الباب الرابع

حركة الجسم المتماسك

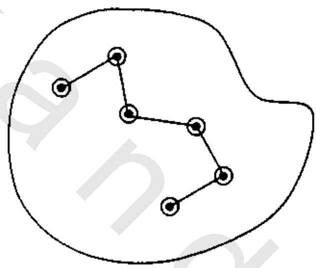
(ديناميكا الجسم المتماسك أو الجاسئ)

الباب الرابع

حركة الجسم المتماسك

الديناميكا المستوية للجسم المتماسك

<u>تعريف الجسم المتماسك (أو الجاسئ):</u> يعرف الجسم المتماسك بأنه الجسم المكون من عدد كبير جداً من الجسيمات المترابطة مع بعضها ، بحيث أن المسافة بين أي جسيمين منها تكون ثابتة ولا تتأثر بأي مؤثر خارجي.



<u>الحركة المستوية للجسم المتماسك :</u> يقال أن الجسم المتماسك يتحرك حركة مستوية إذا كانت جميع نقاطه تتحرك في مستويات متوازية.

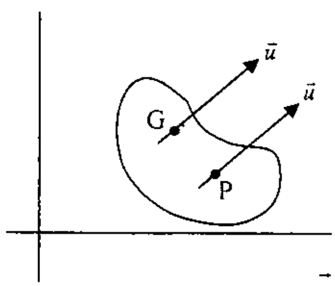
<u>أنواع الحركة المستوية :</u>

(١) حركة انتقالية (خطية) .

(٢) حركة دورانية (زاوية).

(٣) حركة عامة (إنتقاليه + دورانية).

أولاً: <u>الحركة الانتقالية</u> :



وفيها نعتبر أن كتلة الجسم مركزه عند مركز ثقله G وأن G تتحرك بسرعة الجسم $\bar{u}$ وأي نقطة في الجسم (p) تتحرك أيضاً بنفس السرعة $\bar{u}$.

معادلات الحركة الانتقالية: إذا أثرت مجموعة من القوى الخارجية على الجسم فإن معادلة الحركة الانتقالية تكون:

المجموع الجبري للقوى الخارجية = معدل التغير في كمية الحركة الخطية

كمية الحركة الخطية:

$$\vec{P} = M \vec{u}$$

حيث M كتلة الجسم ؛ $\vec{u}$ سرعته

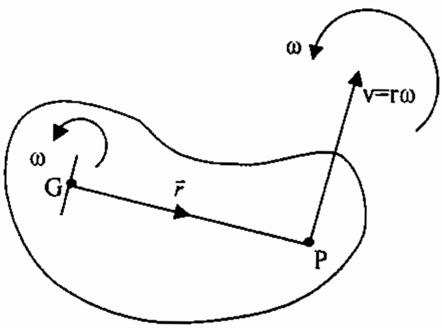
وبذلك تأخذ معادلة الحركة صورة:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{\vec{P}} = M\dot{\vec{u}}$$

طاقة الحركة الانتقالية (الخطية):

$$T = \frac{1}{2} M u^2$$

ثانياً: الحركة الدورانية :



وفيها يدور الجسم حول مركز ثقله أو حول محور ثابت يمر بمركز الثقل بسرعة زاوية ω. سرعة النقطة p في الجسم :

مقداراً $v = \omega r$

إتجاهاً $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

وتكون $\vec{v}$ عمودية على $\vec{r}$ (متجه موضع p بالنسبة إلى G) .

معادلات الحركة الدورانية: المجموع الجبري لعزوم القوى حول G = معدل التغير في كمية الحركة الزاوية

<u>كمية الحركة الزاوية (الدورانية) :</u> تعرف بأنها عزم كمية الحركة الخطية ، ومقدارها لأحد الجسيمات :

$$g = pr = (mv)r$$
$$= m(\omega r)r = m\omega r^2$$

حيث m هي كتلة أحد الجسيمات المكونة للجسم كله (كتلة النقطة p)

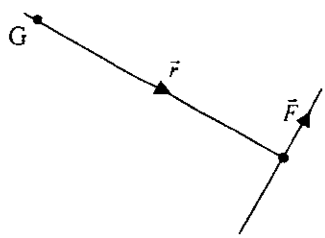
<u>كمية الحركة الزاوية الكلية للجسم:</u>

$$G = \sum g = \sum pr = \sum m\omega r^2$$
$$= \omega \underbrace{\sum mr^2} = \omega \underbrace{I_G}$$

حيث $I_G = \sum mr^2$ تعرف بعزم القصور الذاتي (أو عزم الكتلة) للجسم حول المحور المار بـ G.

<u>عزم القوة</u> : يعرف متجه عزم القوة $\vec{F}$ حول G بأنه المتجه : $\overline{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

حيث $\vec{r}$ هي متجه موضع أي نقطة على خط عمل القوة بالنسبة إلى G



<u>الصورة الرياضية لمعادلة الحركة الدورانية:</u>

إذا كانت $\vec{G}$ هي متجه كمية الحركة الزاوية للجسم فإن معادلة الحركة الدورانية تكون :

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{G}}{dt} = \dot{\vec{G}} \qquad \therefore \sum \vec{r} \wedge \vec{F} = \dot{\vec{G}}$$

<u>مقداراً</u> : فإن:

$$G = I_G w = I_G \dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \therefore \dot{G} = I_G \ddot{\theta}$$
$$\therefore \sum M = \dot{G} = I_G \ddot{\theta}$$

طاقة الحركة الدورانية:

$$T=\sum\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\sum mv^2$$
$$=\frac{1}{2}\sum m(\omega r)^2=\frac{1}{2}\omega^2\underbrace{\sum mr^2}=\frac{1}{2}\omega^2 I_G$$

حيث $I_G=\sum mr^2$

$$\therefore T=\frac{1}{2}I_G\omega^2=\frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$$

مقارنة بين الحركة الانتقالية والحركة الدورانية :

الحركة الإنتقالية	الحركة الدورانية
السرعة: $\vec{u}$	السرعة: $\vec{\omega}$
مقداراً: u	مقداراً: $\omega=\dot{\theta}$
الكتلة: $M=\sum m$	عزم القصور الذاتي: $I_G=\sum mr^2$
الطاقة: $\frac{1}{2}Mu^2$	الطاقة: $\frac{1}{2}I_G\omega^2$
كمية الحركة: $p=Mu$	كمية الحركة: $G=I_G\omega$
معادلة الحركة: $\sum F=\dot{p}=M\dot{u}$	معادلة الحركة: $\sum M=\dot{G}=I_G\dot{\omega}$

ثالثاً: <u>الحركة العامة</u>: هي مجموع حركتين:

(١) الحركة الإنتقالية لمركز الثقل $(\vec{u})$

(٢) الحركة الدورانية حول مركز الثقل $(\vec{\omega}\wedge\vec{r})$

$$\vec{V}=\vec{u}+\vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

الطاقة الكلية للحركة = الطاقة الإنتقالية + الطاقة الدورانية

$$\therefore T=\frac{1}{2}Mu^2+\frac{1}{2}I_G\omega^2$$

ملاحظات هامة في حل المسائل:

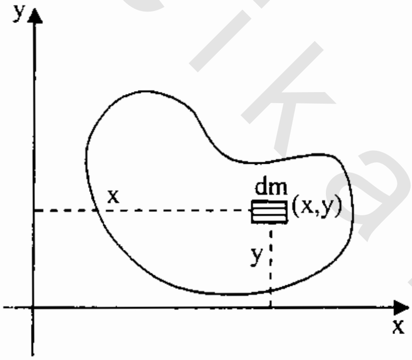
(١) عند حساب المجموع الجبري للعزوم $\left(\sum M\right)$ يراعى ما يلي:

(i) العزم موجب ⊕ إذا كان الجسم يتحرك في اتجاه تزايد θ .

(ii) العزم سالب ⊖ إذا كان الجسم يتحرك في اتجاه تناقص θ .

(٢) عزم القصور الذاتي $\left(I_G\right)$ هو كميه هامة تظهر في دراستنا لحركة الجسم المتماسك (الجاسئ) ولذلك يجب دراسته بشئ من التفصيل.

حساب عزم القصور الذاتي :



لحساب عزم القصور الذاتي لأي جسم نقسم هذا الجسم إلى عدد كبير جداً من العناصر كتلة كل عنصر منها dm وإحداثيات مركز ثقله (x, y) ، ويكون لدينا حالتان:

عزم القصور الذاتي للعنصر

حول محور x

$$dI_x = (dm)\cdot y^2$$

حيث y هي بعد العنصر عن محور x

للجسم كله:

$$I_x = \int dI_x = \int dm \cdot y^2$$

عزم القصور الذاتي للعنصر

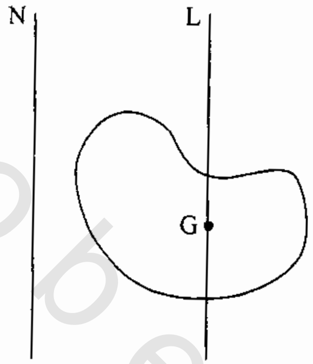
حول محور y

$$dI_y = (dm)\cdot x^2$$

حيث x هي بعد العنصر عن محور y

للجسم كله:

$$I_y = \int dI_y = \int dm \cdot x^2$$



نظرية المحاور المتوازية (بدون برهان) :

إذا كان لدينا محوران متوازيان L, N

والمسافة بينهما r وكان المحور L

يمر بمركز ثقل الجسم المتماسك G

فإن نظرية المحاور المتوازية تنص على الآتي:

" عزم القصور الذاتي حول N = عزم القصور الذاتي حول $L + Mr^2$ "

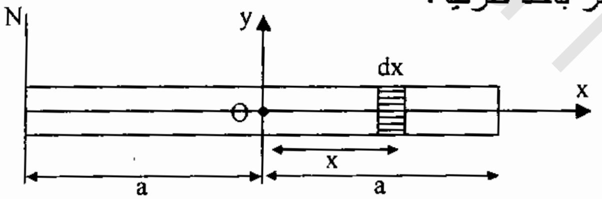
حيث M هي كتلة الجسم .

رياضياً: $\quad \mathrm{I}_N = \mathrm{I}_G + M\ r^2$

أمثلة محلولة:

مثال(١): أحسب عزم القصور الذاتي لقضيب منتظم طوله $2a$ حول محور عمودي عليه ويمر بمنتصفه. ومن ذلك أوجد عزم القصور الذاتي للقضيب حول محور عمودي عليه ويمر بأحد طرفيه.

الحل:



نأخذ محور y هو المحور العمودي على القضيب ويمر بمنتصفه فيكون المطلوب هو إيجاد I_y ، ولذلك نأخذ عنصر طوله dx يبعد مسافة x عن محور y.

فإذا كانت λ هي كتلة وحدة الأطوال من العنصر (الكثافة الطولية) فإن كتلة العنصر تكون: $\quad dm = \lambda \cdot dx$

عزم القصور الذاتي للعنصر حول محور y :

$$d\mathrm{I}_y = dm \cdot x^2 = (\lambda dx) \cdot x^2 = \lambda x^2 dx$$

∴عزم القصور الذاتي للقضيب كله (حول محور y)

$$I_y = \int \lambda x^2 dx = \lambda \int_{-a}^{a} x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{\lambda}{3}\left[a^3 - (-a)^3\right]$$

$$= \frac{\lambda}{3}\left[2a^3\right] = \frac{2\lambda}{3}a^3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

ولكن: كتلة القضيب كله: $M = (2a)\cdot(\lambda) \longrightarrow \lambda = \frac{M}{2a}$

بالتعويض في (١) :

$$I_y = \frac{2}{3}\left(\frac{M}{2a}\right)a^3 = \frac{1}{3}Ma^2$$

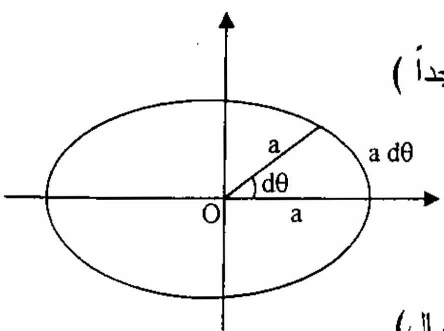
ولإيجاد عزم القصور الذاتي حول المحور N الذي يمر بأحد طرفي القضيب عمودياً عليه (I_N) :

نستخدم نظرية المحاور المتوازية:

$$I_N = I_y + Ma^2 = \frac{1}{3}Ma^2 + Ma^2 = \frac{4}{3}Ma^2$$

<u>مثال (٢) :</u> أوجد عزم القصور الذاتي لحلقة دائرية منتظمة نصف قطرها a حول محور مار بمركزها وعمودي على مستويها.

<u>الحل :</u>



نأخذ عنصر على شكل قوس (طول صغير جداً) على محيط الحلقة.

طول العنصر: $\ell = a\,d\theta$

كتلة العنصر: $dm = \lambda \cdot \ell$

حيث λ هي الكثافة الطولية (كتلة وحدة الأطوال)

عزم القصور الذاتي للعنصر حول محور y : $dI_y = dm \cdot a^2$

عزم القصور الذاتي للحلقة حول محور y :

$$I_y = \int dm \cdot a^2 = \int \lambda \ell \cdot a^2 = \lambda \int a d\theta \cdot a^2$$

$$= \lambda a^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \lambda a^3 [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi \lambda a^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

ولكن: كتلة الحلقة: $M = 2\pi a \cdot \lambda \qquad \therefore \quad \lambda = \dfrac{M}{2\pi a}$

بالتعويض في (١) : $I_y = 2\pi \left(\dfrac{M}{2\pi a}\right) a^3 = Ma^2$

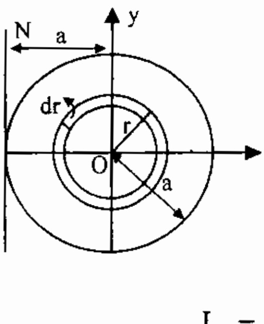
وهو المطلوب.

<u>مثال (٣) :</u> أوجد عزم القصور الذاتي لقرص دائري منتظم حول محور مار بمركزه وعمودي على مستويه ، ومن ذلك أوجد عزم القصور الذاتي للقرص حول مماس له عمودي على مستويه أيضاً.

<u>الحل:</u> نقسم القرص إلى عناصر على شكل حلقات دائرية متحدة المركز مع القرص. ولنأخذ إحدى هذه الحلقات ، وليكن نصف قطرها r وسمكها dr ،

فتكون مساحتها : dS = المحيط × السمك = $2\pi r \cdot dr$

وإذا كانت ρ تمثل الكثافة المساحية (كتلة وحدة المساحات)



فتكون كتلة العنصر: $dm = dS \cdot \rho = 2\pi r \rho dr$

عزم القصور الذاتي للعنصر حول محور y :

$$dI_y = dm \cdot r^2 = 2\pi \rho r^3 dr$$

عزم القصور الذاتي للقرص حول محور y :

$$I_y = \int dI_y = 2\pi\rho \int_0^a r^3 dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi\rho a^4 \ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

ولكن : كتلة القرص : M = المساحة × الكثافة المساحية

$$\therefore M = \pi a^2 \cdot \rho \longrightarrow \rho = \frac{M}{\pi a^2}$$

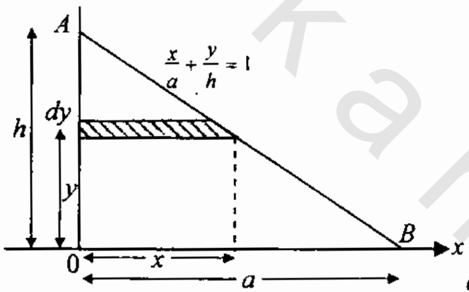
وبالتعويض في (١) :
$$I_y = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{M}{\pi a^2}\right)a^4 = \frac{1}{2}Ma^2 \longrightarrow I_y = \frac{1}{2}Ma^2$$

ويكون عزم القصور الذاتي للقرص حول المماس N (من نظرية المحاور المتوازية)

$$I_N = I_y + Ma^2 = \frac{1}{2}Ma^2 + Ma^2 = \frac{3}{2}Ma^2$$

وهو المطلوب .

مثال(٤): أوجد عزم القصور الذاتي لشريحة منتظمة كتلتها m على شكل مثلث قائم الزاوية طول ضلعي القائمة فيه a,h وذلك حول أحد ضلعي القائمة.



الحل: باختبار عنصر من الشريحة المثلثية على شكل قضيب أفقي تكون كتلته: $dm = \sigma(x\,dy)$

حيث σ كثافة مادة الشريحة.

وعزم القصور الذاتي له: $dI_x = y^2\,dm$

وبالتالي فإن عزم القصور الذاتي للشريحة كلها:

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h y^2(\sigma x\,dy) = \sigma\int_0^h y^2\,x\,dy$$

ومن معادلة الخط المستقيم AB : $\frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1$

$$\therefore x = a\left(\frac{h-y}{h}\right)$$

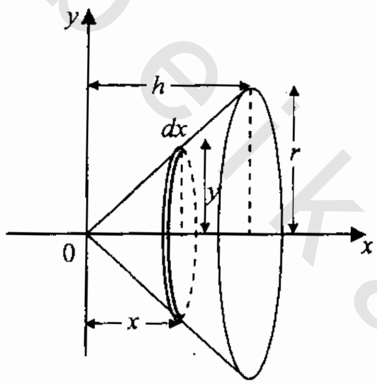
$$\therefore I_x = \sigma\frac{a}{h}\int_0^h y^2(h-y)\,dy = \sigma\frac{a}{h}\left[\frac{1}{3}hy^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^h = \frac{1}{12}\sigma a h^3$$

وحيث أن: كتلة المثلث: $m = \sigma\cdot[\frac{1}{2}a\,h]$

[مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع]

$$\therefore \sigma = \frac{2m}{ah} \rightarrow I_x = \frac{1}{12}(\frac{2m}{ah})ah^3 = \frac{1}{6}mh^2$$

أي أن عزم القصور الذاتي لشريحة منتظمة على شكل مثلث قائم حول محور ينطبق على أحد ضلعي القائمة يساوي $\frac{1}{6}$ كتلة المثلث مضروباً في مربع ارتفاع المثلث على هذا المحور.



مثال(٥): أوجد عزم القصور الذاتي لمخروط دائري قائم حول محوره وذلك في الحالتين:

(١) إذا كان المخروط أجوف.

(٢) إذا كان المخروط مصمت.

الحل: نعتبر الرسم الموضح وليكن r نصف قطر قاعدة المخروط، h ارتفاعه، m كتلته.

الحالة الأولى: المخروط الأجوف:

نأخذ العنصر على شكل حلقة دائرية على بعد x من 0 وليكن سمك الحلقة dx ونصف قطرها y ، فتكون كتلتها : $dm = \sigma[2\pi y \cdot dx]$

حيث: $\frac{y}{x} = \frac{r}{h}$ (من هندسة الشكل)

$$\therefore y = \frac{r}{h}x$$

$$\therefore dm = 2\pi\sigma(\frac{r}{h})x\,dx$$

وعزم القصور الذاتي للعنصر (الحلقة):

$$d\,I_x = y^2\,dm = (\frac{rx}{h})^2\,(2\pi\sigma\frac{rx}{h}dx) = \frac{2\pi\sigma r^3}{h^3}x^3dx$$

ويكون عزم القصور الذاتي للمخروط الأجوف:

$$I_x = \int d\,I_x = \frac{2\pi\sigma r^3}{h^3}\int_0^h x^3dx = \frac{2\pi\sigma r^3}{h^3}\left[\frac{h^4}{4}\right] = \frac{1}{2}\pi\sigma r^3 h$$

ولكن كتلة المخروط الأجوف: $m = \sigma \cdot \frac{1}{2}(2\pi rh) =$

[مساحة سطح المخروط = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع]

$$\therefore \sigma = \frac{m}{\pi rh}$$

$$\therefore I_x = \frac{1}{2}\pi(\frac{m}{\pi rh})r^3 h = \frac{1}{2}mr^2$$

وهو المطلوب.

<u>**الحالة الثانية**</u>: <u>المخروط المصمت</u>:

نأخذ العنصر على شكل قرص على بعد x من 0 ونصف قطره y وسمكه dx فتكون كتلته:

$$dm = \sigma[\pi y^2 \cdot dx] = \sigma\pi(\frac{r}{h})^2 x^2\, dx$$

وعزم القصور الذاتي له:

$$dI_x = \frac{1}{2}y^2 dm = \frac{1}{2}(\frac{r}{h})^2 x^2\, dm$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{r^2}{h^2})x^2[\sigma\pi(\frac{r^2}{h^2})x^2\, dx] = \frac{1}{2}\sigma\pi(\frac{r^4}{h^4})x^4\, dx$$

وللمخروط ككل:

$$I_x = \int dI_x = \frac{1}{2}\sigma\pi(\frac{r^4}{h^4})\int_0^h x^4\, dx = \frac{1}{2}\sigma\pi(\frac{r^4}{h^4})[\frac{h^5}{5}] = \frac{1}{10}\sigma\pi hr^4$$

ولكن كتلة المخروط المصمت: $m = \sigma[\frac{1}{3}\pi r^2 h]$

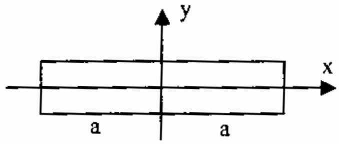
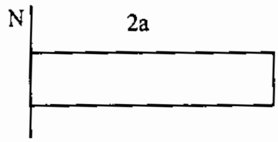
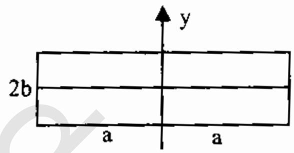
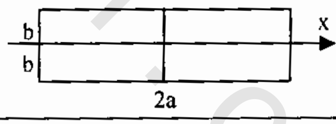
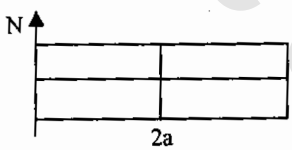
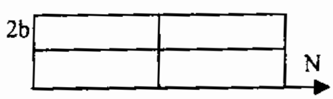
[حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع]

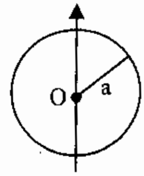
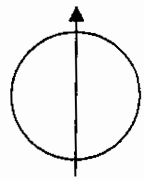
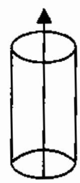
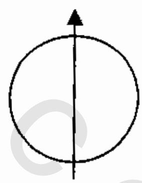
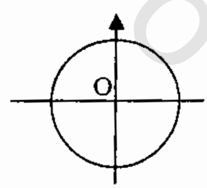
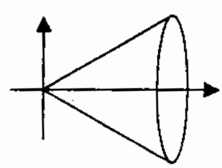
$$\therefore \sigma = \frac{3m}{\pi r^2 h} \quad \rightarrow \quad I_x = \frac{1}{10}(\frac{3m}{\pi r^2 h})\pi hr^4 = \frac{3}{10}mr^2$$

وهو المطلوب.

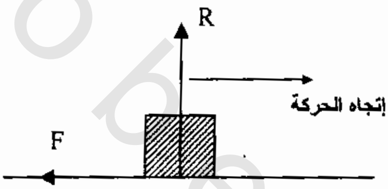
ملحوظة : في الجدول التالي نورد ملخصا لعزوم القصور الذاتي لأشكال مختلفة ، ويجد الطالب الاستنتاج الكامل لهذه العزوم في الأمثلة السابقة وفي المسائل في نهاية هذا الباب

ملخص لعزم القصور الذاتي للأشكال المختلفة :

(١)		قضيب حول محور عمودي عليه عند منتصفه	$I_Y = \frac{1}{3}ma^2$
(٢)		قضيب حول محور عمودي عليه عند احد طرفيه	$I_N = \frac{4}{3}ma^2$
(٣)		مستطيل حول محور موازي للضلع $2b$ ومار بالمركز	$I_Y = \frac{1}{3}ma^2$
(٤)		مستطيل حول محور موازي للضلع $2a$ ومار بالمركز	$I_X = \frac{1}{3}mb^2$
(٥)		مستطيل حول محور منطبق على الضلع $2b$ (المحور AD)	$I_N = \frac{4}{3}ma^2$
(٦)		مستطيل حول محور منطبق على الضلع $2a$ (المحور AB)	$I_N = \frac{4}{3}mb^2$

(٧)		حلقة حول محور مار بمركزها وعمودي على مستويها	$I = Ma^2$
(٨)		قرص حول محور مار بمركزه وعمودي على مستويه	$I = \frac{1}{2}Ma^2$
(٩)		قشرة أسطوانية (اسطوانة مفرغه) حول محورها	$I = Ma^2$
(١٠)		اسطوانة مصمته حول محورها	$I = \frac{1}{2}Ma^2$
(١١)		قشرة كروية (كرة مفرغه) حول قطر فيها	$I = \frac{2}{3}Ma^2$
(١٢)		كرة مصمته حول قطر فيها	$I = \frac{2}{5}ma^2$
(١٣)		مخروط أجوف حول محوره مخروط مصمت حول محوره	$I = \frac{1}{2}mr^2$ $I = \frac{3}{10}mr^2$

حركة جسم متماسك على مستوى خشن



إذا تحرك جسم على مستوى خشن فإنه

يحدث إحتكاك بين الجسم والمستوى .

ويكون لدينا قوتان:

(i) قوة الإحتكاك بين الجسم والمستوى (F)

(ii) رد فعل المستوى على الجسم (R)

وتكون أكبر قيمة (أو القيمة النهائية) لقوة الإحتكاك F مساوية لحاصل الضرب :

$$F = \mu R$$

حيث μ معامل يسمى معامل الإحتكاك بين الجسم والمستوى

ويكون لدينا حالتان

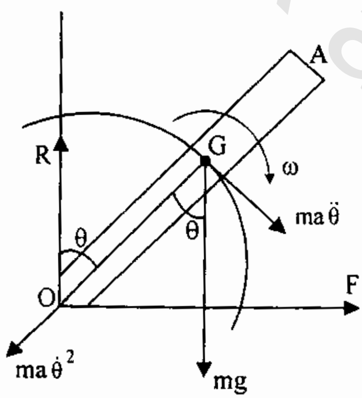
إذا وصلت قوة الإحتكاك لقيمتها العظمي يقال أن الجسم ينزلق علي المستوي. ∴ شرط الإنزلاق: $F = \mu R$	إذا لم تصل قوة الإحتكاك لقيمتها العظمي يقال أن الجسم يتدحرج علي المستوي. ∴ شرط التدحرج: $F < \mu R$

أمثلة محلولة :

مثال(١): قضيب طوله $2a$ وكتلته m يرتكز على مستوى خشن بأحد طرفيه. ترك القضيب ليتحرك من السكون بحيث كان الطرف المرتكز علـــى الأرض (المستوى الخشن) ثابتاً أثناء الحركة.

فإذا كان القضيب يدور خلال زاوية θ مع الرأس فأثبت أن القضيب يتـــرك المستوى عندما $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ، وأن القضيب ينزلق عندما يكون معامـــل الإحتكاك بينه وبين المستوى هو:

$$\mu = \frac{3\sin\theta(3\cos\theta - 2)}{(1-3\cos\theta)^2}$$



الحل:إذا دار القضيب خلال الزاوية θ فإن مركز ثقله G يتحرك في دائرة ، ويكون لدينا قوتان:

(i) قوة مركزية (نحو مركز الدائرة O)= $ma\dot{\theta}^2$

(ii) قوة عمودية عليها (في اتجاه المماس) = $ma\ddot{\theta}$

إضافة إلى:

(iii) قوة الاحتكاك F ، (iv) رد الفعل العمودي R ، (v) وزن القضيب mg

معادلات الحركة:

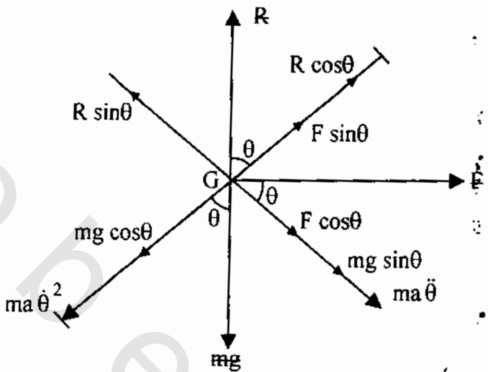
معادلة الحركة في اتجاه القضيب:

$$ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R\cos\theta - F\sin\theta \ldots.(١)$$

معادلة الحركة في الإتجاه العمودي:

$$ma\ddot{\theta} = mg\sin\theta - R\sin\theta + F\cos\theta \ldots.(٢)$$

القوى المؤثرة :



معادلة الحركة الدورانية:

نأخذ العزوم حول O (طرف القضيب)

$$I_O\ddot{\theta} = M_O \longrightarrow \frac{4}{3}ma^2 \cdot \ddot{\theta} = mg \cdot a\sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

حيث $a\sin\theta$ هو زراع العزم.

والآن: لإيجاد R,F : من (١) بالضرب في $\cos\theta$ ومن (٢) بالضرب في $\sin\theta$ ثم الجمع:

$$ma\dot{\theta}^2\cos\theta + ma\ddot{\theta}\sin\theta$$
$$= mg\cos^2\theta - R\cos^2\theta - F\sin\theta\cos\theta$$
$$+ mg\sin^2\theta - R\sin^2\theta + F\cos\theta\sin\theta = mg - R$$

$$\therefore ma\left(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right) = mg - R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

أيضاً من (١) بالضرب في $\sin\theta$ ومن (٢) بالضرب في $\cos\theta$ ثم الطرح:

$$ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\sin\theta$$
$$= mg\sin\theta\cos\theta - R\cos\theta\sin\theta + F\cos^2\theta$$
$$- mg\sin\theta\cos + R\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta = F$$

$$\therefore ma\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = F \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

ومن (٣) :

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{4}\frac{g}{a}\sin\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

وبالتكامل [بالضرب في $\dot{\theta}$ والتكامل بالنسبة إلى t] :

$$\int \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{3}{4}\frac{g}{a}\int \sin\theta\, d\theta \qquad \therefore \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{4}\frac{g}{a}\cos\theta + C$$

ولإيجاد C : في البداية: $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$

$$\therefore C = \frac{3}{4}\frac{g}{a} \qquad \therefore \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{4}\frac{g}{a}\cos\theta + \frac{3}{4}\frac{g}{a}$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{a}(1-\cos\theta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

بالتعويض من (٧) و (٦) في (٥) و (٤) نحصل على R, F كالآتي

$$F = ma\left[\cos\theta\cdot\frac{3}{4}\frac{g}{a}\sin\theta - \sin\theta\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{g}{a}(1-\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{3}{4}mg\left[\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta(1-\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{3}{4}mg\sin\theta(3\cos\theta - 2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٨)$$

$$R = mg\left[1 - \frac{a}{g}\left\{\sin\theta\cdot\frac{3}{4}\frac{g}{a}\sin\theta + \cos\theta\cdot\frac{3}{2}\frac{g}{a}(1-\cos\theta)\right\}\right]$$

$$= mg\left[1 - \left\{\frac{3}{4}\sin^2\theta - \frac{3}{2}\cos^2\theta + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right\}\right]$$

$$= \frac{mg}{4}\left[4 - 3\sin^2\theta + 6\cos^2\theta - 6\cos\theta\right]$$

$$= \frac{mg}{4}\left[4 - 3(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 9\cos^2\theta - 6\cos\theta\right]$$

$$= \frac{mg}{4}\left[1 + 9\cos^2\theta - 6\cos\theta\right]$$

$$= \frac{mg}{4}(1 - 3\cos\theta)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٩)$$

المطلوب الأول: متى يترك القضيب المستوى ؟

يترك القضيب المستوى عندما ينعدم رد الفعل بين المستوى والقضيب ، أي عندما $R = 0$.

فمن (٩) :
$$0=\frac{mg}{4}(1-3\cos\theta)^2$$
$$\therefore (1-3\cos\theta)^2=0 \rightarrow \therefore 1-3\cos\theta=0$$
$$\therefore \cos\theta=\frac{1}{3} \longrightarrow \theta=\cos^{-1}\frac{1}{3}$$

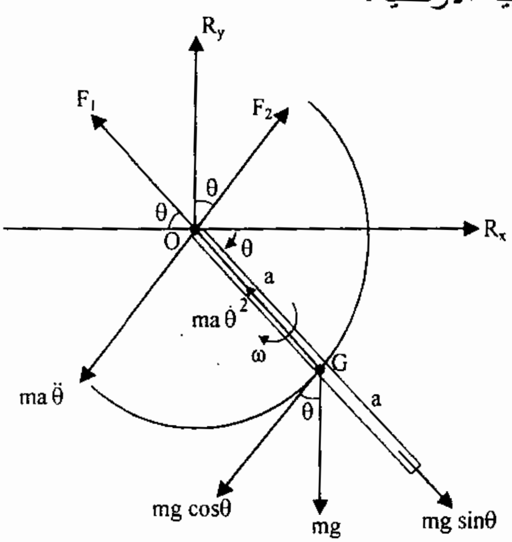
المطلوب الثاني: ينزلق القضيب (أو يتحرك حركة إنزلاقية) عندما يكون الإحتكاك في نهايته العظمى ، أي عندما يكون: $F=\mu R$.

وبالتعويض عن F,R :
$$\therefore \mu=\frac{F}{R}=\frac{3\sin\theta(3\cos\theta-2)}{(1-3\cos\theta)^2}$$

وهو المطلوب .

مثال (٢) : يدور قضيب منتظم كتلته m وطوله $2a$ في مستوى رأسي حول أحد طرفيه O . فإذا بدأ القضيب الحركة من السكون عندما كان أفقيا ، أثبت أن رد الفعل الأفقي عند نقطة التثبيت O يكون أكبر ما يمكن عندما يكون القضيب مائلاً على الأفقي بزاوية $\frac{\pi}{4}$ وأن رد الفعل الرأسي عندئذ يساوي $\left(\frac{11}{8}mg\right)$ حيث g عجلة الجاذبية الأرضية.

الحل:



القضيب يدور حول O في دائرة نصف قطرها a . ولأن الحركة تتم في دائرة فيكون لدينا قوتان:

(١) قوة مركزية في اتجاه المركز O وتساوي $ma\dot{\theta}^2$

(٢) قوة مماسية في الإتجاه العمودي وتساوي $ma\ddot{\theta}$

فإذا كانت F_1, F_2 هما مركبتا رد الفعل على طرفي القضيب عند O وذلك في اتجاه القضيب والاتجاه العمودي عليه.

<u>**معادلات الحركة:**</u> في اتجاه القضيب نحو المركز O :

$$ma\dot{\theta}^2 = F_1 - mg\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

في الإتجاه العمودي :

$$ma\ddot{\theta} = mg\cos\theta - F_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

معادلة الحركة الدورانية :

$$\mathrm{I}_O\ddot{\theta} = M_O$$

حيث : I_O عزم القصور الذاتي للقضيب حول O

$$\mathrm{I}_O = \frac{4}{3}ma^2$$

M_O هو عزم القوة (الوزن) حول O .

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} = mg\cdot a\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

حيث $(a\cos\theta)$ هو ذراع العزم .

$$\therefore \quad \ddot{\theta} = \frac{3g}{4a}\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

بتكامل (٤) بالنسبة إلى θ :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{4a}\sin\theta + C$$

<u>ولإيجاد</u> C : في البداية : $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$

$$\therefore C = 0$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}\sin\theta . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

<u>ولإيجاد مركبتي رد الفعل</u> F_1, F_2 : من (١) وبإستخدام (٥) :

$$F_1 = mg\sin\theta + ma\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta + ma\left(\frac{3g}{2a}\sin\theta\right)$$

$$= mg\sin\theta + \frac{3}{2}mg\sin\theta = \frac{5}{2}mg\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

ومن (٢) وبإستخدام (٤):

$$F_2 = mg\cos\theta - ma\ddot{\theta} = mg\cos\theta - ma\left(\frac{3g}{4a}\cos\theta\right)$$

$$= mg\cos\theta - \frac{3}{4}mg\cos\theta = \frac{1}{4}mg\cos\theta \quad \text{......................(٧)}$$

<u>ولإيجاد رد الفعل الأفقي</u> (R_x) والرأسي (R_y) :

من الشكل:

$$R_x = F_2\sin\theta - F_1\cos\theta \quad \text{......................(٨)}$$

$$R_y = F_2\cos\theta + F_1\sin\theta \quad \text{......................(٩)}$$

بالتعويض عن F_2 و F_1 من (٧) و (٦) نحصل على:

$$R_x = \left(\frac{1}{4}mg\cos\theta\right)\sin\theta - \left(\frac{5}{2}mg\sin\theta\right)\cos\theta = -\frac{9}{4}mg\sin\theta\cos\theta$$

$$= -\frac{9}{8}mg\underbrace{(2\sin\theta\cos\theta)} = -\frac{9}{8}mg\underbrace{\sin 2\theta} \quad \text{................(١٠)}$$

$$R_y = \left(\frac{1}{4}mg\cos\theta\right)\cos\theta + \left(\frac{5}{2}mg\sin\theta\right)\sin\theta = \frac{1}{4}mg\left(\cos^2\theta + 10\sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}mg\left(1 + 9\sin^2\theta\right) \quad \text{......................(١١)}$$

<u>المطلوب الأول :</u> من (١٠) : تكون R_x نهاية عظمي عندما $\sin 2\theta = 1$

أي عندما : $2\theta = \frac{\pi}{2}$ $\left[\sin\frac{\pi}{2} = 1\right]$

أي عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$

وهو المطلوب الأول.

<u>المطلوب الثاني:</u> إيجاد R_y في هذه الحالة (أي عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$)

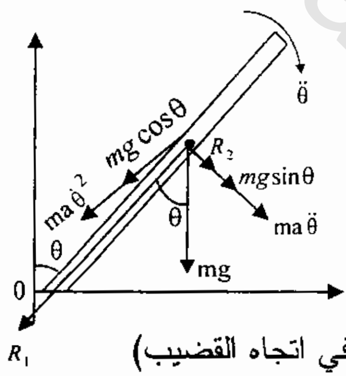
بالتعويض في (١١) :

$$\therefore R_y = \frac{1}{4}mg\left[1+9\sin^2\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{4}mg\left[1+9\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}mg\left[1+\frac{9}{2}\right] = \frac{1}{4}mg\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{11}{8}mg$$

وهو المطلوب الثاني .

مثـــال(٣): قضيب منتظم رفيع كتلته m وطوله $2a$ يمكنه الدوران في مستوى رأسي حول طرفه الثابت، فإذا تحرك القضيب من السكون عندما كان في وضع رأسي إلى أعلى، أوجد رد الفعل الكلي عند نقطة التعليق عندما يكون القضيب في وضع أفقي، وأثبت أن رد الفعل الكلي عند نقطة التعليق عندما يكون القضيب رأسياً إلى أسفل يساوي أربعة أمثال وزن القضيب.



الحل: نفرض أن القضيب دار زاوية θ

وأن رد الفعل عند نقطة الدوران (0) له مركبتان:

R_1 في اتجاه القضيب

R_2 في الاتجاه العمودي

معادلات الحركة الخطية:

(1) $ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + R_1$ (في اتجاه القضيب)

(2) $ma\ddot{\theta} = mg\sin\theta + R_2$ (في الاتجاه العمودي)

معادلة الحركة الدورانية: بأخذ العزوم حول نقطة الدوران 0 (حتى يتلاشى عزم رد الفعل حولها)

(3) $I_0\ddot{\theta} = mg\cdot a\sin\theta$

حيث I_0 عزم القصور الذاتي للقضيب بالنسبة لنقطة 0 (عند طرفه) وتساوي

$$I_0 = \frac{4}{3}ma^2$$

بالتعويض في (3):

$$\frac{4}{3} m a^2 \ddot{\theta} = mg\, a \sin\theta$$

$$\therefore \ddot{\theta} = \frac{3g}{4a}\sin\theta \qquad (4)$$

وبكتابة $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ وإجراء التكامل بالنسبة إلى θ:

$$\therefore \int \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{3g}{4a}\int \sin\theta$$

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{-3g}{4a}\cos\theta + c \qquad (5)$$

ولإيجاد c: في البداية: $\theta = 0$ ، $\dot{\theta} = 0$ (القضيب تحرك من السكون) وبذلك فإن:

$$c = \frac{3g}{4a}$$

وتصبح (5):

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{4a}\cos\theta + \frac{3g}{4a}$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a} - \frac{3g}{2a}\cos\theta = \frac{3g}{2a}(1-\cos\theta) \qquad (6)$$

وللحصول على مركبتي رد الفعل عند نقطة الدوران 0:

نعوض من (6),(4) في (2),(1) فنحصل على:

$$R_1 = ma\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$$

$$= ma\left[\frac{3g}{2a}(1-\cos\theta)\right] - mg\cos\theta = \frac{1}{2}mg(3-5\cos\theta) \qquad (7)$$

$$R_2 = ma\ddot{\theta} - mg\sin\theta$$

$$= ma\left[\frac{3g}{4a}\sin\theta)\right] - mg\sin\theta = \frac{1}{4}mg\sin\theta \qquad (8)$$

عندما يكون القضيب أفقياً: فإن: $\theta=\frac{\pi}{2}$ وبالتعويض في (8) ,(7) نحصل على:

$$R_1=\frac{3}{2}mg\ ,\quad R_2=\frac{1}{4}mg$$

ويكون رد الفعل الكلي في هذه الحالة:

$$R=\sqrt{R_1^2+R_2^2}=\frac{\sqrt{37}}{4}mg$$

عندما يكون القضيب رأسياً إلي أسفل: فـإن: $\theta=\pi$ وبـالتعويض فـي (8) ,(7) نحصل على:

$$R_1=\frac{1}{2}mg(3+5)=4mg$$

$$R_2=0$$

ويكون رد الفعل الكلي في هذه الحالة:

$$R=R_1=4mg$$

أي يساوي أربعة أمثال وزن القضيب، ولا يكون له مركبة أفقية.

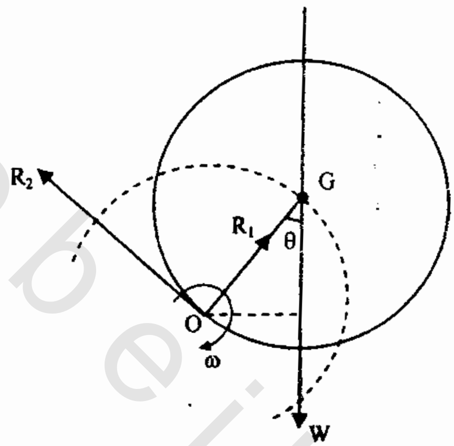
وهو المطلوب.

مثال(٤): قرص دائري يدور حول محور أفقي عمودي على مستويه ومار بنقطة O الواقعة على محيطه. فإذا بدأ القرص حركته من السكون عندما كان القطر المار بنقطة O رأسياً أعلاها ، اثبت أن ردي الفعل في إتجاهي نصف القطر المار بنقطة O والعمودي عليه هما:

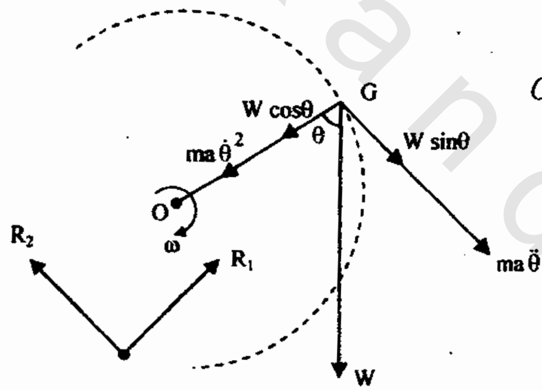
$$\frac{W}{3}(7\cos\theta-4)\ ,\quad \frac{W}{3}\sin\theta$$

حيث W وزن القرص ، θ الزاوية التي دارها القرص .

الحل:



يتحرك القرص حول نقطة O التي تقع على محيطه في دائرة نصف قطرها a وبفرض أن ردي الفعل عند نقطة الإرتكاز O هما R_2 و R_1 في إتجاهي نصف القطر والعمودي عليه .
وحيث أن الحركة تتم في دائرة مركزها O
∴ توجد لدينا قوتان:



(١) قوة مركزية في إتجاه المركز O وتساوي $ma\dot{\theta}^2$

(٢) قوة مماسية في الإتجاه العمودي وتساوي $ma\ddot{\theta}$

معادلات الحركة للقرص (كجسم متماسك):

معادلة الحركة في إتجاه المركز:

$$ma\dot{\theta}^2 = W\cos\theta - R_1 \quad \text{.........................(١)}$$

معادلة الحركة في الإتجاه العمودي:

$$ma\ddot{\theta} = W\sin\theta - R_2 \quad \text{.........................(٢)}$$

معادلة الحركة الدورانية :

$$I_O\ddot{\theta} = M_O \quad \text{.........................(٣)}$$

حيث: I_O عزم القصور الذاتي للقرص حول O أي حول المحور المار بنقطة O التي تقع على محيطه (أي حول مماس)

$$I_O = \frac{3}{2} ma^2$$

M_O هي عزم القوة W (الوزن)

$$M_O = W \cdot a\sin\theta$$

حيث $(a\sin\theta)$ هو ذراع العزم.

وتصبح (٣) :

$$\therefore \frac{3}{2} ma^2 \ddot{\theta} = W \cdot a\sin\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

من (٤) :

$$\therefore \quad \ddot{\theta} = \frac{2W}{3am}\sin\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

بتكامل (٤) بالنسبة إلى θ :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{2W}{3am}\cos\theta + C$$

<u>ولإيجاد</u> C : في البداية: $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$

$$0 = \frac{-2W}{3am} + C \longrightarrow C = \frac{2W}{3am}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{2W}{3am}\cos\theta + \frac{2W}{3am} = \frac{2W}{3am}(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{4W}{3am}(1-\cos\theta) \;\ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

<u>ولإيجاد ردي الفعل</u> R_1, R_2 :من (٢) و (١) وبإستخدام (٦) و (٥) نحصل على:

$$R_1 = W\cos\theta - ma\dot{\theta}^2 = W\cos\theta - ma\left[\frac{4W}{3am}(1-\cos\theta)\right]$$

$$= W\cos\theta - \frac{4}{3}W(1-\cos\theta) = W\cos\theta + \frac{4}{3}W\cos\theta - \frac{4}{3}W$$

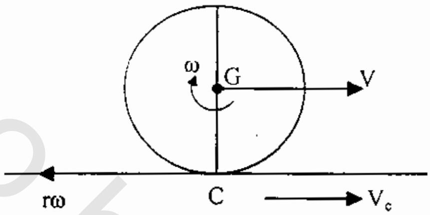
$$= \frac{7}{3}W\cos\theta - \frac{4}{3}W = \frac{W}{3}(7\cos\theta - 4) \;\ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

$$R_2 = W \sin\theta - ma\ddot{\theta} = W \sin\theta - ma\left[\frac{2W}{3am}\sin\theta\right]$$

$$= W \sin\theta - \frac{2}{3}W \sin\theta = \frac{W}{3}\sin\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٨)$$

وهو المطلوب .

<u>التدحرج والانزلاق :</u>



إذا كان لدينا كرة (أو قرصاً) يتحرك على مستوى أفقي وكانت السرعة الزاوية للكرة هي : $\omega = \dot{\theta}$

فتكون : سرعة نقطة التماس C بين الكرة والمستوى هي محصلة سرعتين :

(١) سرعة مركز الكرة $v_G = v$ في اتجاه الحركة الخطية

(٢) السرعة الناتجة عن الدوران : وهي سرعة مماسية قيمتها = $r\omega$ في إتجاه الدوران.

$$\therefore \; v_C = v - r\omega$$

ويكون لدينا حالتان :

(١) **<u>حالة الانزلاق</u>:** إذا كان الاحتكاك بين الكرة والمستوى في قيمته النهائية بحيث يكون لنقطة التماس سرعة نسبية معينه في بدء الحركة

∴ شرط الانزلاق هو:

(أ) قوة الإحتكاك $F = \mu R$

(ب) السرعة اللحظية لنقطة التماس في البداية $v_C \neq 0$

(٢) **<u>حالة التدحرج</u>:** إذا كان الاحتكاك بين الكرة والمستوى يعمل على حفظ نقطة التماس بينهما في حالة سكون لحظي وتكون قوة الاحتكاك أقل من قيمتها النهائية (μR)

∴ شرط التدحرج هو :

(أ) قوة الإحتكاك $F < \mu R$

(ب) السرعة اللحظية لنقطة التماس $v_C = 0$

ملحوظة:

(١) إذا بدأت الحركة إنزلاقية فإنها تستمر كذلك حتى تنعدم السرعة النسبية لنقطة التماس ، وفي هذه الحالة تتحول الحركة من إنزلاقية إلى:

(i) تدحرجية أو

(ii) إنزلاقية ولكن في عكس الإتجاه السابق

(٢) ولمعرفة كون الحركة التالية تدحرجية أو إنزلاقية في عكس الإتجاه نتبع الآتي:

أولاً: نفرض أن الحركة تدحرجية: ونكتب شرط إنعدام سرعة نقطة التماس ونحل معادلات الحركة فإذا وجدنا أن $F < \mu R$ فإن الفرض بأن الحركة تدحرجية يكون صحيحاً وتستمر الحركة تدحرجية حتى تصبح $F = \mu R$

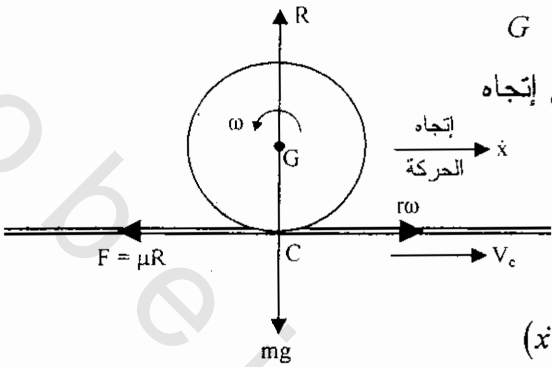
ثانياً: نفرض أن الحركة إنزلاقية في عكس الإتجاه السابق :

ونكتب $F = \mu R$ في معادلات الحركة ونحل هذه المعادلات فإذا وجدنا أن نقطة التماس لها سرعة نسبية في إتجاه عكس إتجاه الإحتكاك فإن الفرض بأن الحركة إنزلاقية يكون صحيحاً وتستمر الحركة إنزلاقية حتى تنعدم سرعة نقطة التماس.

أمثلة محلولة :

مثال (١) : قرص دائري يدور حول قطره وبسرعة زاوية ω في الإتجاه المضاد لعقربي الساعة. وضع على منضدة أفقية خشنة وترك ليتحرك إلى اليمين ، فإذا كان معامل الإحتكاك بين القرص والمنضدة هو μ ، وكان a هو نصف قطر القرص أثبت أن القرص ينزلق عند نقطة التماس لفترة زمنية تساوي $\frac{a\omega}{3\mu g}$ وبعدها يبدأ في التدحرج مباشرةً بسرعة زاوية قدرها $\left(\frac{\omega}{3}\right)$.

<u>الحل :</u>



نتيجة لدوران القرص حول مركزه G تكون هناك سرعة مماسية $= a\omega$ في إتجاه الدوران .

نقطة التماس C لها سرعة v_C هي محصلة سرعتين :

(١) سرعة مركز القرص الخطية $(\dot{x})$ (في اتجاه الحركة)

(٢) السرعة المماسية الناتجة عن الدوران $(a\omega)$.

∴ في البداية تكون: $v_C = \dot{x} + a\omega$

الحركة بدأت إنزلاقية فيكون الإحتكاك في قيمته النهائيــة: $F = \mu R$ وفــي عكس إتجاه الحركة (أي إلى اليسار).

<u>معادلات الحركة:</u>

$$m\ddot{x} = -F = -\mu R \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$R = mg \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

<u>الحركة الدورانية:</u>

$$I_G\ddot{\theta} = M_G$$

$$\frac{1}{2}ma^2\ddot{\theta} = -F\cdot a = -\mu R\cdot a \;\ldots\ldots\ldots(٣)$$

حيث: $I_G = \frac{1}{2}ma^2$ هو عزم القصور الذاتي للقرص حول المحور المار بمركزه

إشارة (ــ) في العزم لان القوة F في عكس إتجاه الدوران .

من (٢) و (١) :

$$m\ddot{x} = -\mu(mg)$$

$$\therefore \ddot{x} = -\mu g \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (٤)$$

بالتكامل بالنسبة للزمن: $\dot{x} = -\mu g t + C_1$

ولإيجاد C_1 : في البداية: $\dot{x} = 0, t = 0 \longrightarrow C_1 = 0$

$$\dot{x} = -\mu g t \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (٥)$$

هذه المعادلة تعطينا السرعة الخطية $\dot{x}$ عند أي لحظة t .

أيضاً: من (٣) و (٢) : $\frac{1}{2} m a^2 \ddot{\theta} = -\mu (mg) a$

$$\therefore \ddot{\theta} = -\frac{2\mu g}{a} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (٦)$$

وبالتكامل بالنسبة للزمن : $\dot{\theta} = -\frac{2\mu g}{a} t + C_2$

ولإيجاد C_2 : في البداية: $\dot{\theta} = \omega, t = 0 \longrightarrow C_2 = \omega$

$$\therefore \quad \dot{\theta} = \omega - \frac{2\mu g}{a} t \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (٧)$$

هذه المعادلة تعطي السرعة الزاوية عند أي لحظة t

ولإيجاد المطلوب : أي إيجاد الزمن الذي ينزلق فيه القرص ثم يبدأ بعد ذلك في التدحرج وشرط ذلك هو أن :

سرعة نقطة التماس= صفر $\therefore v_C = \dot{x} + a\dot{\theta} = 0$

$$\therefore \dot{x} = -a\dot{\theta} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (٨)$$

بالتعويض من (٧) و (٥) في (٨) نوجد الزمن t الذي يبدأ القرص بعده في التدحرج (زمن الحركة الإنزلاقية):

$$\therefore -\mu g t = -a\left(\omega - \frac{2\mu g}{a} t\right) = -a\omega + 2\mu g t$$

$$\therefore a\omega = 3\mu g t \longrightarrow \therefore \quad t = \frac{a\omega}{3\mu g} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (٩)$$

وهو المطلوب الأول .

ولإيجاد السرعة الزاوية التي يبدأ بها القرص في التدحرج: نعوض عن t من (٩) في (٧) :

$$\therefore \quad \dot{\theta} = \omega - \frac{2\mu g}{a}\left(\frac{a\omega}{3\mu g}\right) = \omega - \frac{2}{3}\omega = \frac{\omega}{3} \quad \dots\dots\dots\dots(١٠)$$

وهو المطلوب الثاني .

<u>مسألة:</u> حل المثال السابق في حالة إذا كان الجسم الذي يدور هو كرة عزم القصور الذاتي لها حول قطر فيها هو $\frac{2}{5}ma^2$ ، وأثبت أن الكرة تنزلق لفترة زمنية تساوي $\frac{2a\omega}{7\mu g}$ وبعدها تبدأ الكرة في التدحرج مباشرة بسرعة زاوية قدرها $\left(\frac{2}{7}\omega\right)$.

<u>الحل:</u> سرعة نقطة التماس أثناء الحركة:

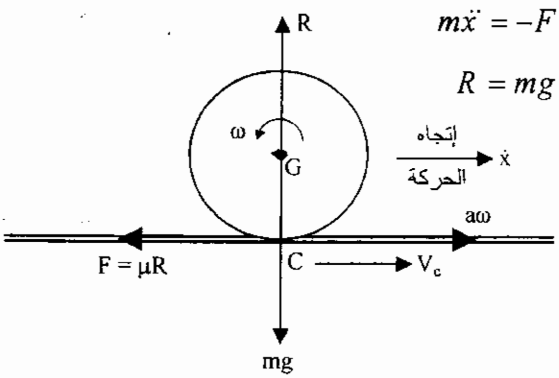
$$v_C = \dot{x} + a\dot{\theta}$$

($\dot{\theta} = \omega$ في بداية الحركة)

معادلات الحركة:

$$m\ddot{x} = -F = -\mu R \quad \dots\dots\dots\dots(١)$$

$$R = mg \quad \dots\dots\dots\dots(٢)$$



الحركة الدورانية:

$$I_G \ddot{\theta} = M_G$$

$$\therefore \frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta} = -F \cdot a = -\mu R \cdot a \quad \dots\dots\dots(٣)$$

من (٢) و (١) :

$$m\ddot{x} = -\mu mg \longrightarrow \ddot{x} = -\mu g$$

وبالتكامل: $\therefore \dot{x} = -\mu gt + C_1$

وفي البداية: $C_1 = 0 \longleftarrow t = 0, \dot{x} = 0$

$$\therefore \quad \dot{x} = -\mu gt \quad \text{.............................}(٤)$$

أيضاً من (٣) و (٢) :

$$\frac{2}{5} ma^2 \ddot{\theta} = -\mu mga$$

$$\frac{2}{5} a\ddot{\theta} = -\mu g$$

$$\therefore \quad \ddot{\theta} = -\frac{5\mu g}{2a}$$

وبالتكامل : $\dot{\theta} = -\frac{5\mu g}{2a} t + C_2$

وفي البداية : $C_2 = \omega \longleftarrow t = 0, \dot{\theta} = \omega$

$$\dot{\theta} = \omega - \frac{5\mu g}{2a} t \quad \text{.............................}(٥)$$

__لإيجاد المطلوب الأول:__ الكرة تنزلق لفترة t ثم تبدأ في التدحرج وشرط ذلك هـو إنعدام سرعة نقطة التماس :

$$v_C = \dot{x} + a\dot{\theta} = 0 \quad \therefore \quad \dot{x} = -a\dot{\theta} \quad \text{...........}(٦)$$

وبالتعويض من (٥) و (٤) في (٦) :

$$-\mu gt = -a\left[\frac{-5\mu g}{2a} t + \omega\right] = -a\omega + \frac{5}{2}\mu gt \quad \therefore a\omega = \mu gt + \frac{5}{2}\mu gt = \frac{7}{2}\mu gt$$

$$\therefore \quad t = \frac{2a\omega}{7\mu g} \quad \text{.............................}(٧)$$

وهو الزمن الذي تنزلق فيه الكرة ثم تبدأ في التدحرج وذلك بسرعة زاوية نحصل عليها بالتعويض من (٧) في (٥) :

$$\therefore \quad \dot{\theta} = -\frac{5\mu g}{2a}\left(\frac{2a\omega}{7\mu g}\right) + \omega \;= -\frac{5}{7}\omega + \omega = \frac{2}{7}\omega \ldots\ldots\ldots\ldots (٨)$$

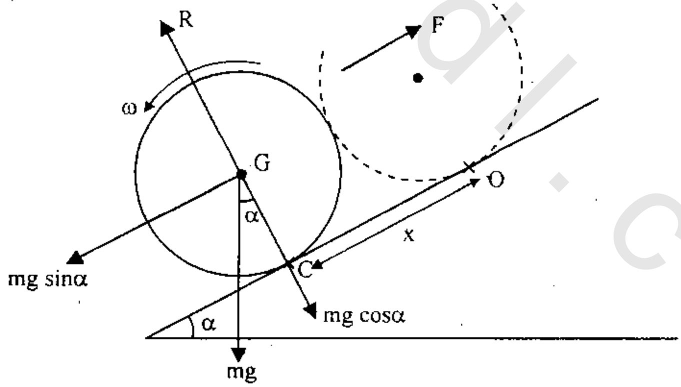
وهو المطلوب الثاني .

<u>مثال (٢):</u> تتدحرج كرة مصمتة كتلتها m ونصف قطرها a وعزم القصور الذاتي لها حول قطر فيها $\frac{2}{5}ma^2$ ، أسفل مستوى مائل خشن لدرجة تكفي لمنع الانزلاق ، فإذا كانت α هي زاوية ميل المستوى على الأفقي ، فأثبت أن :ـ

(١) مركز الكرة يتحرك بعجلة مقدارها $\frac{5}{7}g\sin\alpha$

(٢) شرط إستمرار الحركة التدحرجية هو أن يكون معامل الإحتكاك بين الكرة والمستوى $\mu > \frac{2}{7}\tan\alpha$

<u>الحل:</u>



في البداية كانت الكرة ساكنة ونقطة التماس عند O . بعد زمن t تكون الكرة قد تحرك مركزها مسافة x ، حيث أصبحت نقطة التماس عند C ، وحيث أن الحركة تدحرجية فإن: (١) $F < \mu R$

(٢) F تكون في عكس إتجاه حركة نقطة التماس (حركة الكرة).

<u>معادلات الحركة:</u> في إتجاه المستوى المائل (أي في إتجاه الحركة) :

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F \qquad \text{.......................(١)}$$

في الإتجاه العمودي (حيث لا توجد حركة):

$$R = mg\cos\alpha \qquad \text{...............................(٢)}$$

<u>الحركة الدورانية</u> :

$$I_G\ddot{\theta} = M_G$$

$$\frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta} = F\cdot a \qquad \text{...............................(٣)}$$

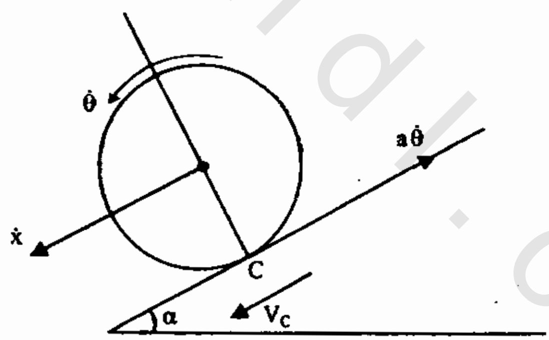
حيث أن: $I_G = \frac{2}{5}ma^2$ هو عزم القصور الذاتي للكرة حول قطر فيها .

الإشارة الموجبة للعزم لأن القوة F في إتجاه الدوران

المعادلة (٣):

$$F = \frac{2}{5}ma\ddot{\theta} \qquad \text{..........................(٤)}$$

شرط التدحرج: سرعة نقطة التماس = صفر



$$v_C = \dot{x} - a\dot{\theta} = 0$$

$$\therefore \dot{x} = a\dot{\theta} \longrightarrow \ddot{x} = a\ddot{\theta} \qquad \text{..............(٥)}$$

من (٥) و (٤) :

$$F = \frac{2}{5}m\ddot{x} \qquad \text{..........................(٦)}$$

<u>المطلوب الأول</u> : إيجاد العجلة التي يتحرك بها مركز الكرة $(\ddot{x})$

بالتعويض من (٦) في (١) :

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \frac{2}{5}m\ddot{x}$$

$$\therefore \frac{7}{5}m\ddot{x} = mg\sin\alpha$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{5}{7}g\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

وهو المطلوب أولاً.

<u>**المطلوب الثاني**</u>: شرط استمرار التدحرج هو $F < \mu R$

$$\mu > \frac{F}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٨)$$

ومن (٧) و (٦) :

$$F = \frac{2}{5}m\left(\frac{5}{7}g\sin\alpha\right) = \frac{2}{7}mg\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots(٩)$$

ومن (٢) :

$$R = mg\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١٠)$$

ويصبح شرط استمرار الحركة التدحرجية :

$$\mu > \frac{\frac{2}{7}mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha}$$

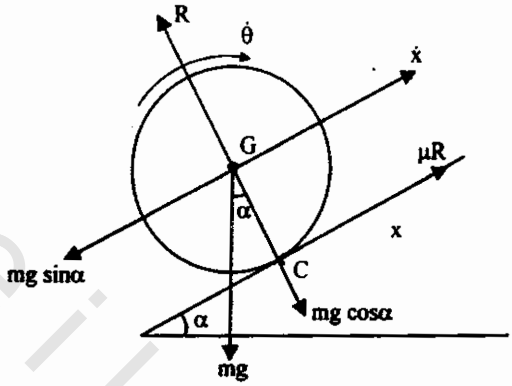
$$\therefore \mu > \frac{2}{7}\tan\alpha$$

وهو المطلوب ثانياً .

<u>**مثال (٣)**</u>: قذفت كرة منتظمة نصف قطرها a إلى أعلى فوق مستوى مائل خشن يميل بزاوية α على الأفقي بسرعة ابتدائية v وبسرعة زاوية ω في اتجاه الحركة إلى أعلى فإذا كانت $v < a\omega$ وكان معامل الاحتكاك يساوي $\tan\alpha$ فأثبت أن مركز الكرة لا تكون له عجلة لمدة من الزمن قدرها $\frac{2}{5}\frac{(a\omega - v)}{g\sin\alpha}$

وإذا كانت $v > a\omega$ فأكتب معادلات الحركة في هذه الحالة ، وأثبت أن سرعة نقطة التماس تتلاشى بعد زمن قدره $\frac{2}{9}\frac{(v - a\omega)}{g\sin\alpha}$

الحل:



سرعة نقطة التماس عند بدء الحركة : $v_C = v - a\omega$

ويكون لدينا حالتان :

أولاً: إذا كانت $v < a\omega$ أي $v_C = -$ وهذا يعني أن نقطة التماس تكون لها سرعة متجهة إلى أسفل وتكون الحركة انزلاقية وقوة الاحتكاك تساوي $F = \mu R$ وتؤثر إلى أعلى

معادلات الحركة :

في اتجاه المستوي : $m\ddot{x} = \mu R - mg\sin\alpha$ ....(١)

في الاتجاه العمودي : $R = mg\cos\alpha$ ....(٢)

الحركة الدورانية : $I_G\ddot{\theta} = M_G$

ولكن عزم القصور الذاتي لكرة حول محور مار بمركزها $I_G = \frac{2}{5}ma^2$ حيث a نصف قطر الكرة

$\therefore \frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta} = -\mu R \cdot a$ ....(٣)

(القوة μR عكس الدوران)

وحيث أن : $\mu = \tan\alpha$ فمن (٢) و (١) :

$$m\ddot{x} = \mu(mg\cos\alpha) - mg\sin\alpha = \tan\alpha(mg\cos\alpha) - mg\sin\alpha$$

$$= mg\sin\alpha - mg\sin\alpha = 0$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

ومن (٣) و (٢) :

$$\frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta} = -(\tan\alpha)(mg\cos\alpha)\cdot a = -mga\sin\alpha$$

$$\therefore \ddot{\theta} = -\frac{5}{2a}g\sin\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

من (٤) نجد أن مركز الثقل للكرة لا يكون له عجلة أي أنه يتحرك بسرعة منتظمة v إلى أن تغير قوة الاحتكاك مقدارها أو اتجاهها.

وهذا يعني أن الحركة إما أن تصبح: تدحرجية (فيتغير مقدار قوة الاحتكاك وتصبح $F < \mu R$) أو تصبح إنزلاقية في عكس الاتجاه السابق. وفي كلتا الحالتين لابد أن تتلاشى سرعة نقطة التماس أولاً

أي أن مركز الثقل لا تكون له عجلة حتى تصبح سرعة نقطة التماس صفراً

سرعة نقطة التماس (أثناء الحركة) : $v_C = \dot{x} - a\dot{\theta} = 0$

$$\therefore \quad \dot{x} = a\dot{\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

من (٤) $\longleftarrow$ بالتكامل : $\dot{x} = const.$

وفي البداية : $\dot{x} = v$ ومنها : $v = const. \longleftarrow \therefore \dot{x} = v$

ومن (٥) بالتكامل : $\dot{\theta} = -\frac{5}{2a}g\sin\alpha \; t + C$

ولإيجاد C : في البداية $t = 0, \dot{\theta} = \omega \longleftarrow C = \omega$

$$\therefore \quad \dot{\theta} = \omega - \frac{5}{2a}g\sin\alpha \; t$$

بالتعويض في (٦) :

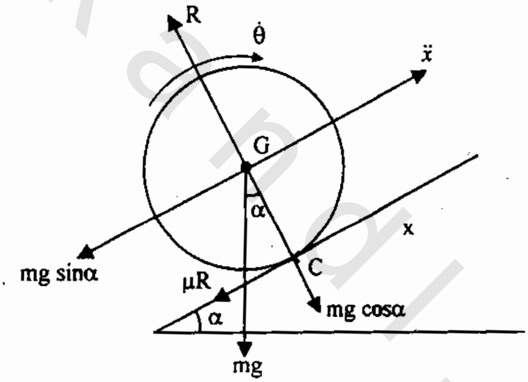
$$v = a\left(\omega - \frac{5}{2a} g \sin\alpha \;\; t \right)$$

$$\therefore \frac{5}{2} g \sin\alpha \;\; t = a\omega - v \qquad\qquad \therefore t = \frac{2}{5}\frac{(a\omega - v)}{g \sin\alpha}$$

وهو المطلوب أولاً.

ثانياً : إذا كانت $v > a\omega$ أي $v_C = +$

في هذه الحالة تكون لنقطة التماس سرعة إلى أعلى ، وعلى هذا تكون الحركة إنزلاقية أيضاً إلا أن قوة الإحتكاك μR تكون مؤثرة إلى أسفل .



معادلات الحركة في هذه الحالة:

$$m\ddot{x} = -\mu R - mg \sin\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

$$R = mg \cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

$$\frac{2}{5} ma^2 \ddot{\theta} = \mu R \cdot a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

(القوة μR مع الدوران)

وحيث أن $\mu = \tan\alpha$ فمن (١) وبإستخدام (٢) :

$$m\ddot{x} = -\tan\alpha \left(mg \cos\alpha \right) - mg \sin\alpha = -2mg \sin\alpha$$

$$\therefore \ddot{x} = -2g \sin\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

ومن (٣) وبإستخدام (٢) :

$$\frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta} = \tan\alpha\left(mg\cos\alpha\right)\cdot a = mg\sin\alpha\cdot a$$

$$\therefore \ddot{\theta} = \frac{5g}{2a}\sin\alpha \quad \text{..............................(٥)}$$

من (٤) بالتكامل : $\dot{x} = -2g\sin\alpha \cdot t + C_1$

ولإيجاد C_1 : في البداية: $C_1 = v \longleftarrow \dot{x} = v, t = 0$

$$\therefore \dot{x} = v - 2g\sin\alpha \cdot t \quad \text{..............................(٦)}$$

ومن (٥) بالتكامل : $\dot{\theta} = \frac{5g}{2a}\sin\alpha \cdot t + C_2$

ولإيجاد C_2 : في البداية : $C_2 = \omega \longleftarrow \dot{\theta} = \omega, t = 0$

$$\therefore \dot{\theta} = \frac{5g}{2a}\sin\alpha \cdot t + \omega \quad \text{..........................(٧)}$$

وتتلاشى سرعة نقطة التماس بعد زمن قدره t حيث: $\dot{x} = a\dot{\theta}$

فمن (٧) و (٦) :

$$v - 2g\sin\alpha \cdot t = \frac{5g}{2}\sin\alpha \cdot t + a\omega$$

$$\therefore v - a\omega = 2g\sin\alpha \cdot t + \frac{5}{2}g\sin\alpha \cdot t = \frac{9}{2}g\sin\alpha \cdot t$$

$$\therefore t = \frac{2}{9}\frac{(v - a\omega)}{g\sin\alpha}$$

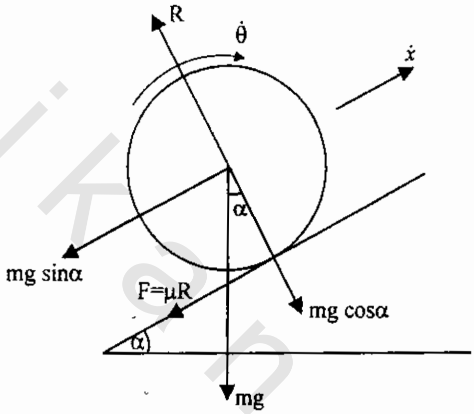
وهو المطلوب ثانياً .

مثال (٤) : كره عزم القصور الذاتي لها حول القطر المار بمركزها هو $\frac{2}{5}ma^2$ ، حيث m كتلة الكرة ، a نصف قطرها. قذفت الكرة أعلى مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية α وذلك بسرعة ابتدائية v وكانت الكرة تدور بسرعة زاوية ω في إتجاه الحركة إلى أعلى ، فإذا كانت $v > a\omega$ وبدأت

الكرة حركتها بالانزلاق أعلى المستوى وبعد زمن t_1 بدأت الكرة في التدحرج وذلك عندما كان معامل الإحتكاك $\mu > \frac{2}{7}\tan\alpha$ وبعد زمن t_2 توقفت الكرة عن الحركة. أثبت أن الزمن الكلي منذ بدء الحركة وحتى سكون الكرة هو:

$$\frac{5v + 2a\omega}{5g\sin\alpha}$$

<u>الحل :</u>



حركة الكرة بدأت بالانزلاق أعلى المستوى أي أن سرعة نقطة التماس تنزلق أعلى المستوى (وهذا واضح حيث أن $v > a\omega$). فتكون قوة الاحتكاك $F = \mu R$ أسفل المستوى

<u>**معادلات الحركة الانزلاقية:**</u> في إتجاه المستوى (الحركة):

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - \mu R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

في الإتجاه العمودي:

$$R = mg\cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

الحركة الدورانية:

$$I_G\ddot{\theta} = M_G$$

$$\frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta} = \mu R \cdot a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

(القوة μR مع الدوران)

ومن (٢) و (١) : $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$

$$\therefore \ddot{x} = -(\ g\sin\alpha + \mu\cos\alpha\ ) \ldots\ldots\ldots (٤)$$

ومن (٣) و (٢) : $\frac{2}{5} m\, a^2\, \ddot{\theta} = \mu\, a\, m\, g\, \cos\alpha$

$$\therefore \ddot{\theta} = \frac{5}{2}\frac{\mu g\cos\alpha}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٥)$$

من (٤) بالتكامل بالنسبة للزمن :

$$\dot{x} = -g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)t + C_1$$

ولإيجاد C_1 : في البداية $t = 0, \dot{x} = v \leftarrow \therefore C_1 = v$

$$\therefore \dot{x} = v - g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٦)$$

ومن (٥) وبالتكامل بالنسبة للزمن: $\dot{\theta} = \frac{5}{2}\frac{\mu g\cos\alpha}{a}t + C_2$

ولإيجاد C_2 : في البداية: $t = 0, \dot{\theta} = \omega \leftarrow \therefore C_2 = \omega$

$$\therefore \dot{\theta} = \omega + \frac{5}{2}\frac{\mu g\cos\alpha}{a}t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٧)$$

سرعة نقطة التماس عند أي لحظة هي : $v_C = \dot{x} - a\dot{\theta}$

وبالتعويض من (٧) و (٦) :

$$\therefore v_C = v - a\omega - g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)t - \frac{5}{2}\mu g\cos\alpha \cdot t$$

$$= v - a\omega - g\left(\sin\alpha + \frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)t \qquad \ldots\ldots (٨)$$

دراسة الحركة التدحرجية: بعد زمن $t = t_1$ تبدأ الكرة في التدحرج وحينئذ تتلاشى السرعة v_C

$$\therefore 0 = v - a\omega - g\left(\sin\alpha + \frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)t_1$$

$$\therefore \quad t_1 = \frac{v - a\omega}{g\left(\sin\alpha + \frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)} \quad \text{.........................} (٩)$$

وفي هذه الحالة فإن نقطة التماس تعكس إتجاه حركتها فتكون إلى أسفل ، ويكون الإحتكاك إلى أعلى ، وتكون قوة الإحتكاك $F < \mu R$ أي $\mu > \frac{F}{R}$

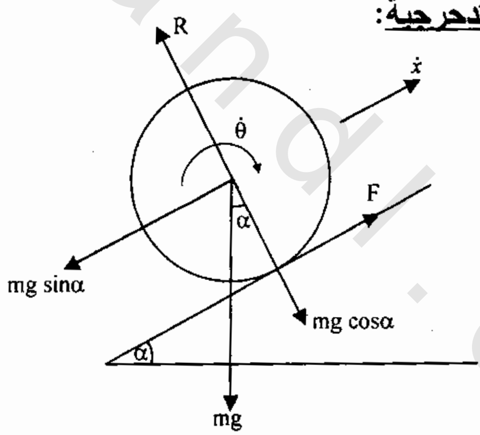
ولكن (من رأس المسألة) : $\mu > \frac{2}{7}\tan\alpha$

$$\therefore \frac{F}{R} = \frac{2}{7}\tan\alpha$$

$$\therefore \quad F = \frac{2}{7}\tan\alpha \cdot R = \frac{2\sin\alpha}{7\cos\alpha}\cdot mg\cos\alpha$$

$$= \frac{2}{7} mg\sin\alpha \quad \text{..................} (١٠)$$

<u>معادلات الحركة التدحرجية:</u>



$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha + F \quad \text{.........................} (١١)$$

$$R = mg\cos\alpha \quad \text{.........................} (١٢)$$

$$\frac{2}{5} ma^2\ddot{\theta} = -F\cdot a \quad \text{.........................} (١٣)$$

(F عكس الدوران)

ونتيجة للتدحرج فإن : سرعة نقطة التماس تتلاشى أثناء التدحرج

$$\therefore 0=\dot{x}-a\dot{\theta} \quad \therefore \dot{x}=a\dot{\theta}\longrightarrow \ddot{x}=a\ddot{\theta}$$

ولكن: من (١٣) و (١٠) :

$$a\ddot{\theta}=-\frac{5}{2}\frac{F}{m}=-\frac{5}{2}\frac{1}{m}\left(\frac{2}{7}mg\sin\alpha\right)=-\frac{5}{7}g\sin\alpha$$

$$\therefore \ddot{x}=-\frac{5}{7}g\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١٤)$$

أيضاً:

$$\therefore \ddot{\theta}=-\frac{5}{7}\frac{g\sin\alpha}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١٥)$$

من (١٥) نوجد السرعة الزاوية للكرة في حالة التدحرج:

وذلك بالتكامل:

$$\dot{\theta}=-\frac{5}{7}\frac{g\sin\alpha}{a}t+C_3$$

<u>ولإيجاد</u> C_3 : في بداية الحركة التدحرجية

$$t=0\ ,\ \dot{\theta}=\left(\dot{\theta}\right)_{t=t_1} \qquad \therefore\ C_3=\left(\dot{\theta}\right)_{t=t_1}$$

$$\therefore \dot{\theta}=\left(\dot{\theta}\right)_{t=t_1}-\frac{5}{7}\frac{g\sin\alpha}{a}t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١٦)$$

ولكن: السرعة الزاوية للكرة عند $t=t_1$ هي :

من (٧) :

$$\left(\dot{\theta}\right)_{t=t_1}=\omega+\frac{5}{2}\frac{\mu g\cos\alpha}{a}t_1$$

وبالتعويض عن t_1 من (٩) :

$$\therefore \left(\dot{\theta}\right)_{t=t_1}=\omega+\frac{5}{2}\frac{\mu g\cos\alpha}{a}\left[\frac{v-a\omega}{g\left(\sin\alpha+\frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)}\right]$$

$$=\omega+\frac{5\mu\left(v-a\omega\right)\cos\alpha}{2a\left(\sin\alpha+\frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)}$$

وبالتعويض في (١٦) :

$$\dot{\theta} = \omega + \frac{5\mu(v - a\omega)\cos\alpha}{2a\left(\sin\alpha + \frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)} - \frac{5}{7}\frac{g\sin\alpha}{a}\, t$$

عند توقف الكرة عن الحركة : الكرة تسكن بعد زمن $t = t_2$ حيث $\dot{\theta} = 0$

$$\therefore 0 = \omega + \frac{5\mu(v - a\omega)\cos\alpha}{2a\left(\sin\alpha + \frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)} - \frac{5}{7}\frac{g\sin\alpha}{a}\, t_2$$

$$\therefore t_2 = \frac{7a}{5g\sin\alpha}\left[\ \omega + \frac{5\mu(v - a\omega)\cos\alpha}{2a\left(\sin\alpha + \frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)}\ \right]$$

$$= \frac{7a\omega}{5g\sin\alpha} + \frac{7\mu(v - a\omega)\cot\alpha}{2g\left(\sin\alpha + \frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)} \qquad \text{.............(١٧)}$$

ويكون الزمن الكلي منذ بدء الحركة وحتى سكون الكرة $t = t_1 + t_2$

وبالتعويض عن t_1 من (٩) و t_2 من (١٧) نحصل على :

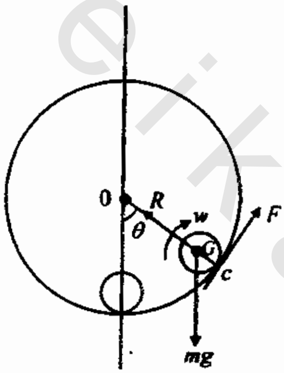
$$t = \frac{(v - a\omega)}{g\left(\sin\alpha + \frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)} + \frac{7a\omega}{5g\sin\alpha} + \frac{7\mu(v - a\omega)\cot\alpha}{2g\left(\sin\alpha + \frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)}$$

$$= \frac{7a\omega}{5g\sin\alpha} + \frac{(v - a\omega)}{g\sin\alpha\left(1 + \frac{7}{2}\mu\cot\alpha\right)}\left[1 + \frac{7}{2}\mu\cot\alpha\right]$$

$$= \frac{7a\omega}{5g\sin\alpha} + \frac{(v - a\omega)}{g\sin\alpha} = \frac{1}{5g\sin\alpha}\left[7a\omega + 5(v - a\omega)\right] = \frac{5v + 2a\omega}{5g\sin\alpha}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٥):</u> يتدحرج قرص دائري نصف قطره b داخل اسطوانة دائرية مثبتة ومفرغة نصف قطرها a ومحورها أفقي بحيث كان مستوى القرص رأسياً وعمودياً على محور الاسطوانة، فإذا بدأ مركز القرص في التحرك من أسفل موضع له بسرعة $\sqrt{8g(a-b)/3}$ ، وكان الاحتكاك كافياً لمنع أي انزلاق ، فأثبت أن مركز القرص سوف يدور خلال زاوية θ حول محور الاسطوانة في زمن قدره $\sqrt{\dfrac{3(a-b)}{2g}}\ln\tan\left(\dfrac{\theta}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)$.



<u>الحل:</u> نفرض أن w هي السرعة الزاوية للقرص حول مركزه G. مركز القرص G يتحرك في دائرة نصف قطرها $(a-b)$ ومركزها 0، فإذا كانت $c=a-b$، فإن:

<u>معادلات الحركة للقرص حول مركز الثقل:</u>

$$mc\dot{\theta}^2 = R - mg\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

$$mc\ddot{\theta} = F - mg\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

<u>معادلات الحركة الدورانية حول مركز الثقل:</u>

$$I_G\,\dot{w} = -F\cdot b \quad \ldots\ldots\ldots (٣)$$

[إشارة (−) لأن F عكس اتجاه w].

وللقرص فإن: $I_G = \frac{1}{2}mb^2$

$$\therefore \frac{1}{2}mb^2\,\dot{w} = -F\cdot b \quad \ldots\ldots\ldots (٤)$$

<u>شرط التدحرج:</u> سرعة نقطة التماس = صفر

$$\therefore c\dot{\theta} - bw = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (٥)$$

وذلك حيث أن

سرعة نقطة التماس = سرعة مركز الثقل G + سرعة c بالنسبة إلى G.

$$v_c = v_G + v_{cG} = c\dot{\theta} - bw$$

من (5): $c\dot{\theta} = bw \leftarrow$ $\boxed{c\ddot{\theta} = b\dot{w}}$

بالتعويض في (4):

$$\frac{1}{2}m\,b\dot{w} = \frac{1}{2}mc\ddot{\theta} = -F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

بالتعويض في (2):

$$\frac{3}{2}mc\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$$\therefore \ddot{\theta} = -\frac{2}{3c}g\sin\theta$$

بالتكامل بالنسبة إلى θ:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3c}g\cos\theta + c_1$$

لإيجاد c_1: عند أسفل موضع $(\theta = 0)$ كانت سرعة مركز القرص هي:

$$v_G = c\dot{\theta} = \sqrt{\frac{8}{3}gc} \quad \rightarrow c^2\dot{\theta}^2 = \frac{8}{3}gc \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{8}{3c}g$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3c}g\right] = \frac{2}{3c}g\,\underbrace{\cos 0}_{1} + c_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{2}{3c}g$$

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3c}g\cos\theta + \frac{2}{3c}g = \frac{2}{3c}g(1+\cos\theta)$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{4}{3c}g(1+\cos\theta) = \frac{4}{3c}g\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{8g}{3c}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \dot{\theta} = \sqrt{\frac{8g}{3c}}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{d\theta}{dt}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int\frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{8g}{3c}}\int dt$$

$$\therefore 2\int \sec\frac{\theta}{2}\, d(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{8g}{3c}}t + c_2 \qquad \Big| \int \sec x\, dx = \ln\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$$

$$\therefore 2\ln\tan(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\frac{8g}{3c}}t + c_2$$

ولإيجاد c_2: عند أسفل موضع: $t=0$ ، $\theta = 0$ $\leftarrow$ $0 = 0 + c_2$ $\leftarrow$ $\boxed{c_2 = 0}$

$$\therefore 2\ln\tan(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\frac{8g}{3c}}\, t \to t = \sqrt{\frac{3c}{2g}}\ln\tan(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4})$$

وهو المطلوب.

مسائل على الباب الرابع

(١) أثبت أن عزم القصور الذاتي لصفيحة منتظمة على شكل مستطيل $ABCD$ كتلته M وضلعاه $2b$, $2a$ موضوع موازياً لمحور x ومركزه عند نقطة الأصل 0، هو $\frac{1}{3}Mb^2$ (حول محور x) و $\frac{1}{3}Ma^2$ (حول محور y) ومن ذلك اوجد عزم القصور الذاتي للصفيحة حول الطرف الموازي لمحور x (أي للضلع $2a$) ، وحول الطرف الموازي لمحور y (أي للضلع $2b$) .

(٢) (أ) أثبت أن عزم القصور الذاتي لقشرة اسطوانة مصمته (اسطوانة مفرغه) منتظمة كتلتها M ونصف قطر قاعدتها a حول محور الاسطوانة هو Ma^2.

(ب) أثبت أن عزم القصور الذاتي لإسطوانة مصمته كتلتها M ونصف قطرها قاعدتها a حول محورها هو $\frac{1}{2}Ma^2$.

(٣) (أ) أثبت أن عزم القصور الذاتي لقشرة كرويه (كرة مفرغه) منتظمة كتلتها M ونصف قطرها a حول قطر فيها هو $(\frac{2}{3}Ma^2)$.

(ب) أثبت أن عزم القصور الذاتي لكرة مصمته كتلتها M ونصف قطرها a حول قطر فيها هو $(\frac{2}{5}Ma^2)$.

(٤) طوق دائري نصف قطره a ويدور بسرعة زاوية ω حول مركزه. وضع بهدوء على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية تساوي زاوية الاحتكاك α فإذا كامن الدوران يعمل على انزلاق نقطة التماس إلى أسفل المستوى فأثبت أن الطوق يبقى ثابتاً لمدة $\frac{a\omega}{g\sin\alpha}$، حيث g عجلة الجاذبية الأرضية.

(٥) اسطوانة مصمته نصف قطرها a، موضوعة على مستوى أفقي خشن معامل احتكاكه μ . أثر على الأسطوانة دفعاً جعل محورها يتحـرك بسرعة V وجعلها تدور حول محورها بسرعة زاوية ω في الاتجاه الذي يكسب نقطة التماس سرعة في عكس إتجاه V ، فإذا كانت $V > a\omega$ فأثبت أن الأسطوانة سوف تنزلق عند نقطة التماس لفترة قدرها $\dfrac{V - a\omega}{3\mu g}$ تتدحرج بعدها بسرعة زاوية قدرها $\dfrac{2V + a\omega}{3a}$.

(٦) قضيب منتظم يبدأ في الحركة عندما كان طرفه ملامساً منضدة أفقية خشنة ومائلا بزاوية α على الرأسي ، فإذا كان معامل الاحتكاك بينه وبين المنضدة هو μ فأثبت أن طرف القضيب يبدأ مباشرة في الانزلاق عندما $\mu \le \dfrac{3\sin\alpha\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$.

(٧) وضع قضيب منتظم خشن طوله $2a$ عمودياً على حافة نضد أفقي خشن ، فإذا كان مركز ثقل القضيب في البداية على بعد b إلى الخارج من الحافة وترك القضيب يتحرك من سكون حول حافة النضد (المنضدة) . فأثبت أن القضيب يبدأ في الانزلاق عندما يدور بزاوية قدرها $\tan^{-1}\left(\dfrac{\mu a^2}{a^2+9b^2}\right)$ حيث μ معامل الاحتكاك .

(٨) وضع قضيب منتظم طوله $2a$ في مستوى رأسي بحيث يمس طرفه السفلي مستوى أفقي خشن وطرفه العلوي حائط رأسي خشن وبحيث كان المستوى والحائط متساويان في الخشونة ومعامل الاحتكاك بين أي منهما وبين القضيب هو $\mu = \tan\lambda$، فإذا كانت θ هي ميل القضيب على الرأسي عند أي لحظة فأثبت أن: $(k^2 + a^2\cos 2\lambda)\ddot{\theta} - a^2\dot{\theta}^2\sin 2\lambda = ag\sin(\theta - 2\lambda)$

وأن القضيب يبدأ في الانزلاق إذا كان ميله الابتدائي على الرأسي أكبر من 2λ. حيث k هو نصف قطر القصور الذاتي $(I = mk^2)$.

الحلول الكاملة لمسائل الكتاب

حل مسائل الباب الأول

المسألة(١):

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

$$\therefore\ v = \frac{dx}{dt} = \alpha t + \beta \qquad , \quad a = \frac{dv}{dt} = \alpha$$

$$v^2 = (\alpha t + \beta)^2 = \alpha^2 t^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta t$$

$$= \beta^2 + 2\alpha(\beta t + \frac{1}{2}\alpha t^2) = \beta^2 + 2a(x - \gamma)$$

وهو المطلوب.

المسألة(٢): $\alpha = x + 2$

لإيجاد العلاقة بين المسافة والزمن نوجد أولاً علاقة بين السرعة والمسافة فنضع

$$\alpha = v\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore\ v\frac{dv}{dx} = x + 2 \qquad \therefore\ \int v\,dv = \int (x+2)\,dx$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) + C_1$$

ولإيجاد C_1: في البداية $v = 2$, $x = 0$

$$\frac{1}{2}(2)^2 = C_1 = 2 \qquad \therefore\ \frac{1}{2}v^2 = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$$

$$v^2 = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \qquad \therefore\ v = x + 2 \quad \text{.......................}(١)$$

ولإيجاد العلاقة بين المسافة والزمن: نضع $v = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = x + 2 \qquad \therefore\ \int \frac{dx}{x+2} = \int dt$$

$$\ln(x+2) = t + C_2$$

ولإيجاد C_2 : في البداية: $t = 0 \quad , \quad x = 0$

$$C_2 = \ln 2$$

$$\therefore \quad \ln(x+2) = t + \ln 2 \qquad \therefore \quad t = \ln \frac{x+2}{2}$$

$$\therefore \quad e^t = \frac{x+2}{2} \qquad \therefore \quad 2e^t = x+2$$

$$\therefore \quad x = 2e^t - 2 = 2(e^t - 1)$$

وهو المطلوب .

المسألة(٣): العلاقة بين السرعة والمسافة :

$$v = v_0 e^{-kx}$$

ولإيجاد العلاقة بين المسافة والزمن :

نضع $v = \dfrac{dx}{dt}$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kx}$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int e^{kx} dx = v_0 \int dt$$

$$\therefore \quad \frac{1}{k} e^{kx} = v_0 t + C_1$$

ولإيجاد C_1 : في البداية $x = 0 \quad , \quad t = 0$

$$\frac{1}{k} e^0 = 0 + C_1 \longrightarrow C_1 = \frac{1}{k}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{k} e^{kx} = v_0 t + \frac{1}{k} \qquad \therefore \quad e^{kx} = k v_0 t + 1$$

$$\therefore \quad kx = \ln(k v_0 t + 1)$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{k} \ln(1 + k\, v_0\, t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

ولإيجاد العلاقة بين السرعة والزمن: نفاضل (١) بالنسبة للزمن:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{1+kv_0t}(k\ v_0)$$

$$=\frac{v_0}{1+kv_0t}=v\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

ولإيجاد العجلة بدلالة الزمن: نفاضل (٢) بالنسبة للزمن

$$\frac{dv}{dt}=v_0\frac{-1}{(1+kv_0t)^2}(kv_0)=\frac{-k\ v_0^2}{(1+k\ v_0\ t)^2}$$

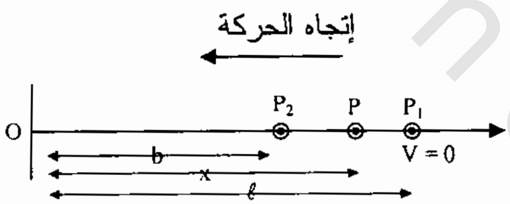
$$=-k\ v^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

وذلك بالتعويض عن :

$$v=\frac{v_0}{1+k\ v_0\ t}$$

وهو المطلوب.

المسألة(٤):



نأخذ النقطة p تبعد مسافة x عن O

العجلة تتجه نحو O :

$$\therefore\ \ a=-\frac{k}{x^3}$$

وحيث أن مقدار العجلة عند $x=1$ هو n^2

$$\therefore\ \ n^2=|a|=\left|\frac{-k}{1}\right|=k$$

$$\therefore\ \ a=-\frac{n^2}{x^3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

ولإيجاد العلاقة بين السرعة والمسافة :

$$a=v\ \frac{dv}{dx}=\frac{-n^2}{x^3}$$

$$\int v\ dv = \int \frac{-n^2}{x^3}\,dx$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}v^2 = \frac{n^2}{2x^2} + C_1$$

ولإيجاد C_1 : في البداية $v = 0\quad ,\quad x = \ell$

$$C_1 = -\frac{n^2}{2\ell^2}$$

$$\therefore\quad v^2 = n^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\ell^2}\right) = \frac{n^2}{x^2\ell^2}\left(\ell^2 - x^2\right) \therefore\quad v = \pm\frac{n}{x\,\ell}\sqrt{\ell^2 - x^2}$$

وحيث أن الجسيم يتحرك نحو O فإن x تتناقص ونأخذ إشارة (ــ)

$$v = -\frac{n}{x\,\ell}\sqrt{\ell^2 - x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

ولإيجاد العلاقة بين المسافة والزمن:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{n}{x\,\ell}\sqrt{\ell^2 - x^2}$$

$$\therefore\quad \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} = \frac{n}{\ell}\int dt$$

$$\therefore\quad \int \frac{1}{2}\left[-2x\,dx\,\left(\ell^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{n}{\ell}t + C_2$$

$$\therefore\quad \left(\ell^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{\ell}t + C_2$$

ولإيجاد C_2 : في البداية: $x = \ell\quad ,\quad t = 0 \longrightarrow C_2 = 0$

$$\therefore\quad \sqrt{\ell^2 - x^2} = \frac{n}{\ell}t$$

$$t = \frac{\ell}{n}\sqrt{\ell^2 - x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

ولإيجاد مقدار السرعة التي يصل بها الجسيم إلي p_2 نضع $x = b$ في (٣) فيكون مقدار السرعة:

$$\therefore \quad v = \frac{n}{x\ell}\sqrt{\ell^2 - b^2}$$

$$\therefore \quad v = n\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\ell^2}} \quad \text{.........................(٥)}$$

ولإيجاد الزمن الذي يأخذه الجسيم في الحركة من p_1 إلى p_2 نضع $x = b$ في (٤)

$$\therefore \quad t = \frac{\ell}{n}\sqrt{\ell^2 - b^2} \quad \text{.........................(٦)}$$

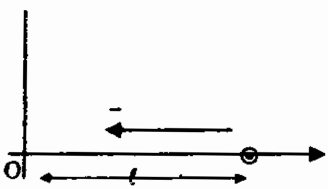
وهو المطلوب.

<u>المسألة (٥):</u> حيث أن الجسيم يتحرك نحو نقطة الأصل بعجلة قدرها $\frac{k}{x^3}$

$$\therefore \quad a = -\frac{k}{x^3} \quad \text{................(١)}$$

<u>ولإيجاد العلاقة بين المسافة والسرعة:</u> نضع $a = v\frac{dv}{dx}$ في (١)

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x^3}$$



$$\therefore \quad \int v\,dv = -\int \frac{k}{x^3}dx$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}v^2 = \frac{k}{2x^2} + C_1$$

<u>ولإيجاد</u> C_1: في البداية: $v = 0 \;,\; x = \ell \longrightarrow C_1 = -\frac{k}{2\ell^2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}v^2 = \frac{k}{2x^2} - \frac{k}{2\ell^2}$$

$$\therefore \quad v^2 = k\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\ell^2}\right) = \frac{k}{x^2\ell^2}\left(\ell^2 - x^2\right) \qquad \therefore \quad v = \pm\frac{\sqrt{k}}{x\ell}\sqrt{\ell^2 - x^2}$$

وحيث أن الجسيم يتحرك نحو O : فنأخذ الإشارة (ــ)

$$\therefore \quad v = -\frac{\sqrt{k}}{x\ell}\sqrt{\ell^2 - x^2} \quad \text{.........................(٢)}$$

وللإيجاد العلاقة بين x,t :

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\sqrt{k}}{x\ell}\sqrt{\ell^2-x^2}$$

$$\therefore \int\frac{-x\,dx}{\sqrt{\ell^2-x^2}}=\frac{\sqrt{k}}{\ell}\int dt \qquad \therefore \int\frac{1}{2}\left[-2x\,dx\cdot\left(\ell^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{\sqrt{k}}{\ell}\int dt$$

$$\therefore \frac{1}{2}\frac{\left(\ell^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{k}}{\ell}t+C_2 \qquad \therefore \sqrt{\ell^2-x^2}=\frac{\sqrt{k}}{\ell}t+C_2$$

وللإيجاد C_2 : $t=0$ عندما $x=\ell \longrightarrow C_2=0$

$$\therefore \sqrt{\ell^2-x^2}=\frac{\sqrt{k}}{\ell}t \qquad \therefore t=\frac{\ell}{\sqrt{k}}\sqrt{\ell^2-x^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

العلاقة (٣) تعطى زمن الوصول إلى أي مسافة x

وللإيجاد زمن الوصول إلى نقطة الأصل: نضع $x=0$ في (٣)

$$\therefore t=\frac{\ell}{\sqrt{k}}\cdot\sqrt{\ell^2}=\frac{\ell^2}{\sqrt{k}}$$

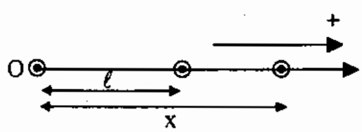
وهو المطلوب .

المسألة(٦) :

عجلة الجسيم:
$$a=\frac{k}{x^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

[لأن الجسيم يتحرك مبتعداً عن O أي في الاتجاه الموجب لـــ x]

أولاً: نوجد علاقة بين v,x :



نضع $a=v\dfrac{dv}{dx}$ في (١)

$$v\frac{dv}{dx}=\frac{k}{x^2}$$

$$\int v dv = k\int \frac{dx}{x^2} \qquad \therefore\ \frac{1}{2}v^2 = -\frac{k}{x} + C_1$$

ولإيجاد C_1: في البداية $v = 0$, $x = \ell$ $\longleftarrow$ $C_1 = \frac{k}{\ell}$

$$\therefore\ \frac{1}{2}v^2 = -\frac{k}{x} + \frac{k}{\ell}$$

$$v^2 = 2k\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{x}\right) = 2k\left(\frac{x-\ell}{x\ell}\right) \qquad \therefore\ v = \pm\sqrt{2k\left(\frac{x-\ell}{x\ell}\right)}$$

وحيث أن الحركة تتم بعيداً عن O أي في الإتجاه الموجب لمحور x فنأخذ إشارة (+)

$$\therefore\ v = \sqrt{2k\left(\frac{x-\ell}{x\ell}\right)} \text{.........................(٢)}$$

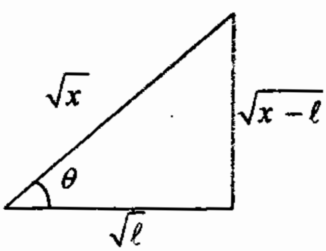
ولإيجاد الزمن : نضع $v = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2k\left(\frac{x-\ell}{x\ell}\right)} = \sqrt{\frac{2k}{\ell}}\sqrt{\frac{x-\ell}{x}}$$

$$\therefore\ \int\sqrt{\frac{x}{x-\ell}}dx = \sqrt{\frac{2k}{\ell}}\int dt = \sqrt{\frac{2k}{\ell}}t + C_2 \text{...............(٣)}$$

ولإيجاد التكامل $\int\sqrt{\frac{x}{x-\ell}}dx$: نستخدم التعويض: $x = \ell\sec^2\theta$

$$\therefore\ dx = 2\ell\sec\theta\cdot\sec\theta\cdot\tan\theta\ d\theta = 2\ell\sec^2\theta\tan\theta\ d\theta$$



$$\sec\theta = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\ell}} = \sqrt{\frac{x}{\ell}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x-\ell}}{\sqrt{\ell}} = \sqrt{\frac{x}{\ell}-1}$$

$$\sqrt{\frac{x}{x-\ell}} = \sqrt{\frac{\ell\sec^2\theta}{\ell(\sec^2\theta-1)}} = \sqrt{\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}} = \frac{\sec\theta}{\tan\theta}$$

ويصبح التكامل:

$$\int \sqrt{\frac{x}{x-\ell}}\,dx = 2\ell \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\cdot \sec^2\theta\,\tan\theta\, d\theta = 2\ell \int \sec^3\theta\, d\theta \;\ldots\ldots(٤)$$

التكامل $\int \sec^3\theta d\theta$ يمكن إيجاده بالتجزئ :

$$\int \sec^3\theta d\theta = \int \sec\theta\cdot\sec^2\theta d\theta = \int \sec\theta\cdot d(\tan\theta)$$

$$= \sec\theta\cdot\tan\theta - \int \tan\theta\; d(\sec\theta) = \sec\theta\cdot\tan\theta - \int \tan\theta\cdot\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$= \sec\theta\cdot\tan\theta - \int \tan^2\theta\cdot\sec\theta\; d\theta = \sec\theta\cdot\tan\theta - \int (\sec^2\theta - 1)\cdot\sec\theta d\theta$$

$$= \sec\theta\cdot\tan\theta - \int \sec^3\theta\; d\theta + \int \sec\theta d\theta$$

$$\therefore\quad 2\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta + \int \sec\theta\; d\theta = \sec\theta\tan\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta)$$

بالتعويض في (٤) :
$$\int \sqrt{\frac{x}{x-\ell}}\,dx = \ell\cdot\left[\sec\theta\tan\theta + \ln(\sec\theta+\tan\theta)\right]$$

وبالتعويض عن قيمتي $\sec\theta, \tan\theta$ من الرسم نحصل على:

$$\therefore\quad \int \sqrt{\frac{x}{x-\ell}}\,dx = \ell\left[\sqrt{\frac{x}{\ell}}\sqrt{\frac{x}{\ell}-1} + \ln\left(\sqrt{\frac{x}{\ell}} + \sqrt{\frac{x}{\ell}-1}\right)\right]$$

بالتعويض في (٣) :
$$\ell\cdot\left[\sqrt{\frac{x}{\ell}}\sqrt{\frac{x}{\ell}-1} + \ln\left(\sqrt{\frac{x}{\ell}} + \sqrt{\frac{x}{\ell}-1}\right)\right] = \sqrt{\frac{2x}{\ell}}\,t + C_2$$

<u>ولإيجاد</u> C_2 : في البداية $t = 0 \;,\; x = \ell \longrightarrow C_2 = 0$

$$\therefore\quad t = \sqrt{\frac{\ell}{2k}}\cdot\ell\cdot\left[\sqrt{\frac{x}{\ell}}\sqrt{\frac{x}{\ell}-1} + \ln\left(\sqrt{\frac{x}{\ell}} + \sqrt{\frac{x}{\ell}-1}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\ell}{2k}}\cdot\left[\ell\sqrt{\frac{x^2}{\ell^2} - \frac{x}{\ell}} + \ell\ln\left(\sqrt{\frac{x}{\ell}} + \sqrt{\frac{x}{\ell}-1}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\ell}{2k}}\cdot\left[\sqrt{x^2 - x\ell} + \ell\ln\left(\sqrt{\frac{x}{\ell}} + \sqrt{\frac{x}{\ell}-1}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\ell}{2k}}\cdot\left[\sqrt{x(x-\ell)} + \ell\cdot\ln\left(\sqrt{\frac{x}{\ell}} + \sqrt{\frac{x}{\ell}-1}\right)\right]$$

وهو المطلوب.

المسألة(٧):

$$a=-\alpha e^{\beta v} \qquad \text{.........(١)}$$

بوضع $a=\frac{dv}{dt} \leftarrow$

$$\therefore \frac{dv}{dt}=-\alpha e^{\beta v}$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int_{v_0}^{v} e^{-\beta v}\,dv=-\alpha\int_0^t dt$$

$$\therefore e^{-\beta v}-e^{-\beta v_0}=\alpha\beta t \quad \therefore e^{-\beta v}=e^{-\beta v_0}+\alpha\beta t \quad \text{.......(٢)}$$

وبوضع $a=v\frac{dv}{dx} \leftarrow$

$$v\frac{dv}{dx}=-\alpha e^{\beta v}$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int_{v_0}^{v} ve^{-\beta v}\,dv=-\alpha\int_0^x dx$$

$$\therefore \frac{1}{\beta}\left[ve^{-\beta v}-v_0 e^{-\beta v_0}\right]+\frac{1}{\beta^2}\left[e^{-\beta v}-e^{-\beta v_0}\right]=\alpha x \quad \text{.......(٣)}$$

من (٢) عندما $v=0$ ، فإن

$$t=\frac{1-e^{-\beta v_0}}{\alpha\beta}$$

ومن (٣) عندما $v=0$ ، فإن

$$x=\frac{1}{\alpha\beta^2}\left[1-(1+\beta v_0)e^{-\beta v_0}\right]$$

وهو المطلوب.

المسألة(٨):

$$a=-\frac{\mu^2}{x^3}=v\frac{dv}{dx}$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int_0^v v\,dv=-\int_k^x \frac{\mu^2}{x^3}dx \rightarrow v=\pm\frac{\mu}{kx}\sqrt{k^2-x^2}$$

وحيث أن الجسيم يتحرك نحو 0 فإن المسافة x تقل مع زيادة t ولذلك نأخذ الإشارة السالبة.

$$v=-\frac{\mu}{kx}\sqrt{k^2-x^2}=\frac{dx}{dt} \qquad \text{..............(١)}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

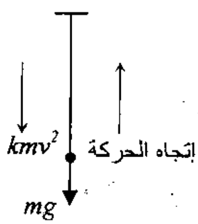
$$\int_k^x \frac{x\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = -\frac{\mu}{k}\int_0^t dt \;\rightarrow\; \sqrt{k^2-x^2} = \frac{\mu}{k}t \quad ....(٢)$$

وبوضع $x=l$ في (٢) ، (١) نحصل على السرعة التي يصل بها الجسيم إلى نقطة B والزمن الذي يأخذه الجسيم في الحركة من A إلى B.

$$v_B = -\frac{\mu}{kl}\sqrt{k^2-l^2} \quad , \quad t_B = \frac{k}{\mu}\sqrt{k^2-l^2}$$

وهو المطلوب.

<u>مسألة(٩):</u> حيث أن المطلوب هو إيجاد أقصى أرتفاع أي الارتفاع الذي تتلاشى عنده السرعة فمن المناسب إيجاد علاقة بين المسافة والسرعة.



معادلة الحركة: $a=-g-kv^2$

$$\therefore v\frac{dv}{dx} = -k\left(\frac{g}{k}+v^2\right) = -k\left(\gamma^2+v^2\right) \quad ....(١)$$

حيث $\gamma^2 = \frac{g}{k} \quad \leftarrow \quad k=\frac{g}{\gamma^2}$

السرعة القصوى $v_{\max}$ هي السرعة التي تتلاشى عندها العجلة أي

$$v_{\max} = \gamma \;\leftarrow\; v\frac{dv}{dx} = 0$$

من (١) بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int \frac{2v\,dv}{\gamma^2+v^2} = \int -2k\,dx$$

$$\therefore \ln(\gamma^2+v^2) = -2kx + c_1$$

في البداية: $c_1 = \ln(\gamma^2+v_0^2) \;\leftarrow\; x=0 \,,\, v=v_0$

$$\therefore \ln(\gamma^2+v^2) = -2kx + \ln(\gamma^2+v_0^2) \rightarrow \ln\frac{\gamma^2+v_0^2}{\gamma^2+v^2} = 2kx$$

$$\therefore x = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{\gamma^2+v_0^2}{\gamma^2+v^2}\right) \quad ....(٢)$$

وهي العلاقة بين x,v ولإيجاد أقصى ارتفاع x_{max} نضع $v=0$ في (٢)

$$\therefore\ x_{max}=\frac{1}{2k}\ln\frac{\gamma^2+v_0^2}{\gamma^2}=\frac{1}{2k}\ln\left(1+\frac{v_0^2}{\gamma^2}\right) \qquad ....(٣)$$

<u>ولإيجاد زمن أقصى ارتفاع</u>: نوجد علاقة بين t,v كالآتي:

من معادلة الحركة: $\frac{dv}{dt}=-g-kv^2=-k\left(\frac{g}{k}+v^2\right)=-k(\gamma^2+v^2)$

$$\therefore\ \frac{dv}{(\gamma^2+v^2)}=-k\,dt \ \rightarrow\ \int\frac{dv}{\gamma^2+v^2}=\int-k\,dt$$

$$\therefore\ \frac{1}{\gamma}\tan^{-1}\frac{v}{\gamma}=-kt+c_2$$

وفي البداية: $t=0\ ,\ v=v_0\ \leftarrow\ c_2=\frac{1}{\gamma}\tan^{-1}\frac{v_0}{\gamma}$

$$\therefore\ \frac{1}{\gamma}\left[\tan^{-1}\frac{v_0}{\gamma}-\tan^{-1}\frac{v}{\gamma}\right]=kt$$

$$\therefore\ t=\frac{1}{\gamma k}\left[\tan^{-1}\frac{v_0}{\gamma}-\tan^{-1}\frac{v}{\gamma}\right] \qquad ....(٤)$$

وهي العلاقة بين t,v ولإيجاد زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع t_{max} نضع $v=0$ في (٤) فنحصل على: $t_{max}=\frac{1}{\gamma k}\tan^{-1}\frac{v_0}{\gamma}$

وهو المطلوب.

<u>مسألة(١٠)</u>: المطلوب إيجاد أقصى ارتفاع أي علاقة بين المسافة والسرعة.

من معادلة الحركة:

$$v\frac{dv}{dx}=-g-kv^2=-k\left(\frac{g}{k}+v^2\right)=-k\left(\gamma^2+v^2\right) \quad ,\quad \gamma^2=\frac{g}{k}$$

بفصل المتغيرات والتكامل: $\int\frac{2v\,dv}{\gamma^2+v^2}=\int-2k\,dx$

$$\therefore\ \ln(\gamma^2+v^2)=-2kx+c_1$$

في البداية: $x = 0 \, , \, v = v_0 \;\rightarrow\; c_1 = \ln(\gamma^2 + v_0^2)$

$$\therefore \quad \ln\frac{\gamma^2 + v_0^2}{\gamma^2 + v^2} = 2kx \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{1}{2k}\ln\frac{\gamma^2 + v_0^2}{\gamma^2 + v^2}$$

عند أقصى ارتفاع فإن: $x = x_{\max} \, , v = 0$

$$\therefore \; x_{\max} = \frac{1}{2k}\ln\frac{\gamma^2 + v_0^2}{\gamma^2} = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{v_0^2}{\gamma^2}\right)$$

ولكن : $v_0 = \sqrt{\dfrac{3g}{k}} \;\; ، \;\; \gamma^2 = \dfrac{g}{k} \qquad \rightarrow \qquad x_{\max} = \dfrac{1}{2k}\ln\left[1 + \dfrac{3g/k}{g/k}\right]$

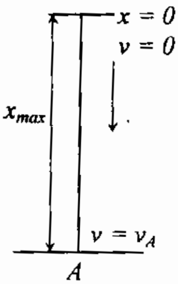
$$= \frac{1}{2k}\ln[1+3] = \frac{1}{2k}\ln 4 = \frac{1}{2k}\ln 2^2 = \frac{1}{k}\ln 2$$

<u>عندما تهبط النقطة المادية</u>: فإن معادلة الحركة تكون:

$$v\frac{dv}{dx} = g - kv^2 = k\left(\frac{g}{k} - v^2\right) = k\left(\gamma^2 - v^2\right)$$

ولما كان المطلوب هو إيجاد السرعة التي تصل بها النقطة إلى نقطة القذف أي:

$v = v_A$ عندما $x = x_{\max}$



$$\therefore \; \frac{v\,dv}{\gamma^2 - v^2} = k\,dx \quad \rightarrow \quad \int\frac{-2v\,dv}{\gamma^2 - v^2} = \int -2k\,dx$$

$$\therefore \; \ln\left(\gamma^2 - v^2\right) = -2kx + c_2$$

في البداية: $x = 0 \, , \, v = 0 \;\rightarrow\; c = \ln\gamma^2$

$$\therefore \; \ln\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - v^2} = 2kx \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{1}{2k}\ln\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - v^2}$$

عندما $x = x_{\max} = \dfrac{1}{k}\ln 2$ ، فإن $v = v_A \qquad \rightarrow \qquad \dfrac{1}{k}\ln 2 = \dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{\gamma^2}{\gamma^2 - v_A^2}$

$$\therefore 2\ln 2 = \ln\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - v_A^2} \rightarrow \ln 2^2 = \ln\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - v_A^2} \rightarrow \therefore 4 = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - v_A^2}$$

$$\therefore \gamma^2 - v_A^2 = \frac{\gamma^2}{4} \rightarrow v_A^2 = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{4} = \frac{3\gamma^2}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{g}{k}\right)$$

$$\therefore v_A = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{g}{k}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{k}} = \frac{1}{2}v_0$$

وهو المطلوب.

حل مسائل الباب الثاني

المسألة (١): نفرض كتلة الجسيم m فتكون معادلة حركته: $F = ma = 12 - 2t$

ومنها : $a = \frac{1}{m}(12 - 2t) = \frac{dv}{dt}$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على: $\int_0^v dv = \frac{1}{m}\int_0^t (12 - 2t)\, dt$

$v = \frac{1}{m}(12t - t^2)$

وبوضع $v = \frac{dx}{dt}$ وإجراء التكامل: $\int_0^x dx = \frac{1}{m}\int_0^t (12t - t^2) dt$

$x = \frac{1}{m}(6t^2 - \frac{1}{3}t^3)$

وبوضع $x = 0$ نحصل على الزمن المطلوب: $t = 0.18\text{sec}.$

المسألة(٢):

$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{a}$ [حيث: $m = 1$]

$\therefore \vec{a} = (6t - 8)\hat{i} - 60t^3\hat{j} + (20t^3 + 36t^2)\hat{k}$ ....(١)

لإيجاد السرعة: $\frac{d\vec{v}}{dt} = (6t - 8)\hat{i} - 60t^3\hat{j} + (20t^3 + 36t^2)\hat{k}$

وبإجراء التكامل : $\vec{v} = (3t^2 - 8t)\hat{i} - 15t^4\hat{j} + (5t^4 + 12t^3)\hat{k} + \vec{c}_1$

ولإيجاد C_1: في البداية $t = 0\ ,\ \vec{v} = \vec{v}_0 = 5\hat{i} + 4\hat{j}$

$\therefore \vec{C_1} = 5\hat{i} + 4\hat{j}$

$\therefore\ \vec{v} = (3t^2 - 8t + 5)\hat{i} - (15t^4 - 4)\hat{j} + (5t^4 + 12t^3)\hat{k}$ ....(٢)

وعند $t = 1$

$\therefore\ \vec{v}|_{t=1} = (3 - 8 + 5)\hat{i} - (15 - 4)\hat{j} + (5 + 12)\hat{k} = -11\hat{j} + 17\hat{k}$

ولإيجاد الموضع: نضع $\bar{v}=\dfrac{d\bar{r}}{dt}$ في (٢)

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\left(3t^{2}-8t+5\right)\hat{i}-\left(15t^{4}-4\right)\hat{j}+\left(5t^{4}+12t^{3}\right)\hat{k}$$

وباجراء التكامل: $\bar{r}=\left(t^{3}-4t^{2}+5t\right)\hat{i}-\left(3t^{5}-4t\right)\hat{j}+\left(t^{5}+3t^{4}\right)\hat{k}+\overline{C_2}$

ولإيجاد $\overline{C_2}$: في البداية $\bar{r}=\bar{r}_0=2\hat{i}-3\hat{k}$ ، $t=0$

$$\therefore\ \overline{C_2}=2\hat{i}-3\hat{k}$$

$$\therefore \bar{r}=\left(t^{3}-4t^{2}+5t+2\right)\hat{i}-\left(3t^{5}-4t\right)\hat{j}+\left(t^{5}+3t^{4}-3\right)\hat{k}$$

عند اللحظة $t=1$:

$$\bar{r}\,|_{t=1}=(1-4+5+2)\hat{i}-(3-4)\hat{j}+(1+3-3)\hat{k}=4\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$$

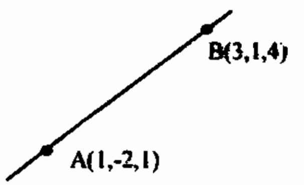
ولإيجاد طاقة الحركة عند تلك اللحظة : $T=\dfrac{1}{2}mv^{2}=\dfrac{1}{2}(\bar{v}\cdot\bar{v})$

وعندما $t=1$

$$T=\frac{1}{2}\left[\left(-11\hat{j}+17\hat{k}\right)\cdot\left(-11\hat{j}+17\hat{k}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[(-11)(-11)+(17)(17)\right]$$

وهو المطلوب . $=\dfrac{1}{2}[121+289]=\dfrac{1}{2}[410]=205\ J$

المسألة (٣):



$$\bar{F}=\left(2xy+z^{3}\right)\hat{i}+x^{2}\hat{j}+3xz^{2}\hat{k}$$

$$d\bar{r}=dx\hat{i}+dy\hat{j}+dz\hat{k}\ \text{،}\ W=\int_{A}^{B}\bar{F}\cdot d\bar{r}$$

$$\therefore W=\int_{A}^{B}\left[\left(2xy+z^{3}\right)dx+x^{2}dy+3xz^{2}dz\right]$$

$$=\left[2\frac{x^{2}}{2}y+0+0+3x\frac{z^{3}}{3}\right]\Bigg|_{A}^{B}=\left[x^{2}y+xz^{3}\right]\Bigg|_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)}$$

$$=\left[(9+(3)(64))-(-2+1)\right]=[201+1]=202$$

المسألة (٤) :

$$\vec{F} = m\vec{a} = a\cos\omega t\hat{i} + b\sin\omega t\hat{j}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{a}{m}\cos\omega t\hat{i} + \frac{b}{m}\sin\omega t\hat{j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

ولإيجاد السرعة : نضع $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\therefore \int d\vec{v} = \int \left[\ \frac{a}{m}\cos\omega t\hat{i} + \frac{b}{m}\sin\omega t\hat{j}\ \right]dt$$

وبإجراء التكامل: $\vec{v} = \dfrac{a}{m}\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\hat{i} - \dfrac{b}{m}\dfrac{1}{\omega}\cos\omega t\hat{j} + \overline{C_1}$

ولإيجاد $\overline{C_1}$: في البداية $\vec{v} = 0$, $t = 0 \longrightarrow \overline{C_1} = \dfrac{b}{m\omega}\hat{j}$

$$\therefore \vec{v} = \frac{a}{m\omega}\sin\omega t\hat{i} - \frac{b}{m\omega}(\ \cos\omega t - 1\ )\hat{j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

وهي السرعة عند أي لحظة .

ولإيجاد الموضع عند أي لحظة: نضع $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ في (٢) :

$$\therefore \int d\vec{r} = \int \left[\ \frac{a}{m\omega}\sin\omega t\hat{i} - \frac{b}{m\omega}(\ \cos\omega t - 1\ )\hat{j}\ \right]dt$$

وبإجراء التكامل : $\therefore \vec{r} = -\dfrac{a}{m\omega^2}\cos\omega t\hat{i} - \dfrac{b}{m\omega}\left(\ \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t - t\ \right)\hat{j} + \overline{C_2}$

ولإيجاد $\overline{C_2}$: في البداية $\vec{r} = 0 \longrightarrow \overline{C_2} = \dfrac{a}{m\omega^2}\hat{i}$

$$\therefore \vec{r} = -\frac{a}{m\omega^2}(\cos\omega t - 1)\hat{i} - \frac{b}{m\omega^2}(\ \sin\omega t - \omega t\ )\hat{j}$$

وتصبح المعادلات البارامترية للمسار هي:

$$x = -\frac{a}{m\omega^2}(\cos\omega t - 1) = \frac{a}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$

$$y = -\frac{b}{m\omega^2}(\ \sin\omega t - \omega t\ ) = \frac{b}{m\omega^2}(\ \omega t - \sin\omega t\ )$$

$$\therefore x = A\left(1-\cos\phi\right) \ , \quad y = B\left(\phi - \sin\phi\right)$$

حيث :

$$A = \frac{a}{m\omega^2} \ , B = \frac{b}{m\omega^2} \ , \ \phi = \omega t$$

المسألة (٥) :

$$\vec{r} = a\left(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}\right) \qquad \therefore x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$$

$$d\vec{r} = a\left(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}\right)d\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$\overline{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(x\hat{i} - y\hat{j}\right) = \frac{1}{a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}\left(a\cos\theta\hat{i} - a\sin\theta\hat{j}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left(\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

ويكون الشغل المبذول لمرة واحدة حول الدائرة (θ من صفر $\longleftarrow 2\pi$)

$$W = \int \overline{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int \left[\left(\frac{1}{a}\cos\theta\right)(-a\sin\theta) + \left(-\frac{1}{a}\sin\theta\right)(a\cos\theta)\right]d\theta$$

$$= \int \left[-\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta\right]d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta\sin\theta\ d\theta\right]$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \cos\theta d\left(\cos\theta\right) = 2\left[\frac{cs^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \left[1-1\right] = 0$$

المسألة (٦):

$$\vec{r} = a\left[\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j}\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

المطلوب الأول: معادلة المسار:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\therefore x = a\cos\omega t, y = a\sin\omega t$$

بالتربيع والجمع:

$$x^2 + y^2 = a^2\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right) = a^2$$

وهي معادلة دائرة نصف قطرها a ومركزها نقطة الأصل.

المطلوب الثاني: بتفاضل (١):

$$\vec{v} = a\left[-\omega \sin \omega t\hat{i} + \omega \cos \omega t\hat{j}\right]$$

$$= a\omega\left[-\sin \omega t\hat{i} + \cos \omega t\hat{j}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

ولإثبات أن $\vec{r} \perp \vec{v} \longleftarrow$ نوجد $\vec{v}\cdot\vec{r}$ فمن (٢) و (١):

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = a^2 w\left[-\sin \omega t \cos \omega t + \cos \omega t \sin \omega t\right] = 0 \longrightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$$

المطلوب الثالث : بتفاضل (٢) :

$$\vec{a} = a\omega\left[-\cos \omega t\hat{i} - \sin \omega t\hat{j}\right] = -a\underbrace{\left(\cos \omega t\hat{i} + \sin \omega t\hat{j}\right)}_{=\vec{r}} = -\omega^2\vec{r}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

∴القوة المؤثرة مقدارها $\left(m\omega^2\vec{r}\right)$ وإتجاهها عكس إتجاه $\vec{r}$ أي نحو مركز الدائرة.

المطلوب الرابع:

$$W = \int \vec{F}\cdot d\,\vec{r}$$

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r} = -m\omega^2 a\left(\cos \omega t\hat{i} + \sin \omega t\hat{j}\right)$$

$$d\,\vec{r} = a\left(-\omega \sin \omega t\hat{i} + \omega \cos \omega t\hat{j}\right)dt = a\left(-\sin \omega t\hat{i} + \cos \omega t\hat{j}\right)d(\omega t)$$

وبكتابة $\omega t = \theta$:

$$d\,\vec{r} = a\left(-\omega \sin \theta\hat{i} + \omega \cos \theta\hat{j}\right)d\theta$$

$$\vec{F} = -m\omega^2 a\left(\cos \theta\hat{i} + \sin \theta\hat{j}\right)$$

حيث θ تتحصر بين $0 \longrightarrow 2\pi$

أي أن ωt تتحصر بين 0 ، 2π

أي أن t تتحصر بين 0 ، $\dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\therefore W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -m\omega^2 a^2 \int_0^{2\pi} \left[-\cos\theta \sin\theta + \sin\theta \cos\theta\right]d\theta = 0$$

وهو الشغل المبذول في تحريك الجسيم مرة واحدة حول الدائرة.

المطلوب الخامس: عزم القوة: $\overline{M}=\vec{r}\wedge\overline{F}$

عزم كمية الحركة: $\overline{G}=\vec{r}\wedge\overline{p}$

$$\therefore \overline{M}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a\cos\omega t & a\sin\omega t & 0 \\ -m\omega^2 a\cos\omega t & -m\omega^2 a\sin\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\,(0)-\hat{j}\,(0)+\hat{k}\left(-m\omega^2a^2\sin\omega t\cos\omega t+m\omega^2a^2\sin\omega t\cos\omega t\right)=0$$

أيضاً:

$$\overline{G}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a\cos\omega t & a\sin\omega t & 0 \\ -m\omega a\sin\omega t & m\omega a\cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

حيث كمية الحركة

$$\overline{p}=m\overline{v}=ma\omega\left(-\sin\omega t\hat{i}+\cos\omega t\hat{j}\right)$$

$$\therefore \overline{G}=\hat{i}\,(0)-\hat{j}\,(0)+\hat{k}\left(m\omega a^2\sin\cos^2\omega t+m\omega a^2\sin^2\omega t\right)=m\omega a^2\hat{k}$$

المطلوب السادس: قانون بقاء الطاقة:

طاقة الحركة:

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left[\overline{v}\cdot\overline{v}\right]=\frac{1}{2}ma^2\left[(-\omega\sin\omega t)^2+(\omega\cos\omega t)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}ma^2\omega^2\left[\left(\sin^2\omega t\right)+\left(\cos^2\omega t\right)\right]=\frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

طاقة الجهد:

$$U=-\int_0^r\overline{F}\cdot d\vec{r}=-\int_0^r\left(-m\omega^2\vec{r}\right)\cdot\left(d\vec{r}\right)=m\omega^2\int_0^r\vec{r}\,d\,\vec{r}$$

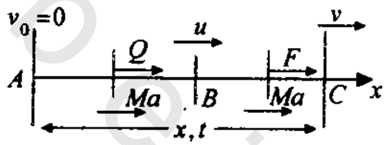
$$=m\omega^2\int_0^r r\,d\overline{r}=m\omega^2\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^r=\frac{1}{2}m\omega^2r^2$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2\left(a^2\cos^2\omega t+a^2\sin^2\omega t\right)=\frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

$$\therefore E = T + U = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2 = ma^2\omega^2 = const.$$

حيث m,ω,a ثوابت . وهو المطلوب.

المسألة(٧):



نفرض أن القطار يتحرك بقوة ثابتة المقدار Q من A إلى B وبقدرة ثابتة (معدل الشغل المبذول) $P = Qu$ من B إلى C.

معادلات الحركة: من $A \to B$:

$$Ma = Q \rightarrow a = \frac{Q}{M} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \int_0^u dv = \frac{Q}{M}\int_0^t dt \qquad \rightarrow \qquad t = \frac{Q}{M}u = t_{A\to B} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

$$\int_0^u v\,dv = \frac{Q}{M}\int_0^x dx \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{M}{2Q}u^2 = AB \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

من $B \to C$: إذا كانت F تمثل قوة السحب فإن:

$$Ma = F \quad , \quad P = QU = Fv \qquad \rightarrow \qquad F = \frac{Qu}{v}$$

$$\therefore Ma = \frac{Qu}{v} \rightarrow a = \frac{Qu}{Mv} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \int_u^v v\,dv = \frac{Qu}{M}\int_0^t dt \qquad \rightarrow \qquad t = \frac{M}{2Qu}(v^2 - u^2) = t_{B\to C} \qquad \_\_\_(3)$$

$$\int_u^v v^2 dv = \frac{Qu}{M}\int_0^x dx \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{M}{3Qu}(v^3 - u^3) = BC \qquad \_\_\_(4)$$

المعادلات (2),(1) تعطي المسافة والزمن مقاسه من نقطة A لمرحلة العجلة الثابتة، المعادلات (4),(3) تعطي المسافة والزمن مقاسه من نقطة B لمرحلة العجلة المتغيرة.

<u>زمن الحركة الكلي</u>: من (3),(1):

$$t=\frac{M}{Q}u+\frac{M}{2Qu}(v^2-u^2)=\frac{M}{2Qu}(v^2+u^2)=\frac{M}{2p}(v^2+u^2) \quad \_\_\_\_(5)$$

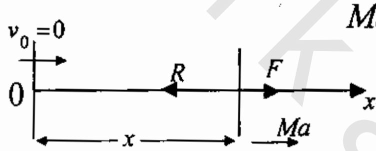
المسافة الكلية: من (4),(2):

$$x=\frac{2M}{2Q}u^2+\frac{M}{3Qu}(v^3-u^3)=\frac{M}{6Qu}(u^3+2v^3)=\frac{M}{6p}(u^3+2v^3) \quad \_(6)$$

وهو المطلوب.

<u>المسألة(٨):</u> معادلة حركة القارب عند أي لحظة:

$$Ma=F-R=F-kMv^2 \quad \_\_\_\_(1)$$



أقصى سرعة للقارب هي السرعة التي يكـــون عندها العجلة مساوية للصفر.

فمن (1): $a=0$ عندما $v=u$:

$$a=\frac{F}{M}-ku^2=0 \quad \therefore\ k=\frac{F}{Mu^2}=\frac{p}{Mu^3}$$

وذلك لأن العلاقة بين القوة F والقدرة P هي: $p=Fu$

وتصبح العجلة عند أي لحظة:

$$a=\frac{F}{M}-kv^2=\frac{p}{Mu}-\frac{pv^2}{Mu^3}=\frac{p}{Mu^3}(u^2-v^2) \quad \_\_\_\_(1)$$

وبوضع $a=\frac{dv}{dt}$ وفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int_0^v\frac{dv}{u^2-v^2}=\frac{p}{Mu^3}\int_0^t dt \ \rightarrow\ t=\frac{Mu^2}{2p}\ln\left(\frac{u+v}{u-v}\right) \quad \_\_(2)$$

أيضاً بوضع $a=v\frac{dv}{dx}$ وفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int_0^v\frac{v\,dv}{u^2-v^2}=\frac{p}{Mu^3}\int_0^x dx \ \rightarrow\ x=-\frac{Mu^3}{2p}\ln\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right) \quad \_\_\_\_(3)$$

العلاقتان (3),(2) هما العلاقتان المطلوبتان.

المسألة(٩): معادلة حركة النقطة المادية:

$$\ddot{x} = -\frac{\pi^2}{64}x \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة فيها: $w^2 = \frac{\pi^2}{64} \leftarrow w = \frac{\pi}{8}$

الحل العام للمعادلة (1): $x = a\cos(wt+\varepsilon) = a\cos(\frac{\pi}{8}t+\varepsilon) \quad \_\_\_\_ (2)$

بالتفاضل بالنسبة للزمن: $\dot{x} = -a(\frac{\pi}{8})\sin(\frac{\pi}{8}t+\varepsilon) \quad \_\_\_\_ (3)$

عندما $t=2$ فإن $x=0$ فمن (2): $0 = a\cos(\frac{\pi}{4}+\varepsilon)$

وهي زاوية الطور $\boxed{\varepsilon = \frac{\pi}{4}}$ $\quad \therefore \cos(\frac{\pi}{4}+\varepsilon) = 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}+\varepsilon = \frac{\pi}{2} \rightarrow$

عندما $t=4$ فإن $\dot{x}=-4$ فمن (3):

$$-4 = -a(\frac{\pi}{8})\sin(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)$$

$$= -a(\frac{\pi}{8})\cos\varepsilon = -a(\frac{\pi}{8})\cos\frac{\pi}{4} = -a(\frac{\pi}{8})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{a\pi}{8\sqrt{2}}$$

وتكون سعة الحركة: $a = \frac{32\sqrt{2}}{\pi}$

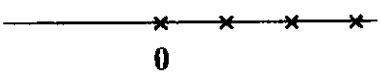
وعلى ذلك فإن حركة النقطة المادية تتعين بالعلاقة:

$$x = a\cos(\frac{\pi}{8}+\varepsilon) = \frac{32\sqrt{2}}{\pi}\cos(\frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{4})$$

والزمن الدوري للحركة يكون: $t = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi(\frac{8}{\pi}) = 16 \text{ sec.}$

المسألة(١٠): قياس الزمن يبدأ من مركز

الحركة 0 أي أن $t=0\,, \quad x=0$



ولكن: $x = a\cos(wt+\varepsilon)$

$$\therefore 0 = a\cos(0+\varepsilon) \rightarrow \cos\varepsilon = 0 \rightarrow \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ x = a\cos(wt + \frac{\pi}{2}) = a\sin wt \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

بالتعويض عن قيم x الثلاث في (1):

$$1 = a\sin wt \qquad \_\_\_\_\_\_(2)$$

$$5 = a\sin w(t+1) = a\sin wt\cos w + a\cos wt\sin w \qquad \_\_\_\_\_\_(3)$$

$$5 = a\sin w(t+2) = a\sin wt\ \cos 2w + a\cos wt\ \sin 2w \qquad \_\_\_\_\_\_(4)$$

بحل تلك المعادلات نجد أن:

$$w = \cos^{-1}\frac{3}{5} \leftarrow \quad \cos w = \frac{3}{5}$$

ويكون الزمن الدوري:

$$t = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\cos^{-1}\frac{3}{5}}$$

<u>حل المعادلات(4),(3),(2):</u> بالتعويض من (2) في (4),(3) نحصل على:

$$5 = \cos w + a\cos wt\ \sin w \qquad \_\_\_\_\_\_(5)$$

$$5 = \cos 2w + a\cos wt\ \sin 2w \qquad \_\_\_\_\_\_(6)$$

بضرب (5) في $\sin 2w$ و (6) في $\sin w$ والطرح نحصل على:

$$5\sin 2w - 5\sin w = \sin 2w\ \cos w - \cos 2w\ \sin w$$

$$= \sin(2w - w) = \sin w$$

$$\therefore\ 5(\sin 2w) = 6\sin w \ \rightarrow\ 5\times 2\sin w\cos w = 6\sin w$$

$$\therefore\ \frac{5}{3}\cos w = 1 \qquad \rightarrow \qquad \cos w = \frac{3}{5}$$

<u>المسألة(١١):</u> إذا كانت m_0 هي الكتلة الأصلية للصاروخ فإن: $m_0 = 5m$

ويكون التغير الحادث في الكتلة في وحدة الزمن (أي كتلة الوقود المشتعل في الثانية) هو:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{2m}{60} = \frac{m}{30}$$

وهذا التغير يتناسب مع m_0 أي أن:

$$\frac{dM}{dt} = \lambda m_0 = 5\lambda m$$

$$\therefore \lambda = \frac{m/30}{5m} = \frac{\text{كتلة الوقود المشتعل في الثانية}}{\text{الكتلة الكلية للصاروخ}} = \frac{1}{150} \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

من معادلة حركة الصاروخ:

$$\frac{dv}{dt}=-gt+\frac{w\lambda}{1-\lambda t}=-g+\frac{w\cdot\frac{1}{150}}{1-\frac{1}{150}t}=-g+\frac{w}{150-t} \qquad \_\_\_\_(2)$$

عند بداية الحركة: $t=0$ وتكون: $\frac{dv}{dt}=-g+\frac{w}{150}$

ولكي يرتفع الصاروخ يجب أن تكون هذه الكمية موجبة أي أن الصاروخ لا ينطلق على الفور إلا إذا كان $\frac{dv}{dt}>0$ أي إذا كان: $w>150g$. وهو المطلوب أولاً.

<u>إذا كانت $w = 125\,g$</u> : معادلة الحركة (2) تصبح:

$$\frac{dv}{dt}=-g+\frac{125g}{150-t} \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

يبدأ الصاروخ في الانطلاق عندما تصبح العجلة $\frac{dv}{dt}=0$ حيث أنه إذا كانت عجلة الصاروخ سالبة فإنه لن ينطلق، وعندما تساوي صفراً فإن الصاروخ يكتسب بعدها عجلة موجبة وينطلق فوراً.

∴ شرط أن يبدأ الصاروخ في الانطلاق هو: $-g+\frac{125g}{150-t}=0$

$$\therefore 125=150-t \;\rightarrow\; t=25\text{sec.}$$

أي أن الصاروخ لا ينطلق إلا بعد 25 ثانية من بدء اشتعال الوقود.

<u>لإيجاد أقصى سرعة:</u> بتكامل معادلة الحركة (3) بالنسبة للزمن:

$$v=-g\int dt+125g\int\frac{dt}{150-t}=-gt-125g\,\ln(150-t)+c$$

ولكن $v=0$ عندما : $t=25$:

$$c=25g+125g\ln 125 \;\leftarrow\; 0=-25g-125g\ln 125+c$$

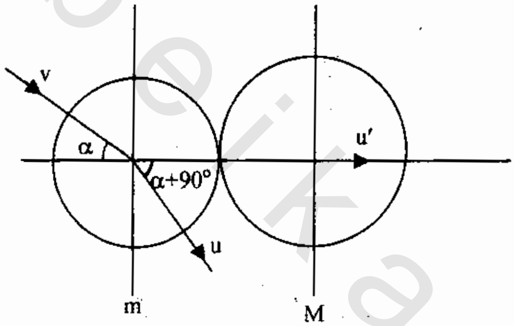
$$\therefore v=25g-gt+125g\ln\frac{125}{150-t}$$

وهذه السرعة تتزايد باستمرار حتى ينتهي الوقـود أي بعـد زمـن $t = 60\text{sec}$.

وتصبح السرعة حينئذ سرعة نهائية (قصوى) وقيمتها:

$$v_{\max} = 25g - 60g + 125g\ln\frac{125}{90} = -35g + 125g\ln\frac{25}{18} = 5g\,(25\ln\frac{25}{18} - 7)$$

وهو المطلوب ثانياً.



المسألة (١٢): بالنسبة للكرة m :

السرعة قبل التصادم v تصنع زاوية α مع خط المركزين .

السرعة بعد التصادم u تصنع زاوية $(\alpha + 90^\circ)$ مع خط المركزين .

بالنسبة للكرة M :

قبل التصادم : الكرة ساكنة ، وبعده : الكرة تتحرك بسرعة u' في إتجاه خط المركزين .

للكرة m : معادلة السرعة في الإتجاه العمودي :

$$v\sin\alpha = u\sin(\alpha + 90^\circ) = u\cos\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

قانون ثبوت كمية الحركة (في إتجاه خط المركزين) :

$$mv\cos\alpha = mu\cos(\alpha + 90^\circ) + Mu'$$

$$= -mu\sin\alpha + Mu' \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

قانون نيوتن التجريبي (في إتجاه خط المركزين) :

$$u\cos(\alpha + 90^\circ) - u' = -e(v\cos\alpha - 0)$$

$$\therefore -u\sin\alpha - u' = -ev\cos\alpha$$

$$\therefore u\sin + u' = ev\cos\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

من (٣) : $u' = e\,v\cos\alpha - u\sin\alpha$

بالتعويض في (٢) :

$$mv\cos\alpha = -mu\sin\alpha + M(ev\cos\alpha - u\sin\alpha)$$
$$= Mev\cos\alpha - (M+m)u\sin\alpha$$
$$= Mev\cos\alpha - (M+m)\cdot\underbrace{\frac{v\sin\alpha}{\cos\alpha}}_{\text{من }(1)}\sin\alpha$$
$$\therefore mv\cos^2\alpha = Mev\cos^2\alpha - (M+m)v\sin^2\alpha$$
$$\therefore (M+m)\sin^2\alpha = (eM-m)\cos^2\alpha \rightarrow \tan^2\alpha = \frac{eM-m}{M+m}$$

وهو المطلوب .

حل مسائل الباب الثالث

المسألة(١):

$\vec{r} = \omega t\hat{i} + k\sin\omega t\hat{j} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$\therefore x = \omega t$ ....(١)

$y = k\sin\omega t$ ....(٢)

المعادلة الكرتيزية للمسار:

هي علاقة بالصورة $y = f(x)$ فبحذف t بين (٢) و (١): و التعويض من (١) في (٢) حيث: $t = \frac{x}{\omega}$

$\therefore\ y = k\sin\omega\left(\frac{x}{\omega}\right) = k\sin x$

ولإيجاد السرعة : $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega\hat{i} + k\omega\cos\omega t\,\hat{j} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$

مقداراً: $V = \sqrt{\omega^2 + k^2\omega^2\cos^2\omega t} = \omega\sqrt{1 + k^2\cos^2\omega t}$

اتجاهاً: $\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{k\omega\cos\omega t}{\omega} = k\cos\omega t$

ولإيجاد العجلة : $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (0)\hat{i} + \left(-k\omega^2\sin\omega t\right)\hat{j} \quad = -k\omega^2\sin\omega t$

مقداراً: $a = \left|\vec{a}\right| = k\omega^2\sin\omega t$

اتجاهاً: هو عكس اتجاه محور y (أي في اتجاه محور y إلى أسفل) (نتيجة وجود $-\hat{j}$)

المسألة(٢): مركبتا السرعة $\dot{x},\dot{y}$ ، مركبتا العجلة $\ddot{x},\ddot{y}$ ، اتجاه السرعة $\tan^{-1}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ ، اتجاه العجلة $\tan^{-1}\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}$ فإذا كان اتجاهي السرعة والعجلة متطابقين فإن:

$$\tan^{-1}\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan^{-1}\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}$$

$$\therefore \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \qquad \therefore \frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore \int \frac{d\dot{y}}{\dot{y}} = \int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}}$$

$$\ln\dot{y} = \ln\dot{x} + \underbrace{\ln c}_{\text{ثابت}} \qquad \therefore \ln\dot{y} = \ln\dot{x}c \longrightarrow \dot{y} = c\dot{x}$$

بالتكامل مرة ثانية : a ثابت ، $y = cx + a$ ، وهذه المعادلة تمثل خطاً مستقيماً

∴ الجسيم الذي ينطبق إتجاهي سرعته مع عجلته يتحرك في خط مستقيم.

وهو المطلوب .

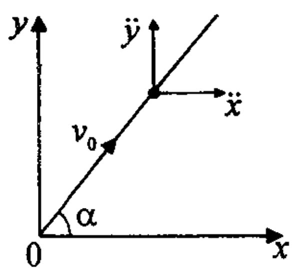
<u>المسألة (٣):</u>

$$\ddot{x} = -k\dot{x} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

$$\therefore \frac{d\dot{x}}{dt} = -k\dot{x} \rightarrow \int_{v_0\cos\alpha}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k\int_0^t dt$$

$$\therefore \dot{x} = (v_0\cos\alpha)\cdot e^{-kt} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

$$\therefore \ddot{y} = -k\dot{y} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(3)}$$



$$\therefore \frac{d\dot{y}}{dt} = -k\dot{y} \rightarrow \int_{v_0\sin\alpha}^{\dot{y}} \frac{d\dot{y}}{\dot{y}} = -k\int_0^t dt$$

$$\therefore \dot{y} = (v_0\sin\alpha)\cdot e^{-kt} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(4)}$$

من (2): $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha\cdot e^{-kt}$

وبإجراء التكامل:

$$\int_0^x dx = v_0\cos\alpha\int_0^t e^{-kt}dt$$

$$\therefore x = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}) \qquad \_\_\_\_\_\_(5)$$

ومن (4):

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha \cdot e^{-kt}$$

وبإجراء التكامل:

$$\int_0^y dy = v_0 \sin\alpha \int_0^t e^{-kt}\, dt$$

$$\therefore y = \frac{v_0 \sin\alpha}{k}(1 - e^{-kt}) \qquad \_\_\_\_\_\_(6)$$

المعادلات (6),(5) هما المعادلتان البارامتريتان للمسار.

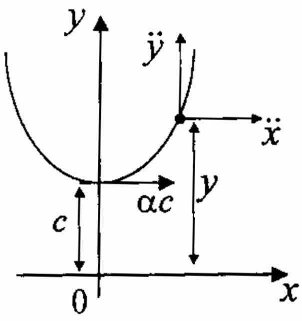
ولإيجاد المعادلة الكرتيزية: نحذف t بين (6),(5) فنحصل على: $y = x\tan\alpha$

وهي المعادلة الكرتيزية، ومن الواضح أنها معادلة خط مستقيم يمسر بنقطة الأصل 0 ويميل على الأفقي بزاوية α . وهو المطلوب.

المسألة(٤):

$$\ddot{x} = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

$$\therefore \frac{d\dot{x}}{dt} = 0$$



$$\therefore \dot{x} = const. = v_0 = \alpha c \qquad \_\_\_\_\_\_(2)$$

$$\ddot{y} = \alpha^2 y \qquad \_\_\_\_\_\_(3)$$

$$\therefore \frac{d\dot{y}}{dt} = \alpha^2 y \quad \to \quad \frac{d\dot{y}}{dy}\frac{dy}{dt} = \alpha^2 y$$

$$\therefore \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = \alpha^2 y \qquad \_\_\_\_\_\_(4)$$

وبفصل المتغيرات و التكامل:

$$\int_0^{\dot{y}} \dot{y}\, d\dot{y} = \alpha^2 \int_0^y y\, dy$$

$$\therefore \dot{y} = \pm\alpha\sqrt{y^2 - c^2}$$

وبأخذ الإشارة الموجبة لأن $\dot{y}$ موجبة (العجلة طاردة):

$$\therefore\ \dot{y} = \alpha\sqrt{y^2 - c^2} \qquad \_\_\_\_\_\_ (5)$$

من (5),(2) بالقسمة:

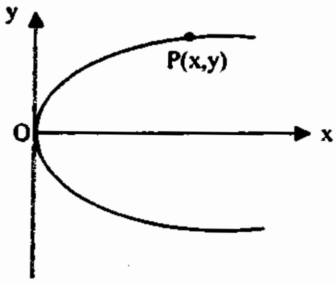
$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{c} = \frac{dy}{dx}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore \int_c^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{1}{c}\int_0^x dx$$

$$\therefore \cosh^{-1}\frac{y}{c} = \frac{x}{c} \rightarrow \frac{y}{c} = \cosh\frac{x}{c} \rightarrow y = c\cosh\frac{x}{c}$$

وهو المطلوب.



<u>مسألة(٥):</u> حيث أن مقدار السرعة ثابتاً ويساوي 1

$$\therefore\ v = |\vec{v}| = 1$$

$$\therefore \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 1$$

$$\therefore \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

ومن معادلة القطع: $y^2 = 2x$

بالتفاضل بالنسبة للزمن: $2y\dfrac{dy}{dt} = 2\dfrac{dx}{dt}$

$$\therefore y\dot{y} = \dot{x} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

بالتعويض عن $\dot{x}$ في (١) من (٢) :

$$(y\dot{y})^2 + \dot{y}^2 = 1$$

$$\therefore\ \dot{y}^2\left(1 + y^2\right) = 1 \quad \therefore\ \dot{y}^2 = \frac{1}{1 + y^2} \ \ldots\ldots\ldots (٣)$$

بالتعويض عن $\dot{y}$ في (١) من (٢) :

$$\dot{x}^2+\left(\frac{\dot{x}}{y}\right)^2=1$$

$$\dot{x}^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)=1$$

$$\therefore\ \dot{x}^2=\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}=\frac{1}{\frac{1+y^2}{y^2}}=\frac{y^2}{1+y^2}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots(٤)$$

ومن معادلة القطع: $y^2=2x$

$$\therefore\ \dot{x}^2=\frac{2x}{1+2x}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots(٥)$$

<u>لإيجاد مركبتي عجلة الجسيم</u> : حيث أن العجلة: $a=\frac{1}{2}\frac{d\left(v^2\right)}{dr}$

فبتفاضل (٥):

$$\therefore\ a_x=\frac{1}{2}\frac{d\left(\dot{x}^2\right)}{dx}=\frac{2}{\left(1+2x\right)^2}$$

وبتفاضل (٣):

$$\therefore\ a_y=\frac{1}{2}\frac{d\left(\dot{y}^2\right)}{dy}=-\frac{y}{\left(1+y^2\right)^2}$$

<u>ولإيجاد الزمن</u>: حيث أن الجسيم يتحرك علي نصف القطع العلوي فإن $y=+$

فمن (٣):

$$\dot{y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{dy}{dt}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int dt=\int\sqrt{1+y^2}\,dy$$

ولإيجاد هذا التكامل:

نضع

$$dy = \cosh\theta d\theta \longleftarrow y = \sinh\theta$$

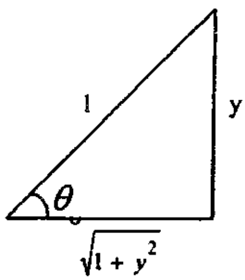
$$\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta = 2y\sqrt{1+y^2}$$

$$\cosh^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cosh 2\theta)$$

$$\therefore\ t = \int\sqrt{1+\sinh^2\theta}(\cosh\theta d\theta) = \int\cosh^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int(1+\cosh 2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sinh^{-1}y + y\sqrt{1+y^2}\right] + C$$



حيث

$$y = \sqrt{1-(1+y^2)} = \sqrt{y^2}$$

ولإيجاد C : في البداية $y = 0$, $t = 0 \longrightarrow C = 0$

$$\therefore\ t = \frac{1}{2}\left[\sinh^{-1}y + y\sqrt{1+y^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\sinh^{-1}y + y\sqrt{1+2x}\right]$$

وهو المطلوب .

المسألة(٦): مركبتا العجلة:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{2b}{r^3}\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{b}{r^3}\sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

يلاحظ أن المركبة a_θ يمكن كتابتها بالصورة:

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = \frac{b}{r^3}\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = \frac{b}{r^2}\sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

ولكن :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}$$

وتصبح المعادلة (٣) :
$$\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(r^2\dot{\theta}\right)=\frac{b}{r^2}\sin\theta$$
$$\therefore\left(r^2\dot{\theta}\right)\frac{d}{d\theta}\left(r^2\dot{\theta}\right)=b\sin\theta$$
$$\therefore\left(r^2\dot{\theta}\right)d\left(r^2\dot{\theta}\right)=b\sin\theta d\theta$$

وبالتكامل:
$$\frac{1}{2}\left(r^2\dot{\theta}\right)^2=-b\cos\theta+C$$
$$\therefore\left(r^2\dot{\theta}\right)^2=\underbrace{2C}_{=A}-2b\cos\theta=A-2b\cos\theta\ \ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

وهو المطلوب الأول .

أيضاً: من (٤) :
$$2b\cos\theta=A-r^4\dot{\theta}^2$$

ومن (١) :
$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\frac{2b\cos\theta}{r^3}=\frac{1}{r^3}\left[A-r^4\dot{\theta}^2\right]=\frac{A}{r^3}-r\dot{\theta}^2$$
$$\therefore\ \ddot{r}=\frac{A}{r^3}\qquad\qquad\therefore\ \frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{A}{r^3}$$
$$\therefore\ \frac{d\dot{r}}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=\frac{A}{r^3}\qquad\qquad\therefore\ \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{A}{r^3}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:
$$\int\dot{r}d\dot{r}=\int\frac{A}{r^3}dr$$
$$\therefore\ \dot{r}^2=-\frac{A}{r^2}+C_1$$

ولإيجاد C_1: عند $r=a,t=0\longleftarrow\dot{r}=0\longleftarrow C_1=\frac{A}{a^2}$
$$\therefore\dot{r}^2=-\frac{A}{r^2}+\frac{A}{a^2}=\frac{A}{r^2a^2}\left(r^2-a^2\right)$$

$$\therefore \quad \dot{r} = \frac{\sqrt{A}}{ra}\sqrt{r^2 - a^2} = \frac{n}{r}\sqrt{r^2 - a^2} = \frac{dr}{dt}$$

وذلك لأن $\frac{\sqrt{A}}{a} = n$

وبإجراء التكامل :

$$\int_0^r \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - a^2}} = \int_0^r ndt$$

$$\therefore \sqrt{r^2 - a^2} = nt$$

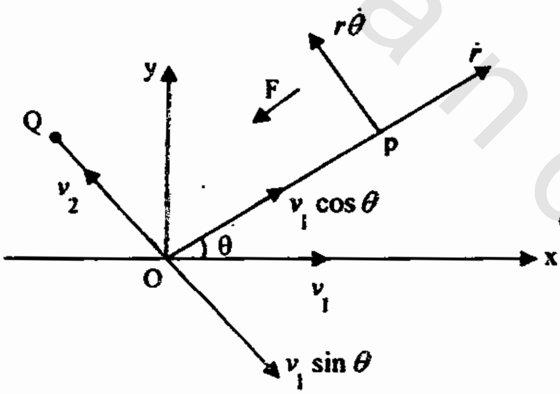
$$r^2 - a^2 = n^2 t^2$$

$$\therefore \quad r^2 = a^2 + n^2 t^2 \rightarrow \quad \therefore r^2 = a^2 + n^2 t^2$$

وهو المطلوب ثانياً.

<u>المسألة (٧):</u>

نفرض أن v_1 مركبة السرعة في اتجاه OX ، v_2 مركبة السرعة في اتجاه OQ العمودي على OP ، أيضاً فإن مركبتا السرعة في اتجاهي تزايد r,θ هما: $\dot{r}, r\dot{\theta}$ حيث:



$$\dot{r} = v_1 \cos\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

$$r\dot{\theta} = v_2 - v_1 \sin\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

بقسمة (١) على (٢) :

$$\frac{\frac{dr}{dt}}{r\frac{d\theta}{dt}} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{v_1 \cos\theta}{v_2 - v_1 \sin\theta}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int\frac{dr}{r}=\int\frac{v_1\cos\theta d\theta}{v_2-v_1\sin\theta}$$

$$\therefore \ln r=-\ln\left(v_2-v_1\sin\theta\right)+\underbrace{\ln C}_{const}$$

$$\therefore r=\frac{C}{v_2-v_1\sin\theta}=\frac{\dfrac{C}{v_2}}{1-\dfrac{v_1}{v_2}\sin\theta}$$

$$=\frac{\ell}{1-e\ \sin\theta}\quad\text{........................}(٣)$$

حيث $\ell=\dfrac{C}{v_2}$ ، $e=\dfrac{v_1}{v_2}$

المعادلة (٣) هي معادلة مسار الجسيم وهي معادلة قطع مكافئ .

وإذا كانت القوة التي تعمل في اتجاه $\overline{PO}$ هي $\vec{F}$ فإن معادلتي الحركة هما:

$$ma_r=-F,ma_\theta=0$$

$$\therefore m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-F\quad\text{......................}(٤)$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0\quad\text{........................}(٥)$$

من (٥) :

$$r^2\dot{\theta}=const.=h\quad\text{.........................}(٦)$$

ومن (٣) :

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{e\ell\cos\theta\cdot\dot{\theta}}{\left(1-e\sin\theta\right)^2}=\frac{e\ell\cos\theta\cdot h}{\left(1-e\sin\theta\right)^2\cdot r^2}=\frac{eh\cos\theta}{\ell}$$

حيث :

$$\ell^2=r^2\left(1-e\sin\theta\right)^2\qquad(\text{من } (٣))$$

ولكن :

$$\ddot{r}=\frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{d\dot{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\left(-\frac{e}{\ell}h\sin\theta\right)\cdot\dot{\theta}$$

$$=-\frac{e}{\ell}\frac{h^2}{r^2}\sin\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٧)$$

من (٧) و (٦) و (٤) نجد أن :

$$F=-m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-m\left[\frac{-eh^2}{\ell}\frac{\sin\theta}{r^2}-\frac{h^2}{r^3}\right]$$

$$=\frac{mh^2}{r^2}\left[\frac{e\sin\theta}{\ell}+\frac{1-e\sin\theta}{\ell}\right]=\frac{mh^2}{\ell}\left(\frac{1}{r^2}\right)=\frac{k}{r^2}$$

حيث $k=\frac{mh^2}{\ell}$ ، أي أن القوة تتناسب عكسياً مع r^2 .

<u>**المسألة (٨):**</u>

$$\ddot{x}=ae^{-\omega t}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

بالتكامل بالنسبة للزمن:

$$\int d\dot{x}=a\int e^{-\omega t}dt$$

$$\therefore \dot{x}=-\frac{a}{\omega}e^{-\omega t}+C_1$$

<u>ولإيجاد</u> C_1 : في بداية الحركة :

$$C_1=0\longleftarrow \dot{x}=-\frac{a}{\omega},t=0$$

$$\therefore \dot{x}=-\frac{a}{\omega}e^{-\omega t}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

أيضاً فإن:

$$\ddot{y}=\frac{1}{2}a\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

بالتكامل بالنسبة للزمن:

$$\int d\dot{y} = \frac{1}{2}a\int\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)dt$$

$$\therefore \dot{y} = \frac{a}{2\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) + C_2$$

ولإيجاد C_2 : في بداية الحركة : $C_2 = 0 \longleftarrow \dot{y} = 0, t = 0$

$$\therefore \dot{y} = \frac{a}{2\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

المعادلتان (٤) و (٢) تعطيان سرعة الجسيم عند أي لحظة.

<u>ولإيجاد الموضع</u>: بتكامل (٢) بالنسبة للزمن:

$$x = \frac{a}{\omega^2}e^{-\omega t} + C_3$$

وعند: $C_3 = 0 \longleftarrow x = \frac{a}{\omega^2} \longleftarrow t = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{\omega^2}e^{-\omega t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٥)$$

وبتكامل (٤) بالنسبة للزمن:

$$y = \frac{a}{2\omega^2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) + C_4$$

وعند: $C_4 = 0 \longleftarrow y = \frac{a}{\omega^2} \longleftarrow t = 0$

$$\therefore \quad y = \frac{a}{2\omega^2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (٦)$$

المعادلتان (٦) و (٥) تعطيان الموضع للجسيم عند أي لحظة.

<u>ولإيجاد معادلة المسار</u>: نحذف t بين المعادلتين (٦) و (٥) : فمن (٥) :

$$e^{\omega t} = \frac{1}{e^{-\omega t}} = \frac{a}{\omega^2 x} \longleftarrow e^{-\omega t} = \frac{\omega^2}{a}x$$

بالتعويض في (٦) :

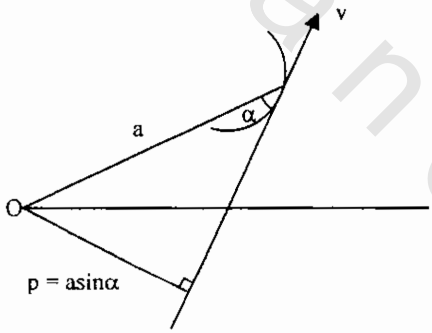
$$\therefore \quad y=\frac{a}{2\omega^2}\left(\frac{a}{\omega^2 x}+\frac{\omega^2 x}{a}\right)=\frac{a^2}{2\omega^4 x}+\frac{x}{2}$$

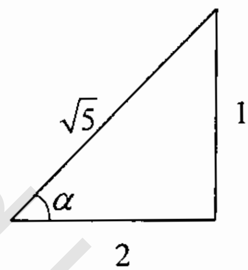
$$\therefore xy=\frac{a^2}{2\omega^4}+\frac{x^2}{2}$$

$$\therefore 2xy-x^2-\frac{a^2}{\omega^4}=0$$

وهي معادلة المسار.

<u>المسألة (٩):</u> القوة $F=ku^3\left(3+2a^2u^2\right)$





$$\tan\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ذراع العزم : $p=a\sin\alpha$

ومن قانون القوة:

$$u+\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{F}{h^2u^2}=\frac{k}{h^2}u\left(3+2a^2u^2\right)=\frac{k}{h^2}\left(3u+2a^2u^3\right)$$

$$\therefore h^2\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)=k\left(3u+2a^2u^3\right)$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية : نضرب الطرفين في $2\dfrac{du}{d\theta}$:

$$h^2\left(2u\frac{du}{d\theta}+2\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)=2k\left(3u+2a^2u^3\right)\frac{du}{d\theta}$$

وبالتكامل بالنسبة إلى θ :

$$h^2[u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2]=k\left(3u^2+a^2u^4\right)+C_1\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

ولإيجاد C_1: في البداية: السرعة: $v=\frac{\sqrt{5k}}{a}$

ومن قانون السرعة ، وحيث أنه في البداية: $u=\frac{1}{a}$

$$\therefore v^2=h^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$$

$$\therefore \frac{5k}{a^2}=k\left[3\left(\frac{1}{a}\right)^2+a^2\left(\frac{1}{a}\right)^4\right]+C_1=k\left[\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^2}\right]+C_1=\frac{4k}{a^2}+C_1$$

$$\therefore \quad C_1=\frac{5k}{a^2}-\frac{4k}{a^2}=\frac{k}{a^2}$$

بالتعويض في (١) :

$$h^2[u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2]=k\left(3u^2+a^2u^4\right)+\frac{k}{a^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

ولإيجاد h : h تمثل عزم السرعة، ففي البداية:

$$h=v\cdot p=\frac{\sqrt{5k}}{a}\cdot a\sin\alpha=\frac{\sqrt{5k}}{a}\cdot a\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{k}\longrightarrow h^2=k$$

بالتعويض في (٢):

$$\therefore k[u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2]=k\left(3u^2+a^2u^4\right)+\frac{k}{a^2}$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=3u^2+a^2u^4+\frac{1}{a^2}-u^2=a^2u^4+2u^2+\frac{1}{a^2}=\left(au^2+\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\therefore \quad \frac{du}{d\theta}=\pm\left(au^2+\frac{1}{a}\right)$$

في البداية : الجسيم يتحرك بعيداً عن O أي في اتجاه تزايد r وبالتالي في اتجاه تناقص u فنأخذ الإشارة السالبة.

$$\frac{du}{d\theta} = -\left(au^2 + \frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}\left(1 + a^2u^2\right)$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int \frac{-adu}{1+a^2u^2} = \int d\theta$$

$$\therefore \cot^{-1}(au) = \theta + C_2 \qquad \left| \int \frac{-dx}{1+\alpha^2x^2} = \frac{1}{\alpha}\cot^{-1}(\alpha x)\right.$$

ولإيجاد C_2 : في البداية: $\theta = 0, u = \frac{1}{a}$

$$\therefore \quad \cot^{-1}(1) = C_2 = \frac{\pi}{4} \longrightarrow C_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \cot^{-1}(au) = \theta + \frac{\pi}{4}$$

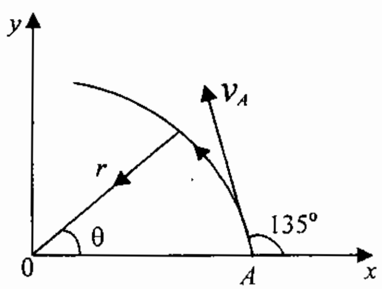
$$\therefore au = \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \frac{a}{r} = \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \quad r = \frac{a}{\cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} = a\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

وهي معادلة المسار المطلوبة.

المسألة(١٠):



$$F = k^2u^3(3 + a^2u^2) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

المعادلة التفاضلية للمسار:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

حيث h هو عزم السرعة:

$$h = (v_A \sin 45) \times a = \frac{2k}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a = \frac{2k}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}k \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

بالتعويض من (3),(1) في (2) نحصل على:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{u}{2}+\frac{a^2u^3}{2}$$

ولحل هذه المعادلة نضع:

$$\frac{du}{d\theta}=p \;,\; \frac{d^2u}{d\theta^2}=p\frac{dp}{du} \qquad \therefore\; p\frac{dp}{du}=\frac{u}{2}+\frac{a^2u^3}{2}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int_0^p p\,dp=\int_{1/a}^{u}\left[\frac{u}{2}+\frac{a^2u^3}{2}\right]du$$

حيث أنه في البداية: $u=\frac{1}{a}$ ، $p=\frac{d(\frac{1}{a})}{d\theta}=0$

$$\therefore\; p=\pm\frac{1+a^2u^2}{2a}=+\frac{1+a^2u^2}{2a}=\frac{du}{d\theta}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل مرة ثانية:

$$\therefore \int_{1/a}^{u}\frac{a\,du}{1+a^2u^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\theta}d\theta$$

ومنها: $\leftarrow$ $r=a\cot(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})$ وهي معادلة المسار. ولتعيين سرعة الجسيم عند أي موضع نستخدم قانون السرعة:

$$v^2=h^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$$

$$\therefore v=\frac{ku}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2u^2+6+\frac{a^2}{u^2}}$$

ولحساب الزمن: من العلاقة: $r^2\dot{\theta}=h=\sqrt{2}\,k$ ، وبالتعويض في معادلة المسار:

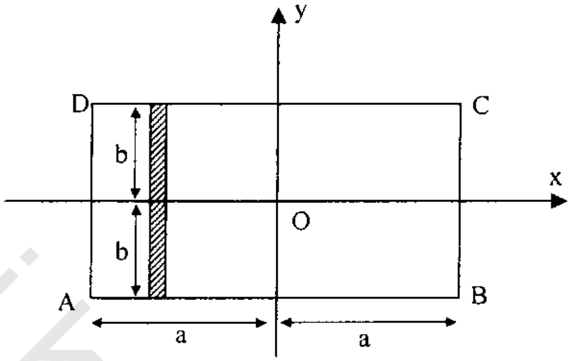
$$\therefore a^2\cot^2(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{2}\;k\rightarrow\int_0^t dt=\frac{a^2}{\sqrt{2}k}\int_0^{\pi/2}\cot^2(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})d\theta$$

$$\therefore t=\frac{a^2}{2\sqrt{2}k}(4-\pi)$$

وهو المطلوب.

حلول مسائل الباب الرابع

المسألة (١):

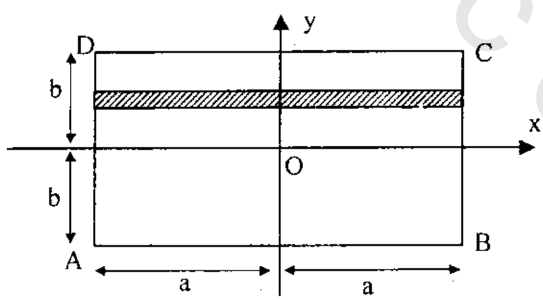


(i) قسم الصفيحة المستطيلة إلى عناصر على شكل قضبان رفيعة منتظمة موازية لمحور y (للضلع $2b$) وكتلة كل قضيب dm.

∴عزم القصور الذاتي للعنصر حول المحور x: $dI_x = \frac{1}{3}(dm)b^2$

∴عزم القصور الذاتي للصفيحة حول محور x: $I_x = \frac{1}{3}b^2\int dm = \frac{1}{3}mb^2$

(ii) وبتقسيم الصفيحة إلى عناصر على شكل قضبان رفيعة منتظمة موازية لمحور x (أي الضلع 2a) وكتلة كل عنصر dm



∴عزم القصور الذاتي للعنصر حول محور y: $dIy = \frac{1}{3}(dm)a^2$

∴عزم القصور الذاتي للصفيحة حول محور y: $I_y = \frac{1}{3}a^2\int dm = \frac{1}{3}ma^2$

ومن نظرية المحاور المتوازية فإن:

(i) عزم القصور الذاتي للصفيحة حول الضلع AD ، (أي المحور المار بهذا الضلع) :

$$I_{AD} = I_y + Ma^2 = \frac{1}{3}Ma^2 + Ma^2 = \frac{4}{3}Ma^2$$

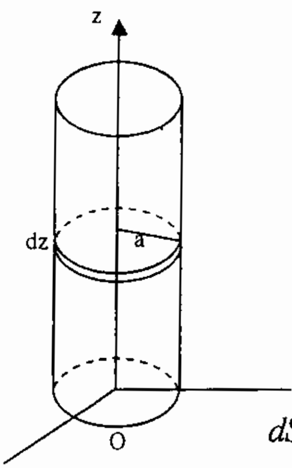
(ii) عزم القصور الذاتي للصفيحة حول الضلع AB (أي المحور المار بهذا الضلع) :

$$I_{AB} = I_X + Mb^2 = \frac{1}{3}Mb^2 + Mb^2 = \frac{4}{3}Mb^2$$

المسألة(٢):

أولاً: عزم القصور الذاتي للأسطوانة المفرغة:

نأخذ الأسطوانة ذات نصف قطر القاعدة a والارتفاع h ولتكن σ هي كثافة مادة الأسطوانة (الكثافة السطحية) .



∴كتلة الأسطوانة: $M = (2\pi a)\cdot(h)(\sigma)$

$$\therefore \sigma = \frac{M}{2\pi ah} \quad \text{.........} \quad (١)$$

نقسم الأسطوانة المفرغة إلى عناصر على شكل حلقات ارتفاع كل منها dz فتكون:

مساحتها: $dS = (2\pi a)(dz)$

وكتلتها: $dm = (2\pi\, a\, dz)\sigma$

عزم القصور الذاتي للحلقة حول محور الأسطوانة (المحور z):

$$dI_z = (dm)a^2 = 2\pi a^3 dz\, \sigma$$

∴عزم القصور الذاتي للأسطوانة المفرغة حول محورها:

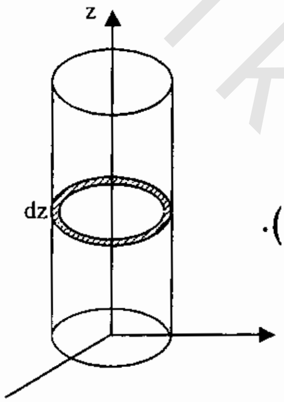
$$I_z = 2\pi a^3 \sigma \int_0^h dz = 2\pi a^3 \sigma h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

وبالتعويض عن σ من (١):

$$\therefore I_z = 2\pi a^3 \left(\frac{M}{2\pi a h}\right) h = M a^2$$

ثانياً: <u>عزم القصور الذاتي للإسطوانه المصمتة:</u>

نقسم الأسطوانة إلى عناصر على هيئة أقراص موازية لقاعدة الأسطوانة، سمك كل قرص =dz



حجم القرص : $dV = (\pi a^2)(dz)$

كتلة القرص : $dm = (\pi a^2\, dz)\rho$

حيث ρ هي الكثافة الحجمية لمادة القرص (الأسطوانة).

كتلة الأسطوانة: $M = (\pi a^2)(h)(\rho)$

$$\therefore \rho = \frac{M}{\pi a^2 h} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

حيث h إرتفاع الأسطوانة ، πa^2 مساحة قاعدتها

عزم القصور الذاتي للعنصر (القرص) حول محور الأسطوانة (محور z):

$$dI_z = \frac{1}{2}(dm)a^2 = \frac{1}{2}\pi a^4 \rho\, dz$$

عزم القصور الذاتي للإسطوانه المصمته حول محورها:

$$I_z = \frac{1}{2}\pi a^4 \rho \int_0^h dz = \frac{1}{2}\pi a^4 \rho h \ \ldots\ldots\ldots(٢)$$

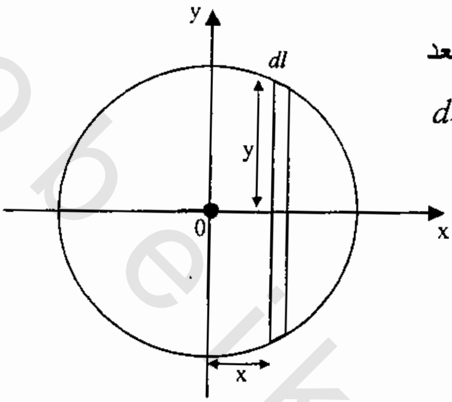
وبالتعويض عن ρ من (١) في (٢) :

$$I_z = \frac{1}{2}\pi a^4 \left(\frac{M}{\pi a^2 h}\right) h = \frac{1}{2} M a^2$$

وهو المطلوب.

المسألة (٣) : لتكن M هي كتلة الكرة، a هي نصف قطرها.

الحالة الأولى: إذا كانت الكرة مجوفة:



نأخذ العنصر على شكل حلقة دائرية على بعد x من مركز الكرة 0، وليكن سمك الحلقة $d\ell$ ونصف قطرها y.

$\therefore$ كتلة العنصر: $dm = \sigma[2\pi y \cdot d\ell]$ ، حيث $d\ell = \sqrt{1+y'^2}\,dx$

ولكن: $x^2 + y^2 = a^2 \quad \leftarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \leftarrow y' = -\dfrac{x}{y}$

$$\therefore d\ell = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}dx = \frac{1}{y}\sqrt{x^2+y^2}\,dx = \frac{a}{y}dx$$

$$\therefore dm = 2\pi\sigma \cdot y(\frac{a}{y})dx = 2\pi\sigma a\ dx$$

عزم القصور الذاتي للعنصر:

$$d I_x = y^2 dm = (a^2 - x^2)\cdot[2\pi\sigma a\ dx] = 2\pi\sigma a(a^2 - x^2)\ dx$$

ويكون عزم القصور الذاتي للكرة المجوفة:

$$I_x = \int dI_x = 2\pi\sigma a \int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\sigma a\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = 2\pi\sigma a\left[(a^3 - \frac{a^3}{3}) - (-a^3 + \frac{a^3}{3})\right]$$

$$= 2\pi\sigma a\left[2a^3 - \frac{2a^3}{3}\right] = 2\pi\sigma a\left[\frac{4}{3}a^3\right] = \frac{8}{3}\sigma\pi a^4$$

ولكن كتلة الكرة: $m=\sigma(4\pi a^2) \leftarrow \sigma=\dfrac{m}{4\pi a^2}$

$$\therefore I_x=\frac{8}{3}\left(\frac{m}{4\pi a^2}\right)\pi a^4=\frac{2}{3}ma^2$$

<u>**الحالة الثانية**</u>: <u>إذا كانت الكرة مصمتة:</u>

نأخذ العنصر على شكل قرص دائري سمكه dx ونصف قطره y فتكون كتلته:

$$dm=\sigma\left[\pi y^2\cdot dx\right]=\sigma\pi(a^2-x^2)dx$$

وعزم القصور الذاتي له:

$$dI_x=\frac{1}{2}y^2dm=\frac{1}{2}\sigma\pi(a^2-x^2)^2dx$$

ويكون عزم القصور الذاتي للكرة المصمتة:

$$I_x=\int dI_x=\frac{1}{2}\sigma\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^2dx=\frac{1}{2}\sigma\pi\int_{-a}^{a}(a^4-2a^2x^2+x^4)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sigma\pi\left[a^4x-\frac{2}{3}a^2x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_{-a}^{a}$$

$$=\frac{1}{2}\sigma\pi\left[(a^5-\frac{2}{3}a^5+\frac{1}{5}a^5)-(-a^5+\frac{2}{3}a^5-\frac{1}{5}a^5)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sigma\pi\left[2a^5-\frac{4}{3}a^5+\frac{2}{5}a^5\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sigma\pi\left[2a^5-\frac{14}{13}a^5\right]=\frac{1}{2}\sigma\pi\left[\frac{16}{15}a^5\right]=\frac{8}{15}\sigma\pi a^5$$

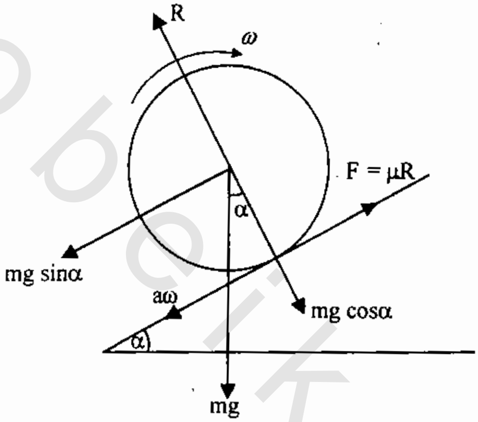
ولكن كتلة الكرة المصمتة:

$$m=\sigma[\frac{4}{3}\pi a^3]\quad\therefore\sigma=\frac{3m}{4\pi a^3}$$

$$\therefore I_x=\frac{8}{15}\left(\frac{3m}{4\pi a^3}\right)\pi a^5=\frac{2}{5}ma^2$$

وهو المطلوب.

المسألة (٤): الحركة تبدأ إنزلاقيـــة ونقطـــة التمـــاس تنزلـــق أســـفل المـــستوي $(V < a w)$ وقوة الاحتكاك $F = \mu r$ تؤثر إلى أعلى .



معادلات الحركة:

$$m\ddot{x} = \mu R - mg\sin\alpha \,.........(١)$$

$$R = mg\cos\alpha \,.....................(٢)$$

$$\mathrm{I}_G\ \ddot{\theta} = M_G$$

$$m\ a^2\ \ddot{\theta} = -\mu R \cdot a \,..........(٣)$$

(عزم القصور الذاتي للطوق الدائري (حلقة دائرية) = ma^2 ، القوة μR عكس الدوران فأخذنا إشارة −)

وحيث أن الزاوية α تساوي زاوية الإحتكاك فهذا يعني أن:

$$\tan\alpha = \mu \,...................(٤)$$

من (٢) و (١) وبإستخدام (٤):

$$\therefore\ m\ddot{x} = \tan\alpha\left(mg\cos\alpha\right) - mg\ \sin\alpha$$

$$= mg\sin\alpha - mg\sin\alpha = 0 \longrightarrow \ddot{x} = 0$$

وبالتكامل فإن: $\dot{x} = \cos nt.$

وفي البداية: $\dot{x} = v \longleftarrow \dot{x} = v$

وهذا يعني أن مركز ثقل الطوق يتحرك بسرعة منتظمة حتى تغير قوة الإحتكاك مقدارها أو إتجاهها أي حتى تصبح الحركة تدحرجية أو إنزلاقيه في عكس الإتجاه السابق.

أيضاً: من (٣) وبإستخدام (٤) و (٢):

$$ma^2\ddot{\theta} = -\tan\alpha\,(mg\cos\alpha)\cdot a$$

$$\therefore\ \ddot{\theta} = -\frac{g}{a}\sin\alpha$$

وبالتكامل:

$$\therefore\ \dot{\theta} = -\frac{g}{a}\sin\alpha\cdot t + const.$$

وفي البداية:

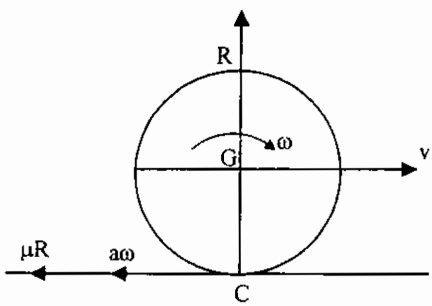
$$\dot{\theta} = w - \frac{g}{a}\sin\alpha\cdot t$$

ويبقى الطوق ثابتاً عندما $\dot{\theta} = 0$ أي عندما:

$$O = w - \frac{g}{a}\sin\alpha\cdot t \longrightarrow t = \frac{aw}{g\sin\alpha}$$

وهو المطلوب.

<u>المسألة (٥):</u> الحركة بدأت إنزلاقية ، وقوة الإحتكاك $F = \mu R$ (في عكس إتجاه الحركة)



معادلات الحركة:

$$m\ddot{x} = -\mu R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$R = mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

$$I_G\,\ddot{\theta} = M_G$$

$$\frac{1}{2}m\,a^2\ddot{\theta} = \mu R\cdot a \ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

(عزم القصور الذاتي للأسطوانة المصمتة = $\frac{1}{2}ma^2$ والعزم موجب لأن μR في إتجاه الدوران)

من (٢) و (١) :

$$m\ddot{x} = -\mu(mg)$$

$$\therefore\ \ddot{x} = -\mu g$$

وبالتكامل: $\dot{x} = -\mu g t + const.$

وفي البداية: $t = 0 \ , \ \dot{x} = v \ \leftarrow \ const. = v$

$$\therefore \dot{x} = v - \mu g t \ \ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

أيضاً من (٣) وبإستخدام (٢):

$$\frac{1}{2} m a^2 \ddot{\theta} = \mu (mg) a$$

$$\therefore \ddot{\theta} = \frac{2\mu g}{a}$$

وبالتكامل: $\dot{\theta} = \frac{2\mu g}{a} t + const.$

وفي البداية: $t = 0 \ , \ \dot{\theta} = w \longleftarrow \ , \ const. = w$

$$\therefore \ \dot{\theta} = w + \frac{2\mu g}{a} t \ \ldots\ldots\ldots(٥)$$

الأسطوانة تنزلق لفترة زمنية معينة تتلاشي بعدها سرعة نقطة التماس وتتحول الحركة إلي تدحرجية ، وشرط ذلك: $\dot{x} = a\dot{\theta}$

فمن (٥)، (٤):

$$v - \mu g t = a\left(w + \frac{2\mu g}{a} t\right) = a\omega + 2\mu g t$$

$$\therefore v - aw = 2\mu g t + \mu g t = 3\mu g t$$

$$\therefore t = \frac{v - aw}{3\mu g} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٦)$$

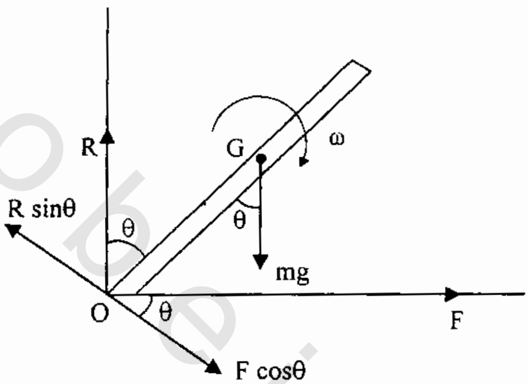
وتتدحرج الإسطوانة بعد تلك الفترة بسرعة زاوية [من (٦) ، (٥)]

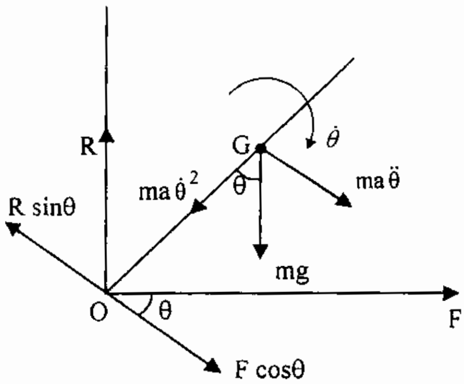
$$\dot{\theta} = w + \frac{2\mu g}{a}\left[\frac{v - aw}{3\mu g}\right] = w + \frac{2}{3a}(v - aw) = w + \frac{2v}{3a} - \frac{2}{3} w$$

$$= \frac{1}{3} w + \frac{2v}{3a} = \frac{2v + aw}{3a}$$

وهو المطلوب .

المسألة (٦):





معادلات الحركة:

الانتقالية:

$$m\ddot{x} = F \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$m\ddot{y} = R - mg \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

الدورانية: $I_G\ddot{\theta} = mg\,x$

$$\therefore\ \frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} = mg\,a\sin\theta \;\ldots\ldots(٣)$$

حيث: إحداثيات مركز ثقل القضيب G هي:

$$x = a\sin\theta \quad , \quad y = a\cos\theta$$

$$\dot{x} = a\cos\theta.\dot{\theta} \quad , \quad \dot{y} = -a\sin\theta.\dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = a\left(\cos\theta.\ddot{\theta} - \sin\theta.\dot{\theta}^2\right)$$

$$\ddot{y} = -a\left(\sin\theta.\ddot{\theta} + \cos\theta.\dot{\theta}^2\right)$$

بالتعويض في (٢) ، (١):

$$ma\left(\cos\theta.\ddot{\theta} - \sin\theta.\dot{\theta}^2\right) = F \;\ldots\ldots\ldots(٤)$$

$$ma\left(\sin\theta.\ddot{\theta} + \cos\theta.\dot{\theta}^2\right) = mg - R \;\ldots\ldots(٥)$$

من (٣):

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{4}\frac{g}{a}\sin\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٦)$$

بالتكامل:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{4}\frac{g}{a}\cos\theta + const.$$

في البداية: $\theta = \alpha \quad , \quad \dot{\theta} = 0 \longrightarrow const. = \frac{3}{4}\frac{g}{a}\cos\alpha$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}\frac{g}{a}(\cos\alpha - \cos\theta) \ldots\ldots (٧)$$

بالتعويض عن $\dot{\theta}^2$, $\ddot{\theta}$ من (٧) ، (٦) في (٢) ، (١) نحصل على R , F كالتالي:

$$F = \frac{3}{4}mg\sin\theta(3\cos\theta - 2\cos\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots (٨)$$

$$R = \frac{mg}{4}(1 - 6\cos\theta\cos\alpha + 9\cos^2\theta) \ldots\ldots\ldots (٩)$$

بالقسمة نحصل على:

$$\frac{F}{R} = \frac{3\sin\theta(3\cos\theta - 2\cos\alpha)}{(1 - 6\cos\theta\cos\alpha + 9\cos^2\theta)}$$

عندما $\theta = \alpha$ فإن:

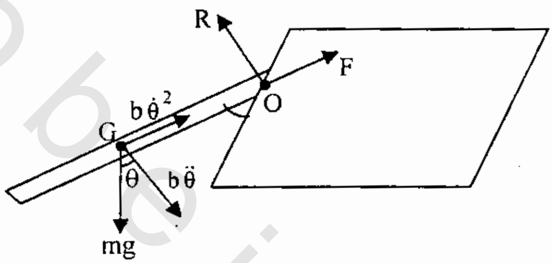
$$\frac{F}{R} = \frac{9\sin\alpha\cos\alpha - 6\sin\alpha\cos\alpha}{1 - 6\cos^2\alpha + 9\cos^2\alpha} = \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{1 + 3\cos^2\alpha}$$

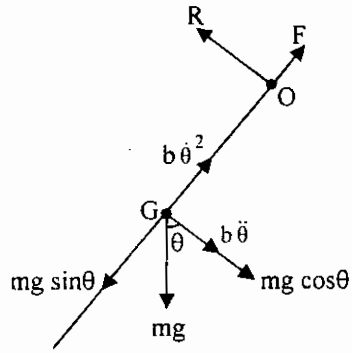
يبدأ القضيب في الانزلاق مباشرة إذا كان :

$$F \geq \mu R \longrightarrow \mu \leq \frac{F}{R}$$

$$\therefore \quad \mu \leq \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{(1 + 3\cos^2\alpha)}$$

المسألة (٧):





يتحرك القضيب حول نقطة ارتكازه (حافة المنضدة) 0 في دائرة نصف قطرها b فتكون مركبتا العجلة: $b\dot{\theta}^2$ نصف قطريه (للداخل)

$b\ddot{\theta}$ مستعرضة (إلى الأسفل)

معادلات الحركة :

$$mb\dot{\theta}^2 = F - mg\sin\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$mb\ddot{\theta} = mg\cos\theta - R \;\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

الحركة الدورانية (حول مركز الثقل):

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} = R\,b \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

من (٣) ، (٢):

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} = mg\,b\cos\theta - mb^2\ddot{\theta}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{3}a^2 + b^2\right)\ddot{\theta} = gb\cos\theta$$

$$\therefore \quad \ddot{\theta} = \left(\frac{3gb\cos\theta}{a^2+3b^2}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

بالتكامل:
$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2=\frac{3gb\sin\theta}{a^2+3b^2}+const.$$

في البداية: $\theta=0$, $\dot{\theta}=0$ $\longleftarrow$ $const.=0$

$$\therefore\ \dot{\theta}^2=\frac{6gb\sin\theta}{a^2+3b^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٥)$$

بالتعويض عن $\dot{\theta}^2$, $\ddot{\theta}$ من (٥) ، (٤) في (٢) ، (١) نحصل على R , F

$$F=mg\sin\theta+mb\left(\frac{6bg}{a^2+3b^2}\sin\theta\right)=mg\left(\frac{a^2+9b^2}{a^2+3b^2}\right)\sin\theta$$

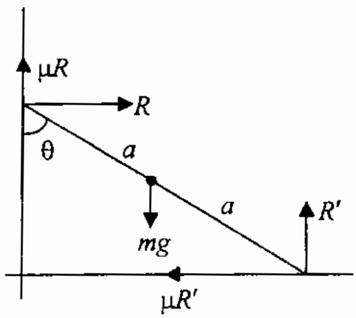
$$R=mg\cos\theta-mb\left(\frac{3gb}{a^2+3b^2}\cos\theta\right)=mg\left(\frac{a^2}{a^2+3b^2}\right)\cos\theta$$

يبدأ القضيب في الانزلاق عندما $F=\mu R$

$$\mu=\frac{F}{R}=\frac{a^2+9b^2}{a^2\cos\theta}=\left(\frac{a^2+9b^2}{a^2}\right)\tan\theta$$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{\mu a^2}{a^2+9b^2}$$

وهو المطلوب.



<u>المسألة(٨):</u> <u>معادلة الحركة:</u>

<u>الحركة الانتقالية لمركز الثقل:</u>

$$m\ddot{x}=R-\mu R' \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$
$$m\ddot{y}=R'-\mu R-mg \qquad \_\_\_\_\_\_(2)$$

حيث (x,y) هي إحداثيات مركز الثقل:

$$x=a\sin\theta\ ,\ \ y=\cos\theta$$

$$\therefore\ \ddot{x}=a\left[\cos\theta\cdot\ddot{\theta}-\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2\right]\quad ,\quad \ddot{y}=-a\left[\sin\theta\cdot\ddot{\theta}+\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2\right]$$

بالتعويض في (2),(1):

$$\therefore\ ma\left[\cos\theta\cdot\ddot{\theta}-\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2\right]=R-\mu R' \qquad \_\_\_\_\_\_(3)$$
$$ma\left[\sin\theta\cdot\ddot{\theta}+\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2\right]=mg-R'-\mu R \qquad \_\_\_\_\_\_(4)$$

وبالتعويض عن $\mu = \tan\lambda$ نحصل على:

$$\therefore ma\left[\cos\theta\cdot\ddot{\theta}-\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2\right]=R-(\tan\lambda)R'=\frac{R\cos\lambda-R'\sin\lambda}{\cos\lambda} \qquad \_\_\_(5)$$

$$ma\left[\sin\theta\cdot\ddot{\theta}+\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2\right]=mg-R'-(\tan\lambda)R=mg-\frac{R'\cos\lambda+R\sin\lambda}{\cos\lambda} \qquad \_\_\_(6)$$

<u>الحركة الدورانية حول مركز الثقل:</u> $\qquad I_G\ddot{x}=L_G$

$$\therefore mk^2\ddot{\theta}=R'\cdot(a\sin\theta)-\mu R'(a\cos\theta)-R(a\cos\theta)-\mu R(a\sin\theta)$$

$$=R'a(\sin\theta-\mu\cos\theta)-Ra(\cos\theta+\mu\sin\theta) \qquad \Big|\ \mu=\tan\lambda$$

$$=R'a\left(\frac{\sin\theta\cos\lambda-\cos\theta\sin\lambda}{\cos\lambda}\right)-Ra\left(\frac{\cos\theta\cos\lambda+\sin\theta\sin\lambda}{\cos\lambda}\right)$$

$$=\frac{R'a}{\cos\lambda}\sin(\theta-\lambda)-\frac{Ra}{\cos\lambda}\cos(\theta-\lambda) \qquad \_\_\_(7)$$

باستخدام (5),(6) نجد أن:

$$\frac{R}{\cos\lambda}=ma\left[\cos(\theta+\lambda)\cdot\ddot{\theta}-\sin(\theta+\lambda)\dot{\theta}^2\right]+mg\sin\lambda \qquad \_\_\_(8)$$

$$\frac{R'}{\cos\lambda}=mg\cos\lambda-m\left[\sin(\theta+\lambda)\ddot{\theta}+\cos(\theta+\lambda)\dot{\theta}^2\right] \qquad \_\_\_(9)$$

بالتعويض من (8),(9) في (7):

$$mk^2\ddot{\theta}=\left[mg\cos\lambda-ma\left\{\sin(\theta+\lambda)\ddot{\theta}+\cos(\theta+\lambda)\dot{\theta}^2\right\}\right]\cdot a\sin(\theta-\lambda)$$
$$-\left[ma\left\{\cos(\theta+\lambda)\ddot{\theta}-\sin(\theta+\lambda)\dot{\theta}^2\right\}+mg\sin\lambda\right]\cdot a\cos(\theta-\lambda)$$
$$=mga\sin(\theta-2\lambda)-ma^2\cos2\lambda\cdot\ddot{\theta}+ma^2\sin2\lambda\cdot\dot{\theta}^2$$

$$\therefore\left(k^2+a^2\cos2\lambda\right)\ddot{\theta}-a^2\sin2\lambda\cdot\dot{\theta}^2=ag\sin(\theta-2\lambda) \qquad \_\_\_(10)$$

وبفرض أن الميل الابتدائي للقضيب على الرأسي هو α:

$\therefore$ فعندما تكون $\theta=\alpha$ فإن القضيب يبدأ في الانزلاق إذا كان θ دالة متزايدة في θ أي إذا كانت $\ddot{\theta}>0$. إذاً $\sin(\theta-2\lambda)$ تكون موجبة عندما $\theta=\alpha$.

$\therefore \sin(\alpha-2\lambda)>0 \quad\rightarrow\quad \alpha>2\lambda$ وهو المطلوب.