الباب الثانى

ديناميكا الحركة التذبذبية

مقدمـة:

فى هذا البـاب سوف نواصل ما سبق دراسته فى الجزء الأول تحت عنوان الحركة التوافقية البسيطة والتى كانت عبارة عن حركة تذبذبية حرة فى خط مستقيم، حيث درسنا حركة كتلة m معلقة فى زنبرك أحد طرفيه مثبت، وبإهمال مقاومة الوسط فإن إزاحة هذه الكتلة خلال مسافة x من موضع الاتزان كانت تحقق المعادلة:

$$m\ddot{x} = -kx$$

حيث k يعرف بمعامل الشد للزنبرك (ويساوى القوة اللازمة لإحداث استطالة مقدارها الوحدة فى الزنبرك)، وتعرف القوة $f = -kx$ بالقوة الارجاعية.

وبقسمة الطرفين على m نحصل على المعادلة:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -w^2 x \qquad (1)$$

حيث $w = \sqrt{\frac{k}{m}} \leftarrow w^2 = \frac{k}{m}$

تسمى الذبذبات الموصوفة بالمعادلة (1) بالذبذبات الحرة أو الطبيعية. وتعرف الكمية w بتردد الذبذبة الحرة، ويمكن كتابتها: $w = w_n$

وفى هذا الباب سوف نقوم بدراسة ما يعرف بالحركة التذبذبية المخمدة والمجبرة، وهى امتداد لدراستنا السابقة فى الحركة التذبذبية.

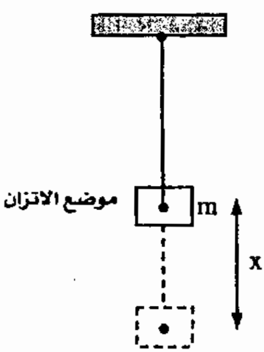
الحركة التذبذبية المخمدة والمجبرة

سوف ندرس هنا الحركة التذبذبية الحرة فى خط مستقيم فى الحالات الآتية:

1. حالة وجود وسط مقاوم تتناسب مقاومته مع السرعة، وتعرف الحركة التذبذبية فى هذه الحالة بالحركة التذبذبية المخمدة (أو المكبوتة) وتسمى الذبذبات الناتجة بالذبذبات المخمدة (Damped oscillations).
2. حالة وجود قوة إضافية (قسرية) دورية تتغير مع الزمن، وتعرف الحركة التذبذبية فى هذه الحالة بالحركة التذبذبية القسرية أو المجبرة، وتسمى الذبذبات الناتجة بالذبذبات المجبرة (Forced oscillations).
3. حالة وجود الوسط المقاوم والقوة القسرية إضافة إلى القوة الأصلية (قوة الحركة التذبذبية الحرة والتى تعرف بالقوة الارجاعية)، وتعرف الحركة التذبذبية فى هذه الحالة بالحركة التذبذبية المخمدة المجبرة، كما تسمى الذبذبات الناتجة بالذبذبات المخمدة المجبرة (Damped forced oscillations).

أولاً: <u>الذبذبات المخمدة:</u>

باعتبار الكتلة m المعلقة بطرف الزنبرك الذى معامل شده k، تتحرك فى وسط مقاوم تتناسب مقاومته مع السرعة (أى تساوى α)، وأزيحت الكتلة مسافة x من موضع الاتزان ثم تركت لتتحرك، فتكون معادلة الحركة:



$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

وبالقسمة على m:

$$\therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}\dot{x}$$

وبوضع $\frac{k}{m} = w_n^2$ ، $\frac{\alpha}{m} = 2\mu$ حيث w_n هى تردد الذبذبات الحرة (فى غياب الوسط المقاوم)، μ يسمى معامل المقاومة أو معامل الإخماد، نحصل على المعادلة:

$$\ddot{x} = -w_n^2 x - 2\mu\dot{x} \rightarrow \qquad \therefore \qquad \ddot{x} + 2\mu\dot{x} + w_n^2 x = 0 \qquad (1)$$

المعادلة (1) هى معادلة تفاضلية، ولا يجاد حلها:

نكتب المعادلة المميزة لها بالصورة:

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + w_n^2 = 0 \qquad (2)$$

وهى معادلة جبرية لها الجذران:

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - w_n^2} \qquad (3)$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) هو:

$$x = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (4)$$

حيث a_1, a_2 ثابتان اختياريان يمكن إيجادهما مع الشروط الابتدائية للمسألة كما سنرى فى الأمثلة بعد ذلك. ويكون لدينا 3 حالات هى:

(1) إذا كانت $\mu > w_n$:

أى أن معامل الإخماد يكون كبير جداً بالنسبة إلى ثابت الزنبرك، ومثال لهذه الحالة حركة بندول بسيط مغمور فى سائل لزج (ذو مقاومة كبيرة). فى هذه الحالة يكون الجذران (3) حقيقيان مختلفان وكل منهما يكون سالباً، ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) بالصورة:

$$x = a_1 e^{(-\mu + w_n)t} + a_2 e^{(-\mu - w_n)t}$$

$$= e^{-\mu t}[a_1 e^{w_n t} + a_2 e^{-w_n t}] \qquad (5)$$

حيث:

$$w_n = \sqrt{\mu^2 - n^2} \qquad \therefore \ \lambda_{1,2} = -\mu \pm w_n$$

وباعتبار أن:

$$e^{\pm wt} = \cosh wt \pm i \sinh wt$$

يمكن كتابة المعادلة (5) بالصورة:

$$\therefore \quad x = e^{-\mu t} [A \cosh w_n t \pm B \sinh w_n t]$$

حيث A, B ثابتان اختياريان، أيضاً يمكن وضع هذه المعادلة بالصورة الآتية:

$$x = C\, e^{-\mu t} \operatorname{Cosh}(w_n t + \varepsilon) \qquad (6)$$

حيث ε ثابت اختيارى آخر.

المعادلة (6) تمثل حركة غير تذبذبية لأن $e^{-\mu t}$ تمثل دالة أسية).

ويلاحظ هنا أن x تتناقص بمرور الزمن حتى تصبح الإزاحة صفرا ($x \to o$ عندما $t \to \infty$).

وتسمى المعادلة (6) بمعادلة الانحراف أو الإزاحة x.

(2) <u>إذا كانت $\mu = w_n$:</u>

فى هذه الحالة يكون $\mu^2 - w_n^2 = 0$ ويصبح جذرا المعادلة المميزة متساويان لأن: $\lambda_{1,2} = -\mu$ وتأخذ معادلة الإزاحة الصورة الآتية:

$$x = e^{-\mu t} (A + Bt)$$

ومنها يتضح أن x تتناقص بمرور الزمن حتى تصبح صفرا ($x \to o$ عندما $t \to \infty$) والحل هنا أيضاً غير تذبذبى (مثل الحالة الأولى)، ونوع الحركة هنا تكون فيها المقاومة أقل ما يمكن بحيث تكاد تكفى لمنع التذبذب، وتعرف بالمقاومة الحرجة (Critical resistance)، كما تسمى الحركة بأنها حركة حرجة الإخماد (Critically damped motion).

(3) <u>إذا كانت $\mu < w_n$:</u>

فى هذه الحالة تكون المقاومة صغيرة (أو ضعيفة)، ومثال لها مقاومة الهواء لذبذبة بندول بسيط ويكون: $\mu^2 - w_n^2 < 0$، وبوضع $\mu^2 - w_n^2 = q^2$ فإن

جذرا المعادلة المساعدة $\lambda_{1,2}$ يأخذان الصورة: $\lambda_{1,2} = -\mu \pm iq$، أى أن الجذران تخيليان.

ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة (1) بالصورة:

$$x = e^{-\mu t}[a_1 e^{iqt} + a_2 e^{-iqt}]$$

وبكتابة $e^{\pm iqt}$ بدلالة $\sin qt, \cos qt$ نحصل على المعادلة الآتية:

$$x = e^{-\mu t}[A \cos qt + B \sin qt] = Ce^{-\mu t} \cos(qt + \phi) \qquad (7)$$

حيث A, B, C ثوابت، ϕ ثابت اختيارى أيضاً.

المعادلة (7) تمثل حركة تذبذبية سعتها $Ce^{-\mu t}$ تتناقص تدريجيا وببطء باستمرار مع زيادة الزمن وتؤول إلى الصفر عندما $t \to \infty$ أى أنها تشكل ذبذبات مخمدة، وتعرف الحركة فى هذه الحالة بالحركة التذبذبية المخمدة، وتسمى الزاوية ϕ بزاوية الطور. وتعرف q أيضاً بتردد الذبذبة المخمدة وتكتب أحياناً $q = w_d$، ويكون الزمن الدورى للذبذبة المخمدة هو:

$$\tau_d = \frac{2\pi}{w_d} = \frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{\sqrt{w_n^2 - \mu^2}} = \frac{2\pi}{w_n\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{w_n}\right)^2}}$$

$$= \frac{\tau_n}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{w_n}\right)^2}}$$

حيث w_n تردد الذبذبات الحرة، $\tau_n = \frac{2\pi}{w_n}$ الزمن الدورى للذبذبات

وإذا كانت $\left(\frac{\mu}{w_n}\right)$ صغيرة فإن:

$$\tau_d = \tau_n\left[1-\left(\frac{\mu}{w_n}\right)^2\right]^{-1/2} = \tau_n\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{w_n}\right)^2\right]$$

أى أن الزمن الدورى للذبذبات المخمدة τ_d يكون أكبر قليلا من الزمن الدورى τ_n للذبذبات الحرة، وإذا كانت $\left(\frac{\mu}{w_n}\right)$ صغيرة جداً فإن $\tau_d \simeq \tau_n$. ويسمى معكوس الزمن الدورى أى $\left(\frac{1}{\tau_d}\right)$ للذبذبة المخمدة بالتردد ν_d ويرتبط مع $q = w_d$ بالعلاقة

$$\nu_d = \frac{w_d}{2\pi}$$

والنسبة بين أى انحرافين متتالين بعد مرور الزمن τ_d هى:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{e^{-\mu(t+\tau_d)}}{e^{-\mu t}} = e^{-\mu\tau_d}$$

وحيث أن:

$$x_2 = x_1 e^{-\mu\tau_d} \rightarrow \frac{x_1}{x_2} = e^{\mu\tau_d} \rightarrow \qquad \therefore \ln\frac{x_1}{x_2} = e^{\mu\tau_d}$$

ويعرف هذا بالتناقص اللوغارتمى للذبذبة ويرمز له بالرمز δ حيث:

$$\therefore \qquad \delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi\mu}{w_d}$$

ويكون الانحراف النونى بعد زمن $n\tau_d$ من الانحراف الأول هو:

$$x_n = x_1 e^{-n\mu\tau_d} \qquad \therefore \qquad x_1 = x_n e^{n\mu\tau_d}$$

$$\therefore \ \delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = n\mu\tau_d = \frac{2\pi n\mu}{w_d}$$ (التناقص اللوغارتمى بعد زمن $n\tau_d$)

أمثلة محلولة

مثال (1):

جسيم كتلته 2 وحدة كتلة يتحرك على محور x تحت تأثير قوة تتجه نحو نقطة الأصل مقدارها 8x وكان الجسيم ساكنا فى بداية حركته من النقطة x=20، أوجد موضع الجسيم عند أى لحظة ومتجه السرعة، وكذلك السعة والزمن الدورى والتردد للحركة الحرة، وإذا تعرض الجسيم لقوة إخماد مقدارها يساوى 8 أضعاف السرعة الخطية فاوجد الموضع والسرعة عند أى لحظة فى هذه الحالة.

الحل:

أولاً: **الحركة التذبذبية الحرة:**

معادلة الحركة:

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\therefore \quad 2\ddot{x} = -8x \longrightarrow \ddot{x} + 4x = 0 \qquad (1)$$

الحل العام للمعادلة (1) هو:

$$x = A\cos 2t + B\sin 2t \qquad (2)$$

وبالتفاضل:

$$\dot{x} = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t \qquad (3)$$

ولإيجاد A, B: فى البداية: x=20، t=0، فمن (2) نحصل على:

$$20 = A\cos 0 + B\sin 0 = A(1) + B(0) = A \longrightarrow \therefore\ A = 20$$

أيضاً فى البداية: $\dot{x} = 0$ (الجسيم ساكن)، t=0، فمن (3) نحصل على:

$$\therefore\ 0 = -2A\sin(0) + 2B\cos(0) = -2A(0) + 2B(1) \rightarrow \therefore\ B = 0$$

وتصبح المعادلة (2) بالصورة:

$$x = 20\cos 2t \qquad (4)$$

والمعادلة (3) بالصورة:

$$\dot{x} = -40\sin 2t \qquad (5)$$

المعادلتين (5),(4): تعطيان الإزاحة (الموضع) والسرعة عند أى لحظة.

من (4) نجد أن سعة الحركة التذبذبية الحرة = 20 ، $w = 2$

والزمن الدورى: $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ، والتردد: $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\pi}$

ثانياً: <u>الحركة التذبذبية المخمدة:</u>

معادلة الحركة فى هذه الحالة تكون:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

(قوة الإخماد $= 8\dot{x}$)

$$\therefore \quad 2\ddot{x} = -8x - 8\dot{x}$$

نلاحظ أن معامل الإخماد = ثابت الزنبرك = 8 وهى الحالة الثانية من حالات الحركة المخمدة. وبالقسمة على 2 نحصل على:

$$\ddot{x} = -4x - 4\dot{x}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0 \qquad (1)$$

المعادلة المساعدة (أو المميزة) للمعادلة (1): $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

ومنها نجد أن:

$$(\lambda + 2)^2 = 0 \longrightarrow \therefore \ \lambda = -2 = \lambda_{1,2} = -\mu$$

أى أن الجذران متساويان وسالبان ويأخذ حل المعادلة (1) الصورة:

$$x = e^{-\mu t}(A + Bt) = e^{-2t}(A + Bt) \qquad (2)$$

<u>الشروط الابتدائية:</u> عند $t = o$ فإن $x = 20$

$$\therefore \quad 2o = e^{o}(A + o) \longrightarrow \therefore \quad A = 2o$$

أيضاً: بتفاضل معادلة الإزاحة (2) نحصل على:

$$\dot{x} = e^{-2t}(B) + (-2e^{-2t})(A + Bt)$$
$$= e^{-2t}(B) - 2e^{-2t}(A + Bt) \qquad (3)$$

ومن الشروط الابتدائية: عند $t = o$ فإن $x = 0$

$$\therefore \quad o = e^{o}B - 2e^{o}A = B - 2A \qquad \therefore \ B = 2A = 40$$

وتصبح معادلة الإزاحة (2) عند أى لحظة بالصورة:

$$x = 2o\, e^{-2t}(1+2t) \qquad (4)$$

ومعادلة السرعة (3) عند أى لحظة بالصورة:

$$\dot{x} = e^{-2t}[40-2(20+40t)] = -80te^{-2t} \qquad (5)$$

من (5),(4) يتضح أن x تتناقص بمرور الزمن حتى تصبح صفرا (عندما $t \to \infty$) والحركة ليست تذبذبية وفيها المقاومة أقل ما يمكن بحيث تكاد تكفى لمنع التذبذب (حركة حرجة الإخماد).

ملحوظة: يلاحظ أن معادلة السرعة (5) كان من الممكن إيجادها بتفاضل معادلة الإزاحة (4) مباشرة.

مثال (2):

جسم كتلة 5gm يتحرك على محور x تحت تأثير قوة جذب نحو نقطة الأصل مقدارها عدديا 40x وقوة إخماد مقدارها $20\dot{x}$ فإذا بدأ الجسم الحركة من السكون من نقطة تبعد 20cm من نقطة الأصل أكتب المعادلة التفاضلية للحركة، ومن ذلك أوجد موضع وسرعة الجسيم عند أى لحظة وكذلك السعة والزمن الدورى والتردد للذبذبات المخمدة الناتجة، احسب أيضاً التناقص اللوغارتمى لتلك الذبذبات.

الحل:

المعادلة التفاضلية للحركة:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

$$\therefore \quad 5\ddot{x} = -40x - 20\dot{x}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -8x - 4\dot{x} \longrightarrow \ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0 \qquad (1)$$

المعادلة المساعدة (المميزة):

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$

$$\therefore \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm 2i = -\mu \pm iq$$

تمثل هذه المسألة الحالة الثالثة (حيث قوة الإخماد أقل من قوة المقاومة) وهنا يكون جذرا المعادلة تخيليان ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة (1) بالصورة:

$$x = e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t) \qquad (2)$$

[حيث $\mu = 2,\ q = 2$]

وبالتفاضل:

$$\therefore \quad \dot{x} = e^{-2t}[-2A\sin 2t + 2B\cos 2t] + (-2e^{-2t})[A\cos 4t + B\sin 4t] \qquad (3)$$

ومن الشروط الابتدائية: عند $\dot{x}=o,\ x=20,\ t=o$ فبالتعويض فى (2) ثم فى (3):

$$\therefore \quad 2o = e^{o}[A\cos(o)\ B\sin(o)] = A \quad \therefore \boxed{A = 2o} \qquad (4)$$

$$o = e^{o}[-2A\sin(o) + 2B\cos(o)] -2e^{o}[A\cos(o) + B\sin(o) = 2B - 2A \qquad (5)$$

من (5) نجد أن: $\therefore \boxed{B = 2o}$ $\quad \therefore B = A$

وتصبح الإزاحة عند أى زمن بالصورة:

$$\begin{aligned} x &= e^{-2t}[2o\cos 2t + 2o\sin 2t] \\ &= 2o\, e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t) \\ &= 2o\sqrt{2}\, e^{-2t}\cos(2t + \phi) \end{aligned}$$

حيث ϕ تعرف بزاوية الطور

والذبذبات مخمدة وسعتهما $= 2o\sqrt{2}e^{-2t}$ ،

وزمنها الدورى: $\tau_d = \dfrac{2\pi}{w_d} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ ، وترددها: $\nu_d = \dfrac{1}{\tau_d} = \dfrac{1}{\pi}$

<u>ولحساب التناقص اللوغارتمى:</u>

النسبة بين أى انحرافين متتالين x_1, x_2 بعد مرور الزمن τ_d هى:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{e^{-\mu(t+\tau_d)}}{e^{-\mu t}} = e^{-\mu\tau_d} \longrightarrow \frac{x_1}{x_2} = e^{\mu\tau_d}$$

ويكون التناقص اللوغارتمى بالصورة:

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \mu\tau_d = (2)(\pi) = 2\pi, \qquad [\text{حيث}\ \ \tau_d = \pi,\ \mu = 2]$$

وهو المطلوب.

ثانياً: الذبذبات المجبرة (أو القسرية) غير المخمدة:

Undamped forced vibrations:

نعتبر حركة زنبرك معامل شده k، ربط أحد طرفيه بجسيم كتلته m تؤثر فيه بالإضافة إلى قوة الزنبرك قوة قسرية أو مجبره عبارة عن قوة دورية تتغير بتغير الزمن (أى توافقيه) ومقدارها $q_o \cos w_f t$ حيث w_f تردد الذبذبات القسرية الناتجة عن هذه القوة.

فى هذه الحالة تكون معادلة حركة الجسيم هى:

$$m\ddot{x} = -kx + q_o \cos w_f t$$

وبالقسمة على m:

$$\therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{q_o}{m}\cos w_f t$$

وبوضع:

$$\frac{k}{m} = w_n^2, \quad \frac{q_o}{m} = Q_o$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -w_n^2 x + Q_o \cos w_f t$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + w_n^2 x = Q_o \cos w_f t \qquad (1)$$

وهى المعادلة التفاضلية للحركة فى هذه الحالة. وتوجد لدينا حالتان.

الحالة لأولى: عندما $w_n \neq w_f$:

فى هذه الحالة تكون المعادلة (1) هى معادلة تفاضلية غير متجانسة يتكون حلها من جزئين هما:

(i) x_1 وهو حل المعادلة المتجانسة: $\ddot{x} + w_n^2 x = 0$، وصورته:

$$x_1 = A\cos(w_n t + \varepsilon) \qquad (2)$$

حيث A, ε ثابتان اختياريان، ويمثل A سعة الذبذبة الحرة

(ii) x_2 وهو الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة (1)، ولنفرض أن هذا الحل يكون بالصورة:

$$x_2 = B\cos w_f t \qquad (2)$$

فبالتعويض فى (2) نحصل على:

$$\therefore\ -Bw_f^2\cos w_f t + Bw_n^2\cos w_f t = Q_o\cos w_f t$$

$$\therefore\ B\left(w_n^2 - w_f^2\right) = Q_o \longrightarrow \therefore\ B = \frac{Q_o}{w_n^2 - w_f^2} \qquad (3)$$

ويمثل هذا سعة الذبذبة القسرية، ويكون الحل x_2 بالصورة:

$$x_2 = \frac{Q_o}{w_n^2 - w_f^2}\cos w_f t \qquad (4)$$

ويصبح الحل النهائى للمعادلة (1) هو:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(w_f t + \varepsilon) + \frac{Q_o}{w_n^2 - w_f^2}\cos w_f t \qquad (5)$$

وتعنى هذه المعادلة أن حركة الجسيم تتركب من حركتين توافقيتين هما:

(i) حركة تذبذبية حرة سعتها A وزنها الدورى $= \dfrac{2\pi}{w_n}$

(ii) حركة تذبذبية قسرية أو مجبرة وسعتها $B = \dfrac{Q_o}{w_n^2 - w_f^2}$ وزمنها الدورى $= \dfrac{2\pi}{w_n}$

<u>ملحوظة:</u> يوضع النسبة $\delta = \dfrac{q_o}{k}$ (وتعرف بالإزاحة الاستاتيكية تحت تأثير القوة الدورية q_o)، وكذلك بوضع النسبة $\lambda = \dfrac{w_f}{w_n}$ فإننا نحصل على:

$$\delta = \frac{q_o}{k} = \frac{q_o}{m}\frac{m}{k} = \frac{q_o}{m}\left(\frac{1}{w_n^2}\right)$$

$$B = \frac{Q_o}{w_n^2 - w_f^2} = \frac{q_o}{m}\left(\frac{1}{w_n^2 - w_f^2}\right)$$

$$= \frac{q_o}{m}\left(\frac{1}{w_n^2}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{w_f^2}{w_n^2}}\right) = \frac{\delta}{1-\lambda^2}$$

الحالة الثانية: عندما $w_n = w_f$:

وتعرف بحالة الرنين (Resonance)

وفى هذه الحالة يكون: الزمن الدورى للذبذبة الحرة يساوى الزمن الدورى للذبذبة القسرية أى: $w_n = w_f = w$ وأيضاً $\lambda = \frac{w_f}{w_n} = 1$

وتصبح المعادلة التفاضلية للحركة (1) بالصورة:

$$\ddot{x} + w^2 x = Q_o \cos w_f t \qquad (6)$$

وحل هذه المعادلة غير المتجانسة يتكون أيضاً من جزئين:

(i) x_1 وهو حل المعادلة المتجانسة $\ddot{x} + w^2 x = o$ وصورته:

$$x_1 = A \cos wt + B \sin wt = C \cos(wt + \varepsilon) \qquad (7)$$

(ii) x_2 وهو الحل الخاص المعادلة غير المتجانسة، والذى يمكن افتراضه بالصورة:

$$x_2 = t[C_1 \cos wt + C_2 \sin wt] \qquad (8)$$

وبالتفاضل:

$$\therefore \quad \dot{x}_2 = C_1[-tw \sin wt + \cos wt] + C_2[tw \cos wt + \sin wt]$$

وبالتفاضل مرة ثانية:

$$\therefore \quad \ddot{x}_2 = C_1[-w^2 t\cos wt - w\sin wt - w\sin wt]$$

$$+ C_2[-w^2 t\sin wt + w\cos wt + w\cos wt]$$

$$= C_1[-2w\sin wt - w^2 t\cos wt + C_2[2w\cos wt - w^2 t\sin wt]$$

وبالتعويض فى (6) نحصل على:

$$C_1[-2w\sin wt - w^2 t\cos wt] + C_2[2w\cos wt - w^2 t\sin wt]$$

$$+ w^2 t[C_1\cos wt + C_2\sin wt] = Q_o\cos wt$$

$$\therefore \quad C_1[-2w\sin wt - w^2 t\cos wt + w^2 t\cos wt]$$

$$+ C_2[2w\cos wt - w^2 t\sin wt + w^2 t\cos wt] = Q_o\cos wt$$

$$\therefore \quad C_1[-2w\sin wt] + C_2[2w\cos wt] = Q_o\cos wt$$

وبمساواة معاملى $\cos wt, \sin wt$ فى الطرفين نجد أن:

$$C_1 = 0 \quad , \quad C_2 = \frac{Q_o}{2w}$$

وتصبح المعادلة (8) بالصورة:

$$x_2 = \frac{Q_o}{2w} t\sin wt$$

ويصبح الحل الكامل فى هذه الحالة بالصورة:

$$x = x_1 + x_2 = C\cos(wt+\varepsilon) + \frac{Q_o}{2w} t\sin wt \qquad (9)$$

وتعنى هذه المعادلة أنه فى حالة الرنين تتركب حركة الجسيم من حركتين تذبذبيتين هما:

(i) حركة تذبذبية حرة سعتها C وزمنها الدورى $\frac{2\pi}{w}$

(ii) حركة تذبذبية قسرية وسعتهما $\frac{Q_o t}{2w}$ تزداد مع الزمن زيادة كبيرة ومستمرة.

ولإيقاف هذا التزايد المستمر فى السعة يلزم وجود مقاومة للحركة (ولو صغيرة) حتى تقلل من هذا التزايد المستمر فى السعة، ويظهر ذلك فى المنشأت الهندسية القابلة للتذبذب حيث يؤدى التزايد في السعة إلى تهديد سلامة المنشأة.

أمثلة محلولة

مثال (1):

إذا كانت معادلة الحركة لجسيم يتحرك على محور x تحت تأثير قوتين:

(i) قوة إرجاعية = 16x،

(ii) قوة دورية تعتمد على الزمن F(t)

فإذا بدأ الجسيم الحركة من السكون من الموضع x=o فاوجد الإزاحة والسرعة عند أى لحظة، فى الحالتين:

الأولى: عندما $F(t) = 64 \sin 4t$

الثانية: عندما $F(t) = 160 \cos 6t$

الحل:

الحالة الأولى:

معادلة الحركة: (1) $\ddot{x} + 16x = 64 \sin 4t$

وهنا: $Q_o = 64, \ w_f = 4, \quad w_n = 4 \leftarrow w_n^2 = 16$

أى أن $w_n = w_f$ (حالة الرنين)

حل المعادلة غير المتجانسة (1) يتكون من جزئين:

(i) x_1 وهو حل المعادلة المتجانسة $\ddot{x} + 16x = 0$ وصورته:

$$x_1 = A \cos 4t + B \sin 4t \qquad (2)$$

(ii) x_2 وهو الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة ويمكن اختياره بالصورة:

$$x_2 = t[C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t]$$

وبالتفاضل نحصل على:

$$\therefore \quad \dot{x}_2 = C_1[-t(4) \sin 4t + \cos 4t] + C_2[4t \cos 4t + \sin 4t]$$

وبالتفاضل مرة أخرى نحصل على:

$$\therefore \quad \ddot{x}_2 = C_1[-t(4)^2 \cos 4t + (-4 \sin 4t) + (-4 \sin 4t)]$$
$$+ C_2[-(4)^2 t \sin 4t + (4 \cos 4t) + 4 \cos 4t]$$
$$= C_1[-8 \sin 4t - 16t \cos 4t) + C_2[8 \cos 4t - 16t \sin 4t]$$

بالتعويض فى معادلة الحركة (1) نحصل على:

$$C_1[-8 \sin 4t - 16\,t \cos 4t] + C_2[8 \cos 4t + 16t \sin 4t]$$
$$+ 16t[C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t] = 64 \sin 4t$$

وبمقارنة معاملات $\cos 4t, \sin 4t$ فى الطرفين نجد أن:

$$C_1[-8 \sin 4t] = 64 \sin 4t \longrightarrow C_1 = \frac{64}{-8} = -8$$

$$C_2[8 \cos 4t] = 0 \longrightarrow C_2 = 0 \quad \therefore \; x_2 = -8t \cos 4t \qquad (3)$$

ويصبح الحل الكامل بالصورة:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos 4t + B \sin 4t - 8t \cos 4t \qquad (4)$$

وبالتفاضل:

$$\therefore \quad \dot{x} = -4A \sin 4t + B \cos 4t + 32t \sin 4t - 8 \cos 4t \qquad (5)$$

ومن الشروط الابتدائية: عند $t = o$ فإن $x = o$ ،$\dot{x} = o$

$$\therefore \quad o = A \cos o \; B \sin o - o = A(l) + B(o) \longrightarrow \boxed{A = o}$$

$$o = -4A \sin o + B \cos o + o - 8 \cos o = o + B(l) - 8(l) \;\therefore\; \boxed{B = 8}$$

بالتعويض فى (4),(5) نحصل على الإزاحة والسرعة عند أى زمن بالصورة:

$$x = 8\sin 4t - 8t\cos 4t = 8[\sin 4t - t\cos 4t] \qquad (6)$$

$$\dot{x} = 8\cos 4t + 32t\sin 4t - 8\cos 4t = 32t\sin 4t \qquad (7)$$

وكان من الممكن الحصول على (7) بتفاضل (6) مباشرة.

<u>الحالة الثانية:</u>

معادلة الحركة:

$$\ddot{x} + 16x = 160\cos 6t \qquad (1)$$

ومنها:

$$w_n \neq w_f \leftarrow w_f = 6, \quad w_n = 4 \leftarrow w_n^2 = 16$$

حل المعادلة (1) يتكون من جزئين:

(i) حل المعادلة المتجانسة وصورته:

$$x_1 = A\cos 4t + B\sin 4t \qquad (i)$$

(ii) الحل الخاص ونفرضه بالصورة:

$$x_2 = C\cos 6t \qquad (ii)$$

فمن (ii) بالتفاضل:

$$\dot{x}_2 = 6C\sin 6t$$

وبالتفاضل مرة ثانية:

$$\ddot{x}_2 = -36C\cos 6t$$

وبالتعويض فى معادلة الحركة (1) نحصل على:

$$-36C\cos 6t + 16C\cos 6t = 160\cos 6t$$

$$\therefore \quad -20C\cos 6t = 160\cos 6t \longrightarrow C = \frac{-160}{20} = -8$$

$$\therefore \quad x_2 = -8\cos 6t$$

ويصبح الحل الكامل بالصورة:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos 4t + B\sin 4t - 8\cos 6t \qquad (2)$$

وبالتفاضل:

$$\dot{x} = -4A\sin 4t + 4B\cos 4t + 48\sin 6t \qquad (3)$$

ومن الشروط الابتدائية: عند $t=o$، $x=o$ ، $\dot{x} = o$

$$\therefore \quad o = A\cos o + B\sin(o) - 8\cos(o) = A - 8 \longrightarrow \boxed{A = 8}$$

$$o = -4A\sin(o) + 4B\cos(o) + 48\sin(o)$$

$$= -4A\,(o) + 4B(l) + 48(o) = 4B \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{B = o}$$

وتصبح ,(3) (2) بالصورة:

$$x = 8\cos 4t - 8\cos 6t = 8(\cos 4t - \cos 6t) \qquad (4)$$

$$\dot{x} = -32\sin 4t + 48\sin 6t = 8(6\sin 6t - 4\sin 4t) \qquad (5)$$

وكان من الممكن الحصول على (5) مباشرة بتفاضل (4).

العلاقتان (5) ,(4) تعطيان الإزاحة والسرعة فى هذه الحالة، وهو المطلوب.

مثال (2):

يتحرك جسيم على محور x تحت تأثير قوتين: إرجاعية (قوة زنبرك) مقدراها $(w_n^2 x = 4x)$ ودورية (مجبرة أو قسرية) تعطى بالعلاقة $8\sin w_f t$ فإذا بدأ الجسيم الحركة من السكون من الموضع x=o، أوجد الإزاحة والسرعة عند أى لحظة فى الحالتين:

(i) $w_f \neq w_n \neq 2$

(ii) $w_f = w_n = 2$ (حالة الرنين)

الحل:

أولاً: **عندما $w_f \neq w_n \neq 2$:**

معادلة الحركة:

$$\ddot{x} + 4x = 8\sin w_f t \qquad (1)$$

(حيث $w_n^2 = 4 \rightarrow w_n = 2$)

حل هذه المعادلة يتكون من جزئين:

(i) x_1 وهو حل المعادلة المتجانسة وصورته:

$$x_1 = A\cos 2t + B\sin 2t \qquad (2)$$

(ii) x_2 وهو الحل الخاص المعادلة غير المتجانسة ونفترض صورته:

$$x_2 = C\sin w_f t \qquad (3)$$

ولإيجاد C:

بالتفاضل مرتين: $\dot{x}_2 = w_f C\cos w_f t$

$$\ddot{x}_2 = -w_f^2 C\sin w_f t$$

وبالتعويض فى (1):

$$-w_f^2 C\sin w_f t + 4C\sin w_f t = 8\sin w_f t$$

$$\therefore \quad C(4-w_f^2)\sin w_f t = 8\sin w_f t$$

$$\therefore \quad C(4-w_f^2) = 8 \longrightarrow \boxed{C = \frac{8}{4-w_f^2}}$$

وتصبح المعادلة (3) بالصورة:

$$x_2 = \frac{8}{4-w_f^2}\sin w_f t \qquad (4)$$

ويصبح الحل الكامل بالصورة:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{8}{4-w_f^2}\sin w_f t \qquad (5)$$

وبالتفاضل نحصل على:

$$\dot{x} = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t + \frac{8}{4-w_f^2} w_f \cos w_f t \qquad (6)$$

ومن الشروط الابتدائية: عند t=o، x=o ، $\dot{x} = o$

بالتعويض فى (5), (6):

$$o = A\cos(o) + B\sin(o) + \frac{8}{4-w_f^2}\sin(o)$$

$$= A(l) + o + o \longrightarrow \boxed{A = o}$$

$$o = o + 2B\cos(o) + \frac{8}{4-w_f^2} w_f \cos(o) = 2B + \frac{8w_f}{4-w_f^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{B = +\frac{-4w_f}{4-w_f^2}}$$

وتصبح معادلتى $\dot{x}, x$ بالصورة:

$$x = \frac{-4w_f}{4-w_f^2}\sin 2t + \frac{8}{4-w_f^2}\sin w_f t$$

$$= \frac{4}{4-w_f^2}[2\sin w_f t - w_f \sin 2t] \qquad (7)$$

$$\dot{x} = \frac{-8w_f}{4-w_f^2}\cos 2t + \frac{8}{4-w_f^2} w_f \cos wt$$

$$= \frac{8}{4-w_f^2}[w_f \cos t\ w_f t - \cos 2t] \qquad (8)$$

ثانيًا: <u>عندما $w_f = w_n = 2$ (حالة الرنين):</u>

معادلة الحركة تكون: $\qquad (1) \qquad \ddot{x} + 4x = 8\sin 2t$

حل هذه المعادلة يتكون من جزئين:

$$x_1 = A\cos 2t + B\sin 2t \qquad (2)$$

$$x_2 = t[C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t] \qquad (3)$$

<u>لإيجاد الثابتتين C_1, C_2:</u>

نوجد $\ddot{x}_2, \dot{x}_2$ من (3) وبالتعويض فى معادلة الحركة (1) بنفس الطريقة السابقة فنحصل على:

$$\boxed{C_1 = 2} \qquad \boxed{C_2 = o} \qquad \therefore \quad x_2 = -2t\cos 2t \qquad (4)$$

ويصبح الحل الكامل بالصورة:

$$x = A\cos 2t + B\sin 2t - 2t\cos 2t \qquad (5)$$

وبالتفاضل:

$$\dot{x} = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t - 2\cos 2t + 4t\sin 2t \qquad (6)$$

ولكن فى البداية: $t = o \leftarrow$ ، $x = o$ ، $\dot{x} = o$

فبالتعويض فى (5) ,(6) نحصل على الثابتين A, B حيث $\boxed{B=1}$ $\boxed{A=o}$,

وبذلك تكون معادلتا الإزاحة والسرعة فى حالة الرنين بالصورة:

$$x = \sin 2t - 2t\cos 2t \qquad (7)$$

$$\dot{x} = 2\cos 2t - 2\cos 2t + 4t\sin 2t = 4t\sin 2t \qquad (8)$$

وهو المطلوب

ثالثاً: الذبذبات القسرية المخمدة: Damped forced oscillations:

فى هذه الحالة تكون القوى المؤثرة على الجسيم m هى:

(1) القوة الارجاعية (أو قوة الزنبرك) kx.

(2) القوة الاضطرابية أو القسرية $q_o \cos w_f t$ وترددها w_f.

(3) قوة مقاومة (للوسط الذى يتذبذب فيه الجسيم) وتكون متناسبة مع السرعة

معادلة الحركة فى هذه الحالة هى:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + q_o \cos w_f t$$

وبالقسمة على m:

$$\therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{q_o}{m}\cos w_f t$$

$$= -w_n^2 x - 2\mu\dot{x} + Q_o \cos w_f t$$

حيث:

$$w_n^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\mu = \frac{\alpha}{m}, \quad Q_o = \frac{q_o}{m}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + 2\mu\dot{x} + w_n^2 x = Q_o \cos w_f t \qquad (1)$$

وهى معادلة تفاضلية غير متجانسة من الرتبة الثانية ويتكون حلها من جزئين:

(i) x_1 وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة:

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + w_n^2 x = 0$$

المعادلة المساعدة (أو المميزة) لهذه المعادلة:

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + w_n^2 = 0$$

ولها جذران λ_1, λ_2 هما:

$$\lambda_{1,2} = -\lambda \pm i w_d$$

حيث:
$$w_d^2 = w_n^2 - \mu^2 \leftarrow w_d = \sqrt{w_n^2 - \mu^2}$$

ويكون الحل العام بالصورة:

$$x_1 = e^{-\mu t}\,[A \cos w_d t + B \sin w_d t] = C\,e^{-\mu t} \cos(w_d t + \varepsilon) \qquad (2)$$

وهذا الحل يمثل نبذبات حرة مخمدة، والزمن الدورى لها هو: $\tau_d = \dfrac{2\pi}{w_d}$

واضح من (2) أن $x \to o$ عندما $t \to \infty$ أى أن النبذبة المخمدة يكون تأثيرها عابر (transient) وتتلاشى في النهاية نتيجة تلاشى سعتها.

(ii) x_2 وهو الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة ويمكن فرضه بالصورة:

$$x_2 = C \cos w_f t + D \sin w_f t \qquad (3)$$

حيث C,D ثابتان، ولكى نوجدهما، توجد $\dot{x}_2$ ثم $\ddot{x}_2$ من (3) ونعوض عنهما وعن x_2 فى المعادلة (1) فنحصل على:

$$(-w_f^2 C + 2\mu w_f D + w_n^2 C - Q_o)\cos w_f t$$
$$+ (-w_f^2 D - 2\mu w_f C + w_n^2 D)\sin w_f t = 0$$

وهذه المعادلة لا تتحقق لجميع قيم t إلا إذا تلاشى المقداران داخل الأقواس، أى إذا كان:

$$-w_f^2 C + 2\mu w_f D + w_n^2 C = Q_o \qquad (4)$$

$$-w_f^2 D - 2\mu w_f C + w_n^2 D = 0 \qquad (5)$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على الثابتين C, D بالصورة:

$$C = \frac{Q_o\left(w_n^2 - w_f^2\right)}{\left(w_n^2 - w_f^2\right)^2 + 4\mu^2 w_f^2}$$

$$D=\frac{2Q_o\mu w_f}{\left(w_n^2-w_f^2\right)^2+4\mu^2w_f^2}$$

وبالتعويض فى (3) نحصل على الحل الخاص x_2 بالصورة:

$$x_2=Q_o\frac{\left(w_n^2-w_f^2\right)\cos w_f t+2\mu w_f\sin w_f t}{\left(w_n^2-w_f^2\right)^2+4\mu^2w_f^2}$$

$$=\frac{Q_o}{\sqrt{\left(w_n^2-w_f^2\right)^2+4\mu^2w_f^2}}\,x$$

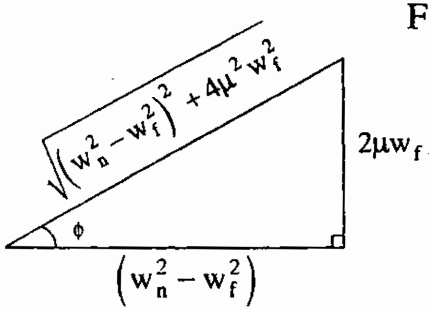
$$x\left[\frac{\left(w_n^2-w_f^2\right)}{\sqrt{\left(w_n^2-w_f^2\right)^2+4\mu^2w_f^2}}\cos w_f t+\right.$$

$$\left.\frac{2\mu w_f}{\sqrt{\left(w_n^2-w_f^2\right)^2+4\mu^2w_f^2}}\sin w_f t\right]$$

$$=F[\cos\phi\cos w_f t+\sin\phi\sin wft]$$

$$=F\cos\left(w_f t-\phi\right) \qquad (6)$$

حيث $F=\dfrac{Q_o}{\sqrt{\left(w_n^2-w_f^2\right)^2+4\mu^2w_f^2}}$ هى سعة الذب ذبات الق سرية المخمدة (أو المجبرة المخمدة)، ϕ هى زاوية الطور وقيمتها (م ن المثل ث المقابل) هى:



$$\tan\phi = \frac{2\mu w_f}{w_n^2 - w_f^2} \qquad (7)$$

وباستخدام المتغير δ (الإزاحة الاستاتيكية) حيث: $\delta = \frac{q_o}{k}$ وكذلك النسبة $\lambda = \frac{w_f}{w_n}$ فإن:

$$\delta = \frac{q_o}{m}\left(\frac{1}{w_n^2}\right) = \frac{Q_o}{w_n^2}$$

أيضاً إذا كانت $\eta = \frac{2\mu}{w_n}$ فإن:

$$F = \frac{Q_o}{\sqrt{\left(w_n^2 - w_f^2\right)^2 + 4\mu^2 w_f^2}}$$

$$= \frac{Q_o}{w_n^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{w_f^2}{w_n^2}\right)^2 + \frac{4\mu^2}{w_n^2}\frac{w_f^2}{w_n^2}}}$$

$$= \frac{\delta}{\sqrt{\left(1-\lambda^2\right)^2 + \eta^2\lambda^2}} \qquad (8)$$

$$\tan\phi = \frac{2\mu w_f}{w_n^2 - w_f^2} = \frac{2\mu w_f}{w_n^2\left(1-\frac{w_f^2}{w_n^2}\right)}$$

$$= \frac{2\mu}{w_n}\frac{w_f}{w_n}\frac{1}{\left(1-\frac{w_f^2}{w_n^2}\right)} = \frac{\eta\lambda}{1-\lambda^2} \qquad (9)$$

يتضح من (8), (9) أن سعة الذبذبة القسرية الناشئة عن القوة القسرية وهى ذبذبة توافقية غير مخمدة هى كمية ثابتة ولا تعتمد على الظروف الابتدائية، ويكون تردد الذبذبة الناتجة w_f مساويا لتردد القوة القسرية المسببة لها، والزمن الدورى لها $\tau_f = \dfrac{2\pi}{w_f}$.

أما المقدار ϕ فيحدد إزاحة زاوية الطور للذبذبات القسرية عن زاوية الطور للقوة القسرية المسببة للذبذبات.

أمثلة محلولة

__مثال (1):__

أوجد قيمة w_f التى تجعل سعة الذبذبات القسرية المخمدة أكبر ما يمكن وأوجد قيمة تلك السعة:

__الحل:__

لكى تكون السعة $F = \dfrac{Q_o}{\sqrt{\left(w_n^2 - w_f^2\right)^2 + 4\mu^2 w_f^2}}$ أكبر ما يمكن أى نهاية عظمى يجب أن تكون الكمية تحت الجذر

$$U = \left(w_n^2 - w_f^2\right)^2 + 4\mu^2 w_f^2$$

أقل ما يمكن أى نهاية صغرى، ويأتى هذا من قوانين المشتقات حيث:

$$\frac{dU}{dw_f} = 0 \longrightarrow 2\left(w_n^2 - w_f^2\right)(-2w_f) + 8\mu^2 w_f^2 = 0$$

$$\therefore\ 4w_f^2[2\mu^2 - w_n^2 + w_f^2] = 0 \qquad \therefore\ 2\mu^2 - w_n^2 + w_f^2 = 0$$

$$\therefore\ w_f^2 = w_n^2 - 2\mu_2^2$$

$$\therefore \quad U=\left(w_n^2-w_f^2\right)^2+4\mu^2 w_f^2$$
$$=\left(w_n^2-w_n^2+2\mu^2\right)^2+4\mu^2\left(w_n^2-2\mu^2\right)=4\mu^4+4\mu^2\left(w_n^2-2\mu^2\right)$$
$$=4\mu^4+4\mu^2 w_n^2-8\mu^4=4\mu^2 w_n^2-4\mu^4=4\mu^2\left(w_n^2-\mu^2\right)$$

∴ أكبر سعة هى تكون:

$$F_{max}=\frac{Q_o}{2\mu\sqrt{w_n^2-\mu^2}}$$

وهو المطلوب

مثال (2):

جسيم يتحرك على محور x تحت تأثير ثلاث قوى: إرجاعية (وقيمتها 8x) وإخمادية (فى وسط مقوم) وقيمتها (4x)، وقسرية (دورية) قيمتها 20 cos 2t، اكتب معادلة الحركة لهذا الجسيم، وإذا بدأ الجسيم الحركة من السكون من الموضع x=o فاوجد الإزاحة والسرعة لهذا الجسيم عند أى لحظة (t).

الحل:

معادلة الحركة:

$$\ddot{x}=-8x-4\dot{x}+20\cos 2t$$

$$\therefore \quad \ddot{x}+4\dot{x}+8x=20\cos 2t \qquad (1)$$

وهى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها يتكون من جزئين:

(i) x_1 الذى يشكل حل المعادلة المتجانسة

$$\ddot{x}+4\dot{x}+8x=0$$

حيث: المعادلة المميزة (أو المساعدة) هى:

$$\lambda^2+4\lambda+8=0$$

وجذرا هذه المعادلة هما:

$$\boxed{\lambda_{1,2}=-2\pm 2i}$$

ويصبح الحل بالصورة:

$$x_1 = e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t) \qquad (2)$$

(ii) x_2 الذى يشكل الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة ونفرض صورته كالآتى:

$$x_2 = C\cos 2t + D\sin 2t$$

وبالتعويض عن $\ddot{x}_2, \dot{x}_2, x_2$ فى المعادلة (1) نحصل على الثابتين $C, \quad D$ بالصورة:

$$\boxed{C = 1} \quad , \quad \boxed{D = 2}$$

$$\therefore \quad x_2 = \cos 2t + 2\sin 2t \qquad (3)$$

ويصبح الحل الكامل بالصورة:

$$x = x_1 + x_2 = e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t) + \cos 2t + 2\sin 2t \quad (4)$$

وبإجراء التفاضل:

$$\dot{x} = e^{-2t}(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t)$$
$$-2e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t) - 2\sin 2t + 4\cos 2t \qquad (5)$$

ومن الشروط الابتدائية: عند t=o فإن x=o، $\dot{x} = o$

فمن (5) ,(4) نجد أن:

$$O = 1 + A \longrightarrow \boxed{A = -1}$$
$$O = 4 + 2B \longrightarrow \boxed{B = -3}$$
$$O = 4 + 2B - 2A$$

وتصبح (5) ,(4) بالصورة:

$$x = e^{-2t}[\cos 2t + 3\sin 2t] + [\cos 2t + 2\sin 2t] \quad (6)$$
$$\dot{x} = e^{-2t}[2\sin 2t - 6\cos 2t + 2\cos 2t + 6\sin 2t]$$
$$-2\sin 2t + 4\cos 2t$$
$$= e^{-2t}[8\sin 2t - 4\cos 2t] + [4\cos 2t - 2\sin 2t]$$
$$= 4e^{-2t}[2\sin 2t - \cos 2t] + 2[2\cos 2t - \sin 2t] \qquad (7)$$

العلاقتين (6) ,(7) تعطيان الإزاحة والسرعة عند أى لحظة للذبذبات المخمدة المجبرة الموصوفة بالمعادلة التفاضلية (1). وهو المطلوب

مسائل

مسألة (1):

حل المعادلة $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0$ تحت الشروط $\dot{x}=-3$ ، x=5 عند بداية الحركة (t=o)، وبين التفسير الفيزيائى للنتائج التى تحصل عليها.

مسألة (2):

(أ) أثبت أن التناقص اللوغارتمى هو الزمن اللازم لكى تنقص السعة إلى $\left(\frac{1}{e}\right)$ من قيمتها القصوى.

(ب) إذا كان التردد الطبيعى لكتلة تتذبذب على زنبرك هو 20 نبذبة/ ثانية بينما كان التردد فى وجود إخماد هو 16 نبذبة فى الثانية، أوجد التناقص اللوغارتمى.

مسألة (3):

نقطة مادية كتلتها m تتحرك تحت تأثير قوة إرجاعية مقدارها kx حيث k ثابت، x بعد النقطة عن مركز الحركة عند أى لحظة t، إضافة إلى قوة مقاومة مقدارها $2\sqrt{km}\dot{x}$ ، أكتب معادلة الحركة، وأوجد الحل العام لها وبين نوع الحركة فى تلك الحالة.

مسألة (4):

إذا علمت أن سعة متذبذب توافقى مخمد تهبط إلى قيمة (e^{-1}) من قيمتها الابتدائية بعد مرور عدد n من الاهتزازات الكاملة. أثبت أن نسبة زمن نبذبته إلى زمن نبذبته بدون إخماد هى:

$$\frac{\tau}{\tau_o}=\left(1+\frac{1}{4\pi^2n^2}\right)^{1/2}$$

مسألة (5):

جسيم كتلته m بدأ حركته من السكون من على بعد a من مركز جذب o وتحرك فى خط مستقيم، فإذا كانت قوى الجذب تتناسب مع بعد الجسيم عن o وكانت قوى المقاومة تساوى $2\mu mv$ حيث μ ثابت، v سرعة الجسيم عند أى لحظة، أثبت أن الجسيم يقطع مسافة قدرها $\coth = \left(\frac{\mu}{4}\tau_d\right)^{1/2}$ قبل أن يصل نهائيا إلى السكون عند مركز الجذب، حيث τ_d هو زمن الذبذبة المخمدة.

مسألة (6):

ثبت جسيم كتلته m فى منتصف خيط مرن cb طوله الطبيعى 2L وثبت طرف الخيط c فى نقطة فى مستوى أفقى أملس، وكان الشد فى الخط هو T، فإذا تحرك الطرف الآخر للخيط b حركة اهتزازية فى المستوى فى اتجاه عمودى على الخيط بقوة قسرية (أو مجبرة) قيمتها $A\sin w_f t$ بحيث كانت السعة A صغيرة، بين أن الجسيم يتذبذب ذبذبة قسرية غير مخمدة وأن سعة الذبذبة الحرة تساوى صفرا، علما بأن: إزاحة الجسيم عند بدء الحركة كانت صفرا وأن سرعته كانت $\frac{A w_f w_n^2}{2(w_n^2 - w_f^2)}$، w_n هى التردد الطبيعى للذبذبات الحرة، w_f هو تردد الذبذبات القسرية.

حلول بعض المسائل

حل المسألة (4):

وجدنا أن سعة المتذبذب المخمد تساوى $Ce^{-\mu t}$ فبفرض أن زمن الذبذبة الواحدة τ_d فعليه تكون سعة الذبذبة الابتدائية عند $t=o$ هى C وبعد زمن قدره $2\tau_d$ تصبح هذه السعة $Ce^{-2\mu\tau d}$ وهذه تتناقص بمرور الزمن، فبعد زمن قرب $t=n\tau_d$ تصبح السعة $Ce^{-n\mu\tau d}$ وحسب الفرض فإن هذه السعة تعادل Ce^{-1}.

$$\therefore \quad Ce^{-n\mu\tau d} = Ce^{-1} \longrightarrow n\mu\tau_d = 1$$

لكن $\tau_d = \dfrac{2\pi}{w_d}$ (زمن الذبذبة المخمدة)

$$\therefore \quad \mu = \frac{1}{n\tau_d} = \frac{w_d}{2\pi n} \longrightarrow w_d = 2\pi n\mu$$

ولما كانت: $w_d = \left(w_n^2 - \mu^2\right)^{1/2}$

$$\therefore \quad w_n^2 = w_d^2 + \mu^2 = w_d^2 + \frac{w_d^2}{4\pi^2 n^2} = w_d^2\left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{w_n}{w_d} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{1/2}$$

ولما كانت: $w_n = \dfrac{2\pi}{\tau_n}$ فإن:

$$\frac{2\pi / \tau_n}{2\pi / \tau_d} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{1/2}$$

$$\therefore \quad \frac{\tau_d}{\tau_n} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{1/2}$$

وهو المطلوب:

حل المسألة (5):

باستخدام المعادلة:

$$\tau_d = \tau_n\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{w_n}\right)^2\right] = \tau_n\left[1+\frac{\mu^2}{2w_n^2}\right]$$

حيث $\tau_n = \frac{2\pi}{w_n}$ الزمن الدورى للذبذبة الحرة، τ_d هو الزمن الدورى للذبذبة المخمدة $\tau_d = \frac{2\pi}{w_d}$.

$$\therefore \qquad \tau_d = \frac{2\pi}{w_n}\left[1+\frac{\mu^2}{2w_n^2}\right]$$

وإذا كانت C هى سعة الذبذبة عند t=o فمن المعادلة

$$x = Ce^{-\mu t}\cos(w_d t + \phi)$$

[معادلة الانحراف للذبذبة الحرة المخمدة]

فإن سعة الذبذبة عند $t = \tau_d/2$ هى $Ce^{-\frac{\mu}{2}\tau_d}$

فإن سعة الذبذبة عند $t = \tau_d$ هى $Ce^{-\mu\tau_d}$، وهكذا

المسافات المقطوعة هى السعات المتتالية المتناقصة وتساوى:

$$= C + 2Ce^{-\frac{\mu}{2}\tau_d} + 2Ce^{-\mu\tau_d} + 2Ce^{-\frac{3\mu}{2}\tau_d}$$

$$= C - 2C + 2C + 2C(e^{-\frac{\mu}{2}\tau_d}) + 2C(e^{-\frac{\mu}{2}\tau_d})^2 + 2C(e^{-\frac{\mu}{2}\tau_d})^3 \ldots\ldots$$

$$= C - 2C + 2C\left[1 + \frac{1}{e^{\frac{\mu}{2}\tau_d}} + \left(\frac{1}{e^{\frac{\mu}{2}\tau_d}}\right)^2 + \left(\frac{1}{e^{\frac{\mu}{2}\tau_d}}\right)^3 \ldots\ldots\right]$$

$$=C-+\frac{2C}{1-\dfrac{1}{e^{\frac{\mu}{2}\tau_d}}}$$

$$=-C+\frac{2Ce^{\frac{\mu}{2}\tau_d}}{e^{\frac{\mu}{2}\tau_d}-1}=C\frac{e^{\frac{\mu}{2}\tau_d}+1}{e^{\frac{\mu}{2}\tau_d}-1}$$

ونضرب البسط والمقام فى $e^{-\frac{\mu}{4}\tau_d}$ نحصل على المسافة المطلوبة وهى تساوى:

$$=C\frac{e^{\frac{\mu}{4}\tau_d}+e^{-\frac{\mu}{4}\tau_d}}{e^{\frac{\mu}{4}\tau_d}-e^{-\frac{\mu}{4}\tau_d}}=C\coth\left(\frac{\mu}{4}\tau_d\right)$$

وهو المطلوب.

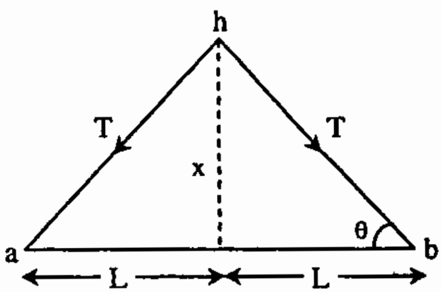
<u>حل المسألة (6):</u>

الشكل(1) يبين وضع الخيط عند تثبيت طرفيه فإذا أزيحت النقطة h إزاحة صغيرة x فيمكن اعتبار الشد فى الخيط يكون ثابتا، وتكون معادلة الحركة فى هذه الحالة:

$$m\ddot{x}=-2T\sin\theta=-2T\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}=-2T\frac{x}{L}$$

[بإهمال x^2 حيث x صغيرة]

$$\therefore\quad \ddot{x}=\frac{-2T}{mL}x=-w_n^2x$$

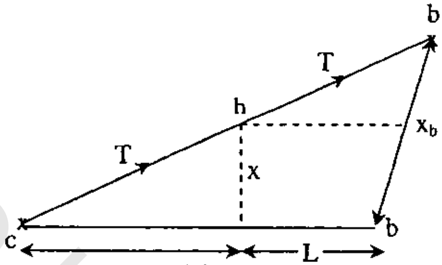


شكل (1)

وهى معادلة حركة توافقية بسيطة مما يعنى أن الجسيم يتحرك ذبذبة حرة (طبيعية) سعتها $w_n^2=\frac{2T}{mL}$.

الشكل (2) يبين وضع الخيط عند تعرض الطرف b لحركة قسرية قدرها

$A\sin w_f t$ فتكون معادلة الحركة في هذه الحالة:



شكل (٢)

$$m\ddot{x} = -T\frac{x}{L} + T\frac{(x_b - x)}{L}$$

حيث x_b-x هي الاستطالة الحادثة نتيجة وجود القوة القسرية

$$\therefore \quad m\ddot{x} = -T\frac{x}{L} + T\frac{x_b}{L} - T\frac{x}{L} = -2T\frac{x}{L} + T\frac{x_b}{L}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -2T\frac{x}{mL} + \frac{Tx_b}{mL}$$

ولكن: $x_b = A \sin w_f t$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -2\frac{Tx}{mL} + \frac{TA}{mL}\sin w_f t$$

$$= -w_n^2 x + \frac{1}{2} w_n^2 A \sin w_f t \qquad \Bigg| \quad w_n^2 = \frac{2T}{mL}$$

وهي معادلة تفاضلية غير متجانسة حلها يتكون من جزئين:

(١) الحل العام للمعادلة المتجانسة $\ddot{x} + w_n^2 x = o$ وهي معادلة الذبذبات الحـ ـرة، وصورته:

$$x_1 = C \cos (w_n t + \varepsilon) \qquad (1)$$

(٢) الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة ويكتب بالصورة:

$$x_2 = D \sin w_f t \qquad (2)$$

حيث D هي سعة الذبذبة القسرية وصورتها:

$$D = \frac{½ w_n^2 A}{w_n^2 - w_f^2} = \frac{A w_n^2}{2(w_n^2 - w_f^2)}$$

وتصبح معادلة الانحراف بالصورة:

$$x = x_1 + x_2 = C \cos(w_n t + \varepsilon) + D \sin w_f t \qquad (3)$$

وبإجراء التفاضل نحصل على:

$$\dot{x} = -C\, w_n \sin(w_n t + \varepsilon) + D w_f \cos w_f t \qquad (4)$$

وباستخدام الشروط الابتدائية:

عند بدء الحركة t=o : كانت إزاحة الجسيم x=o وكذلك $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$

وسرعة الجسيم: $\dot{x} = \frac{A w_f w_n^2}{2(w_n^2 - w_f^2)}$ (معطاة فى رأس المسألة).

فبالتعويض فى (4) نجد أن:

$$\frac{A w_f w_n^2}{2(w_n^2 - w_f^2)} = -C w_n \sin\frac{\pi}{2} + D w_f \cos 0 \qquad \left| \begin{array}{l} \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ \cos 0 = 1 \end{array} \right.$$

$$= -C w_n + D w_f$$

$$= C w_n + \frac{A w_f w_n^2}{2(w_n^2 - w_f^2)}$$

ومنهما نجد أن: $\boxed{C = 0}$

أى أن سعة الذبذبة الحرة تساوى صفرا

ويكون الانحراف مساويا [من (3)]

$$x = D \sin w_f t = \frac{A w_n^2}{2(w_n^2 - w_f^2)} \sin w_f t \qquad (5)$$

أى أن الجسيم يتذبذب ذبذبة قسرية (مجبرة) وغير مخمدة.

وهو المطلوب