2\alpha} - \frac{v^2}{2r} = d - \frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} \right) \quad \dots\dots\dots (١١)$$

بالتعويض في (٧) :

$$t_2 = \frac{d}{v} - \frac{v}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} \right) \quad \dots\dots\dots (١٢)$$

بجمع (٨) و (١٢) و (٦) نحصل على الزمن الكلي :

$$t = t_1 + t_2 + t_3$$

$$\begin{aligned} \therefore t &= \frac{v}{\alpha} + \frac{d}{v} - \frac{v}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} \right) + \frac{v}{r} \\ &= \frac{d}{v} + \frac{v}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} \right) \quad \dots\dots\dots (١٣) \end{aligned}$$

وهو المطلوب الأول .

ولإيجاد قيمة v التي تجعل الزمن t أقل ما يمكن: من (١٣) نجد أن t دالة في

v فلكي تكون t أقل ما يمكن نوجد التفاضل $\frac{dt}{dv}$ ونساويه بالصفر فنحصل

على قيمة v التي تجعل t نهاية صغرى (أي أقل ما يمكن) ، فبالتفاضل

$$\frac{dt}{dv} = -\frac{d}{v^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} \right) \quad \text{بالنسبة إلى } v :$$

$$0 = -\frac{d}{v^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} \right) \quad \text{وإمساواة هذا المقدار بالصفر :}$$

$$\therefore \frac{d}{v^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha+r}{\alpha r} \right) \quad \therefore \frac{v^2}{d} = 2 \left(\frac{\alpha r}{\alpha+r} \right)$$

$$v^2 = 2d \left(\frac{\alpha r}{\alpha+r} \right)$$

$$\therefore v = \sqrt{2d \left(\frac{\alpha r}{\alpha+r} \right)} \dots \dots \dots (14)$$

وهي قيمة v التي تجعل t أقل ما يمكن.

ولإيجاد أقل قيمة لـ t نعوض من (14) في (13) :

$$\begin{aligned} t_{\min} &= \frac{d}{v} + \frac{v}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} \right) = \frac{d}{v} + \frac{v}{2} \left(\frac{\alpha+r}{\alpha r} \right) = d \sqrt{\frac{\alpha+r}{2d\alpha r}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2d\alpha r}{\alpha+r}} \left(\frac{\alpha+r}{\alpha r} \right) \\ &= \sqrt{\frac{d(\alpha+r)}{2\alpha r}} + \sqrt{\frac{d\alpha r}{2(\alpha+r)} \cdot \left(\frac{\alpha+r}{\alpha r} \right)^2} = \sqrt{\frac{d(\alpha+r)}{2\alpha r}} + \sqrt{\frac{d(\alpha+r)}{2\alpha r}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{d(\alpha+r)}{2\alpha r}} = \sqrt{\frac{2d(\alpha+r)}{2\alpha r}} = \sqrt{2d \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} \right)} \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (7): جسيم يتحرك في خط مستقيم بعجلة منتظمة α من نقطة A بسرعة

v_0 من على بعد l من نقطة الأصل O . فإذا كانت أبعاده عن نقطة الأصل

عند الأزمنة t_1, t_2, t_3 هي : d_1, d_2, d_3 على الترتيب ، أثبت أنه إذا

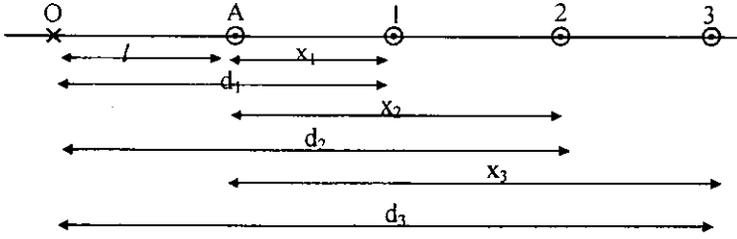
كانت t_1, t_2, t_3 تشكل متوالية حسابية حيث الفرق المتوسط بين الزمنين

المتتالين هو d ، وكانت d_1, d_2, d_3 تشكل متوالية هندسية ، فإن العجلة

تُعطى بالعلاقة :

$$\alpha = \frac{(\sqrt{d_1} - \sqrt{d_3})^2}{d^2}$$

الحل :



معادلات الحركة :

$$d_1 = l + x_1 = l + v_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha t_1^2$$

$$d_2 = l + x_2 = l + v_0 t_2 + \frac{1}{2} \alpha t_2^2$$

$$d_3 = l + x_3 = l + v_0 t_3 + \frac{1}{2} \alpha t_3^2$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

وحيث أن t_1, t_2, t_3 تشكل متوالية حسابية (عددية) فإن :

$$t_1 + t_3 = 2t_2 \dots \dots \dots (1)$$

وحيث أن d_1, d_2, d_3 تشكل متوالية هندسية فإن :

$$d_2 = \sqrt{d_1 d_3} \dots \dots \dots (2)$$

والفرق المتوسط d يعني أن :

$$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 \dots \dots \dots (3)$$

والآن : لإيجاد α : بحذف l, v_0 من معادلات d_1, d_2, d_3

$$d_1 + d_3 - 2d_2 = v_0 (t_1 + t_3 - 2t_2) + \frac{1}{2} \alpha (t_1^2 + t_3^2 - 2t_2^2)$$

$$t_1 + t_3 - 2t_2 = 0$$

وبإستخدام (1) :

$$\therefore d_1 + d_3 - 2d_2 = \frac{1}{2} \alpha (t_1^2 + t_3^2 - 2t_2^2) \dots \dots \dots (4)$$

$$\alpha = \frac{2(d_1 + d_3 - 2d_2)}{t_1^2 + t_3^2 - 2t_2^2} \dots \dots \dots (5)$$

وباستخدام (٢) :

$$d_1 + d_3 - 2d_2 = d_1 + d_3 - 2\sqrt{d_1 d_3} = (\sqrt{d_1} - \sqrt{d_3})^2 \dots\dots\dots(٦)$$

وباستخدام (٣) :

$$\begin{aligned} t_1^2 + t_3^2 - 2t_2^2 &= (t_1^2 - t_2^2) + (t_3^2 - t_2^2) \\ &= (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) + (t_3 - t_2)(t_3 + t_2) \\ &= (t_3 - t_2)(t_3 + t_2) - (t_2 - t_1)(t_1 + t_2) \\ &= d(t_3 + t_2) - d(t_1 + t_2) = d(t_3 - t_1) \end{aligned}$$

ولكن:

$$t_3 - t_2 = t_2 - t_1$$

$$\therefore t_3 - t_1 + t_1 - t_2 = t_2 - t_1 \quad \therefore t_3 - t_1 = 2t_2 - 2t_1 = 2(t_2 - t_1) = 2d$$

$$\therefore t_1^2 + t_3^2 - 2t_2^2 = d(2d) = 2d^2 \dots\dots\dots(٧)$$

بالتعويض من (٧) و (٦) في (٥):

$$\alpha = \frac{2(\sqrt{d_1} - \sqrt{d_3})^2}{2d^2} = \frac{(\sqrt{d_1} - \sqrt{d_3})^2}{d^2}$$

وهو المطلوب .

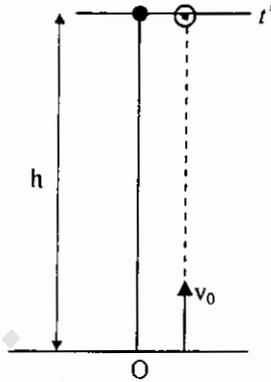
مثال(٨): على الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية:

قذف جسم من نقطة O رأسياً إلى أعلى بسرعة v_0 وبعد زمن t قذف جسم آخر إلى أعلى من نفس النقطة O وب نفس السرعة v_0 ، فالتقي الجسمان بعد زمن t' على ارتفاع h ، أثبت أن t', h يعطيان بالعلاقتين :

$$t' = \frac{t}{2} + \frac{v_0}{g} , \quad h = \frac{4v_0^2 - g^2 t^2}{8g}$$

حيث g عجلة الجاذبية الأرضية.

الحل: حيث أن الحركة رأسية إلى أعلى فتكون العجلة $\alpha = -g$



الجسمان التقيا بعد زمن t' من البداية على ارتفاع h فتكون معادلة الحركة :
(١) للجسيم الأول :

$$h = v_0 t' - \frac{1}{2} g (t')^2 \dots \dots \dots (١)$$

(٢) للجسيم الثاني :

$$h = v_0 (t' - t) - \frac{1}{2} g (t' - t)^2 \dots \dots \dots (٢)$$

وذلك حيث أن الجسيم الأول وصل إلى الارتفاع h بعد زمن t' بينما الجسيم

الثاني وصل إلى الارتفاع h بعد زمن $(t' - t)$ لأنه قذف بعد الأول بزمن t .

بحذف h بين (٢) و (١) [وذلك لإيجاد t' :

بالطرح :

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 t' - \frac{1}{2} g t'^2 + \frac{1}{2} g (t' - t)^2 = v_0 t' - \frac{1}{2} g t'^2 + \frac{1}{2} g (t'^2 - 2t t' + t^2) \\ &= v_0 t' - \frac{1}{2} g t (2t' - t) \end{aligned}$$

$$\therefore v_0 = \frac{1}{2} g (2t' - t) \longrightarrow \therefore 2t' - t = \frac{2v_0}{g}$$

$$t' = \frac{t}{2} + \frac{v_0}{g} \dots \dots \dots (٣)$$

وهو المطلوب الأول

ولإيجاد h : بالتعويض عن t' من (٣) في (١) :

$$\begin{aligned}
 h &= v_0 \left(\frac{t}{2} + \frac{v_0}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{t}{2} + \frac{v_0}{g} \right)^2 = v_0 \left(\frac{t}{2} + \frac{v_0}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{t^2}{4} + \frac{tv_0}{g} + \frac{v_0^2}{g^2} \right) \\
 &= v_0 \left(\frac{t}{2} + \frac{v_0}{g} \right) - \left(\frac{gt^2}{8} + \frac{tv_0}{2} + \frac{v_0^2}{2g} \right) = v_0 \left(\frac{t}{2} + \frac{v_0}{g} \right) - \left(\frac{gt}{4} + \frac{v_0}{2} \right) \left(\frac{t}{2} + \frac{v_0}{g} \right) \\
 &= \left(\frac{t}{2} + \frac{v_0}{g} \right) \left(v_0 - \frac{v_0}{2} - \frac{gt}{4} \right) = \left(\frac{t}{2} + \frac{v_0}{g} \right) \left(\frac{v_0}{2} - \frac{gt}{4} \right) \\
 &= \left(\frac{t}{2} + \frac{v_0}{g} \right) \cdot \frac{g}{2} \left(\frac{v_0}{g} - \frac{t}{2} \right) = \frac{g}{2} \left(\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{t^2}{4} \right) = \frac{g}{2} \left(\frac{4v_0^2 - t^2 g^2}{4g^2} \right) = \frac{4v_0^2 - t^2 g^2}{8g}
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب ثانياً .

الحركة الخطية بعجلة متغيرة: في هذه الحالة تعطى العجلة المتغيرة بدلالة المسافة

أو الزمن أو السرعة ، والمطلوب هو إيجاد :

(١) علاقة بين السرعة والزمن.

(٢) علاقة بين المسافة والزمن.

(٣) علاقة بين المسافة والسرعة.

ويكون لدينا الحالات الثلاثة الآتية :

(١) إذا كانت العجلة دالة في المسافة $\alpha = f(x)$ والمطلوب إيجاد :

(أ) علاقة بين المسافة والسرعة :

$$\alpha = f(x) = v \frac{dv}{dx} \longrightarrow v dv = f(x) dx$$

ثم نجري عملية التكامل فنوجد العلاقة المطلوبة: $v = R(x)$

(ب) علاقة بين المسافة والزمن :

$$v = R(x) = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dt = \frac{dx}{R(x)}$$

ثم نجري عملية التكامل ونوجد العلاقة المطلوبة $t = H(x)$

(٢) إذا كانت العجلة دالة في الزمن $\alpha = f(t)$: والمطلوب إيجاد:

(أ) علاقة بين السرعة والزمن :

$$\alpha = f(t) = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = f(t)dt$$

ثم نجري عملية التكامل ونوجد العلاقة المطلوبة $v = R(t)$

(ب) علاقة بين المسافة والزمن :

$$v = R(t) = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = R(t)dt$$

ثم نجري عملية التكامل ونحصل على العلاقة المطلوبة $x = H(t)$

(٣) إذا كانت العجلة دالة في السرعة $\alpha = f(v)$: والمطلوب إيجاد :

(أ) علاقة بين السرعة والزمن :

$$\alpha = f(v) = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dt = \frac{dv}{f(v)}$$

ونجري عملية التكامل فنحصل على العلاقة المطلوبة $t = R(v)$

(ب) علاقة بين المسافة والسرعة :

$$\alpha = f(v) = v \frac{dv}{dx} \longrightarrow dx = \frac{v dv}{f(v)}$$

ونجري عملية التكامل فنحصل على العلاقة المطلوبة : $x = H(v)$

أمثلة محلولة

مثال (١): إذا كانت العلاقة بين العجلة والسرعة لجسيم متحرك هي $\alpha = 2v + 3$ وبدأ الجسيم الحركة بسرعة 3 m/sec ، أثبت أن العلاقة بين السرعة والزمن هي:

$$v = \frac{3}{2}(3e^{2t} - 1)$$

وأن العلاقة بين المسافة والزمن هي: $x = \frac{9}{4}\left[(e^{2t} - 1) - \frac{2}{3}t\right]$

الحل: هنا: $\alpha = f(v)$

$$\therefore \alpha = 2v + 3 \dots\dots\dots(١)$$

أولاً: لإيجاد العلاقة بين السرعة والزمن : نضع $\alpha = \frac{dv}{dt}$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = 2v + 3$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int \frac{dv}{2v + 3} = \int dt$$

$$\therefore \frac{1}{2} \ln(2v + 3) = t + C_1 \dots\dots\dots(٢)$$

$$\left[\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln(ax + b) \right]$$

إيجاد c_1 : في البداية $v = 3$, $t = 0$

$$\therefore \frac{1}{2} \ln(6 + 3) = 0 + c_1 \quad \therefore \quad c_1 = \frac{1}{2} \ln 9$$

بالتعويض في (٢):

$$\therefore \quad t = \frac{1}{2} \ln(2v + 3) - \frac{1}{2} \ln 9 = \frac{1}{2} \ln \frac{2v + 3}{9}$$

$$\therefore \underbrace{2t} = \ln \underbrace{\frac{2v+3}{9}}$$

$$\therefore e^{2t} = \frac{2v+3}{9} \quad \therefore 9e^{2t} = 2v+3$$

$$\therefore 2v = 9e^{2t} - 3 = 3(3e^{2t} - 1)$$

$$\therefore v = \frac{3}{2}(3e^{2t} - 1) \dots \dots \dots (3)$$

وهو المطلوب الأول.

ثانياً: العلاقة بين المسافة والزمن :

نضع $v = \frac{dx}{dt}$ في (3) فنحصل على :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}(3e^{2t} - 1)$$

$$\int dx = \frac{3}{2} \int (3e^{2t} - 1) dt$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\therefore x = \frac{3}{2} \left[3 \frac{e^{2t}}{2} - t \right] + C_2$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$= \frac{9}{4} e^{2t} - \frac{3}{2} t + C_2 \quad \dots \dots \dots (4)$$

ولإيجاد C_2 : في البداية : $x=0$, $t=0$

$$0 = \frac{9}{4} e^0 - 0 + C_2$$

$$0 = \frac{9}{4} + C_2$$

$$\therefore C_2 = -\frac{9}{4}$$

بالتعويض في (4) :

$$x = \frac{9}{4} e^{2t} - \frac{3}{2} t - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \left[(e^{2t} - 1) - \frac{2}{3} t \right]$$

وهو المطلوب الثاني .

مثال (٢): يتحرك جسيم في الاتجاه الموجب لمحور x مبتدئاً من السكون من

نقطة الأصل ، فإذا كانت عجلة الجسيم α بعد مضي زمن t تعطى بالعلاقة

$\alpha = k e^{-nt}$ حيث k, n ثابتان ، أثبت أن السرعة تعطى بدلالة الزمن بالعلاقة

$v = \frac{k}{n}(1 - e^{-nt})$ وأن العلاقة بين المسافة والسرعة هي :

$$nx = (nt - 1)v + \alpha t$$

الحل: العجلة هنا $\alpha = f(t)$

$$\alpha = k e^{-nt} \dots\dots\dots(1)$$

المطلوب الأول : علاقة بين السرعة والزمن :

$$\therefore \frac{dv}{dt} = k e^{-nt} \quad \text{نضع } \alpha = \frac{dv}{dt} \text{ في (1) :}$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int dv = k \int e^{-nt} dt$$

$$v = -\frac{k}{n} e^{-nt} + C_1 \dots\dots\dots(2)$$

ولإيجاد C_1 : في البداية $v = 0$ ، $t = 0$

$$\therefore 0 = -\frac{k}{n} e^0 + C_1 = -\frac{k}{n} + C_1$$

$$\therefore C_1 = \frac{k}{n}$$

بالتعويض في (٢) :

$$\therefore v = \frac{k}{n} e^{-nt} + \frac{k}{n} = \frac{k}{n}(1 - e^{-nt}) \dots\dots\dots(3)$$

وهو المطلوب أولاً .

المطلوب الثاني: علاقة بين المسافة و السرعة

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{n}(1 - e^{-nt}) \quad \text{نضع } v = \frac{dx}{dt} \text{ في (3) :}$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int dx = \frac{k}{n} \int (1 - e^{-nt}) dt$$

$$\therefore x = \frac{k}{n} \left[t - \frac{e^{-nt}}{-n} \right] + C_2 = \frac{k}{n} \left[t + \frac{e^{-nt}}{n} \right] + C_2 \dots \dots \dots (4)$$

ولإيجاد C_2 : في البداية $t = 0$, $x = 0$

$$\therefore 0 = \frac{k}{n} \left[0 + \frac{e^0}{n} \right] + C_2 \quad \therefore C_2 = -\frac{k}{n^2}$$

$$x = \frac{k}{n} \left[t + \frac{e^{-nt}}{n} \right] - \frac{k}{n^2} = \frac{k}{n} \left[t + \frac{e^{-nt}}{n} - \frac{1}{n} \right] \quad \text{بالتعويض في (4) :}$$

$$\begin{aligned} \therefore nx &= k \left[t + \frac{e^{-nt}}{n} - \frac{1}{n} \right] = \frac{k}{n} [nt + e^{-nt} - 1] \\ &= \frac{k}{n} [nt - 1] + \frac{k}{n} e^{-nt} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

وهي علاقة بين المسافة x والزمن t والمطلوب هو إيجاد علاقة بين المسافة x والسرعة v :

$$\alpha = k e^{-nt} \quad \text{فمن (1) :}$$

$$\therefore \frac{k}{n} e^{-nt} = \frac{\alpha}{n} \dots \dots \dots (6)$$

$$v = \frac{k}{n} (1 - e^{-nt}) \quad \text{ومن (3) :}$$

$$\therefore \frac{k}{n} = v + \frac{k}{n} e^{-nt}$$

$$\therefore \frac{k}{n} = v + \frac{\alpha}{n} \dots \dots \dots (7) \quad \text{وباستخدام (6) :}$$

بالتعويض من (٧) و (٦) في (٥) :

$$\therefore nx = \left(v + \frac{\alpha}{n}\right)(nt - 1) + \frac{\alpha}{n} = (nt - 1)v + (nt - 1)\frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha}{n} = (nt - 1)v + \alpha t$$

وهو المطلوب ثانياً .

مثال (٣): يتحرك جسيم من السكون بعجلة ترتبط بالزمن بالعلاقة $a = \alpha - \beta t^2$

حيث α, β ثابتان اثبت أن الجسيم يكتسب أقصى سرعة له بعد زمن قدره

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{وأنه يكون قد قطع مسافة قدرها } \left(\frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\beta}\right) \quad \text{ثم أوجد العلاقة بين هذه}$$

المسافة وأقصى سرعة .

الحل: ملحوظة :

$$\left(a = \frac{dv}{dt} = 0\right) \quad \text{يتحرك الجسيم بأقصى سرعة } (v = v_{\max}) \quad \text{عندما تتلاشى عجلته}$$

[من قوانين النهايات العظمى] .

ولحل المسألة:

$$a = \alpha - \beta t^2 \dots\dots\dots(1) \quad \text{حيث أن :}$$

فبوضع $a = 0$ نحصل على الزمن الذي تتلاشى عنده العجلة أي زمن الوصول

$$\therefore 0 = \alpha - \beta t_{\max}^2 \quad \text{إلى أقصى سرعة}$$

$$\therefore t_{\max} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \dots\dots\dots(2)$$

ولإيجاد أقصى سرعة :

نوجد علاقة بين السرعة والزمن ونعوض فيها بالزمن t_{\max} فنحصل على v_{\max}

$$\frac{dv}{dt} = \alpha - \beta t^2 \quad \text{فبوضع } a = \frac{dv}{dt} \quad \text{في (1) :}$$

$$\therefore \int dv = \int (\alpha - \beta t^2) dt \quad \therefore v = \alpha t - \frac{1}{3} \beta t^3 + C_1$$

ولإيجاد C_1 : في البداية $t = 0$ و $v = 0 \leftarrow C_1 = 0$

$$\therefore v = \alpha t - \frac{1}{3} \beta t^3 \dots \dots \dots (3)$$

وتعطي هذه العلاقة السرعة v عند أي زمن t وبالتعويض عن $t = t_{\max}$ نحصل على:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \alpha \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) - \frac{1}{3} \beta \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right)^3 = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}} - \frac{1}{3} \beta \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}} - \frac{1}{3} \alpha^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\beta}{\beta^{\frac{3}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}} - \frac{1}{3} \alpha^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}} \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

ولإيجاد المسافة: نوجد علاقة بين x, t ونعوض عن $t = t_{\max}$ فنحصل على $x = x_{\max}$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \alpha t - \frac{1}{3} \beta t^3 \quad \leftarrow v = \frac{dx}{dt} \text{ بوضع (3)}$$

$$\therefore \int dx = \int \left(\alpha t - \frac{1}{3} \beta t^3 \right) dt \quad \therefore x = \frac{1}{2} \alpha t^2 - \frac{1}{12} \beta t^4 + C_2$$

ولإيجاد C_2 : في البداية $t = 0$ و $x = 0 \leftarrow C_2 = 0$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \alpha t^2 - \frac{1}{12} \beta t^4 \dots \dots \dots (5)$$

وبوضع $t = t_{\max}$ في (5) نحصل على المسافة التي يصل عندها الجسم إلى أقصى سرعته.

$$\begin{aligned} x_{\max} &= \frac{1}{2} \alpha \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right)^2 - \frac{1}{12} \beta \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right)^4 = \frac{1}{2} \alpha \cdot \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{12} \beta \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{1}{12} \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\beta} \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

وهو المطلوب الثاني.

المطلوب الأخير: علاقة بين x_{\max} , v_{\max}

فمن (٤) :

$$v_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}} \therefore v_{\max}^2 = \frac{4}{9} \frac{\alpha^3}{\beta} \therefore \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{9}{4} \frac{v_{\max}^2}{\alpha} \dots\dots\dots(٧)$$

بالتعويض عن $\frac{\alpha^2}{\beta}$ في (٦) :

$$\therefore x_{\max} = \frac{5}{12} \left(\frac{9}{4} \frac{v_{\max}^2}{\alpha} \right) = \frac{15}{16\alpha} v_{\max}^2$$

$$\therefore x_{\max} = \frac{15}{16\alpha} v_{\max}^2$$

وهي العلاقة المطلوبة

مثال (٤): قذف جسيم من نقطة الأصل في الإتجاه الموجب لمحور x بسرعة

إبتدائية v_0 وبعجلة تقصيرية يتناسب مقدارها مع مربع سرعة الجسيم

حيث k ثابت ، v سرعة الجسيم. أثبت العلاقات الآتية:

$$(١) \text{ بين السرعة والزمن: } v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}$$

$$(٢) \text{ بين السرعة والمسافة: } v = v_0 e^{-kx}$$

$$(٣) \text{ بين المسافة والزمن: } x = \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0 t)$$

الحل:

(١) إيجاد العلاقة بين v, t :

$$a = -kv^2 \dots\dots\dots(١)$$

↓

$$\therefore \frac{dv}{dt} = -k v^2$$

$$\therefore \int -\frac{dv}{v^2} = k \int dt \quad \int -v^{-2} dv = k \int dt \quad \text{بفصل المتغيرات والتكامل:}$$

$$\therefore v^{-1} = kt + C_1 \dots\dots\dots(2)$$

إيجاد C_1 : في البداية: $t = 0$, $v = v_0$

$$\therefore v_0^{-1} = 0 + C_1 \longrightarrow C_1 = v_0^{-1}$$

$$\therefore v^{-1} = kt + v_0^{-1} \quad \text{بالتعويض في (2):}$$

$$\therefore \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt$$

بالمضرب في v_0 :

$$\frac{v_0}{v} = 1 + kv_0 t$$

$$\therefore \frac{v}{v_0} = \frac{1}{1 + kv_0 t} \longrightarrow v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t} \dots\dots\dots(3)$$

(2) إيجاد العلاقة بين v, x :

$$\therefore v \frac{dv}{dx} = -kv^2 \longrightarrow \frac{dv}{dx} = -kv \quad \text{نضع } a = v \frac{dv}{dx} \text{ في (1) :}$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int \frac{dv}{v} = -k \int dx$$

$$\therefore \ln v = -kx + C_2 \dots\dots\dots(4)$$

إيجاد C_2 : في البداية: $x = 0$, $v = v_0$

$$\therefore C_2 = \ln v_0$$

$$\ln v = -kx + \ln v_0 \quad \text{بالتعويض في (4):}$$

$$\therefore \ln \frac{v}{v_0} = -kx$$

$$\left| \ln a = b \Rightarrow \therefore a = e^b \right.$$

$$\therefore \frac{v}{v_0} = e^{-kx} \quad \therefore v = v_0 e^{-kx} \dots\dots\dots(5)$$

(٣) إيجاد العلاقة بين x, t :

$$\frac{v}{v_0} = e^{-kx} \quad \leftarrow \quad v = v_0 e^{-kx} \quad \text{من (٥):}$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -kx \rightarrow x = -\frac{1}{k} \ln \frac{v}{v_0}$$

$$\therefore x = \frac{1}{k} \ln \frac{v_0}{v} \dots \dots \dots (٦)$$

ومن (٣) :

$$v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t} \quad \therefore \frac{v_0}{v} = 1 + kv_0 t$$

$$\therefore x = \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0 t) \dots \dots \dots (٧) \quad \text{بالتعويض في (٦):}$$

وهو المطلوب .

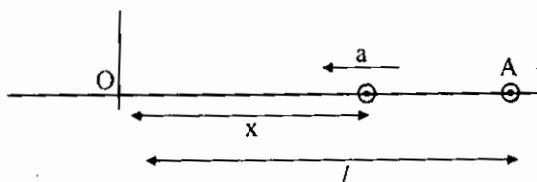
مثال (٥): الحركة تحت تأثير قانون التربيع العكسي :

يتحرك جسيم في خط مستقيم في اتجاه محور x بعجلة تتجه دائماً نحو نقطة الأصل O وتتناسب عكسياً مع مربع بعد الجسيم عن O (أي تخضع لقانون التربيع العكسي) فإذا بدأ الجسيم الحركة من السكون عند نقطة A التي تبعد مسافة l عن O فأثبت أن الزمن t يعطى بدلالة المسافة x بالعلاقة:

$$t = \sqrt{\frac{l}{2k}} \left[l \cos^{-1} \sqrt{\frac{x}{l}} + \sqrt{x(l-x)} \right]$$

حيث k ثابت . ومن ثم أوجد الزمن اللازم للوصول إلى النقطة O

الحل:



$$a = -\frac{k}{x^2} \dots \dots \dots (1)$$

[إشارة - لأن الجسم يتحرك نحو O أي في الإتجاه السالب لمحور x] ،
حيث k ثابت.

لإيجاد الزمن بدلالة المسافة: نوجد أولاً السرعة بدلالة المسافة وذلك
بوضع $a = v \frac{dv}{dx}$ في (1)

$$\therefore v \frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x^2}$$

$\int v dv = -k \int \frac{dx}{x^2}$ بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore \frac{1}{2}v^2 = -k \left[-\frac{1}{x} \right] + C_1 = \frac{k}{x} + C_1 \dots \dots \dots (2)$$

ولإيجاد C_1 : في البداية: - $x = l$, $v = 0$

$$\therefore C_1 = -\frac{k}{l}$$

بالتعويض في (2):

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{k}{x} - \frac{k}{l}$$

$$\therefore v^2 = 2k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{l} \right) = \frac{2k}{xl} (l-x) \quad \therefore v = \pm \sqrt{\frac{2k}{l}} \sqrt{\frac{l-x}{x}}$$

نأخذ إشارة - [لأن الجسم يتحرك نحو O]

$$\therefore v = -\sqrt{\frac{2k}{l}} \sqrt{\frac{l-x}{x}} \dots \dots \dots (3)$$

ولإيجاد الزمن t بدلالة المسافة x : نضع $v = \frac{dx}{dt}$ في (3):

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{l}} \sqrt{\frac{l-x}{x}}$$

وبفصل المتغيرات:

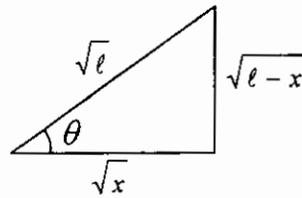
$$\int dt = -\sqrt{\frac{l}{2k}} \int \sqrt{\frac{x}{l-x}} dx$$

$$\therefore t = -\sqrt{\frac{l}{2k}} \int \left[\sqrt{\frac{x}{l-x}} dx \right] \dots\dots\dots (٤)$$

ولإيجاد التكامل $\int \sqrt{\frac{x}{l-x}} dx$: نأخذ التعويض: $x = l \cos^2 \theta$

$$\therefore dx = -2l \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{l-x}} &= \sqrt{\frac{l \cos^2 \theta}{l - l \cos^2 \theta}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$



$$\therefore \int \sqrt{\frac{x}{l-x}} dx = \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot (-2l \cos \theta \sin \theta d\theta)$$

$$= -2l \int \cos^2 \theta d\theta = -2l \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= -l \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = -l \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right] + C_2$$

وبالتعويض في (٤) :

$$\therefore t = \sqrt{\frac{l}{2k}} \left[l \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right] + C_2 \dots\dots (٥)$$

$$x = l \cos^2 \theta$$

ولكن:

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{l}} \quad \therefore \theta = \cos^{-1} \sqrt{\frac{x}{l}}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \sqrt{\frac{l-x}{l}} \cdot \sqrt{\frac{x}{l}} = \frac{2}{l} \sqrt{x(l-x)}$$

وتصبح (٥) :

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{2k}} \left[\ell \cos^{-1} \sqrt{\frac{x}{\ell}} + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{\ell} \sqrt{x(\ell-x)} \right] + C_2$$

$$= \sqrt{\frac{\ell}{2k}} \left[\ell \cos^{-1} \sqrt{\frac{x}{\ell}} + \sqrt{x(\ell-x)} \right] \dots \dots \dots (٦)$$

وهو المطلوب. [حيث $C_2 = 0$ ← في البداية $t = 0, x = \ell$]

ولإيجاد الزمن اللازم للوصول الي نقطة 0 : نضع $x = 0$ في (٦) التي هي علاقة عامة تعطي الزمن t عند أي مسافة x

$$\therefore t_0 = \sqrt{\frac{\ell}{2k}} \left[\ell \cos^{-1} 0 + \sqrt{0} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{\ell}{2k}} \cdot \ell \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \ell^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2k}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos^{-1} 1 = 0 \\ \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{وهو المطلوب الثاني.}$$

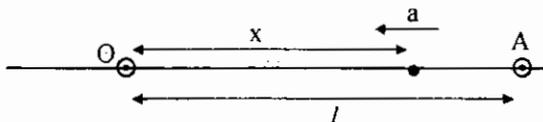
مثال (٦) : جسيم يتحرك من السكون من عند نقطة A التي تبعد مسافة ℓ عن

نقطة الأصل O ، فإذا كان الجسيم يتحرك بعجلة مقدارها $\mu \left(x + \frac{\ell^4}{x^3} \right)$ نحو

المركز حيث μ ثابت ، أثبت أن الجسيم يصل إلي المركز O بعد زمن

$$\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}} \text{ قدره}$$

الحل:



معادلة العجلة :

$$a = -\mu \left(x + \frac{\ell^4}{x^3} \right) \dots \dots \dots (1)$$

[إشارة - لأن الحركة نحو 0]

$$v \frac{dv}{dx} = -\mu \left(x + \frac{\ell^4}{x^3} \right)$$

نوجد أولاً علاقة بين v, x :

$$\int v dv = -\mu \int \left(x + \frac{\ell^4}{x^3} \right) dx$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\frac{1}{2} v^2 = -\mu \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\ell^4}{2x^2} \right] + C$$

$$\therefore v^2 = -\mu \left[x^2 - \frac{\ell^4}{x^2} \right] + C_1 \dots \dots \dots (2)$$

ولإيجاد C_1 : في البداية : $x = \ell$, $v = 0$

$$0 = -\mu \left[\ell^2 - \frac{\ell^4}{\ell^2} \right] + C_1 \longrightarrow \therefore C_1 = 0$$

بالتعويض في (2) :

$$v^2 = -\mu \left[x^2 - \frac{\ell^4}{x^2} \right] = \mu \left[\frac{\ell^4}{x^2} - x^2 \right] = \mu \frac{\ell^4 - x^4}{x^2}$$

$$\therefore v = \pm \sqrt{\mu} \frac{\sqrt{\ell^4 - x^4}}{x} \quad \therefore v = -\sqrt{\mu} \frac{\sqrt{\ell^4 - x^4}}{x}$$

ولإيجاد الزمن t بعد قطع الجسم مسافة x :

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\mu} \frac{\sqrt{\ell^4 - x^4}}{x}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \text{ نضع}$$

$$\int dt = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \int \frac{x dx}{\sqrt{\ell^4 - x^4}}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل :

$$\therefore t = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \int \frac{x dx}{\sqrt{\ell^4 - x^4}} \dots \dots \dots (3)$$

ولإيجاد التكامل في (٣): نستخدم التعويض : $x^2 = \ell^2 \cos \theta$

$$\therefore 2x dx = -\ell^2 \sin \theta d\theta \quad \therefore x dx = -\frac{\ell^2}{2} \sin \theta d\theta$$

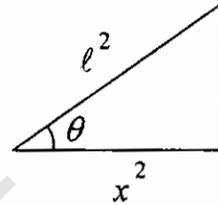
$$\sqrt{\ell^4 - x^4} = \sqrt{\ell^4 - \ell^4 \cos^2 \theta} = \sqrt{\ell^4 (1 - \cos^2 \theta)} = \ell^2 \sin \theta \quad \text{أيضاً :}$$

وبالتعويض في (٣)

$$\begin{aligned} \therefore t &= -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \int \frac{-\frac{\ell^2}{2} \sin \theta d\theta}{\ell^2 \sin \theta} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int d\theta \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \theta + C_2 = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \cos^{-1} \frac{x^2}{\ell^2} + C_2 \dots \dots \dots (٤) \end{aligned}$$

حيث $x^2 = \ell^2 \cos \theta$

$$\therefore \cos \theta = \frac{x^2}{\ell^2} \quad \therefore \theta = \cos^{-1} \frac{x^2}{\ell^2}$$



ولإيجاد C_2 : في البداية: $x = \ell$, $t = 0$

$$\therefore C_2 = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \cos^{-1} \frac{x^2}{\ell^2}$$

ويكون الزمن اللازم للوصول إلى المركز ($x = 0$) هو :

$$t_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \cos^{-1} 0 = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \therefore t_0 = \frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}$$

وهو المطلوب.

تطبيق على الحركة الخطية: الحركة في وسط مقاوم :

هي نوع من أنواع الحركة الخطية يتحرك فيها الجسم في وسط مادي يقاوم حركته فإذا تحرك جسم في خط رأسي إلى أسفل في وسط مادي يقاوم حركته بقوة مقاومة R (وهي دائماً ضد الحركة). فإن معادلة حركة الجسم هي:

$$a = g - R$$

حيث : R قوة المقاومة للحركة ، g عجلة الجاذبية ، a عجلة الحركة (العجلة التي يتحرك بها الجسم)

المقاومة R :

وجد عملياً أن R تتناسب مع سرعة الجسم أو مع مربعها وبوجه عام فإن :

$$R \propto v^n, n=1,2,\dots$$

$$\therefore \boxed{R = kv^n} \quad , \text{ ثابت } k$$

أمثلة محلولة

مثال (١) : المقاومة تتناسب مع السرعة

$$R \propto V \rightarrow R = kv$$

وكمثال لهذه الحالة: حركة قطرات المطر (مع ثبوت كتلتها أثناء الحركة)

المثال : قطرة مطر تتحرك رأسياً إلى أسفل من السكون تحت تأثير الجاذبية

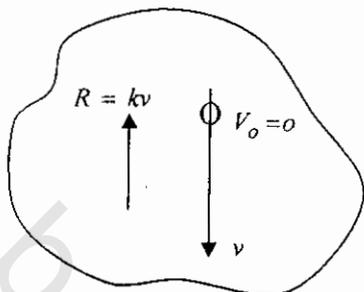
الأرضية وسط سحابة ساكنة تقاوم حركة القطرة بمقاومة تتناسب مع سرعة

القطرة (v) . المطلوب :

(١) إيجاد سرعة القطرة بعد زمن معين t .

(٢) إيجاد المسافة (x) المقطوعة بعد هذا الزمن .

(٣) إيجاد العلاقة بين السرعة v والمسافة المقطوعة x .



معادلة حركة قطرة المطر:

إذا كانت a هي عجلة الحركة (العجلة التي تتحرك بها القطرة)

$$\therefore a = g - R = g - kv \dots\dots\dots(1)$$

ولإيجاد العلاقة بين v, t نضع $a = \frac{dv}{dt}$ في (1):

$$\therefore \frac{dv}{dt} = g - kv = k \left(\frac{g}{k} - v \right) = k(\lambda - v) \quad \left| \quad \frac{g}{k} = \lambda \right.$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int -\frac{dv}{\lambda - v} = -k \int dt \quad \left| \quad \int \frac{dx}{a+x} = \ln(a+x) \right.$$

$$\therefore \ln(\lambda - v) = -kt + C_1 \dots\dots\dots(2)$$

إيجاد C_1 في البداية: $t = 0, v = 0$

$$\therefore C_1 = \ln \lambda$$

$$\ln(\lambda - v) = -kt + \ln \lambda$$

بالتعويض في (2):

$$\therefore \ln \frac{\lambda - v}{\lambda} = -kt \quad \therefore \frac{\lambda - v}{\lambda} = e^{-kt}$$

$$\therefore 1 - \frac{v}{\lambda} = e^{-kt} \longrightarrow \frac{v}{\lambda} = 1 - e^{-kt} \quad \therefore v = \lambda(1 - e^{-kt})$$

وهي العلاقة بين v, t

ولإيجاد العلاقة بين x, t نضع $v = \frac{dx}{dt}$ في علاقة v

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \lambda(1 - e^{-kt})$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int dx = \lambda \int (1 - e^{-kt}) dt \quad \therefore x = \lambda \left[t + \frac{e^{-kt}}{k} \right] + C_2 \quad \dots \dots \dots (3)$$

إيجاد C_2 :

$$C_2 = -\frac{\lambda}{k} \quad \leftarrow \quad x = 0, \quad t = 0 \quad \text{في البداية}$$

بالتعويض في (3) :

$$\therefore x = \lambda \left[t + \frac{e^{-kt}}{k} \right] - \frac{\lambda}{k} = \lambda \left[t - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} e^{-kt} \right] = \lambda \left[t - \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}) \right]$$

وهي العلاقة بين x, t .

ولإيجاد العلاقة بين x, v نضع $a = v \frac{dv}{dx}$ في معادلة العجلة (1) :

$$\therefore v \frac{dv}{dx} = k(\lambda - v)$$

$$\int \frac{-v dv}{\lambda - v} = -k \int dx \quad \text{بفصل المتغيرات والتكامل:}$$

$$\therefore \int \frac{\lambda - v - \lambda}{\lambda - v} dv = -kx + C_3 \quad \therefore \int \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda - v} \right] dv = -kx + C_3$$

$$\therefore v + \lambda \ln(\lambda - v) = -kx + C_3 \quad \left| \quad \int \frac{dx}{a-x} = -\ln(a-x) \right.$$

إيجاد C_3 : في البداية : $x = 0, \quad v = 0$

$$\therefore C_3 = \lambda \ln \lambda$$

∴ $v + \lambda \ln(\lambda - v) = -kx + \lambda \ln \lambda$ بالتعويض عن C_3

من هذه العلاقة يمكن إيجاد v بدلالة x أو x بدلالة v فمثلاً

$$kx = \lambda \ln \lambda - \lambda \ln(\lambda - v) - v = \lambda \ln \frac{\lambda}{\lambda - v} - v$$

$$\therefore x = \frac{1}{k} \left[\lambda \ln \frac{\lambda}{\lambda - v} - v \right]$$

ويمكن كذلك إيجاد v بدلالة x .

مثال (٢): المقاومة تتناسب مع مربع السرعة $R \propto v^2 \rightarrow R = kv^2$

وكمثال لهذه الحالة : كرة معدنية تتحرك رأسياً إلى أسفل من السكون داخل كوب

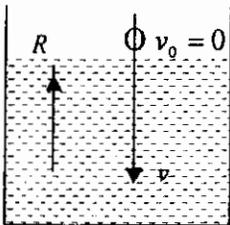
به سائل لزج (الجليسر مثلاً) بحيث كان السائل يقاوم حركة الكرة بمقاومة R

تتناسب مع مربع سرعة الكرة v داخل السائل. المطلوب:

(١) إيجاد سرعة الكرة بعد أي زمن t .

(٢) إيجاد المسافة x التي تقطعها الكرة بعد هذا الزمن.

(٣) العلاقة بين السرعة v والمسافة المقطوعة x .



الحل :

معادلة حركة الكرة :

إذا كانت a هي عجلة الكرة المتحركة فإن:

$$\therefore a = g - R = g - kv^2 = k \left(\frac{g}{k} - v^2 \right) \quad \left| \frac{g}{k} = \lambda^2 \right.$$

$$= k (\lambda^2 - v^2) \dots \dots \dots (1)$$

العلاقة بين v, t :

$$\therefore \frac{dv}{dt} = k(\lambda^2 - v^2)$$

نضع $a = \frac{dv}{dt}$ في (١) :

$$\int \frac{dv}{\lambda^2 - v^2} = k \int dt$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a}$$

ومن جدول التكاملات القياسية :

$$\therefore \frac{1}{\lambda} \tanh^{-1} \frac{v}{\lambda} = kt + C_1$$

ولإيجاد C_1 : في البداية: $v = 0$, $t = 0 \leftarrow c_1 = 0$

حيث $\tanh^{-1} 0 = 0$

$$\frac{1}{\lambda} \tanh^{-1} \frac{v}{\lambda} = kt$$

وبالتعويض عن C_1 :

$$\therefore \tanh^{-1} \frac{v}{\lambda} = \lambda kt \therefore \frac{v}{\lambda} = \tanh \lambda kt \therefore v = \lambda \tanh \lambda kt$$

وهي العلاقة المطلوبة.

العلاقة بين x, t نضع $v = \frac{dx}{dt}$ في علاقة v :

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \lambda \tanh \lambda kt$$

$$\int dx = \lambda \int \tanh \lambda kt dt$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln(\cosh ax)$$

ولكن: من جدول التكاملات القياسية

$$\therefore x = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda k} \ln[\cosh \lambda kt] + C_2$$

$$= \frac{1}{k} \ln[\cosh \lambda kt] + C_2 \dots \dots \dots (٢)$$

ولإيجاد C_2 : في البداية: $x = 0$, $t = 0$

$$0 = \frac{1}{k} \ln[\cosh 0] + C_2 = \frac{1}{k} \ln 1 + C_2 = C_2 \longrightarrow C_2 = 0$$

بالتعويض في (٢) :

$$\therefore x = \frac{l}{k} \ln [\cosh \lambda kt]$$

وهي العلاقة بين x, t

العلاقة بين v, x

نضع $a = v \frac{dv}{dx}$ في (١)

$$v \frac{dv}{dx} = k (\lambda^2 - v^2) \quad \left| \quad \lambda^2 = \frac{g}{k} \right.$$

$$\int \frac{-2v dv}{\lambda^2 - v^2} = -2k \int dx \quad \text{بفصل المتغيرات والتكامل:}$$

[ضربنا الطرفين في (-2) لكي نحصل على كسر بسطه يساوي تفاضل مقامه]

$$\therefore \ln(\lambda^2 - v^2) = -2kx + C_3 \dots\dots\dots (٣)$$

لإيجاد C_3 :

في البداية: $v = 0$, $x = 0$

$$\therefore C_3 = \ln \lambda^2$$

$$\ln(\lambda^2 - v^2) = -2kx + \ln \lambda^2 \quad \text{وبالتعويض في (٣):}$$

ومن هذه العلاقة يمكن إيجاد v بدلالة x أو x بدلالة v .

فمثلاً:

$$\ln \frac{\lambda^2 - v^2}{\lambda^2} = -2kx \quad \therefore \frac{\lambda^2 - v^2}{\lambda^2} = e^{-2kx} \quad \therefore 1 - \frac{v^2}{\lambda^2} = e^{-2kx}$$

$$\therefore \frac{v^2}{\lambda^2} = 1 - e^{-2kx} \quad \therefore v^2 = \lambda^2 (1 - e^{-2kx}) \quad \therefore v = \lambda \sqrt{1 - e^{-2kx}}$$

وهو المطلوب ثالثاً.

مسائل على الباب الأول

(1) يتعين موضع جسيم يتحرك على خط مستقيم بالعلاقة $x = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + \gamma$

حيث α, β, γ ثوابت، أوجد سرعته v وعجلته a ثم أثبت :

$$.v^2 = \beta^2 + 2\alpha(x - \gamma)$$

(2) يتحرك جسيم تحت تأثير عجلة ترتبط ببعد الجسيم عن نقطة ثابتة بالعلاقة

$\alpha = x + 2$ فإذا بدأ الجسيم الحركة بسرعة تساوي 2 وحدة ، فأثبت أن
 العلاقة بين المسافة والزمن هي :

$$x = 2(e^t - 1)$$

حيث e هي أساس اللوغرثمات النابرية.

(3) إذا كانت العلاقة بين السرعة والمسافة لجسيم متحرك في خط مستقيم

تتبع العلاقة $v = v_0 e^{-kx}$ حيث k ثابت ، v_0 هي السرعة الابتدائية
 للجسيم المتحرك ، أوجد كلاً من المسافة والسرعة والعجلة بدلالة الزمن.

(4) بدأ جسيم حركته من السكون من النقطة $p_1(\ell, 0)$ حيث $\ell > 0$ نحو

نقطة الأصل O بعجلة تتجه دائماً نحو O ويتناسب مقدارها عكسياً مع
 مكعب البعد عن O ، فإذا كان مقدار العجلة على بعد 1 cm من نقطة
 الأصل هو n^2 فأوجد سرعة الجسيم والزمن الذي يأخذه حتى يصل إلى
 النقطة $p_2(b, 0)$ حيث $\ell > b > 0$.

(5) يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة مقدارها $\left(\frac{k}{x^3}\right)$ حيث k ثابت ، x

هو بعد الجسيم عن نقطة الأصل عند أي لحظة. فإذا بدأ الجسيم الحركة
 من السكون من على بعد ℓ من O فأثبت أن الجسيم يصل إلى O بعد
 زمن قدره $\frac{\ell^2}{\sqrt{k}}$.

(٦) يتحرك جسيم في خط مستقيم من السكون من نقطة تبعد مسافة l عن مركز طارد O . فإذا كان الجسيم يتحرك بعجلة يتناسب مقدارها عكسياً مع مربع المسافة $\left(\alpha = \frac{k}{x^2}\right)$ ، حيث k ثابت، أوجد السرعة عند النقطة التي تبعد مسافة x عن O وأثبت أن الزمن اللازم للوصول إلى تلك النقطة هو:

$$t = \sqrt{\frac{l}{2k}} \left[\sqrt{x(x-l)} + l \cdot \ln \left(\sqrt{\frac{x}{l}} + \sqrt{\frac{x}{l} - 1} \right) \right]$$

(٧) يتحرك جسيم في خط مستقيم Ox بعجلة تقصيرية $\alpha e^{\beta v}$ حيث v السرعة عند أي لحظة أثناء الحركة، α, β ثابتان، فإذا بدأ الجسيم الحركة من O بسرعة v_0 فأوجد المسافة والزمن اللذان يتوقف عندهما الجسيم عن الحركة.

(٨) يتحرك جسيم في خط مستقيم Ox بعجلة تتجه دائماً نحو الأصل ومقدارها $a = \frac{\mu^2}{x^3}$ حيث μ ثابت، أوجد سرعة الجسيم والزمن الذي يأخذه حتى يصل إلى نقطة B التي تبعد مسافة l عن O ، إذا علمت أن الجسيم بدأ حركته من السكون عند نقطة A التي تبعد مسافة k عن O حيث $k > l > 0$.

(٩) قذفت نقطة مادية رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية v_0 في وسط تتناسب مقاومته مع مربع السرعة، أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه النقطة المادية وزمن الوصول إلى هذا الارتفاع.

$$(10) \quad v_0 = \sqrt{\frac{3g}{k}} \text{ قذفت نقطة مادية كتلتها } m \text{ رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية}$$

في وسط تقدر مقاومته بالمقدار (kmv^2) حيث k ثابت، v سرعة النقطة المادية حينئذ . أثبت أن أقصى ارتفاع تصل إليه النقطة المادية هو $(\frac{1}{k} \ln 2)$ ، وإذا بدأت النقطة المادية في الهبوط بعد ذلك فأثبت أنها تصل إلى نقطة القذف بسرعة تساوي نصف سرعتها الابتدائية.