الباب الأول
ديناميكا المقذوفات

سبق أن درسنا فى الجزء الأول من هذا الكتاب حركة المقذوفات فى المستوى مع إهمال مقاومة الوسط الذى يتحرك فيه المقذوف، وتوصلنا إلى نتائج هامة خاصة بتلك الحركة، من أهمها معادلة المسار للمقذوف وصورتها:

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_o^2 \cos^2 \alpha}$$

وأوجدنا صورا للمدى وأقصى ارتفاع وزمن الطيران (الزمن الكلى لحركة المقذوف).

وفى هذا الباب سوف نستكمل دراسة ديناميكا المقذوفات بدراسة الموضوعات الآتية:

الموضوع الأول: حركة المقذوفات على مستوى مسائل.

الموضوع الثانى: حركة المقذوفات فى وسط مقاوم.

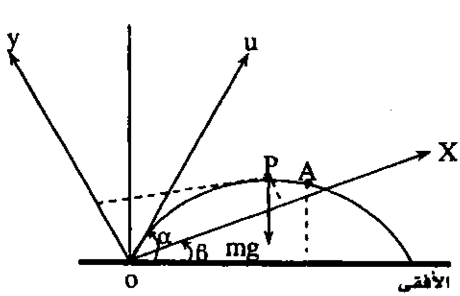
الموضوع الثالث: حركة القذيفة والمدفع.

أولاً: حركة المقذوفات على مستوى مسائل

<u>المعادلات البارامترية لمسار المقذوف على المستوى المائل:</u>

نفرض أن المستوى يميل على الأفقى بزاوية β وأن الجسيم P قذف فى اتجاه يميل بزاوية α مع الأفقى بسرعة ابتدائية u.

نأخذ المحورين ox فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى، oy العمودى عليه.



مركبتا السرعة الابتدائية:

في اتجاه ox: $u_x = u\cos(\alpha - \beta)$

في اتجاه oy: $u_y = u\sin(\alpha - \beta)$

وباعتبار أن القوة المؤثرة على الجسيم هي وزنه mg رأسيا إلى أسفل فإن:

معادلات الحركة تكون:

$$m\ddot{x} = -mg\sin\beta \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = -mg\cos\beta \qquad (2)$$

من (2) ,(1) بالقسمة على m:

$$\therefore \quad \ddot{x} = -g\sin\beta \qquad (3)$$

$$\ddot{y} = -g\cos\beta \qquad (4)$$

المعادلتان (4) ,(3) تعطيان مركبتا عجلة المقذوف

وبالتكامل بالنسبة للزمن:

$$\therefore \quad \dot{x} = (-g\sin\beta)t + C_1$$

$$\dot{y} = (-g\cos\beta)t + C_2$$

وعند t = o فإن:

$$\dot{x} = u_x = u\cos(\alpha - \beta) \quad , \quad u_y = u\sin(\alpha - \beta)$$

$$\therefore C_1 = u\cos(\alpha - \beta) \quad , \quad C_2 = u\sin(\alpha - \beta)$$

$$\therefore \quad \dot{x} = (-g\sin\beta)t + u\cos(\alpha - \beta) \qquad (5)$$

$$\dot{y} = (-g\cos\beta)t + u\sin(\alpha - \beta) \qquad (6)$$

المعادلتان (6) ,(5) يعطيان مركبتا سرعة المقذوف عند أي لحظة t، وبالتكامل بالنسبة للزمن:

$$\therefore\ x = -\tfrac{1}{2}gt^2 \sin\beta + ut\cos(\alpha-\beta) + C_3$$

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 \cos\beta + ut\sin(\alpha-\beta) + C_4$$

وعند $t = o$ فإن: $x = o, y = o$ (الجسيم قذف من نقطة الأصل o)

$$\therefore\ C_3 = o \quad , \quad C_4 = o$$

$$\therefore\ x = -\tfrac{1}{2}gt^2 \sin\beta + ut\cos(\alpha-\beta) \qquad (7)$$

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 \cos\beta + ut\sin(\alpha-\beta) \qquad (8)$$

المعادلتان (8) ,(7) هما المعادلتين البارامتريتين لمسار المقذوف على المستوى المائل.

أمثلة محلولة

مثال (1):

من المعادلتين البارامتريتين لمسار المقذوف على المستوى المائل، أوجد

(1) زمن الطيران للمقذوف على المستوى المائل.

(2) المدى على المستوى المائل.

الحل:

(1) إيجاد زمن الطيران:

عند نقطة A (نهاية المسار) فإن $y = o$، فبوضع $y = o$ فى المعادلة رقم (8) – معادلة y – نحصل على الزمن الكلى للمسار من O إلى A. أى زمن الطيران T.

$$o = -\tfrac{1}{2}gt^2 \cos\beta + ut\sin(\alpha-\beta)$$

$$= t[-\tfrac{1}{2}gt\cos\beta + u\sin(\alpha-\beta)]$$

$\therefore t = o \qquad , \qquad -\tfrac{1}{2}gt\cos\beta + u\sin(\alpha-\beta) = o$

$\therefore gt\cos\beta = 2u\sin(\alpha-\beta)$

$$\therefore t = \frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta} = T \qquad (1)$$

(2) <u>إيجاد المدى (R)</u>

المدى هو المسافة oA على خط أكبر ميل للمستوى المائل وتساوى المسافة ox المقطوعة فى زمن الطيران T

فبالتعويض من (1) عن t = T فى المعادلة (7) نحصل على x = R

$$\therefore R = -\tfrac{1}{2}gT^2\sin\beta + uT\cos(\alpha-\beta)$$

$$= -\tfrac{1}{2}g\left[\frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}\right]^2\sin\beta + u\left[\frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}\right]\cos(\alpha-\beta)$$

$$= -\frac{2u^2\sin^2(\alpha-\beta)\sin\beta}{g\cos^2\beta} + 2u^2\,\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$$

$$= \frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta}\left[-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta + \cos(\alpha-\beta)\cos\beta\right]$$

ولكن:

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)\sin\beta$

$= (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\cos\beta - (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\sin\beta$

$= \cos\alpha\cos^2\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin^2\beta$

$= \cos\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = \cos\alpha$

$$R = \frac{2u^2 \sin(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta}[\cos\alpha]$$

$$= \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha]$$

$2\sin A \cos\beta$
$= \sin(A+B)$
$+ \sin(A-B)$
$A = \alpha-\beta,\ \beta = \alpha$

$$= \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[\sin(\alpha-\beta+\alpha)+\sin(\alpha-\beta-\alpha)]$$

$$= \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[\sin(2\alpha-\beta)+\sin(-\beta)]$$

$$= \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[\sin(2\alpha-\beta)-\sin\beta]$$

وهى معادلة المدى على مستوى مائل.

مثال (2):

لسرعة قذف ثابتة u، أثبت أن أقصى مدى لمقذوف على المستوى المائل يعطى بالعلاقة:

$$R_{max} = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$$

وأن اتجاه القذف الذى يعطى R_{mdx} على المستوى المائل ينصف الزاوية التى يصنعها المستوى المائل مع الرأسى.

الحل:

يمكن إيجاد أقصى مدى بدراسة علاقة المدى على المستوى المائل [أنظر مثال (1)].

$$R = \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta] \qquad (1)$$

حيث نلاحظ أن النهاية العظمى للمدى تتحقق متى كانت $\sin(2\alpha-\beta)$ فى نهايتها العظمى

أى عندما: $\sin(2\alpha-\beta) = 1$ أى عندما: $2\alpha-\beta = \pi/2$

أى عندما: $2\alpha = \pi/2 + \beta$ أى عندما: $\alpha = \pi/4 + \beta/2$

فبالتعويض فى (1) نحصل على:

$$\therefore R_{max} = \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[1-\sin\beta] = \frac{u^2}{g(1-\sin^2\beta)}(1-\sin\beta)$$

$$= \frac{u^2}{g(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)}(1-\sin\beta) = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$$

ومن العلاقة: $\alpha = \pi/4 + \beta/2 = \frac{1}{2}(\pi/2 + \beta)$ نجد أن اتجاه القذف الذى يعطى أقصى مدى على المستوى المائل هو المنصف للزاوية بين المستوى المائل والرأسى.

وهو المطلوب.

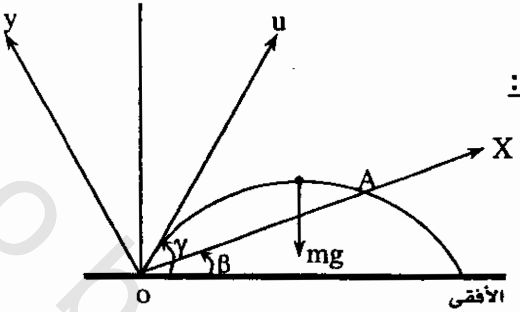
<u>مثال (3):</u>

إذا قذف جسيم من نقطة الأصل o بسرعة u تصنع زاوية γ مع مستوى مائل على الأفقى بزاوية β، فبأخذ خط أكبر ميل كمحور x والعمودى عليه كمحور y.

(1) أكتب معادلات الحركة، وأوجد المعادلات البارامترية لمسار المقذوف.

(2) أوجد زمن الطيران والمدى على المستوى المائل فى هذه الحالة.

(3) أوجد زاوية القذف γ التى تعطى أقصى مدى (R_{max}) لسرعة القذف u وأوجد مقدار R_{max}.



الحـــل:

(1) إيجاد المعادلات البارامترية للمسار:

معادلات الحركة:

$$m\ddot{x} = -mg \sin \beta$$
$$m\ddot{y} = -mg \cos \beta$$

بالقسمة على m:

$$\therefore \ \ddot{x} = -g \sin \beta \qquad (1)$$
$$\ddot{y} = -g \cos \beta \qquad (2)$$

بالتكامل نحصل على:

$$\dot{x} = (-g \sin \beta)t + C_1$$

$$\dot{y} = (-g \cos \beta)t + C_2$$

ولايجاد C_1، C_2:

فى البداية: $t = o$، $\dot{x} = u \cos \gamma$ ، $\dot{y} = u \sin \gamma$

$$\therefore C_1 = u \cos \gamma \quad , \quad C_2 = u \sin \gamma$$
$$\therefore \ \dot{x} = -gt \sin \beta + u \cos \gamma \qquad (3)$$
$$\dot{y} = -gt \cos \beta + u \sin \gamma \qquad (4)$$

بالتكامل مرة ثانية نحصل على:

$$x = -\tfrac{1}{2}gt^2 \sin \beta + ut \cos \gamma + C_3$$

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 \cos \beta + ut \sin \gamma + C_4$$

ولايجاد C_3، C_4 :

فى البداية: $x = o, y = o , t = o$

$$\therefore C_3 = o \quad , \quad C_4 = o$$

$$\therefore \quad x = -\tfrac{1}{2}gt^2 \sin \beta + ut \cos \gamma \qquad (5)$$

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 \cos\beta + ut\sin\gamma \qquad (6)$$

المعادلتان (6) ,(5) هما المعادلتان البارامتريتان للمسار.

(2) <u>إيجاد زمن الطيران والمدى:</u>

<u>لإيجاد زمن الطيران:</u>

نضع $\gamma = o$ فى (6) فنحصل على:

$$o = -\tfrac{1}{2}gt^2 \cos\beta + ut\sin\gamma = t[-\tfrac{1}{2}gt\cos\beta + u\sin\gamma]$$

$$\therefore\ t = o \quad , \quad \tfrac{1}{2}gt\cos\beta + u\sin\gamma = o$$

$$\therefore\ gt\cos\beta = 2u\sin\gamma$$

$$\therefore\ t = \frac{2u\sin\gamma}{g\cos\beta} = T \qquad (7)$$

<u>لإيجاد المدى:</u>

نعوض عن $t = T$ من (7) فى (5) نحصل على:

$$R = x = -\tfrac{1}{2}gT^2\sin\beta + uT\cos\gamma$$

$$= -\tfrac{1}{2}g\left[\frac{2u\sin\gamma}{g\cos\beta}\right]^2 \sin\beta + u\left[\frac{2u\sin\gamma}{g\cos\beta}\right]\cos\gamma$$

$$= \frac{-2u^2\sin^2\gamma\sin\beta}{g\cos^2\beta} + \frac{2u^2\sin\gamma\cos\gamma}{g\cos\beta}$$

$$= \frac{2u^2\sin\gamma}{g\cos^2\beta}[-\sin\gamma\sin\beta + \cos\gamma\cos\beta]$$

ولكن:

$$\cos(\gamma+\beta) = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta$$

$$\therefore\ R = \frac{2u^2\sin\gamma}{g\cos^2\beta}\cos(\gamma+\beta)$$

$$= \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[2\sin\gamma\cos(\gamma+\beta)]$$

أيضاً: حيث أن:

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

فبأخذ $A = \gamma$ ،$B = \gamma + B$

نحصل على:

$$\therefore\ R = \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[\sin(\gamma+\gamma+\beta) + \sin(\gamma-\gamma-\beta)]$$

$$= \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[\sin(2\gamma+\beta) + \sin(-\beta)]$$

$$= \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[\sin(2\gamma+\beta) - \sin\beta] \qquad (8)$$

(3) <u>ولإيجاد زاوية القذف γ التى تعطى أقصى مدى:</u>

نلاحظ أن النهاية العظمى للمدى (8) تتحقق إذا كانت $\sin(2\gamma+\beta)=1$

أى عندما: $2\gamma+\beta = \pi/2$ أى عندما: $2\gamma = \pi/2-\beta$

أى عندما: $\gamma = \pi/4 - \beta/2$ ، ومنها $\gamma = ½(\pi/2 - \beta)$

وهنا يعنى أن اتجاه القذف للحصول على أكبر مدى ينصف الزاوية بين المستوى المائل والرأسى.

ولإيجاد مقداره:

$$\therefore\ R_{max} = \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[1-\sin\beta]$$

$$= \frac{u^2}{g(1-\sin^2\beta)}(1-\sin\beta)$$

$$= \frac{u^2(1-\sin\beta)}{g(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$$

أى أنه لا يعتمد على زاوية القذف γ.

<u>مثال (4):</u>

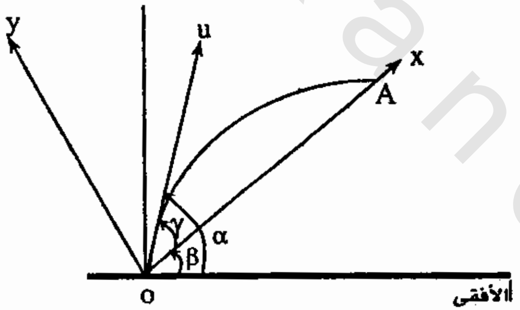
أطلقت قذيفة إلى أعلى مستوى يميل على الأفقى بزاوية β فى اتجاه يصنع مع الأفقى زاوية $(\gamma + \beta)$ فإذا علم أن القذيفة تصيب هذا المستوى فى الاتجاه الأفقى فأثبت أن زاوية القذف على المستوى المائل تعطى بالعلاقة:

$$\tan\gamma = \frac{\sin\beta\cos\beta}{1-\sin^2\beta}$$

وإذا كانت القذيفة تصيب المستوى فى الاتجاه العمودى فأثبت أن:

$$\tan\gamma = \frac{1}{2\tan\beta}$$

<u>الحـــل:</u>



معادلات الحركة:

$$m\ddot{x} = -mg\sin\beta$$
$$m\ddot{y} = -mg\cos\beta$$

بالقسمة على m:

$$\therefore\ \ddot{x} = -g\sin\beta \quad (1)$$
$$\ddot{y} = g\cos\beta \quad (2)$$

بالتكامل نحصل على:

$$\dot{x} = -gt\sin\beta + C_1$$

$$\dot{y} = -gt\cos\beta + C_2$$

<u>ولايجاد C_1، C_2:</u>

فى البداية: $t = o$، $\dot{y} = u\sin\gamma$ ، $\dot{x} = u\cos\gamma$

$$\therefore\ C_1 = u\cos\gamma \quad , \quad C_2 = u\sin\gamma$$

$$\therefore\ \dot{x} = -gt\sin\beta + u\cos\gamma \quad (3)$$
$$\dot{y} = -gt\cos\beta + u\sin\gamma \quad (4)$$

بالتكامل مرة ثانية نحصل على:

$$x = -\tfrac{1}{2}gt^2 \sin\beta + ut\cos\gamma + C_3$$
$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 \cos\beta + ut\sin\gamma + C_4$$

ولايجاد C_3، C_4:

فى البداية: $x = o, y = o, t = o$

$$\therefore\ C_3 = o \quad , \quad C_4 = o$$

$$\therefore\ x = -\tfrac{1}{2}gt^2 \sin\beta + ut\cos\gamma \tag{5}$$
$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 \cos\beta + ut\sin\gamma \tag{6}$$

لإيجاد زمن الطيران:

نضع $y = o$ فى (6) ومنها نجد أن:

$$t = \frac{2u\sin\gamma}{g\cos\beta} = T \tag{7}$$

الحالة الأولى:

إذا كانت القذيفة تصيب المستوى فى الاتجاه الأفقى: فإن السرعة المحصلة تكون فى هذه اللحظة فى الاتجاه الأفقى وبالتالى فإن السرعة فى الاتجاه الرأسى $\dot{y} = o$ مع اعتبار أنه فى الاتجاه الأفقى تكون زاوية القذف مع الأفقى هى $\alpha = \gamma + \beta$.

وحيث أنه فى الاتجاه الرأسى فإن معادلة الحركة: $\ddot{y} = -g$ فبالتكامل نحصل على:

$$\dot{y} = -gt + C$$

والثابت C يكون:

$$\therefore\ \dot{y} = -gt + u\sin\alpha \longleftarrow u\sin\alpha = C$$

وبتطبيق الشرط $\dot{y} = o$ نجد أن:

$$o = -gt + u\sin\alpha$$

$$\therefore\ t = \frac{u \sin\alpha}{g} = \frac{u \sin(\gamma + \beta)}{g} \qquad (8)$$

وبمساواة الزمنين (8), (7) نحصل على:

$$\frac{2u \sin\gamma}{g \cos\beta} = \frac{u \sin(\gamma + \beta)}{g}$$

$$\therefore\ 2\sin\gamma = \sin(\gamma + \beta) \cos\beta$$

$$= [\sin\gamma \ \cos\beta + \cos\gamma \sin\beta] \cos\beta$$

$$= \sin\gamma \ \cos^2\beta + \cos\gamma \sin\beta \cos\beta$$

$$\therefore\ \sin\gamma(2 - \cos^2\beta) = \cos\gamma \sin\beta \cos\beta$$

وبالقسمة على $\cos\gamma$ نحصل على:

$$\therefore\ \tan\gamma(2 - \cos^2\beta) = \sin\beta \cos\beta$$

$$\therefore\ \tan\gamma = \frac{\sin\beta \cos\beta}{2 - \cos^2\beta} = \frac{\sin\beta \cos\beta}{2 - [1 - \sin^2\beta]} = \frac{\sin\beta \cos\beta}{1 + \sin^2\beta} \qquad (9)$$

<u>الحالة الثانية:</u>

إذا كانت القذيفة تصيب المستوى في الاتجاه العمودى عليه: فإن السرعة المحصلة تكون في هذه اللحظة عمودية عليه وبالتالي فإن السرعة في اتجاه المستوى $\dot{x} = o$.

ومن المعادلة (3) فإن:

$$o = -gt \sin\beta + u \cos\gamma$$

$$\therefore\ t = \frac{u \cos\gamma}{g \sin\beta} \qquad (10)$$

وبمساواة الزمنين (10),(8) نجد أن:

$$\frac{2u\sin\gamma}{g\cos\beta}=\frac{u\cos\gamma}{g\sin\beta} \qquad \therefore\ \frac{2\sin\gamma}{\cos\beta}=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$\therefore\ 2\tan\gamma=\frac{1}{\tan\beta} \longrightarrow \boxed{\tan\gamma=\frac{1}{2\tan\beta}}$$

وهو المطلوب ثانيا.

مسائل

1. قذف جسيم من نقطة على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية $30°$ وبسرعة ابتدائية قدرها 56ft/sec إلى أعلى فى اتجاه يصنع زاوية مقدارها $75°$ مع الأفقى. أكتب معادلات الحركة وأوجد المعادلات البارامترية للمسار وكذلك المدى على المستوى المائل، وزمن الطيران، وكذلك السرعة التى سيصدم بها الجسيم هذا المستوى المائل وكذلك اتجاهها (اعتبر عجلة الجاذبية فى نظام الوحدات المستخدم $g=32\ ft/sec^2$).
2. قذفت نقطة مادية على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية $30°$ فى اتجاه يصنع زاوية $60°$ مع خط أكبر ميل بسرعة 320ft/sec فإذا علم أن النقطة المادية لا تترك المستوى، فأثبت أنها تتحرك فى مسار على شكل قطع مكافئ، وأوجد أقصى ارتفاع تصل إليه النقطة المادية فى حركتها (اعتبر عجلة الجاذبية $g=32\ ft/sec^2$).
3. قذف جسيم بسرعة u ليصيب مستويا يميل على الأفقى بزاوية $\beta=30°$ فى اتجاه عمودى عليه، أوجد زمن الطيران، وأثبت أن المدى على المستوى المائل هو $4u^2/7g$.
4. قذف جسيم بسرعة $u = v \cos \gamma$ فى اتجاه يصنع زاوية γ مع الرأسى إلى أعلى مستوى يميل على الرأسى بزاوية 2γ. أثبت أن زمن الطيران يساوى (v/g) وأن المدى يساوى $(v^2/2g)$ وأن الجسيم يصل إلى المستوى بسرعة تساوى $(v \sin \gamma)$ وأن اتجاه حركته عندئذ تكون عمودية على اتجاه القذف.
5. قذف جسيم بسرعة u فأصاب مستوى يميل بزاوية β على الأفقى فى الاتجاه العمودى عليه. أثبت أن ارتفاع نقطة السقوط عن الأفقى المار بنقطة القذف هو

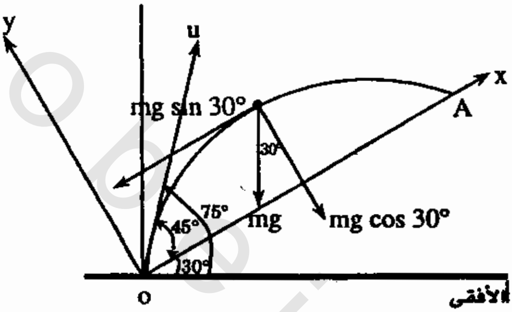
وأن المدى على المستوى الأفقى المار بنقطة القذف هو $\frac{2u^2}{g}\frac{\sin^2\beta}{1+3\sin^2\beta}$

وأن زمن الطيران هو $\frac{u^2\sin^2\beta}{g}\left(\frac{1+\sin^2\beta}{1+3\sin^2\beta}\right)$ $\frac{2u}{g\sqrt{1+3\sin^2\beta}}$.

6. قذفت نقطة مادية بسرعة u فى اتجاه يصنع زاوية α على مستوى مائل يصنع زاوية β مع الأفقى، أثبت أن المدى على المستوى المائل هو: $\frac{R}{\cos\beta}[1-\tan\alpha\tan\beta]$ حيث $R=\frac{u^2}{g}\sin\alpha$ هو المدى على المستوى الأفقى بنفس سرعة القذف u فى اتجاه يصنع الزاوية α مع الأفقى.

حلول المسائل

حل المسألة (1):



نأخذ المستوى المائل محور x

والعمودى عليه محور y

معادلة الحركة:

$$m\ddot{x} = -mg \sin 30$$
$$m\ddot{y} = -mg \cos 30$$

$$\therefore \ddot{x} = -g \sin 30 = -(32)(\tfrac{1}{2}) = -16 \qquad (1)$$

$$\ddot{y} = -g \cos 30 = -(32)\frac{\sqrt{3}}{2} = -16\sqrt{3} \qquad (2)$$

بتكامل (1) ،(2) نحصل على:

$$\dot{x} = -16t + C_1$$

$$\dot{y} = -16\sqrt{3t} + C_2$$

وعند $t = o$ فإن:

$$\dot{x} = 56 \cos 45 = 28\sqrt{2} \quad , \qquad \dot{y} = 56 \sin 45 = 28\sqrt{2}$$

$$\therefore C_1 = 28\sqrt{2} \;,\; C_2 = 28\sqrt{2}$$

$$\therefore \dot{x} = 28\sqrt{2} - 16t \qquad (3)$$

$$\dot{y} = 28\sqrt{2} - 16\sqrt{3}t \qquad (4)$$

بالتكامل مرة ثانية:

$$\therefore x = 28\sqrt{2}t - 8t^2 + C_3$$

$$y = 28\sqrt{2}t - 8\sqrt{3}t^2 + C_4$$

وعند $t = o$ فإن: $y = o$ ، $x = o$

$$\therefore C_3 = o \quad , \qquad C_4 = o$$

$$\therefore \quad x = 28\sqrt{2}t - 8t^2 \qquad (5)$$

$$y = 28\sqrt{2}t - 8\sqrt{3}t^2 \qquad (6)$$

المعادلتان (6) ,(5) هما المعادلتان البارامتريتان لمسار المقذوف على المستوى المائل

ولإيجاد المدى وزمن الطيران:

(1) زمن الطيران: نضع $y = o$ فى (6) فنحصل على:

$$T = \frac{28\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$$

(2) المدى: نعوض عن $t = T$ فى (5) فنوجد $R = x$

$$R = 28\sqrt{2}\left(\frac{7}{6}\sqrt{6}\right) - \left(\frac{49 \times 6}{36}\right) = \frac{98}{3}\left(\sqrt{6} - 2\right)$$

ولإيجاد السرعة التي يصدم بها الجسم المستوى المائل (عند النقطة A):

$$\dot{x}_A = 28\sqrt{2} - 16\left(\frac{7\sqrt{6}}{6}\right) = 28\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right)$$

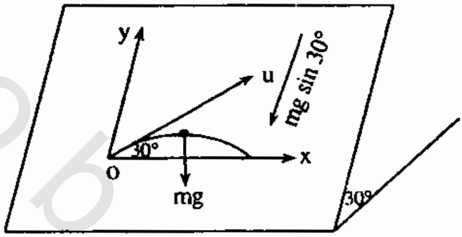
$$\dot{y}_A = 28\sqrt{2} - 16\sqrt{3}\left(\frac{7\sqrt{6}}{6}\right) = -28\sqrt{2}$$

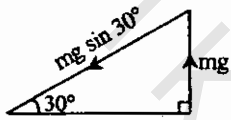
$$\therefore \quad V_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = 28\sqrt{46 - 24\sqrt{3}}$$

واتجاه السرعة V هو:

$$\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sqrt{2}}{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{6})} = \frac{1}{6}\left(6 + 4\sqrt{3}\right) = \frac{1}{3}\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$$

حل المسألة (٢):





حيث أن النقطة المادية لا تترك المستوى فهي تتحرك بعجلة هي مركبة عجلة الجاذبية في اتجاه المستوى والتي تساوي g sin 30، فبأخذ خط أكبر ميل محورا للصادات (y) والأفقي الواقع في المستوى من نقطة O محورا للسينات (x) فتكون معادلات الحركة:

$$\ddot{x} = o \quad , \quad \ddot{y} = -g \sin 30$$

وبإجراء التكامل

$$\therefore \; \dot{x} = C_1 \, , \; \dot{y} = -gt \sin 30 + C_2$$

وفي البداية:

$$\dot{x} = u \cos 30 = 320\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 160\sqrt{3}$$

$$\dot{y} = u \sin 30 = 320 \,(½) = 160$$

$$\therefore C_1 = 160\sqrt{3} \quad , \qquad C_2 = 160$$

$$\therefore \; \dot{x} = 160\sqrt{3}$$

$$\dot{y} = -gt \sin 30 + 160 = -(32)(½)t + 160$$

$$= 160 - 16t$$

وبإجراء التكامل مرة ثانية:

$$\therefore \; x = 160\sqrt{3}t \quad , \qquad y = 160t - 8t^2$$

(حيث ثوابت التكامل هنا تساوي أصفارا).

ولإيجاد معادلة المسار: نحذف الزمن t بين معادلتى x, y فنحصل على:

من معادلة x:
$$t=\frac{x}{160\sqrt{3}}$$

بالتعويض فى معادلة y:

$$\therefore\quad y=160\left(\frac{x}{160\sqrt{3}}\right)-8\left(\frac{x}{160\sqrt{3}}\right)^2=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^2}{9600}$$

وهى معادلة قطع مكافئ.

ولإيجاد أقصى ارتفاع: حيث أن أقصى ارتفاع هو النهاية العظمى للاحداثى y فبتفاضل معادلة y بالنسبة ل x ومساواة الناتج بالصفر نحصل على $y=y_{max}$.

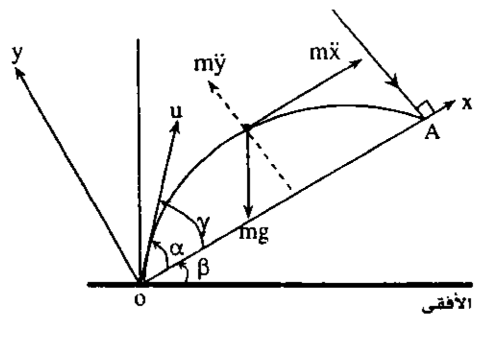
$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{x}{4800}=o\rightarrow x=\frac{4800}{\sqrt{3}}$$

وبالتعويض فى معادلة y نحصل على:

$$y_{max}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{4800}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{9600}\left(\frac{4800}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$=\frac{4800}{3}-\frac{2400}{3}=800ft$$

وهو المطلوب.

حل المسألة (٣):



معادلة الحركة:

$$m\ddot{x}=a-mg\sin\beta$$
$$m\ddot{y}=a-mg\cos\beta$$

بالقسمة على m:

$$\therefore\quad \ddot{x}=-g\sin\beta \qquad (1)$$
$$\ddot{y}=-g\cos\beta \qquad (2)$$

بالتكامل نحصل على:

$$\dot{x} = -gt \sin\beta + C_1$$

$$\dot{y} = -gt \cos\beta + C_2$$

<u>ولإيجاد الثابتان C_2, C_1:</u>

فى البداية: $t = o$، $\dot{y} = u \sin\gamma$ ، $\dot{x} = u\cos\gamma$

ومنها نجد أن ثابتى التكامل هما:

$$\therefore\ C_1 = u\cos\gamma \quad , \quad C_2 = u\sin\gamma$$

$$\therefore\ \dot{x} = -gt\sin\beta + u\cos\gamma \qquad (3)$$

$$\dot{y} = -gt\cos\beta + u\sin\gamma \qquad (4)$$

بالتكامل مرة ثانية واعتبار أنه عند $t = o$ فإن $x = o, y = o$

$$\therefore\ x = -\tfrac{1}{2}gt^2\sin\beta + ut\cos\gamma \qquad (5)$$

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2\cos\beta + ut\sin\gamma \qquad (6)$$

<u>ولإيجاد المدى على المستوى المائل وزمن الطيران:</u>

عند نقطة A فإن $y = o$ وكذلك فإن $\dot{x} = o$

فمن (3) ،(6) نجد أن:

$$-gt\sin\beta + u\cos\gamma = o \qquad (7)$$

$$-\tfrac{1}{2}gt^2\cos\beta + ut\sin\gamma = o \qquad (8)$$

ومن (8):

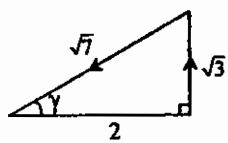
$$\therefore\ -\tfrac{1}{2}gt\cos\beta + u\sin\gamma = o \qquad (9)$$

بقسمة (9) على (7):

$$\therefore\ \tan\gamma = \tfrac{1}{2}\cot\beta$$

وبالتعويض عن $\beta=30$:

$$\therefore\ \tan\gamma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\sin 30 = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cot 30 = \sqrt{3}$$

ومن (٩):

$$\therefore t = \frac{2u\sin\gamma}{g\cos\beta} \qquad (10)$$

$$= \frac{2u}{g}\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{4u}{\sqrt{7}g}$$

وهو زمن الطيران:

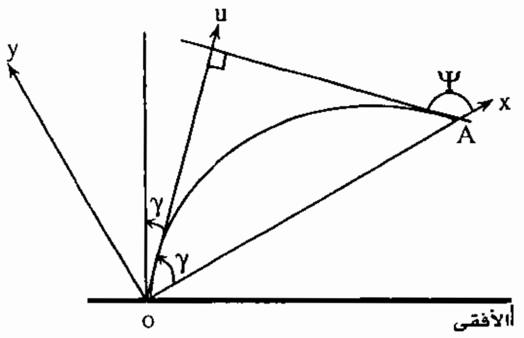
$$[\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{7}}]$$

وبالتعويض فى (5) نحصل على المستوى المائل:

$$x = -\frac{1}{2}g\left(\frac{4u}{\sqrt{7}g}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + u\left(\frac{4u}{\sqrt{7}g}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$$

$$= -\frac{4u^2}{7g} + \frac{8u^2}{7g} = \frac{4u^2}{7g}$$

وهو المطلوب.



__حل المسألة (٤):__

__معادلة الحركة:__

$$m\ddot{x} = -mg\cos 2\gamma$$
$$m\ddot{y} = -mg\sin 2\gamma$$
$$\therefore \quad \ddot{x} = -g\cos 2\gamma \qquad (1)$$
$$\ddot{y} = -g\sin 2\gamma \qquad (2)$$

بالتكامل:

$$\dot{x} = -gt\cos 2\gamma + C_1$$
$$\dot{y} = -gt\sin 2\gamma + C_2$$

ولإيجاد C_1 ،C_2:

في البداية $t = o$،

$$\dot{x} = u\cos\gamma = \nu\cos^2\gamma$$
$$\dot{y} = u\sin\gamma = \nu\cos\gamma\sin\gamma$$

ومنهما $C_2 = \nu\cos\gamma\sin\gamma$ ، $C_1 = \nu\cos^2\gamma$

$$\therefore \quad \dot{x} = -gt\cos 2\gamma + \nu\cos^2\gamma \qquad (3)$$
$$\dot{y} = -gt\sin 2\gamma + \nu\cos\gamma\sin\gamma \qquad (4)$$

وبالتكامل مرة أخرى واعتبار أنه في البداية $t = o$ ،$x = o, y = o$ (لإيجاد ثوابت التكامل)

$$\therefore \quad x = -\tfrac{1}{2}gt^2\cos 2\gamma + \nu t\cos^2\gamma \qquad (5)$$
$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2\sin 2\gamma + \nu t\cos\gamma\sin\gamma$$
$$= -\tfrac{1}{2}(\nu t - gt^2)\sin 2\gamma \qquad (6)$$

لإيجاد زمن الطيران:

(من O إلى المستوى عند A) نضع $y = o$ في (6) فنحصل على:

$$o = \tfrac{1}{2}(\nu t - gt^2)\sin 2\gamma = \tfrac{1}{2}t(\nu - gt)\sin 2\gamma$$

وبالتعويض عن t في (5) نوجد المدى بالصورة:

ومنها: $\nu - gt = o \longrightarrow t = \dfrac{\nu}{g}$ (وهو زمن الطيران)

$$R = x_A = -\tfrac{1}{2}g\left(\frac{\nu}{g}\right)^2\cos 2\gamma + \nu\left(\frac{\nu}{g}\right)\cos^2\gamma = \frac{\nu}{2g}$$

ولإيجاد سرعة وصول الجسيم إلى المستوى (عند A):

نعوض عن $t = \dfrac{\nu}{g}$ في المعادلات (3)، (4) فنحصل على:

$$\dot{x}_A = -g\left(\frac{\nu}{g}\right)\cos 2\gamma + \nu\cos^2\gamma = \nu\sin^2\gamma$$

$$\dot{y}_A = -g\left(\frac{\nu}{g}\right)\sin 2\gamma + \nu\cos\gamma\,\sin\gamma = -\nu\sin\gamma\cos\gamma$$

مقدار السرعة:

$$V_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = \sqrt{(\nu\sin^2\gamma)^2(-\nu\sin\gamma\cos\gamma)^2} = \nu\sin\gamma$$

اتجاه السرعة:

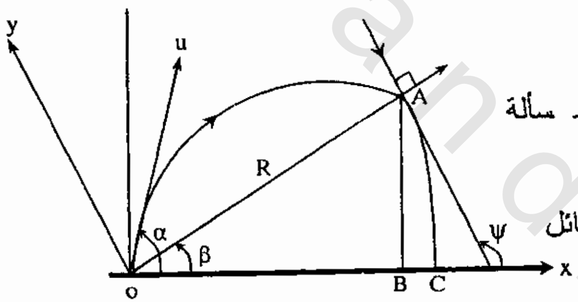
$$\tan\psi = \frac{\dot{y}_A}{\dot{x}_A} = \frac{-\nu\sin\gamma\cos\gamma}{\nu\sin^2\gamma} = -\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = -\cot\gamma = \tan\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \qquad \psi = \gamma + \frac{\pi}{2}$$

وهذا يعنى أن سرعة المقذوف عند المستوى تكون عمودية على اتجاه القذف.

وهو المطلوب.

حل المسألة (٥):



نستخدم فى حل هذه المسألة المحاور العادية x, y حيث: المدى على المستوى المائل المار بنقطة القذف هو:

$$R = \frac{2u^2}{gco^2\beta}\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha \qquad (1)$$

يسقط المقذوف عند النقطة A التى إحداثياتها (x, y) حيث:

$$x = OB = R\cos\beta,\ y = AB = R\sin\beta \qquad (2)$$

معادلة مسار المقذوف:

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\tan^2\alpha)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\tan\alpha-\frac{gx}{u^2}(1+\tan^2\alpha)=\tan\psi \qquad (3)$$

بالتعويض من (2) ,(1) فى (3) نحصل على:

$$\tan\psi=\tan\alpha-\frac{g}{u^2}(R\cos\beta)[1+\tan^2\alpha]$$

$$=\tan\alpha-\frac{g}{u^2}\left[\frac{2u^2}{g\cos^2\beta}\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\right]\cos\beta(1+\tan^2\alpha)$$

$$=\tan\alpha-2\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}(1+\tan^2\alpha)\sin(\alpha-\beta)$$

$$=\tan\alpha-2\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\sin(\alpha-\beta)$$

$$\left|\begin{array}{l} 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \\ \sec^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\end{array}\right.$$

$$=\tan\alpha-2\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}[\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta]$$

$$=\tan\alpha-2[\tan\alpha-\tan\beta]$$

$$=\tan\alpha+2\tan\beta \qquad (4)$$

وحيث أن اتجاه الحركة عمودى على المستوى فإن:

$$\psi=\beta+\frac{\pi}{2}$$

بالتعويض فى (4) نجد أن:

$$\therefore \quad \tan\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=2\tan\beta-\tan\alpha$$

$$-\cot\beta=2\tan\beta-\tan\alpha \qquad \therefore \quad \tan\alpha=2\tan\beta+\cot\beta$$

$$\therefore \quad \tan\alpha=\frac{1+\sin^2\beta}{\sin\beta\,\cos\beta}$$

ومنهما يمكن استنتاج أن:

$$\sin\alpha=\frac{1+\sin^2\beta}{\sqrt{1+3\sin^2\beta}} \qquad , \qquad \cos\alpha=\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{1+3\sin^2\beta}}$$

وبالتعويض فى معادلة المدى (1) نحصل على:

$$R=\frac{2u^2}{g\cos^2\beta}\cos\alpha[\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\sin\beta]$$

$$=\frac{2u^2}{g}\left[\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\beta}-\frac{\cos^2\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta}\right]$$

وباستخدام قيم $\sin\alpha,\cos\alpha$ التى حصلنا عليها نجد أن:

$$R=\frac{u^2}{g}\frac{\sin\beta}{1+3\sin^2\beta}$$

<u>ولإيجاد زمن الطيران:</u> من المعادلة (2):

$$x=R\cos\beta=\frac{2u^2}{g}\frac{\sin\beta\cos\beta}{1+3\sin^2\beta}=ut\cos\alpha$$

ومنها نحصل على الزمن t بالصورة:

$$t=\frac{2u}{g\cos\alpha}\frac{\sin\beta\cos\beta}{1+3\sin^2\beta}$$

$$=\frac{2u}{g}\left[\frac{\sqrt{1+3\sin^2\beta}}{\sin\beta\cos\beta}\right]\frac{\sin\beta\cos\beta}{1+3\sin^2\beta}$$

$$=\frac{2u}{g}\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\beta}}$$

<u>ولإيجاد المدى:</u> حيث أن المدى على المستوى الأفقي هو:

$$OC = \frac{2u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= \frac{2u^2}{g}\left[\frac{1+\sin^2\beta}{\sqrt{1+3\sin^2\beta}}\right]\left[\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{1+3\sin^2\beta}}\right]$$

$$= \frac{u^2}{g}(2\sin\beta\cos\beta)\frac{1+\sin^2\beta}{1+3\sin^2\beta}$$

$$= \frac{u^2\sin^2\beta}{g}\left(\frac{1+\sin^2\beta}{1+3\sin^2\beta}\right)$$

وهو المطلوب.

<u>حل المسألة (6):</u> يترك للطالب حلها.

ثانياً: حركة المقذوفات فى وسط مقاوم

تعتبر حركة الجسيم كمقذوف فى وسط مقاوم أحد أنواع الحركة المستوية للنقطة المادية، وهى تعميم للحركة الخطية للمقذوفات التى درسنها فى الجزء الأول من هذا الكتاب، وسوف نوجد هنا المعادلات البارامترية لحركة المقذوف وكذلك المعادلة الكرتيزية للمسار وزمن الطيران والمدى مع اعتبار مقاومة الوسط كما أوجدناه عند دراستنا للحركة الخطية للمقذوفات وذلك فى صورة الأمثلة المحلولة الآتية:

مثال (١):

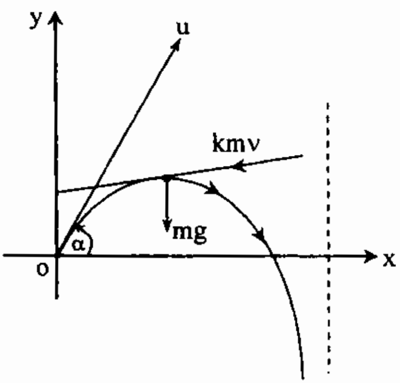
قذف جسيم كتلته m بسرعة u فى اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقى تحت تأثير الجاذبية فى وسط مقاوم (الهواء مثلا) مقاومته تساوى kmv حيث k ثابت، v سرعة الجسيم عند أى لحظة، أكتب معادلات الحركة، وأوجد مركبات السرعة بعد مضى زمن t وكذلك موضع الجسيم بعد مضى هذا الزمن.

الحل:

المقاومة للحركة هى:

$$R = -kmv$$

(إشارة – لأن المقاومة ضد اتجاه الحركة)



معادلات الحركة:

فى اتجاه x:

$$m\ddot{x} = -km\dot{x} \qquad (1)$$

فى اتجاه y:

$$m\ddot{y} = -mg - km\dot{y} \qquad (2)$$

من (1)، (2) بالقسمة على m:

$$\ddot{x} = -k\dot{x} \qquad (3)$$

$$\ddot{y} = -g - k\dot{y} \qquad (4)$$

بتكامل المعادلة (3):

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -k\dot{x} \rightarrow \int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k\int dt$$

$$\therefore \quad \ln \dot{x} = -kt + C_1$$

ولإيجاد C_1:

من الشروط الابتدائية: عند $t = o$ فإن: $\dot{x} = u\cos\alpha$

$$\therefore \ln u\cos\alpha = o + C_1 \rightarrow C_1 = \ln u\cos\alpha$$

$$\therefore \ln \dot{x} = -kt + \ln u\cos\alpha$$

$$\therefore \ln \frac{\dot{x}}{u\cos\alpha} = -kt \qquad \therefore \frac{\dot{x}}{u\cos\alpha} = e^{-kt}$$

$$\therefore \dot{x} = (u\cos\alpha)e^{-kt} \qquad (5)$$

ومن معادلة(4) بالتكامل نحصل على:

$$\ddot{y} = -g - k\dot{y} = -k\left(\frac{g}{k} + \dot{y}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -k\left(\frac{g}{k} + \dot{y}\right)$$

$$\therefore \quad \int \frac{d\dot{y}}{\frac{g}{k} + \dot{y}} = -k\int dt \qquad \therefore \ln\left(\frac{g}{k} + \dot{y}\right) = -kt + C_2$$

ولإيجاد C_2:

في البداية: $t = o$، $\dot{y} = u\sin\alpha$

$$\therefore \ln\left(\frac{g}{k} + u\sin\alpha\right) = C_2$$

$$\therefore \quad \ln\left(\frac{g}{k}+\dot{y}\right)=-kt+\ln\left(\frac{g}{k}+u\sin\alpha\right)$$

$$\therefore \quad \ln\frac{\frac{g}{k}+\dot{y}}{\frac{g}{k}+u\sin\alpha}=-kt \qquad\qquad \therefore \quad \frac{\frac{g}{k}+\dot{y}}{\frac{g}{k}+u\sin\alpha}=e^{-kt}$$

$$\therefore \quad \frac{g}{k}+\dot{y}\left(\frac{g}{k}+u\sin\alpha\right)e^{-kt}$$

$$\dot{y}=\left(\frac{g}{k}+u\sin\alpha\right)e^{-kt}-\frac{g}{k} \qquad (6)$$

المعادلتان (5),(6) تعطيان مركبتى السرعة للمقذوف عند أى لحظة t.

وهو المطلوب الأول.

<u>**ولإيجاد الموضع بعد زمن t:**</u>

بتكامل المعادلة :(5)

$$\frac{dx}{dt}=(u\cos\alpha)e^{-kt}$$

$$\therefore \quad \int dx=(u\cos\alpha)e^{-kt}dt$$

$$\therefore \quad x=(u\cos\alpha)\frac{e^{-kt}}{-k}+C_3$$

<u>**ولإيجاد C_3:**</u>

<u>**فى البداية:**</u> $x=o$ ، $t=o$

$$\therefore \quad O=\frac{(u\cos\alpha)}{-k}e^{o}+C_3=-\frac{u\cos\alpha}{k}+C_3$$

$$\therefore \quad C_3=\frac{u\cos\alpha}{k}$$

$$\therefore \quad x = \frac{u\cos\alpha}{k}e^{-kt} + \frac{u\cos\alpha}{k}$$

$$= \frac{u\cos\alpha}{k}[1 - e^{-kt}] \qquad (7)$$

وبتكامل المعادلة (6):

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{g}{k} + u\sin\alpha\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

$$\therefore \quad y = \left(\frac{g}{k} + u\sin\alpha\right)\frac{e^{-kt}}{-k} - \frac{g}{k}t + C_4$$

ولإيجاد C_4:

في البداية: $t = o$، $y = o$

$$\therefore \quad O = -\left(\frac{g}{k^2} + \frac{u\sin\alpha}{k}\right) - O + C_4 \to C_4 = \left(\frac{g}{k^2} + \frac{u\sin\alpha}{k}\right)$$

$$\therefore \quad y = -\left(\frac{g}{k^2} + \frac{u\sin\alpha}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}t + \left(\frac{g}{k^2} + \frac{u\sin\alpha}{k}\right)$$

$$= \left(\frac{g}{k^2} + \frac{u\sin\alpha}{k}\right)[1 - e^{-kt}] - \frac{g}{k}t \qquad (8)$$

المعادلتان (7) ,(8) تعطيان موضع المقذوف عند أى لحظة t، وهما أيضاً يمثلان المعادلتين البارامترين لمسار المقذوف.

وهو المطلوب ثانياً:

ملاحظات:

1. عندما $k \to o$ (أى بإهمال مقاومة الوسط) فمن المعادلات (5) ,(6) (معادلات السرعة)، (7) ,(8) (معادلات الموضع) نجد أن:

$$\lim_{k\to o}\dot{x} = u\cos\alpha$$

$$\lim_{k\to o}\dot{y} = u\sin\alpha - gt$$

$$\lim_{k\to o}x = ut\cos\alpha$$

$$\lim_{k\to o}y = ut\sin\alpha - ½gt^2$$

وهى معادلات الحركة للمقذوف فى حلة إهمال مقاومة الوسط (أنظر الجزء الأول من الكتاب).

2. أيضاً عندما $k \to \infty$ (أى بعد فترة زمنية طويلة من بداية الحركة) فمن المعادلتين (7), (8):

$$\lim_{k\to\infty}x = \frac{u\cos\alpha}{k} \qquad (9)$$

$$\lim_{k\to\infty}y = \left(\frac{g}{k^2} + \frac{u\sin\alpha}{k}\right) - \infty = A - \infty = -\infty \qquad (10) \qquad \left|\begin{array}{l} e^{-\infty} = O \\ A \pm \infty = \pm\infty \end{array}\right.$$

من (9) ,(10) نجد أن مسار المقذوف يقترب من خط مستقيم رأسى يبعد مسافة أفقية $x = \dfrac{u\cos\alpha}{k}$ من نقطة القذف، وهو عكس حركة المقذوف مع إهمال مقومة الوسط حيث المسار على شكل قطع مكافئ يتزايد الاحداثى الأفقى x له تزايدا منتظما بدون حد أعلى.

3. أيضاً من المعادلتين (5) ,(6) فإن:

$$\lim_{t\to\infty}\dot{x} = O$$

$$\lim_{t\to\infty}\dot{y} = -\frac{g}{k}$$

أى أن مركبات السرعة النهائية هى $\left(O, \frac{-g}{k}\right)$ ومقدار السرعة النهائية هو:

$v_{lim} = \frac{g}{k}$ واتجاهها هو الاتجاه الرأسى إلى أسفل (إشارة −).

<u>مثال (2):</u>

أوجد المعادلة الكرتيزية لمسار المقذوف فى الوسط المقاوم وبين كيف تحصل منها على معادلة المسار للمقذوف مع إهمال مقاومة الوسط.

<u>الحل:</u>

لإيجاد المعادلة الكرتيزية لمسار المقذوف نحذف الزمن t بين المعادلتين البارامتريتين للمسار (المعادلتين (7) ,(8)) كالآتى:

من المعادلة (7):

$$x = \frac{u\cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$\therefore \quad 1 - e^{-kt} = \frac{kx}{u\cos\alpha} \qquad \therefore \quad e^{-kt} = 1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}$$

$$\therefore \quad -kt = \ln\left[1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}\right] \rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\left[1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}\right]$$

بالتعويض فى معادلة y [المعادلة (8)]:

$$y = \left(\frac{g}{k^2} + \frac{u\cos\alpha}{k}\right)[1 - e^{-kt}] - \frac{g}{k}t$$

$$= \left(\frac{g}{k^2} + \frac{u\cos\alpha}{k}\right)\left[\frac{kx}{u\cos\alpha}\right] - \frac{g}{k}\left[-\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}\right)\right]$$

$$= \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}\right) + \frac{x}{u\cos\alpha}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)$$

$$= x\tan\alpha + \frac{gx}{ku\cos\alpha} + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}\right) \qquad (9)$$

المعادلة (9) هى المعادلة الكرتيزية لمسار المقذوف فى الوسط المقاوم.

ولإيجاد المعادلة الكرتيزية للمقذوف مع إهمال مقاومة الوسط (أى عندما k=o) نتبع الآتى:

بفك اللوغارتم الموجود فى معادلة المسار على هيئة متسلسلة حيث:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - .....$$

$$\therefore \ \ln\left(1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}\right) = \frac{-kx}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}\frac{k^2x^2}{u^2\cos^2\alpha} - \frac{1}{3}\frac{k^3x^3}{u^3\cos^3\alpha} + ...$$

وبالتعويض فى معادلة المسار (9):

$$\therefore y = x\tan\alpha + \frac{gx}{k\cos} + \frac{g}{k^2}\left[\frac{-kx}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}\frac{k^2x^2}{u^2\cos^2\alpha} - \frac{1}{3}\frac{k^3x^3}{u^3\cos^3\alpha} + ...\right]$$

$$= x\tan\alpha + \frac{gx}{ku\cos\alpha} + \frac{gx}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2\cos^2\alpha} - \frac{1}{3}\frac{kgx^3}{u^3\cos^3\alpha} + ...$$

$$= x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2\cos^2\alpha} - \frac{1}{3}\frac{kgx^3}{u^3\cos^3\alpha} + \cdots$$ حدود فى k^2 وما فوقهما

وبوضع k=o ابتداء من الحد الثالث نحصل على:

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad (10)$$

وهى معادلة المسار للمقذوف مع إهمال مقاومة الوسط والتى حصلنا عليها فى الجزء الأول.

وهو المطلوب.

مثال (3):

(أ) أوجد قصى ارتفاع يصل إليه المقذوف H وكذلك زمن الوصول إلى هذا الارتفاع t_H.

(ب) أوجد زمن الطيران T للمقذوف وكذلك المدى R.

الحل:

أولاً: أقصى ارتفاع وزمن أقصى ارتفاع:

يصل المقذوف أقصى ارتفاع H عندما $\dot{y} = o$ بعد زمن قدره $t=t_H$

فمن المعادلة (6):

$$O = \left(\frac{g}{k} + u\sin\alpha\right)e^{-kt_H} - \frac{g}{k}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{g}{k} + u\sin\alpha\right)e^{-kt_H} = \frac{g}{k}$$

$$\therefore \quad e^{-kt_H} = \frac{g/k}{\frac{g}{k} + u\sin\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{k}{g}u\sin\alpha} \qquad (11)$$

$$\therefore \quad -kt_H = \ln\left[\frac{1}{1 + \frac{k}{g}u\sin\alpha}\right] = -\ln\left(1 + \frac{k}{g}u\sin\alpha\right)$$

$$\therefore \quad t_H = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{k}{g}u\sin\alpha\right) \qquad (12)$$

ولإيجاد أقصى ارتفاع H:

نعوض بالزمن t_H من (11) ,(12) فى معادلة y (المعادلة 8)

$$\therefore \qquad y_{max} = H = \left(\frac{g}{k^2} + \frac{u\sin\alpha}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{k}{g}u\sin\alpha}\right)$$

$$- \frac{g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{k}{g}u\sin\alpha\right)$$

$$= \frac{u\sin\alpha}{k} = \frac{g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{k}{g}u\sin\alpha\right) \qquad (13)$$

وهو إحداثى أعلى نقطة فى مسار المقذوف.

<u>ثانياً: زمن الطيران T والمدى R:</u>

للحصول على زمن الطيران نعوض عن $y = o$ فنحصل على الزمن الكلى t $= T$.

فمن معادلة y (المعادلة 8):

$$\therefore \qquad o = \left(\frac{g}{k^2} + \frac{u\sin\alpha}{k}\right)\left(1 - e^{-kT}\right) = \frac{g}{k}T$$

$$\therefore \qquad gT = \left(\frac{g}{k} + u\sin\alpha\right)\left(1 - e^{-kT}\right)$$

$$\therefore \qquad T = \left(\frac{1}{k} + \frac{u\sin\alpha}{g}\right)\left(1 - e^{-kT}\right) \qquad (14)$$

وبالتعويض عن هذا الزمن فى معادلة x [المعادلة (7)] نحصل على المدى حيث:

$x = R$ عندما $t = T$.

من (14):

$$\left(1-e^{-kT}\right)=\frac{T}{\frac{1}{k}+\frac{u\sin\alpha}{g}}$$

$$\therefore\ R=\frac{u\cos\alpha}{k}\left(1-e^{-kT}\right)$$

$$=\frac{u\cos\alpha}{k}\left[\frac{T}{\frac{1}{k}+\frac{u\sin\alpha}{g}}\right]$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (4):</u>

تتحرك نقطة مادية كتلتها m بسرعة u فى اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقى فى وسط مقاومته للحركة هى λmv، أوجد مقدار العجلة واتجاهها عند أى لحظة t، وأثبت أن مقدار العجلة عند اللحظة t يعطى بالعلاقة $f = f_o e^{-\lambda t}$ حيث f_o هو مقدار العجلة فى بداية الحركة، وأن هذا المقدار يؤول بمضى الزمن إلى الصفر، أثبت كذلك أن اتجاه العجلة يكون ثابتا دائما.

<u>الحل:</u>

مقاومة الوسط هى $R = -\lambda mv$ ولها مركبتان هما:

$$\ddot{x}=-\lambda\dot{x} \qquad (1), \qquad \ddot{y}=-g-\lambda\dot{y}$$
(2)

حيث مركبتا السرعة هما:

$$\dot{x}=v\cos\alpha.e^{-\lambda t} \qquad (3)$$

$$\dot{y}=\left(\frac{g}{\lambda}+v\sin\alpha\right)e^{-\lambda t}-\frac{g}{\lambda} \qquad (4)$$

[المعادلتان البارامتريتان للمسار]

بالتعويض من (3)، (4) فى (1)، (2) نحصل على:

$$\therefore \quad \ddot{x}=-\lambda v\cos\alpha.e^{-\lambda t} \qquad (5)$$

$$\ddot{y}=-(\lambda v\sin\alpha+g)e^{-\lambda t} \qquad (6)$$

ويكون مقدر العجلة عند أى لحظة:

$$f = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = e^{-\lambda t}\sqrt{(\lambda v \cos\alpha)^2 + (\lambda v \sin\alpha + g)^2} \qquad (7)$$

ولكن مقدار العجلة الابتدائية هى:

$$f_o = \sqrt{\ddot{x}_o^2 + \ddot{y}_o^2}$$

حيث: مركبات العجلة الابتدائية هى:

$$\ddot{x}_o = \lambda v \cos\alpha \qquad , \qquad \ddot{y}_o = -(\lambda v \sin\alpha + g)$$

$$f_o = \sqrt{(\lambda v \cos\alpha)^2 + (\lambda v \sin\alpha + g)^2} \qquad (8)$$

من (7) ,(8) نجد أن:

$$\boxed{f = f_o e^{-\lambda t}} \qquad (9)$$

وعند $t \to \infty$ فمن (9) نجد أن:

$$\lim_{t\to\infty} f = o \qquad \Big| \; e^{-\infty} = o$$

أى أن مقدار العجلة يؤول إلى الصفر بمضى الزمن.

<u>ولإيجاد اتجاه العجلة:</u>

عند أى لحظة فإن اتجاه العجلة يعطى بالعلاقة:

$$\tan\beta = \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \frac{\lambda v \sin\alpha + g}{\lambda v \cos\alpha} = \text{const.}$$

أى أن $\beta = \text{const}$ مما يعنى أن اتجاه العجلة يكون ثابت دائما.

وهو المطلوب.

<u>مثال (5):</u>

قذف جسيم فى اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقى فى وسط تتناسب مقاومته مع السرعة $(R = -\lambda m v)$ فإذا كان T هو الزمن الذى يأخذه الجسيم حتى يصل إلى المستوى الأفقى المار بنقطة القذف، وكانت β هى الزاوية التى يصنعها اتجاه الحركة مع الأفقى حينئذ، فاثبت أن:

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{e^{\lambda t}-1-\lambda T}{e^{-\lambda t}-1+\lambda T}$$

وأن: $\beta>\alpha$

الحـل:

مركبتا السرعة عند أى لحظة t هما:

$$\dot{x}=v\cos\alpha.e^{-\lambda t} \qquad (1)$$

$$\dot{y}=\left(v\sin\alpha+\frac{g}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}-\frac{g}{\lambda} \qquad (2)$$

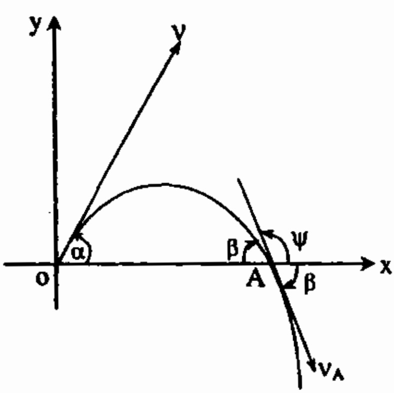
أيضاً فإن موضع الجسيم عند أى لحظة t يعطى بالعلاقتين:

$$x=\frac{v\cos\alpha}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}) \qquad (3)$$

$$y=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{g}{\lambda}+v\sin\alpha\right)(1-e^{-\lambda t})-\frac{g}{\lambda}t \qquad (4)$$

زمن الطيران T يأتى بوضع $y=o$ فى (4) ويعطى بالعلاقة:

$$T=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\lambda v\sin\alpha}{\lambda}\right)(1-e^{-\lambda t}) \qquad (5)$$



بالتعويض عن $T=t$ فى (1), (2) نحصل على مركبتى سرعة الجسيم عند المستوى الأفقى المار بنقطة القذف (عند نقطة A):

$$\dot{x}_A=v\cos\alpha.e^{-\lambda T}$$

$$\dot{y}_A=\left(v\sin\alpha+\frac{g}{\lambda}\right)e^{-\lambda T}-\frac{g}{\lambda}$$

وتعطى الزاوية β التى يصنعها اتجاه الحركة مع الأفقى بالعلاقة:

$$\tan\beta = -\tan\psi = -\frac{\dot{y}_A}{\dot{x}_A} = -\frac{\left(v\sin\alpha + \frac{g}{\lambda}\right)e^{-\lambda T} - \frac{g}{\lambda}}{v\cos\alpha . e^{-\lambda T}}$$

$$= -\left[\tan\alpha + \frac{g}{v\lambda\cos\alpha}\right] - \frac{g}{v\lambda\cos\alpha}e^{\lambda T}$$

$$= -\tan\alpha + \frac{g}{v\lambda\cos\alpha}\left[e^{\lambda T} - 1\right] \qquad (6)$$

وبالتعويض عن T من (5) حيث:

$$T = \frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{v\lambda\sin\alpha}{g}\right]\left(1 - e^{-\lambda T}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{v\lambda\sin\alpha}{g} = \frac{\lambda T}{1 - e^{-\lambda T}} - 1 = \frac{\lambda T - 1 + e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda T}}$$

$$\therefore \quad \frac{g}{v\lambda\sin\alpha} = \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T - 1 + e^{-\lambda T}} \qquad (7)$$

ومن (6):

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = -1 + \frac{g}{v\lambda\sin\alpha}\left(e^{\lambda T} - 1\right)$$

وباستخدام (7):

$$\therefore \quad \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = -1 + \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T - 1 + e^{-\lambda T}}\left(e^{\lambda T} - 1\right)$$

$$= \frac{-\lambda T + 1 - e^{-\lambda T} + (e^{\lambda T} - 2 + e^{-\lambda T})}{\lambda T - 1 + e^{-\lambda T}}$$

$$= \frac{e^{\lambda T} - 1 - \lambda T}{e^{-\lambda T} - 1 + \lambda T} \qquad (8)$$

وهو المطلوب أولاً:

ولإثبات أن $\beta > \alpha$: حيث أن:

$$\sinh \lambda T = \frac{e^{\lambda T} - e^{-\lambda T}}{2} = \lambda T + \frac{(\lambda T)^3}{3!} + \frac{(\lambda T)^5}{5!} + \ldots.$$

$$\therefore \frac{e^{\lambda T} - e^{-\lambda T}}{2} > \lambda T \qquad \therefore\ e^{\lambda T} - e^{-\lambda T} > \lambda T$$

$$\therefore\ e^{\lambda T} - e^{-\lambda T} > \lambda T + \lambda T \qquad \therefore\ e^{\lambda T} - \lambda T - 1 > e^{-\lambda T} + \lambda T - 1$$

ومن (8) نجد أن: $\boxed{\beta > \alpha} \leftarrow \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} > 1$

وهو المطلوب ثانيا.

مسائل

مسألة (1):

يتحرك جسيم فى مستوى رأسى تحت تأثير وزنه mg ومقاومة ثابتة $R=\lambda mg$ فإذا قذف الجسيم بسرعة u من O فى اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقى، فأوجد سرعة الجسيم عند أى لحظة.

مسألة (2):

قذف جسيم بسرعة u فى اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقى فى وسط مقاومته λ مرة قدر السرعة، أثبت أن اتجاه حركته سوف يصنع زاوية α مرة ثانية مع الأفقى بعد زمن قدره: $\frac{1}{\lambda}\ln\left[1+\frac{2\lambda u\sin\alpha}{g}\right]$ وما هى مركبات الإزاحة عندئذ.

مسألة (3):

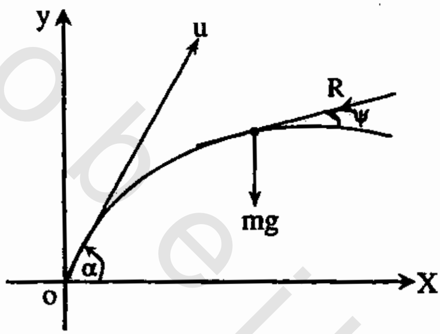
إذا كانت المقاومة لحركة جسيم تتناسب مع السرعة $(R=\lambda mv)$ وكان المدى على المستوى الافقى المار بنقطة القذف نهاية عظمى فاثبت أن زاوية القذف θ التى يصنعها اتجاه القذف مع الرأسى تعطى بالعلاقة:

$$k(1+k\cos\theta)=(k\cos\theta)\ln(1+k\sec\theta)$$

حيث k هى النسبة بين سرعة القذف والسرعة النهائية.

حلول المسائل

حل المسألة (١):



مقاومة الوسط R=−λmg في اتجاه مضاد للحركة وتصنع زاوية ψ مع الأفقي، وهي ثابتة المقدار.

معادلات الحركة:

في الاتجاه الأفقي:

$$m\ddot{x} = -\lambda mg\cos\psi \qquad (1)$$

في الاتجاه الرأسي:

$$m\ddot{y} = -mg - \lambda mg\sin\psi \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -\lambda g\cos\psi \qquad (3)$$

$$\therefore \quad \ddot{y} = -g(1+\lambda\sin\psi) \qquad (4)$$

والآن: نفرض أن:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\psi = p \qquad (5)$$

$$\therefore \quad \dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan\psi) = \sec^2\psi.\dot{\psi} \qquad (6)$$

وحيث أن مركباً السرعة هما:

$$\therefore \quad \dot{x} = v\cos\psi \quad , \quad \dot{y} = v\sin\psi$$

$$\therefore \quad v = \frac{\dot{x}}{\cos\psi} \qquad \therefore\ \dot{y} = \frac{\dot{x}}{\cos\psi}\sin\psi = \dot{x}\tan\psi = \dot{x}p$$

$$\therefore \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{p} + \ddot{x}p \qquad (7)$$

بالتعويض من (3), (4), (5), (6) فى (7) نحصل على:

$$-g = (1+\lambda\sin\psi) = (\dot{x})(\sec^2\psi.\dot{\psi}) + (-\lambda g\cos\psi)(\tan\psi)$$

$$\therefore\quad -g - \lambda g\sin\psi = (\dot{x}\dot{\psi})\sec^2\psi - (\lambda g\sin\psi)$$

$$\therefore\quad \dot{x}\dot{\psi}\sec^2\psi = -g \qquad (8)$$

من (3), (8) بالقسمة:

$$\therefore\quad \dot{x}\frac{d\psi}{dt} = -\sec^2\psi = -g \qquad \therefore\quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -\lambda g\cos\psi$$

$$\therefore\quad \frac{\frac{d\dot{x}}{dt}\cos^2\psi}{\dot{x}\frac{d\psi}{dt}} = \lambda\cos\psi \qquad \therefore\quad \frac{d\dot{x}}{\dot{x}}\cos = \lambda d\psi$$

$$\therefore\quad \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \lambda\sec\psi\, d\psi$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\therefore\quad \int_{x_o}^{o}\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \lambda\int_{\alpha}^{\psi}\sec\psi\, d\psi \quad \therefore\quad \ln\dot{x}\Big|_{x_o}^{x} = \lambda\ln(\sec\psi+\tan\psi)\Big|_{\alpha}^{\psi}$$

ولكن: $\int\frac{dx}{x} = \ln x \quad , \quad \int\sec x\; dx = \ln(\sec x + \tan x)$

حيث:

$$\therefore\quad \ln(\dot{x}) - \ln\dot{x}_o = \lambda[\ln(\sec\psi+\tan\psi) - \ln(\sec\alpha+\tan\alpha)]$$

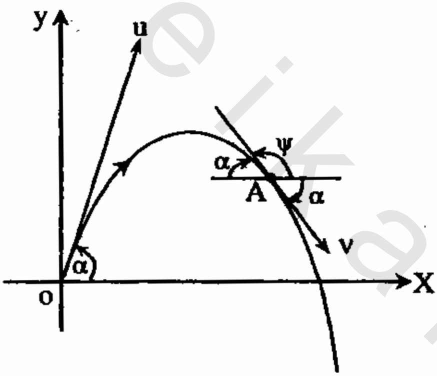
$$\therefore\quad \frac{\dot{x}}{\dot{x}_o} = \left[\frac{\sec\psi+\tan\psi}{\sec\alpha+\tan\alpha}\right]^{\lambda} \qquad \Bigg|\; \alpha\ln x = \ln x^{\alpha}$$

ولكن $\dot{x}_o = u\cos\alpha$ (فى البداية)، $\dot{x} = v\cos\psi$

$$\therefore\ v\cos\psi = u\cos\alpha\left[\frac{\sec\psi+\tan\psi}{\sec\alpha+\tan\alpha}\right]^{\lambda}$$

$$\therefore\ v = u\frac{\cos\alpha}{\cos\psi}\left[\frac{\sec\psi+\tan\psi}{\sec\alpha+\tan\alpha}\right]^{\lambda}$$

وهو المطلوب.



حل المسألة (٢):

مركبات السرعة عند أى لحظة:

$$\dot{x} = u\cos\alpha . e^{-\lambda T}$$

$$\dot{y} = \left(\frac{g}{\lambda}+u\sin\alpha\right)e^{-\lambda T} - \frac{g}{\lambda}$$

ولكى يكون اتجاه الحركة يصنع زاوية α مرة ثانية وذلك عند الزمن $t=t_A$

$$\therefore\ \tan\alpha = -\tan\psi = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\left(\frac{g}{\lambda}+u\sin\alpha\right)e^{-\lambda t}-\frac{g}{\lambda}}{u\cos\alpha . e^{-\lambda t}}$$

$$= -\left[\frac{g}{\lambda u\cos\alpha}+\tan\alpha\right]+\frac{g}{\lambda u\cos\alpha}e^{\lambda t_A}$$

$$\therefore\ 2\tan\alpha = \frac{g}{\lambda u\cos\alpha}\left(e^{\lambda t_A}-1\right)$$

$$\therefore\ 2\sin\alpha = \frac{g}{\lambda u}\left(e^{\lambda t_A}-1\right)$$

$$\therefore\ e^{\lambda t_A}-1 = \frac{2\lambda u\sin\alpha}{g} \rightarrow e^{\lambda t_A} = 1+\frac{2\lambda u\sin\alpha}{g}$$

$$\therefore\ e\lambda t_A = \ln\left(1+\frac{2\lambda u\sin\alpha}{g}\right)$$

$$\therefore\ t_A = \frac{1}{\lambda}\ln\left(1+\frac{2\lambda u\sin\alpha}{g}\right) \qquad (1)$$

وهو المطلوب الأول.

<u>**ولإيجاد مركبات الإزاحة عند A:**</u>

نعوض من (1) عن $t=t_A$ في معادلتي الإزاحة فنحصل على:

$$x_A = \frac{u\cos\alpha}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t_A}\right) \qquad (3)$$

$$y_A = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{g}{\lambda}+u\sin\alpha\right)\left(1-e^{-\lambda t_A}\right)-\frac{g}{\lambda}t_A \qquad (4)$$

فمن (1)، (3):

$$\therefore\ x_A = \frac{u\cos\alpha}{\lambda}\left(1-\frac{g}{2\lambda u\sin\alpha}\right) = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g+2\lambda u\sin\alpha}$$

ومن (1)، (4):

$$\therefore\ y_A = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{g}{\lambda}+u\sin\alpha\right)\left(\frac{2\lambda u\cos\alpha}{g+2\lambda u\sin\alpha}\right)-\frac{g}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda}\ln\left(1+\frac{2\lambda u\sin\alpha}{g}\right)$$

$$= \frac{2u\cos\alpha}{g+2\lambda u\cos\alpha}\left(\frac{g}{\lambda}+u\sin\alpha\right)-\frac{g}{\lambda^2}\ln\left(1+\frac{2\lambda u\sin\alpha}{g}\right)$$

وهو المطلوب ثانياً.

حل المسألة (3):

المعادلة الكرتيزية لمسار المقذوف فى الوسط المقاوم هى:

$$y = x\tan\alpha + \frac{gx}{\lambda u\cos\alpha} + \frac{g}{\lambda^2}\ln\left(1 - \frac{\lambda x}{u\cos\alpha}\right)$$

حيث α هى الزاوية التى يصنعها اتجاه القذف مع الأفقى:

وإذا كان المدى هو R فإن: x=R عندما y=o

$$\therefore \quad o = R\tan\alpha + \frac{gR}{\lambda u\cos\alpha} + \frac{g}{\lambda^2}\ln\left(1 - \frac{\lambda R}{u\cos\alpha}\right) \qquad (1)$$

ويكون المدى R أكبر ما يمكن إذا كان $\frac{dR}{d\alpha} = o$ (من قواعد التفاضل)

فبتفاضل المعادلة (1) نحصل على:

$$o = R\sec^2\alpha + \frac{gR}{\lambda u}\sec\alpha\tan\alpha + \frac{g}{\lambda^2}\left(\frac{\frac{\lambda R}{u}(\sec\alpha\tan\alpha)}{1 - \frac{\lambda R}{u\cos\alpha}}\right)$$

$$d(\sec x) = \sec x\tan x$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \quad R\sec^2\alpha\left(1 + \frac{g}{\lambda u}\sin\alpha\right) = \frac{gR}{\lambda u}\frac{u\tan\alpha}{u\cos\alpha - \lambda R} \qquad (2)$$

وباعتبار أن سرعة القذف هى u وأن السرعة النهائية هى $\frac{g}{\lambda}$ فإن النسبة k تكون:

$$k = \frac{\text{سرعة القذف}}{\text{السرعة النهائية}} = \frac{u}{g/\lambda} = \frac{u\lambda}{g}$$

فتصبح المعادلة (2):

$$\sec^2\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{k}\right)=\frac{1}{k}\frac{u\tan\alpha}{u\cos\alpha-\lambda R}$$

وبالقسمة على $\sec^2\alpha$:

$$\therefore\quad \frac{k+\sin\alpha}{k}=\frac{1}{k}\frac{u\sin\alpha\cos\alpha}{u\cos\alpha-\lambda R}$$

$$\therefore\quad k+\sin\alpha=\frac{u\sin\alpha\cos\alpha}{u\cos\alpha-\lambda R}$$

وبالقسمة على $\sin\alpha$:

$$\frac{k+\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{u\cos\alpha}{u\cos\alpha-\lambda R}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\alpha}{k+\sin\alpha}=\frac{u\cos\alpha-\lambda R}{u\cos\alpha}=1-\frac{\lambda R}{u\cos\alpha}$$

$$\therefore\quad \frac{\lambda R}{u\cos\alpha}=1-\frac{\sin\alpha}{k+\sin\alpha}=\frac{k}{k+\sin\alpha}$$

$$\therefore\quad R=\frac{u\cos\alpha}{\lambda}\left(\frac{k}{k+\sin\alpha}\right)\qquad (4)$$

وهى معادلة أقصى مدى:

وبكتابة المعادلة (1) بالصورة:

$$o=\frac{R}{u\cos\alpha}\left(u\sin\alpha+\frac{g}{\lambda}\right)+\frac{g}{\lambda^2}\ln\left(1-\frac{\lambda R}{u\cos\alpha}\right)$$

وبالتعويض عن R من (4) فى هذه المعادلة نحصل على:

$$o=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{k}{k+\sin\alpha}\right)\left(u\sin\alpha+\frac{g}{\lambda}\right)+\frac{g}{\lambda^2}\ln\left(\frac{\sin\alpha}{k+\sin\alpha}\right)$$

$$=\frac{k}{\lambda(k+\sin\alpha)}\left(u\sin\alpha+\frac{g}{\lambda}\right)-\frac{g}{\lambda^2}\ln(k\operatorname{cosec}\alpha+1)$$

$$=\frac{ku\sin\alpha}{\lambda(k+\sin\alpha)}+\frac{kg}{\lambda^2(k+\sin\alpha)}-\frac{g}{\lambda^2}\ln(k\operatorname{cosec}\alpha+1)$$

$$=\frac{g}{\lambda^2}\frac{k}{(k+\sin\alpha)}\left(\frac{\lambda u}{g}\sin\alpha+1\right)-\frac{g}{\lambda^2}\ln(k\operatorname{cosec}\alpha+1)$$

$$\therefore\quad \frac{k}{k+\sin\alpha}(k\sin\alpha+1)=\ln(k\operatorname{cosec}\alpha+1)$$

$$\therefore\quad k(1+k\sin\alpha)=(k+\sin\alpha)\ln(1+k\operatorname{cosec}\alpha+1)$$

وبوضع θ (الزاوية التى يصنعها اتجاه القذف مع الرأسى): حيث: $\theta=90-\alpha$

نحصل على العلاقة المطلوبة وهى:

$$k(1+k\cos\theta)=(k+\cos\theta)\ln(1+k\sec\theta)$$

وهو المطلوب.

ثالثاً: حركة القذيفة والمدفع

تمهيد:

عند إطلاق قذيفة من مدفع تتولد فجأة كمية من الغازات ذات ضغط كبير تؤثر على كل من القذيفة والمدفع بقوة دفعية تدفع القذيفة إلى الانطلاق بسرعة كبيرة نظرا لصغر كتلتها بينما يتحرك المدفع إلى الخلف بسرعة صغيرة. ويكون الدفع الواقع على كل من القذيفة والمدفع متساو فى المقدار وفى اتجاهين متضادين، وبذلك يكون:

التغير فى كمية حركة القذيفة يساوى التغير فى كمية حركة المدفع بحيث أن: التغير فى كمية حركة القذيفة يكون فى اتجاه حركة القذيفة، بينما التغير فى كمية حركة المدفع يكون فى اتجاه حركة المدفع المضاد لحركة القذيفة.

حالة خاصة: إذا كان كل من القذيفة والمدفع فى حالة سكون فإن:

(كمية حركة القذيفة = كمية حركة المدفع) كل مقاس فى اتجاه حركته.

انفجار قذيفة تسير بسرعة معلومة إلى عدة أجزاء وحساب الطاقة المتولدة عن الانفجار:

يعرف الانفجار (Explosion) بأنه انشطار جسم (قنبلة مثلا) إلى جسمين أو أكثر (عدة شظايا)، ويسبب الانفجار زيادة فى طاقة الحركة (عكس التصادم الذى يسبب فقدان فى طاقة الحركة)، وتكون الزيادة فى الطاقة:

$$\Delta E = \left(\sum \tfrac{1}{2} m_i v_i^2\right) - \tfrac{1}{2} m u^2$$

حيث i تشير إلى عدد الأجزاء التى ينشطر إليها الجسم، u سرعة الجسم قبل الانشطار مباشرة. ويطبق قانون بقاء كمية الحركة على هذه الحالة فى صورته الاتجاهية:

$$\sum m_i \vec{v}_i - \left(\sum m_i\right)\vec{u}$$

أى أن: المجموع الاتجاهى لكميات حركة الشظايا بعد الانفجار مباشرة يساوى كمية حركة القنبلة قبل الانفجار مباشرة. وهو قانون اتجاهى أى يمكن تطبيقه بالتحليل فى اتجاهين متعامدين.

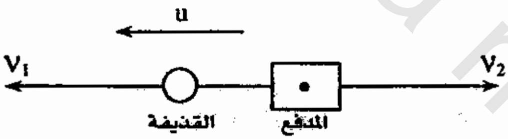
أمثلة محلولة

مثال (١):

أطلقت قذيفة كتلتها m من مدفع كتلته M بسرعة u بالنسبة للمدفع، أثبت أن السرعة الفعلية لكل من القذيفة (v_1) والمدفع (v_2) تعطيان بالعلاقتين:

$$v_1 = \frac{Mu}{M+m}, \qquad v_2 = \frac{mu}{M+m}$$

الحل:



إذا كانت v_2, v_1 هما سرعتى القذيفة والمدفع، ففى حالة السكون تكون:

كمية حركة القذيفة = كمية حركة المدفع

$$Mv_2 = mv_1 \quad (1)$$

ولكن: السرعة النسبية للقذيفة بالنسبة للمدفع هى:

$$u = v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2 \quad (2)$$

فمن (2): $v_2 = u - v_1$ وبالتعويض فى (١)

$$\therefore \quad M(u - v_1) = mv_1$$

$$\therefore \quad Mu = mv_1 + Mv_2 = v_1(m + M)$$

$$\therefore \quad v_1 = \frac{Mu}{m+M}$$

أيضاً: من (2): $v_1 = u - v_2$

وبالتعويض فى (1): $Mv_2 = m(u - v_2) = mu - mv_2$

$$\therefore \quad v_2(M+m) = mu \longrightarrow v_2 = \frac{mu}{M+m} \qquad (4)$$

المعادلتان (3) ,(4) هما المعادلتان المطلوبتان.

مثال (2):

مدفع كتلته M يطلق قذيفة كتلتها m فى الاتجاه الأفقى، فإذا علم أن طاقة الانفجار تكفى لقذف نفس القذيفة رأسيا إلى ارتفاع مسافة h، فاثبت أن سرعة المدفع تكافئ $\sqrt{\dfrac{2m^2gh}{M(m+M)}}$.

الحل:

حيث أن:

طاقة الانفجار = طاقة حركة القذيفة عند انطلاقهما رأسيا إلى أعلى، فإن:

$$mgh = E \qquad (1)$$

وعند إطلاق المدفع للقذيفة وهو فى وضع أفقى فإن:

$$E = \tfrac{1}{2}Mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 \qquad (2)$$

حيث: v_1 سرعة ارتداد المدفع، v_2 سرعة القذيفة.

وحيث أن: كمية حركة القذيفة = كمية حركة المدفع فإن:

$$Mv_1 = mv_2 \qquad (3)$$

فمن (3):

$$v_2 = \frac{Mv_1}{m} \qquad (4)$$

ومن (1) ,(2):

$$mgh = \tfrac{1}{2}Mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 \qquad (5)$$

وبالتعويض من (4) فى (5):

$$\therefore \quad mgh = \tfrac{1}{2}Mv_1^2 + \tfrac{1}{2}m\left(\frac{Mv_1}{m}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}Mv_1^2 + \tfrac{1}{2}\frac{M^2}{m}v_1^2 = \tfrac{1}{2}v_1^2\left(M + \frac{M^2}{m}\right)$$

$$\therefore \quad v_1^2 = \frac{2mgh}{M + \dfrac{M^2}{m}} = \frac{2mgh}{\dfrac{mM + M^2}{m}} = \frac{2m^2gh}{M(m+M)}$$

$$\therefore \quad v_1 = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(m+M)}} = m\sqrt{\frac{2gh}{M(m+M)}}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣):

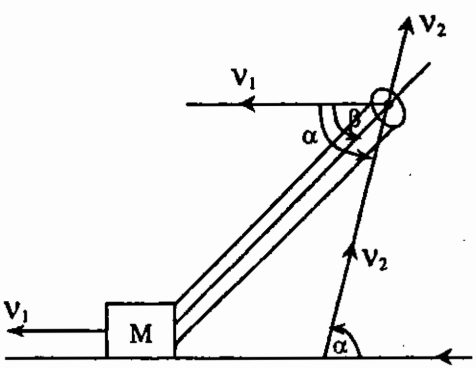
أطلقت قذيفة كتلتها m من ماسورة مدفع كتلته M فإذا علم أن المدفع يمكن أن يرتد على قاعدة أفقية ملساء وأن ماسورته تميل على الأفقى بزاوية β، أثبت أن زاوية الميل α لمسار القذيفة الابتدائى على الأفقى يحقق العلاقة:

$$\tan\alpha = \left(\frac{m+M}{m}\right)\tan\beta$$

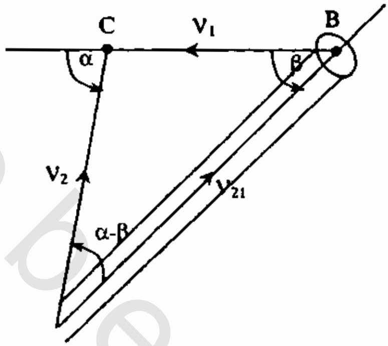
أثبت كذلك أن النسبة بين طاقة حركة القذيفة عندما يتحرك المدفع إلى طاقة حركة المدفع هى:

$$\frac{M}{m}\sec^2\beta + \left(2 + \frac{m}{M}\right)\tan^2\beta$$

الحل:



عند لحظة انطلاق القذيفة يتحرك المدفع للخلف فى الاتجاه الأفقى بسرعة v_1 وتكون السرعة الفعلية للقذيفة هى v_2 وتميل بزاوية α على الأفقى.



فإذا كانت سـ رعة القذيفـ ة بالنـ سبة للمدفع هى v_{21} فمن مثلث السرعات المقابل نجد أن: $\bar{v}_2 = \bar{v}_{21} + \bar{v}_1$

أى أن $\bar{v}_2$ هى محصلة السرعتين $\bar{v}_{21}, \bar{v}_1$

$$\therefore\ \bar{v}_{21} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 \qquad (1)$$

أيضاً فإن: كمية حركة القذيفة والمدفع فى الاتجاه الأفقى تكون ثابتة بحيـ ث أن:

المركبة الأفقية لكمية حركة المدفع = المركبة الأفقية لكمية حركة القذيفة

$$m v_2 \cos\alpha = M v_1 \qquad (2)$$

ومن مثلث السرعات نجد أن:

[قانون الجيب]
$$\frac{v_2}{\sin\beta} = \frac{v_1}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\beta}{v_2} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{v_1} \qquad (3)$$

بضرب المعادلتين (2), (3) نحصل على:

$$m\cos\alpha\sin\beta = M\sin(\alpha-\beta)$$

$$= M(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

$$= M\sin\alpha\cos\beta - M\cos\alpha\sin\beta$$

$$\therefore\quad (m+M)\cos\alpha\sin\beta = M\sin\alpha\cos\beta$$

وبالقسمة على $\sin\alpha\cos\beta$ نحصل على:

$$(m+M)\tan\beta = M\tan\alpha \quad \therefore\ \tan\alpha = \frac{m+M}{M}\tan\beta \qquad (4)$$

أيضاً فإن: النسبة بين طاقة حركة القذيفة: طاقة حركة المدفع هى:

$$\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}Mv_1^2}=\frac{m}{M}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2=\frac{m}{M}\left(\frac{M}{m\cos\alpha}\right)^2$$

من (2): $\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{M}{m\cos\alpha}$

$$=\frac{M}{m\cos^2\alpha}=\frac{M}{m}\sec^2\alpha$$

$$=\frac{M}{m}(1+\tan^2\alpha)$$

$$=\frac{M}{m}\left[1+\frac{(m+M)^2}{M^2}\tan^2\beta\right]=\frac{M}{m}\left[1+\left(1+\frac{m}{M}\right)^2\tan^2\beta\right]$$

$$=\frac{M}{m}\left[1+\left(\frac{2m}{M}+\frac{m^2}{M^2}\right)\tan^2\beta\right]=\frac{M}{m}\left[\sec^2\beta+\left(\frac{2m}{M}+\frac{m^2}{M^2}\right)\tan^2\beta\right]$$

$$=\frac{M}{m}\sec^2\beta+\left(2+\frac{m}{M}\right)\tan^2\beta \qquad (5)$$

وهو المطلوب.

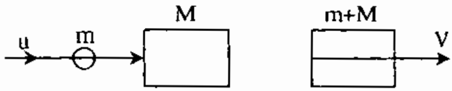
مثال (4):

على طاقة الحركة المفقودة بالتصادم

اصطدمت رصاصة كتلتها m وسرعتها u بحاجز كتلته M يمكنه أن يتحرك بحرية فى اتجاه حركة الرصاصة التى سكنت بداخله. أوجد طاقة الحركة المفقودة بالتصادم. وإذا أطلقت رصاصة أخرى بعد ذلك على الحاجز كانت لها نفس كتلة وسرعة واتجاه الرصاصة الأولى، أوجد طاقة الحركة المفقودة فى تلك الحالة.

الحل:

الحالة الأولى:



نفرض أنه بعد التصادم يتحرك الحاجز والرصاصة بداخله بسرعة v فمن قانون بقاء كمية الحركة في اتجاه حركة الرصاصة:

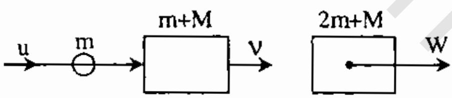
$$\therefore \; mu + M(o) = (m + M)v$$

ومنها: (1)
$$v = \frac{mu}{m + M}$$

طاقة الحركة المفقودة خلال التصادم:

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}mu^2 - \tfrac{1}{2}(m + M)v^2 = \tfrac{1}{2}\frac{mM}{m + M}u^2 \qquad (2)$$

الحالة الثانية:



نفرض أن w هي السرعة المشتركة بعد التصادم، فمن قانون بقاء كمية الحركة في اتجاه حركة الرصاصة:

$$mu + (m + M)v = (2m + M)w \qquad (3)$$

بالتعويض عن v من (1) في (3) نحصل على:

$$w = \frac{2mu}{2m + M} \qquad (4)$$

طلقة الحركة المفقودة خلال التصادم:

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}mu^2 + \tfrac{1}{2}(m + M)v^2 - \tfrac{1}{2}(2m + M)w^2 \qquad (5)$$

بالتعويض عن v, w من (3) ,(1) والاختصار نحصل على:

$$\Delta E = \tfrac{1}{2} m u^2 \frac{M^2}{(m+M)(2m+M)}$$

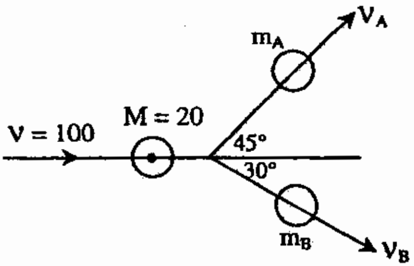
وهو المطلوب.

مثال (٥):

على طاقة الحركة المكتسبة في الانفجار

جسيم كتلته 20 kg يتحرك بسرعة 10 m/sec. انفجر الجسيم فجأة إلى جزئين A (كتلته 5 kg)، B (كتلته 15 kg)، فإذا تحرك الجزء A في اتجاه يميل بزاوية 45° فوق الأفقي، وتحرك الجزء B في اتجاه يميل بزاوية 30° أسفل الأفقي، فأوجد سرعة كل جزء بعد الانفجار مباشرة، وأوجد كذلك الطاقة المكتسبة في الانفجار.

الحل:



بتطبيق قانون بقاء كمية الحركة في الاتجاه الأفقي:

$$\therefore\ m_A v_A \cos 45 + m_B v_B \cos 30 = Mv$$

$$\therefore 5v_A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 15v_B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 20(100) \quad (1)$$

وبتطبيق قانون بقاء كمية الحركة في الاتجاه الرأسي:

$$5v_A \sin 45 - 15\, v_B \sin 30 = o$$

$$\therefore \quad 5v_A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 15v_B\left(\frac{1}{2}\right) = o \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1) ,(2) نحصل على:

$v_A = 207.062$ m/sec , $v_B = 97.607$ m/sec.

الطاقة المكتسبة فى الانفجار:

$$\Delta E = (\tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2) - \tfrac{1}{2}Mv^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(5)(207.062)^2 + \tfrac{1}{2}(15)(97.607)^2 - \tfrac{1}{2}(20)(100)^2$$

$$= 78640.128\text{N.m}$$ (نيوتن متر)

وهو المطلوب.

مسائل

1. مدفع كتلته M يقذف قذائف كتلة كل منها m، فإذا كان الانفجار الناتج عن القذيفة يولد طاقة حركة قدرها T، أثبت أن السرعة الابتدائية للقذيفة تساوى $\sqrt{\dfrac{2MT}{m(m+M)}}$:

2. مدفع كتلته M موضوع على قضبان ملساء. انطلق المدفع فى اتجاه القضبان فأطلق قذيفة كتلتها m بسرعة v بالنسبة للمدفع، فإذا كانت زاوية ميل ماسورة المدفع على الأفقى هى α وسرعة ارتداد المدفع عند اللحظة التى تتركه فيها القذيفة هى w فاثبت أن المركبة الأفقية لرد الفعل الدفع على القذيفة هى Mw وأن المركبة العمودية على ماسورة المدفع هى $Mw\sin\alpha$.

3. قنبلة صغيرة كتلتها $m = 5\ kg$ تتحرك أفقيا بسرعة $u = 60m/sec$. انفجرت عند نقطة A إلى جزئين A, B بحيث أن الجزء A تحرك فى الاتجاه الرأسى بسرعة $v_A = 90m/sec$.، أما الجزء B فقد تحرك بسرعة فى اتجاه يميل بزاوية $30°$ أسفل الأفقى، أوجد كل من m_A, m_B, v_B.

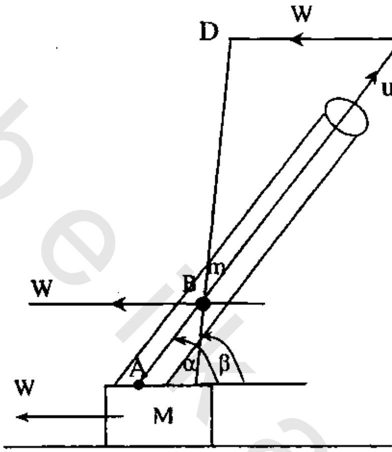
4. انفجرت قذيفة داخل أنبوبة أفقية فانقسمت القذيفة إلى جزئين كتلتيهما m_2، m_1

فإذا كانت a هى المسافة بين الجزئين بعد مضى الزمن t من لحظة الانفجار،

أثبت أن طاقة لانفجار تساوى $\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{a}{t}\right)^2$.

5. أطلقت قنبلة كتلتها $M = m_1 + m_2$ من نقطة على الأرض بسرعة مركبتيها الأفقية u والرأسية v. وعند أعلى نقطة من مسارها انفجرت القنبلة إلى جزئين كتلتاهما m_1 , m_2 . فإذا نتج عن الانفجار طاقة حركة إضافية مقدارها E وتحرك كل من الجزئين بعد الانفجار فى اتجاه الأفقى، أوجد البعد بينهما عندما يصلان إلى الأرض.

حلول بعض المسائل



حل المسألة (٢):

لتكن AB هى ماسورة المدفع.

عند لحظة انطلاق القذيفة يرتد المدفع إلى الخلف فى الاتجاه الأفقى بسرعة w وتكون السرعة الفعلية للقذيفة هى u وسرعة القذيفة بالنسبة للمدفع هى v، فمن مثلث السرعات المبين نجد أن:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

كذلك فإن:

$$\frac{v}{\sin\alpha} = \frac{w}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{u}{\sin(180 - \beta)} \qquad (1)$$

حيث β هى زاوية ميل سرعة القذيفة على الأفقى وهى أكبر من زاوية ميل ماسورة المدفع على الأفقى (α).

قانون بقاء كمية الحركة للقذيفة والمدفع فى الاتجاه الأفقى:

$$mv\cos\beta - Mw = o$$

$$\therefore \quad mv\cos\beta = Mw \qquad (2)$$

الدفع المؤثر على القذيفة (الدفع = التغير فى كمية الحركة) وحيث أن المدفع لحظة إطلاق القذيفة كان ساكنا فإن الدفع يكون على القذيفة فقط، ويكون:

الدفع فى الاتجاه الأفقى هو:

$$I_1 = mv\cos\beta \qquad (3)$$

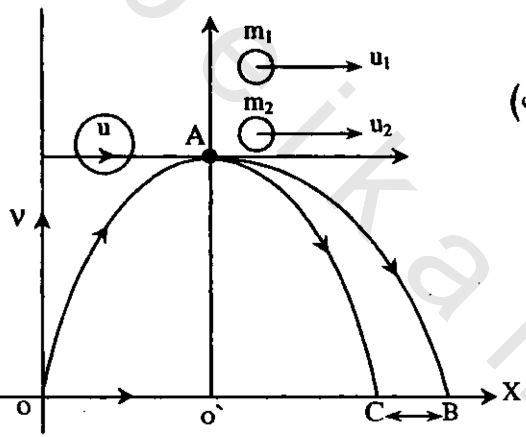
الدفع فى الاتجاه العمودى على ماسورة المدفع هو:

$$I_2 = mv\sin(\beta-\alpha) \qquad (4)$$

من (2) ,(3): $\quad I_1 = Mw$

من (1) ,(4): $\quad I_2 = mw\sin\alpha$

وهو المطلوب.



حل المسألة (٥):

(هذه المسألة تدخل فيها حركة المقذوفات)

سرعة القنبلة قبل الانفجار مباشرة u فى الاتجاه الأفقى. نفرض أن u_1, u_2 هما السرعتان الأفقيتان للجزئين m_1, m_2 بعد الانفجار مباشرة.

من قانون بقاء كمية الحركة:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1+m_2)u \qquad (1)$$

الطاقة المكتسبة من الانفجار:

$$E = \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right) - \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2 \qquad (2)$$

من (1) ,(2) بحذف u نحصل على:

$$u_1 - u_2 = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)E}{m_1m_2}} \qquad (3)$$

زمن الطيران للقنبلة من O إلى A هو (من حركة المقذوفات): $t_{oA} = \dfrac{v}{g}$

وأقصى ارتفاع للقنبلة (كمقذوف): $y_{max} = \dfrac{v^2}{2g}$

المطلوب إيجاد البعد بين جزئي القنبلة عندما يصلان إلى الأرض أي المسافة BC:

ندرس الجزء m_1 (كمقذوف) من A إلى B:

سرعة القذف u_1، اتجاه القذف $\alpha_1 = o$ وزمن طيرانه $t_1 = \frac{v}{g}$

[وذلك لأن: $-\frac{v^2}{2g} = -\frac{1}{2} g t_1^2$ (من معادلة المسار) ومنها $t_1 = \frac{v}{g}$]

ندرس الجزء m_2 (كمقذوف) من A إلى C:

سرعة القذف u_2، اتجاه القذف $\alpha_2 = o$ وزمن طيرانه $t_2 = \frac{v}{g}$

[وذلك لأن: $-\frac{v^2}{2g} = -\frac{1}{2} g t_2^2$ (من معادلة المسار) ومنها $t_2 = \frac{v}{g}$]

ولإيجاد مواضع السقوط على الأرض:

$$t_1 = t_2 = t = \frac{v}{g}$$

$$X_B = o`B = u_1 t_1 = u_1 t$$

$$X_C = o`C = u_2 t_2 = u_2 t$$

البعد بين الجزئين عندما يصلان للأرض:

$$BC = X_B - X_C = u_1 t - u_2 t = (u_1 - u_2)t = (u_1 - u_2)\frac{v}{g}$$

وبالتعويض عن $(u_1 - u_2)$ من (1) نحصل على المطلوب وهو:

$$BC = \frac{v}{g}\sqrt{2E\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}$$