

الباب الثالث

الحركة المقيدة المستوية للجسيمات

سبق أن درسنا فى الجزء الأول من كتابنا (أسس علم الديناميكا) حركة نقطة مادية (أو جسيم) فى دائرة (أفقية ورأسية) كحالة خاصة من الحركة المقيدة المستوية للجسيمات، وفى هذا الباب نقوم بدراسة الحالة العامة لهذا النوع من الحركة المستوية، وندرس الموضوعات الآتية:

1. حركة جسيم على منحنى مستو أملس - الإحداثيات الطبيعية (أو الذاتية).
2. حركة جسيم على منحنى السيكلويد (الحركة السيكلويدية).
3. حركة جسيم على منحنى مستو خشن.

أولاً: حركة جسيم على منحنى مستو أملس - الإحداثيات الطبيعية

(1) مركبات السرعة والعجلة فى الإحداثيات الطبيعية (الذاتية أو المماسية):

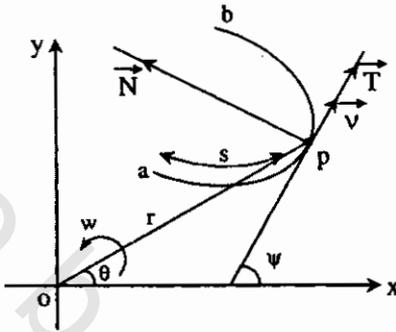
إذا تحرك جسيم فى مستو حركة مقيدة بمسار معين (كانزلاق حلقة على سلك منحنى ثابت الشكل والوضع)، فإن الاتجاهات الطبيعية للتحليل تكون فى اتجاه المماس لمنحنى المسار المعلوم واتجاه العمودى عليه.

وهذين الاتجاهين (المماس للمنحنى والعمودى عليه) يدوران مع حركة الجسيم فى مساره، غير أنهما يحتفظان بتعامدهما على بعضهما، ويعرفان بالإحداثيات الطبيعية (أو الذاتية أو المماسية) لحركة الجسيم المقيد بمسار مستو معلوم.

ولإيجاد مركبتى السرعة فى تلك الإحداثيات:

نفرض أن ab منحنى مستو معلوم وأن هناك نقطة مادية تتحرك عليه وأن موضعها عند اللحظة t هو p ، حيث المسافة s (طول القوس) من نقطة ثابتة على المسار إلى الجسيم هى:

$$s = ap$$



وأن ψ هي الزاوية التي يصنعها المماس عند p مع اتجاه ثابت ox في مستوى الحركة.

تسمى المعادلة:

$$s = f(\psi) \quad (1)$$

بالمعادلة الذاتية (أو المماسية) للمسار.

سرعة النقطة p تكون في اتجاه المماس فقط (أى فى اتجاه تزايد دى) ومقدارها

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{فإذا كان } \vec{T} \text{ هو متجه الوحدة فى اتجاه المماس فإن:}$$

$$\vec{v} = v\vec{T} = \frac{ds}{dt} \vec{T} = \dot{s}\vec{T} \quad (2)$$

أما فى اتجاه العمودى فلا توجد أى مركبة للسرعة

$$\therefore \vec{v} = (\dot{s}\vec{T}, 0) \quad (3)$$

لإيجاد مركبتى العجلة فى الإحداثيات الذاتية (أو المماسية):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{T}) = \dot{s} \frac{d\vec{T}}{dt} = \ddot{s}\vec{T} + \dot{s} \frac{d\vec{T}}{dt} \quad (4)$$

ولكن:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \vec{N} = \dot{\psi} \vec{N} \quad (5)$$

حيث \vec{N} هو متجه الوحدة فى اتجاه العمودى على المماس ويرتبط بمتجه الوحدة \vec{T} بالعلاقة:

$$\vec{T} = \psi \vec{N} \quad (6)$$

وتصبح العجلة بالصورة [بالتعويض من (6) فى (4)]:

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \dot{s}\dot{\psi}\vec{N} \quad (7)$$

أى أن العجلة لها مركبتان:

١. مركبة مماسية (في اتجاه \vec{T}) وقيمتها $a_T = \ddot{s}$

٢. مركبة عمودية (في اتجاه \vec{N}) وقيمتها $a_N = \dot{s}\dot{\psi}$

ويستخدم العلاقة بين المسافة s ونصف قطر التقوس (أو الانحناء) للمسار عند النقطة ρ وهى [من التفاضل والتكامل]:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} \tag{8}$$

فإننا نحصل على:

$$a_T = \ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = \dot{v} = v \frac{dv}{ds} \tag{9} \quad \left| \quad v = \frac{ds}{dt} \right.$$

وهى المركبة المماسية (في اتجاه المماس للخارج أى فى اتجاه تزايد s).

$$a_N = \dot{s}\dot{\psi} = \dot{s} \frac{d\psi}{dt} = \dot{s} \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \left(\frac{1}{\rho} \right) v = \frac{v^2}{\rho} \tag{10}$$

وهى المركبة العمودية (فى اتجاه العمودى للداخل أى فى اتجاه تزايد ψ).
ويكون مقدار العجلة الكلية:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

$$\tan^{-1} \left(\frac{a_N}{a_T} \right)$$

وأتجاههما يصنع زاوية

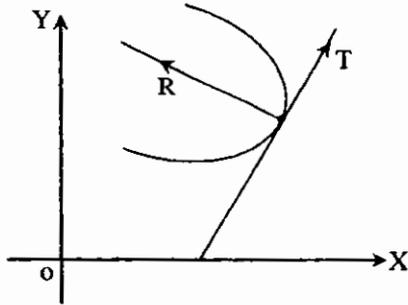
مع اتجاه المماس.

وتكون معادلتى الحركة لجسيم يتحرك

على منحنى مستو معلوم هما:

$$T = ma_T = mv \frac{dv}{ds}$$

$$R = ma_N = m \frac{v^2}{\rho}$$



ملحوظة:

إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة على المنحنى فإن $v = \dot{s} = \text{const.}$ وتكون $\ddot{s} = 0$ أى أن $a_T = 0$ مما يعنى أن المركبة المماسية للعجلة تتلاشى.

نتيجة:

فى حالة الدائرة فإن نصف قطرها ($\rho = r$) انحنائهم يساوى نصف قطرها

$$v = \dot{s} = r\dot{\theta} \quad \text{وتكون السرعة: } s = r\theta$$

أما العجلة فيكون لها مركبتان هما:

$$a_T = \ddot{s} = r\ddot{\theta} \quad , \quad a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{1}{r}(r\dot{\theta})^2 = r\dot{\theta}^2$$

$$\therefore a = (r\ddot{\theta} , r\dot{\theta}^2)$$

إيجاد نصف قطر التقوس (أو الانحناء) لمنحنى:

يمكن إيجاد نصف قطر التقوس أو الانحناء (ρ) لأى منحنى معادلته

الكرتيزية $y=f(x)$ من العلاقة الآتية:

$$\rho = \frac{[1 + y'^2]^{3/2}}{y''}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad , \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{حيث}$$

أما إذا كانت معادلة المنحنى معادلة ذاتية: $s=f(\psi)$ فإن نصف قطر التقوس (أو

الانحناء) يعطى بالعلاقة:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi}$$

ويعرف مقلوب ρ أى $\frac{1}{\rho}$ بالتقوس أو الانحناء (curvature) للمنحنى عند النقطة

المعينة.

مثال:

أوجد نصف قطر التقوس للمنحنين الآتيين:

(1) $y = 2a x^2$

(قطع مكافئ)

(2) $s = c \tan \psi$

(منحنى السلسلة)

الحل:

(1) حيث أن $y = 2a x^2$

$\therefore y' = 4ax$

$y'' = 4a$

$\therefore \rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{(1+16a^2x^2)^{3/2}}{4a}$

(2) حيث أن $s = c \tan \psi$

$\therefore \rho = \frac{ds}{d\psi} = c \frac{d}{d\psi} (\tan \psi) = c \sec^2 \psi$

أمثلة محلولة على حركة جسيم على منحنى أملس:

مثال (1):

يتحرك جسيم على منحنى السلسلة (الكتينة) التي معادلتها الذاتية $s=c \tan \psi$

بحيث يدور المماس بسرعة زاوية ثابتة ω - برهن على أن مقدار عجلة الجسيم عند

أى موضع يساوى $\left(\rho \omega^2 \sqrt{\frac{4\rho}{c}} - 3 \right)$ حيث ρ نصف قطر الانحناء للمنحنى وأن

اتجاهها يصنع زاوية θ مع المماس حيث: $\tan \theta = \frac{1}{2} \cot \psi$

الحل:

منحنى الكتينة (السلسلة) مبين بالشكل ومعادلته الذاتية: $s = c \tan \psi$

السرعة المماسية:

$$v = \frac{ds}{dt} = c \sec^2 \psi \cdot \dot{\psi}$$

$$= c \omega \sec^2 \psi, \quad \omega \dot{\psi} \quad (1)$$

العجلة المماسية:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 2c \omega \sec^2 \psi \cdot \tan \psi \cdot \dot{\psi} = 2c \omega^2 \sec^2 \psi \cdot \tan \psi \cdot \dot{\psi} \quad (2)$$

العجلة العمودية:

حيث نصف قطر الانحناء ويعطى من العلاقة:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = c \sec^2 \psi$$

$$\therefore a_N = \frac{(c \omega \sec^2 \psi)^2}{c \sec^2 \psi} = c \omega^2 \sec^2 \psi \quad (3)$$

العجلة الكلية:

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2$$

$$= (2c \omega^2 \sec^2 \psi \tan \psi)^2 + (c \omega^2 \sec^2 \psi)^2$$

$$= c^2 \omega^4 \sec^2 \psi (1 + 4 \tan^2 \psi)$$

$$= c^2 \omega^4 \sec^4 \psi (4 \sec^2 \psi - 3)$$

$$= (c \sec^2 \psi)^2 \omega^4 \left(\frac{4c \sec^2 \psi}{c} - 3 \right) = \rho^2 \omega^4 \left(\frac{4\rho}{c} - 3 \right)$$

ويكون مقدار العجلة:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \rho \omega^2 \sqrt{\frac{4\rho}{c} - 3}$$

واتجاهها هو :

$$\tan \theta \frac{a_N}{a_T} = \frac{c\omega^2 \sec^2 \psi}{2c\omega^2 \sec^2 \psi \tan \psi} = \frac{1}{2} \cot \psi$$

وهو المطلوب.

مثال (2):

تتحرك نقطة مادية ذات عجلة ثابتة a فى اتجاه يميل بزاوية α على منحنى أملس، أثبت أن هذا المنحنى هو الحلزون متساوى الزاوية ومعادلته $x + \lambda = ke^{2\psi \cot \alpha}$ حيث λ, k ثابتان، $x = 2s \cos \alpha$

الحل:

معادلتا الحركة هما:

$$a_T = v \frac{dv}{ds} = a \cos \alpha \quad (1)$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = a \sin \alpha \quad (2)$$

بتكامل المعادلة (1):

$$\therefore \int v dv = a \cos \alpha \int ds$$

$$\therefore \frac{1}{2} v^2 = (a \cos \alpha) \cdot s + c$$

$$\therefore v^2 = 2(a \cos \alpha) s + \lambda \quad (3), \quad \longrightarrow \lambda = 2c$$

ومن المعادلة (2):

$$\therefore v^2 = \rho = (a \sin \alpha) \quad (4)$$

وبمساواة (3)، (4):

$$\rho = (a \sin \alpha) = 2(a \cos \alpha) \cdot s + \lambda$$

$$\therefore \rho = \frac{2a \cos \alpha \cdot s + \lambda}{a \sin \alpha}$$

ولكن: نصف قطر الانحناء للمنحنى:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{(2a \cos \alpha) \cdot s + \lambda}{a \sin \alpha}$$

$$\therefore \frac{ds}{(2a \cos \alpha) \cdot s + \lambda} = \frac{d\psi}{a \sin \alpha}$$

ويضرب الطرفين في $(2a \cos \alpha)$:

$$\therefore \frac{(2a \cos \alpha) ds}{(2a \cos \alpha) \cdot s + \lambda} = \frac{2a \cos \alpha d\psi}{a \sin \alpha} = 2 \cot \alpha \cdot d\psi$$

وبالتكامل نحصل على:

$$\ln(2a \cos \alpha \cdot s + \lambda) = 2 \cot \alpha \cdot \psi + C_1$$

$$\therefore (2a \cos \alpha) \cdot s + \lambda = e^{2\psi \cdot \cot \alpha} \cdot e^{C_1} = k e^{2\psi \cdot \cot \alpha}, \quad k = e^{C_1}$$

وبأخذ: $(2a \cos \alpha) \cdot s = x$

$$x + \lambda = k e^{2\psi \cdot \cot \alpha}$$

وهي معادلة الحلزون (أو اللولب) المتساوي الزاوية.

مثال (3):

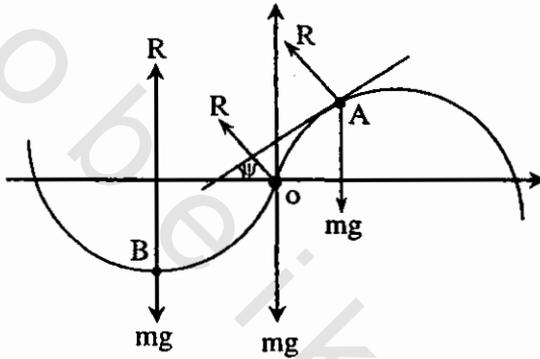
تنزلق حلقة كتلتها m على سلك منحنى أملس مستواه رأسى ومعادلته $y = \sin x$

، فإذا كانت الحلقة قد بدأت حركتها على السلك من النقطة $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

أوجد رد فعل السلك على الحلقة عند مرورها بالنقطتين: $O(0,0)$ ، $B\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$

الحل:

نفرض أن موضع الحلقة عند اللحظة t عند النقطة A وأن ψ هي الزاوية التي يصنعها المماس عند A مع الأفقى فى الاتجاه العمودى على المماس عند A .

معادلات الحركة:

$$m\ddot{s} = -mg \sin \psi \quad (1)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \psi - R \quad (2)$$

أيضاً فمن معادلة المنحنى: $y = \sin x$

فإن ميل المنحنى يكون:

$$\tan \psi = \frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\tan \psi} = \cot \psi$$

وأيضاً حيث أن:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \rightarrow \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + \cot^2 \psi} = \operatorname{cosec} \psi$$

$$\therefore \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\operatorname{cosec} \psi} = \sin \psi$$

ومن (1):

$$\ddot{s} = -g \sin \psi = -g \frac{dy}{ds}$$

$$\therefore \dot{s} \frac{ds}{ds} = -g \frac{dy}{ds}$$

وبالتكامل بالنسبة إلى s نحصل على:

$$\int \dot{s} ds = -g \int d - dy$$

$$\therefore \frac{1}{2} \dot{s}^2 = -gy + \text{cons} \rightarrow \dot{s}^2 = -2gy + C$$

ولإيجاد الثابت c: في بداية الحركة:

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v = \dot{s} = 0$$

$$\therefore 0 = \frac{-2g}{\sqrt{2}} + C \rightarrow C = \frac{2g}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}g$$

$$\therefore v^2 = -2gy + \sqrt{2}g = g(\sqrt{2} - 2y) \quad (3)$$

نصف قطر التقوس:

$$\rho = \frac{[1 + y'^2]^{3/2}}{y''} = \frac{[1 + \cos^2 x]^{3/2}}{-\sin x} = \frac{(1 + \tan^2 \psi)^{3/2}}{-y}$$

ومن (2) فإن رد فعل السلك:

$$R = m \left(g \cos - \frac{v^2}{\rho} \right) \quad (4)$$

حيث

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$$

لإيجاد رد الفعل عند النقطة O: حيث $\cos x = 1, \rho = \infty, y = 0, x = 0$

$$\sin x = 0$$

معادلة الحركة عند O هي المعادلة (4):

$$\therefore \tan \psi = \cos x = 1 \quad \therefore \psi = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

فبالتعويض في (4):

$$R = m \left(\frac{g}{\sqrt{2}} - 0 \right) = \frac{mg}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

وهو المطلوب أولاً.

ولإيجاد رد الفعل عند النقطة B: حيث $x = -\frac{\pi}{2}$ ، $y = -1$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x = 0, \quad y'' = -\sin x = 1 \quad \therefore \rho = 1$$

$$\tan \psi = \cos x = 0, \quad \psi = 0, \quad \cos \psi = 1$$

وأيضاً من (3):

$$v^2 = g(\sqrt{2} + 2) \quad (6)$$

ويكون رد الفعل في هذه الحالة بالصورة:

$$R = m \left(g + \frac{v^2}{\rho} \right)$$

[حيث أن معادلة الحركة عند B هي: $\frac{mv^2}{\rho} = R - mg$]

$$R = m \left[g + g(\sqrt{2} + 2) \right] = mg \left[3 + \sqrt{2} \right] \quad (7)$$

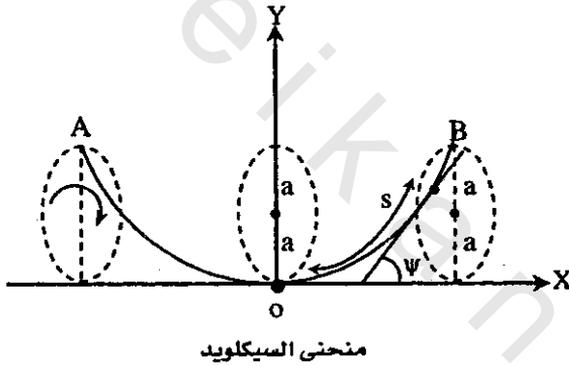
وهو المطلوب ثانياً.

ثانياً: حركة جسم على منحنى السيكلويد (الحركة السيكلويدية)

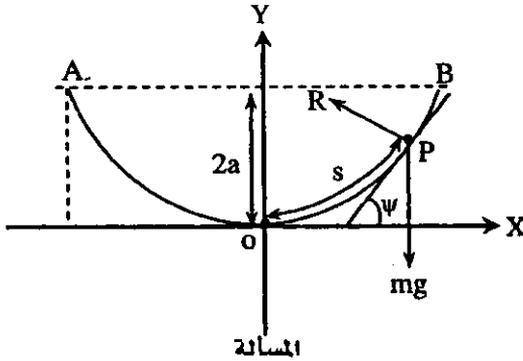
يعرف منحنى السيكلويد (الدويرى) بأنه مسار نقطة على محيط دائرة نصف قطرها a تتدحرج فى اتجاه محور x . تسمى O رأس السيكلويد وتسمى أعلى نقطة B (الناب).

المعادلة الذاتية للسيكلويد هي: $s = 4a \sin \psi$ حيث s المسافة من O إلى النقطة المتحركة p .

المسألة:



إذا تحرك جسم m على سلك منحنى أملس على شكل سيكلويد محوره رأسى وتمت الحركة فى البداية بقذف الجسم من أسفل نقطة O (رأس السيكلويد)، المطلوب الاتى:



- (i) دراسة الحركة (إيجاد السرعة والمسافة).
- (ii) إيجاد رد الفعل العمودى R ، ومتى يترك الجسم السلك.
- (iii) إيجاد سرعة وصول الجسم أعلى نقطة فى السيكلويد B (ناب السيكلويد).

(iv) إيجاد زمن وصول الجسم من الرأس O إلى الناب B (زمن الحركة).

الحل:

(i) دراسة الحركة:

المعادلة الذاتية للسيكلويد هي:

$$s = 4a \sin \psi \quad (1)$$

حيث s طول القوس op , a نصف قطر الدائرة الراسمة للسيكلويد أثناء تدرجها. نصف قطر انحناء السيكلويد هو:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a \cos \psi \quad (2)$$

معادلات الحركة:

إذا كان رد الفعل العمودي للمنحنى عند p هو R فإن معادلات الحركة

تكون:

$$F_T = ma_T = m\ddot{s} = -mg \sin \psi \quad (3)$$

$$F_N = ma_N = m \frac{v^2}{\rho} = R - mg \cos \psi \quad (4)$$

من (1): $\sin \psi = \frac{s}{4a}$ وبالتعويض في (3) نحصل على:

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a}s = -\omega^2 s \quad (5) \quad \left| \quad \omega^2 = \frac{g}{4a} \right.$$

المعادلة (5) هي معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{4a}}} = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}} = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

ولإيجاد السرعة:

حيث أن $\ddot{s} = -\omega^2 s$ [(المعادلة (5))] فبالتكامل بالنسبة إلى s نحصل على:

$$v \frac{dv}{ds} = -\omega^2 s \rightarrow \int v dv = -\omega^2 \int s ds$$

$$\therefore \frac{1}{2}v^2 = -\frac{\omega^2}{2}s^2 + \text{const.} \rightarrow v^2 = -\omega^2s^2 + C$$

والإيجاد C:

(1) إذا كان الجسم في البداية أي عند $s=0$ قد قذف بسرعة $v = v_0$ فإن:

$$C = v_0^2$$

وتصبح السرعة:

$$v^2 = v_0^2 - \omega^2s^2 \quad (6)$$

(2) أما إذا كان الجسم في البداية قد تحرك من السكون فإن $v_0 = 0$ وتصبح السرعة.

$$v^2 = -\omega^2s^2 = -\frac{g}{4a}s^2 \quad (7)$$

والإيجاد المسافة:

$$\ddot{s} = -\omega^2s \quad \text{من المعادلة (5):}$$

فبالضرب في $2\dot{s}$ والتكامل

$$\therefore \int 2\dot{s}\ddot{s} = -\omega^2 \int 2s\dot{s}$$

$$\therefore \dot{s}^2 = -\omega^2s^2 + C$$

$$C = \omega^2s_0^2 \quad \leftarrow \dot{s} = 0, s = s_0 \text{ فإن } t=0 \text{ عندما}$$

$$\therefore \dot{s}^2 = \omega^2(s_0^2 - s^2)$$

$$\therefore \dot{s} = \omega\sqrt{s_0^2 - s^2} = \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore \int \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \int \omega dt$$

$$\therefore \cos^{-1} \frac{s}{s_0} = \omega t + C_1$$

وعند $s=s_0$ ، $t=0$ فإن: $\cos^{-1} 1 = 0 + C$ $\boxed{C=0}$

$$\therefore \cos^{-1} \frac{s}{s_0} = \omega t \longrightarrow \therefore \frac{s}{s_0} = \cos \omega t$$

$$\therefore \boxed{s = s_0 \cos \omega t} \quad (8)$$

(ii) إيجاد رد الفعل العمودي R :

بالتعويض عن ρ من (2) وعن v^2 من (7) [الجسيم بدأ الحركة من السكون]

في المعادلة (4) [معادلة R] نحصل على:

$$R = mg \cos \psi + \frac{mv^2}{\rho} = mg \cos \psi - \frac{mg s^2}{4a \rho}$$

$$\longrightarrow = mg \left(\cos \psi - \frac{s^2}{4\rho} \right) \quad \left| \begin{array}{l} s = 4a \sin \psi \\ \rho = 4a \cos \psi \end{array} \right.$$

$$= mg \left[\cos \psi - \frac{(4a \sin \psi) s^2}{4(4a \cos \psi)} \right]$$

$$= mg \left[\cos \psi - \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} \right] \quad (9)$$

وعندما يترك الجسم السلك فإن رد الفعل ينعدم أى أن $R=0$ فمن (9) نجد أن:

$$\cos \psi - \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} = 0$$

$$\therefore \cos^2 \psi = \sin^2 \psi \longrightarrow \tan^2 \psi = 1 \longrightarrow \tan \psi = \pm 1$$

وحيث أن ψ زاوية حادة فإن $\tan \psi = 1$ ومنها $\psi = \frac{\pi}{4}$

أى أن الجسم يترك السلك عندما يكون متحركاً فى اتجاه يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الأفقى.

(iii) إيجاد سرعة وصول الجسم أعلى نقطة في السيكلويد B (تاب السيكلويد):

عند التاب فإن $s=4a \sin 90 = 4a$ وتكون: $\psi=90^\circ$

$$v^2 = v_0^2 - \frac{g}{4a}(16a^2) = v_0^2 - 4ag \quad \text{وتصبح السرعة:}$$

في حالة قذف الجسم بسرعة ابتدائية v_0 من 0.

(iv) إيجاد زمن الوصول إلى التاب (زمن الحركة):

إذا كان الجسم قد قذف من الرأس 0 بسرعة v_0 فإنه يصل إلى التاب

$$\text{بالسرعة: } v^2 = v_0^2 - 4ag$$

المعادلة (10)، وإيجاد زمن الحركة:

$$\ddot{s} = -\omega^2 s \quad \text{من معادلة الحركة [المعادلة (5)]:}$$

فبالضرب في $2\dot{s}$ والتكامل:

$$\int 2\dot{s}\ddot{s} = -\omega^2 \int 2s\dot{s}$$

$$\therefore \dot{s}^2 = -\omega^2 s^2 + C_2$$

وفي البداية (عند الرأس 0): $s=s_0, \dot{s} = v_0 \leftarrow C_2 = v_0^2$

$$\therefore \dot{s}^2 = v_0^2 - \omega^2 s^2 \quad \therefore \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 - \omega^2 s^2}$$

وحيث أن s تزداد بازدياد الزمن فنختار الإشارة الموجبة، أما إذا قذف الجسم من التاب (في اتجاه تناقص s) فنختار الإشارة السالبة:

$$\therefore \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 s^2}$$

$$\therefore \dot{s} = \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - \omega^2 s^2}} = \frac{1}{\omega} \frac{ds}{\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} - s^2}}$$

$$t = \frac{1}{\omega} \left[\sin^{-1} \frac{s}{v_0/\omega} \right] + C_3$$

وبالتكامل نحصل على:

وفى البداية (عند 0) فإن $s=0, t=0$ ويكون $C_3=0$

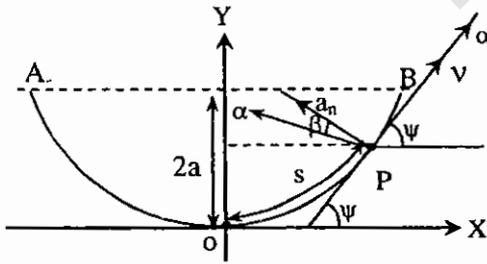
$$t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{\omega}{v_0} s = \sqrt{\frac{4a}{g}} \sin^{-1} \left[\sqrt{\frac{g}{4av_0}} s \right]$$

أمثلة محلولة

مثال (1):

يتحرك جسيم p على منحنى السيكلويد $s=4a \sin \psi$ مبتدئاً من رأسه o ، فإذا كان المماس عند p يدور بسرعة زاوية ثابتة ω ، أثبت أن مقدار عجلة الجسيم عند p يساوى $4a\omega^2$ واتجاهها يصنع مع العمودى عند p زاوية $\beta=\psi$ ، أوجد أيضاً مركبتى السرعة والمسافة فى اتجاهى المماس عند الرأس والعمودى عليه بدلالة الزمن t .

الحل:



نفرض أن p موضع الجسيم عند الزمن t وأن المسافة المنحنية $s=0p$ وأن الزاوية التى يصنعها المماس عند p مع OX عند الرأس

تساوى ψ .

فحيث أن:

$$s=4a \sin \psi \quad (1)$$

$$\therefore v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = 4a \cos \psi \cdot \dot{\psi} \quad (2)$$

وحيث أن المماس يدور بسرعة زاوية ثابتة ω فإن:

$$\frac{ds}{dt} = \dot{\psi} = \text{const} \omega \quad (3)$$

وتصبح (2):

$$v = 4a \omega \cos \psi$$

(4)

المركبة المحاسبة للعجلة:

$$a_T = \ddot{s} = \frac{dv}{dt} = -4a\omega^2 \sin \psi = -\omega^2 s$$

(5)

المركبة العمودية للعجلة:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

حيث s نصف قطر الاتحناء ويعطى من:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a \cos \psi$$

$$\therefore a_N = \frac{(4a\omega \cos \psi)^2}{(4a \cos \psi)} = 4a\omega^2 \cos \psi$$

(6)

مقدار عجلة الجسيم الكلية:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{(-4a\omega^2 \sin \psi)^2 + (4a\omega^2 \cos \psi)^2} = 4a\omega^2$$

واتجاهها يصنع زاوية β مع العمودى عند p حيث:

$$\therefore \tan \beta = \frac{-a_T}{a_N} = \frac{-(4a\omega^2 \sin \psi)}{4a\omega^2 \cos \psi} = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \tan \psi \rightarrow \beta = \psi$$

وهو المطلوب الأول.

ثانياً: إيجاد مركبتى السرعة والمسافة:

(1) مركبات السرعة:

مركبتى السرعة فى اتجاهى المماس عند الرأس (OX) والعمودى عليه (OY) هما:

$$\dot{x} = v \cos \psi = 4a\omega \cos^2 \psi = 4a\omega \cos^2 \omega t \quad (8)$$

$$\dot{y} = v \sin \psi = 4a\omega \cos \psi \sin \psi = 4a\omega \cos \omega t \sin \omega t \quad (9)$$

(2) مركبات المسافة (احداثيات موضع الجسم):

من (8):

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 4a\omega \cos^2 \omega t$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int_0^x dx = 4a\omega \int_0^t \cos^2 \omega t dt \quad \left| \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \right.$$

$$\therefore x = 2a\omega \int_0^t (1 + \cos 2\omega t) dt = 2a\omega \left[t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^t$$

$$= a[2\omega t + \sin 2\omega t] = a[2\psi + \sin 2\psi] \quad (10)$$

ومن (9):

$$4a\omega \cos \omega t \sin \omega t \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \left| \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \right.$$

$$= 2a\omega \sin 2\omega t$$

$$\therefore \int_0^y dy = 2a\omega \int_0^t \sin 2\omega t dt = 2a\omega \left[\frac{\cos 2\omega t}{2\omega} \right]_0^t = a[\cos 2\omega t - (-1)] dt$$

$$= a[\cos 2\psi] - a[1 - \cos 2\psi]$$

وهو المطلوب الثانى.

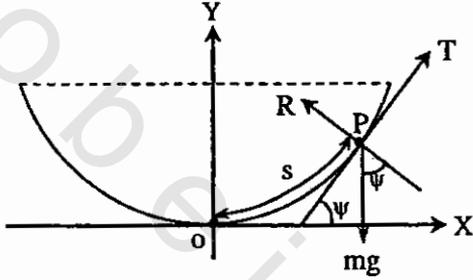
مثال (2):

ثبت سلك على شكل سيكلويد أملس فى مستوى رأسى بحيث كان محوره رأسياً

ورأسه إلى أسفل، فإذا بدأ جسم p كتلته m الحركة على السلك مبتدئاً من السكون

السكون عند أحد طرفى السلك، أوجد الزمن الذى يستغرقه الجسم فى الوصول إلى رأس السيكلويد O وأثبت أن الضغط على السلك عند O يساوى $2mg$.

الحل:



معادلات حركة الجسم فى اتجاه المماس والعمودى عليه:

$$ma_T = -mg \sin \psi \quad (1)$$

$$ma_N = R - mg \cos \psi \quad (2)$$

من (1) نجد أن:

$$a_T = \ddot{s} = -g \left(\frac{s}{4a} \right) = \frac{-g}{4a} s = -\omega^2 s \quad (3) \quad \text{و} \quad \omega^2 = \frac{g}{4a}$$

$$\sin \psi = \frac{s}{4a} \leftarrow s = 4a \sin \psi \quad \text{حيث: معادلة السيكلويد الذاتية}$$

من (2) نجد أن:

$$R = mg \cos \psi + m \frac{v^2}{\rho}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a \cos \psi$$

ولكن:

$$\therefore R = mg \cos \psi + m \frac{v^2}{4a \cos \psi} \quad (4)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}} \quad \text{من المعادلة (3) نجد أن معادلة حركة توافقية بسيطة فيها}$$

وحلها العام هو:

$$s = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (5)$$

وبالتفاضل نحصل على:

$$\therefore \dot{s} = -A\omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t \quad (6)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان ولإيجادهما:

الجسيم بدأ الحركة من السكون عند أحد طرفي السلك (أى عند الناب) حيث $4=90^\circ$

$$\therefore t = 0, s = 4a \sin 90 = 4a, \dot{s} = 0$$

فمن (5), (6) نجد أن:

$$4a = A \cos 0 + B \sin 0 = A(1) + B(0) = A \quad \therefore \boxed{A = 4a}$$

$$0 = -A\omega \sin 0 + B\omega \cos 0 = -A(0) + B\omega(1) = B\omega \rightarrow \boxed{B = 0}$$

وتصبح (5), (6) بالصورة:

$$s = 4a \cos \omega t = 4a \cos \sqrt{\frac{g}{4a}} t \quad (7)$$

$$\dot{s} = -4a\omega \sin \omega t = -2\sqrt{ag} \sin \sqrt{\frac{g}{4a}} t = v \quad (8)$$

وعندما يصل الجسيم إلى رأس السيكلويد فإن $s=0$ فمن (7) نجد أن:

$$0 = 4a \cos \sqrt{\frac{g}{4a}} t \rightarrow \cos \sqrt{\frac{g}{4a}} t = 0 \rightarrow \sqrt{\frac{g}{4a}} t = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{t = \pi \sqrt{\frac{g}{4a}}}$$

ومن (8) نجد أن سرعة الجسيم عند الرأس هي:

$$v = -2\sqrt{ag}$$

ولإيجاد رد فعل لسلك (أو الضغط على السلك) عند 0:

من (4) بوضع $\psi=0$, $v = -2\sqrt{ag}$ نحصل على:

$$\begin{aligned} R_o &= mg \cos 0 + m \frac{(-2\sqrt{ag})^2}{4a \cos 0} \\ &= mg + m \frac{4ag}{4a} = mg + mg = 2mg \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (3):

ثبت سيكلويد أملس في مستوى رأسي بحيث كان محوره رأسيا ورأسه إلى أسفل. فإذا قذف جسم كتلته m بسرعة u من عند ناب السيكلويد لينزلق إلى أسفل. أثبت أن الزمن الذي يأخذه الجسم لكي يصل إلى رأس السيكلويد هو:

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{ag}}{u} \right)$$

الحل:

معادلة حركة الجسم في اتجاه المماس:

$$ma_T = -mg \sin \psi$$

$$\therefore \ddot{s} = \frac{g}{4a} s = -\omega^2 s \quad (1)$$

حيث المعادلة الذاتية للسيكلويد هي:

$$\sin \psi \frac{s}{4a} \leftarrow s$$

الحل العام للمعادلة (1) هو:

$$s = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2)$$

وبالتفاضل نحصل على:

$$\dot{s} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \quad (3)$$

حيث $\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}}$ ، A, B ثابتان.

ولإيجاد الثابتان A, B :

في البداية: $t=0, s=4a, \dot{s} = -u$

(السرعة الابتدائية في اتجاه تناقص s)

$$\therefore 4a = A \cos 0 + B \sin 0 \quad \longrightarrow$$

$$\boxed{A = 4a}$$

$$\therefore -u = -A\omega \sin 0 + B\omega \cos 0 \quad \longrightarrow$$

$$\boxed{B = -u/\omega}$$

وتصبح المعادلة (2) بالصورة:

$$s = 4a \cos wt - \frac{u}{w} \sin wt$$

$$= 4a \cos \sqrt{\frac{g}{4a}} t - u \sqrt{\frac{4a}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{4a}} t$$

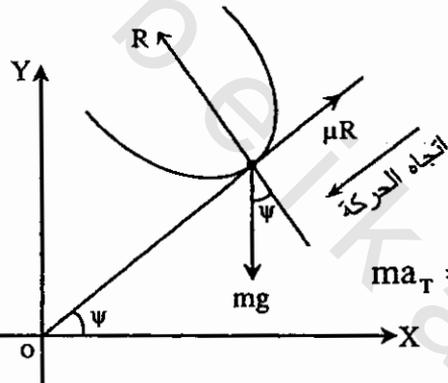
وعندما يصل الجسم إلى الرأس (حيث $s=0$) فإننا نحصل على الزمن بالصورة:

$$t = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{ag}}{u} \right)$$

وهو المطلوب.

ثالثاً: حركة جسيم على منحنى مستو خشن:

إذا تحرك جسيم كتلته m على منحنى مستو خشن وكان معامل الاحتكاك بين الجسيم والمستوى هو μ ، وكان رد الفعل العمودى هو R ، فإن الاحتكاك النهائى يساوى (μR) ويكون فى الاتجاه المضاد للحركة، وتكون معادلات الحركة كالاتى:



(1) إذا كانت الحركة أسفل المنحنى:

معادلات الحركة فى اتجاه المماس للمنحنى والعمودى عليه هما:

$$ma_T = m\ddot{s} = mv \frac{dv}{ds} = \mu R - mg \sin \psi \quad (1)$$

$$ma_N = m \frac{v^2}{\rho} = R - mg \cos \psi \quad (2)$$

يحذف R بين (1) و (2)، وذلك بضرب (2) فى μ والطرح نحصل على:

$$m \left[\ddot{s} - \mu \frac{v^2}{\rho} \right] = mg(\mu \cos \psi - \sin \psi)$$

ولكن:

$$\therefore \ddot{s} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{ds}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2\rho} \frac{d(v^2)}{d\psi}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi}$$

$$\therefore \frac{1}{2\rho} \frac{d(v^2)}{d\psi} - \mu \frac{v^2}{2\rho} = g(\mu \cos \psi - \sin \psi)$$

بالمضرب فى 2ρ للطرفين:

$$\frac{d(v^2)}{d\psi} - 2\mu v^2 = 2\rho g(\mu \cos \psi - \sin \psi)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ولكي نحلها نضرب كلا من الطرفين في عامل التكامل $e^{-2\mu\psi}$ فنحصل على:

$$e^{-2\mu\psi} \left[\frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2 \right] = 2\rho g e^{-2\mu\psi} (\mu \cos \psi - \sin \psi)$$

$$\therefore \frac{d}{d\psi} (e^{-2\mu\psi} \cdot v^2) = 2\rho g e^{-2\mu\psi} (\mu \cos \psi - \sin \psi)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل بالنسبة إلى ψ نحصل على:

$$e^{-2\mu\psi} \cdot v^2 = 2g \int \rho e^{-2\mu\psi} (\mu \cos \psi - \sin \psi) d\psi \quad (3)$$

فإذا كانت ρ معلومة بدلالة ψ فإنه يمكننا تكامل الطرف الأيمن من هذه المعادلة، وبذلك نحصل على (v^2) أي على السرعة عند أي لحظة.

(2) إذا كانت الحركة أعلى المنحني:

معادلات الحركة في اتجاه المماس للمنحني والعمودي عليه هي:

$$ma_T = m\ddot{s} = mv \frac{dv}{ds} = -\mu R - mg \sin \psi \quad (4)$$

$$ma_N = m \frac{v^2}{\rho} = R - mg \cos \psi \quad (5)$$

بحذف R بين (4)، (5)، وذلك بضرب (5) في μ والجمع نحصل على:

$$\therefore m \left[\ddot{s} + \mu \frac{v^2}{\rho} \right] = -mg(\sin \psi + \mu \cos \psi)$$

$$\ddot{s} = \frac{1}{2\rho} \frac{dv^2}{d\psi} \quad \text{ولكن:}$$

$$\therefore \frac{dv^2}{d\psi} + 2\mu v^2 = -2\rho g(\sin \psi + \mu \cos \psi)$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ولكي نحلها نضرب في عامل التكامل $e^{2\mu\psi}$ فنحصل على:

$$e^{2\mu\psi} \left[\frac{dv^2}{d\psi} + 2\mu v^2 \right] = -2\rho g e^{2\mu\psi} (\sin \psi + \mu \cos \psi)$$

$$\therefore \frac{d}{d\psi} (e^{2\mu\psi} \cdot v^2) = -2\rho g e^{2\mu\psi} (\sin \psi + \mu \cos \psi)$$

وبالتكامل بالنسبة إلى ψ نحصل على:

$$e^{2\mu\psi} \cdot v^2 = -2g \int \rho e^{2\mu\psi} (\sin \psi + \mu \cos \psi) d\psi \quad (6)$$

وبتكامل الطرف الأيمن إذا علمت ρ بدلالة ψ يمكننا إيجاد سرعة الجسم (v).

ملحوظة (1):

لإجراء التكاملات في (3)، (6) نستخدم التكاملين الآتيين:

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x] \quad (7)$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x] \quad (8)$$

ملحوظة (2):

كان من الممكن استنتاج معادلات الحركة إلى أسفل من معادلات الحركة إلى

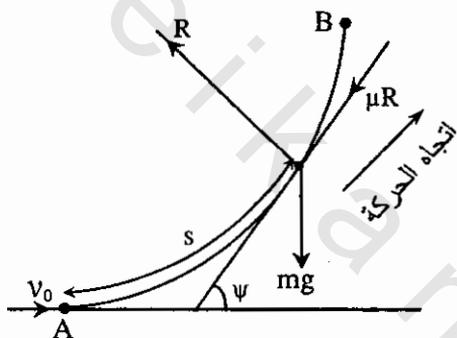
أعلى بوضع $(-\mu)$ بدلا من (μ) .

أمثلة محلولة

مثال (1):

يتحرك جسم على مستوى أفقى أملس مبدئاً بسرعة v_0 ويحرف مساره حائط رأسى خشن معامل احتكاكه μ ومسقطه الأفقى هو المنحنى AB . أثبت أن سرعة الجسم v تعطى بدلالة زاوية ميل المماس ψ لحركة الجسم عند أى وضع بالعلاقة: $v = v_0 e^{-\mu\psi}$

الحل:



القوى المؤثرة على الجسم فى مستوى حركته هى R ، μR ، أما وزن الجسم ورد فعل المستوى الأفقى فيعملان عموديا على مستوى الحركة فليس لهما تأثير هنا.

معادلات الحركة فى اتجاه المماس والعمودى على المسار هما:

$$ma_T = -\mu R \quad (1)$$

$$\therefore ma_N = R \quad (2)$$

من (1) نحصل على:

$$mv \frac{dv}{ds} = -\mu R \quad (3)$$

ومن (2) نجد أن:

$$m \frac{v^2}{\rho} = R \quad (4)$$

بحذف R بين (3)، (4) نحصل على:

$$v \frac{dv}{ds} = -\mu \frac{v^2}{\rho}$$

$$\frac{dv}{d\psi} - \mu v \leftarrow \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{d\psi} \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\psi} \quad , \rho = \frac{ds}{d\psi} \quad \text{ولكن}$$

بفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\mu \int_0^\psi d\psi \quad \therefore \quad [\ln v]_{v_0}^v = -\mu\psi$$

$$\therefore \ln v - \ln v_0 = -\mu\psi$$

$$\therefore \ln v = \ln v_0 - \mu\psi \quad \therefore \ln \frac{v}{v_0} = -\mu\psi \quad \left| \begin{array}{l} \ln a = b \\ \therefore a = e^b \end{array} \right.$$

$$\therefore \ln \frac{v}{v_0} = e^{-\mu\psi} \longrightarrow v = v_0 e^{-\mu\psi}$$

مثال (2):

يتحرك جسيم على سلك دائري خشن معامل احتكاكه μ ونصف قطره a مثبت في مستوى رأسي. قذف الجسيم في بدء الحركة من أسفل نقطة من السلك بسرعة v_0 تكاد تكفي ليصل الجسيم إلى القطر الأفقي للسلك. فإذا عاد الجسيم ثانية إلى أسفل موضع بسرعة v أثبت أن:

$$\frac{v^2}{v_0^2} = \frac{1 - 2\mu^2 - 3\mu e^{-\mu\pi}}{1 - 2\mu^2 + 3\mu e^{\mu\pi}}$$

الحل:

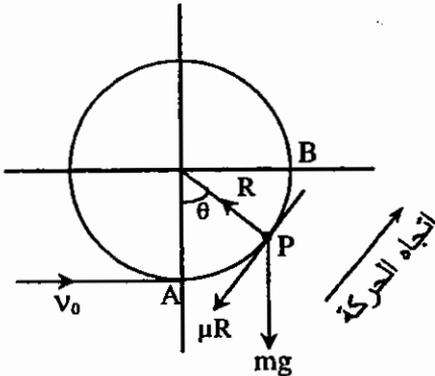
نستخدم هنا معادلات الحركة للجسيم في دائرة وليكن الجسيم عند النقطة $p(a, \theta)$

دراسة الحركة إلى أعلى من A إلى B:

معادلات الحركة في اتجاه المماس والعمودي عليه:

$$ma_T = -\mu R - mg \sin \theta \quad (1)$$

$$ma_N = R - mg \cos \theta \quad (2)$$



ولما كانت مركبات العجلة في الحركة الدائرية هي: $a\ddot{\theta}$ في اتجاه المماس $a\dot{\theta}^2$ في اتجاه نصف القطر

فمن (1) نجد أن:

$$ma\ddot{\theta} = -\mu R - mg \sin \theta \quad (3)$$

ومن (2) نحصل على:

$$ma\dot{\theta}^2 = R - mg \cos \theta \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} \quad \text{ويكتابة:}$$

ويحذف R بين (3)، (4)، وذلك بضرب (4) في μ والجمع نحصل على:

$$a\ddot{\theta} + \mu a\dot{\theta}^2 = -g(\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

$$\therefore \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + \mu a\dot{\theta}^2 = \frac{-2g}{a}(\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

وهذه معادلة تفاضلية ولحلها نستخدم عامل التكامل $e^{2\mu\theta}$ فنحصل على الحل العام بالصورة:

$$\begin{aligned} e^{2\mu\theta} \cdot \dot{\theta}^2 &= \frac{-2g}{a} \int e^{2\mu\theta} (\sin \theta + \mu \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{-2g}{a} \int e^{2\mu\theta} \sin \theta d\theta - \frac{2\mu g}{a} \int e^{2\mu\theta} \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (1)$$

ولكن من التكاملات القياسية:

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x]$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x]$$

نجد أن:

$$\int e^{2\mu\theta} \sin \theta d\theta = \frac{e^{2\mu\theta}}{4\mu^2 + 1} [2\mu \sin \theta - \cos \theta] \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = 2\mu \\ \beta = 1 \end{array} \right.$$

$$\int e^{2\mu\theta} \cos\theta d\theta = \frac{e^{2\mu\theta}}{4\mu^2 + 1} [2\mu \cos\theta + \sin\theta]$$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$$e^{2\mu\theta} \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{-2g}{a} \frac{e^{2\mu\theta}}{4\mu^2 + 1} (2\mu \sin\theta - \cos\theta)$$

$$-\frac{2\mu g}{a} \frac{e^{2\mu\theta}}{4\mu^2 + 1} (2\mu \sin\theta + \sin\theta) + C \quad (2)$$

حيث C ثابت التكامل، ولإيجاده:

$$\dot{\theta} = \frac{v^2}{a}, \quad \theta = 0 \quad \text{في البداية: عند النقطة A:}$$

$$\dot{\theta} = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{وفي النهاية: عند النقطة B:}$$

وبالتعويض في المعادلة (2) بالشروط الابتدائية ثم بالشروط النهائية والطرح نتخلص من ثابت التكامل، ونحصل على المعادلة:

$$v_0^2 = \frac{2ag}{4\mu^2 + 1} (1 - 2\mu^2 + 3\mu e^{\mu\pi}) \quad (3)$$

دراسة الحركة إلى أسفل من B إلى A:

باتباع الطريقة السابقة، أو بوضع $(-\mu)$ بدلا من (μ) في المعادلة (3)

نحصل على السرعة v مباشرة بالصورة:

$$v^2 = \frac{2ag}{4\mu^2 + 1} (1 - 2\mu^2 - 3\mu e^{-\mu\pi}) \quad (4)$$

بقسمة (4) على (3) نحصل على:

$$\frac{v^2}{v_0^2} = \frac{1 - 2\mu^2 - 3\mu e^{-\mu\pi}}{1 - 2\mu^2 + 3\mu e^{\mu\pi}}$$

وهو المطلوب.

مسألة:

فى مثال (2)، إذا أهملنا تأثير القوى الخارجية (قوة جذب الأرض) فتصبح القوة المؤثرة هى: رد الفعل R ، قوة الاحتكاك μR (عكس اتجاه الحركة).
والمطلوب: (1) إيجاد رد فعل السلك على الجسم عند أى موضع.
(2) إثبات أن الجسم يعود إلى نقطة القذف A بعد زمن قدره

$$t = \frac{a}{\mu v_0} (e^{2\mu\pi} - 1)$$

الحل:

معادلات الحركة (مع إهمال الوزن mg) هى:

$$ma_T = ma\ddot{\theta} = -\mu R \quad (1)$$

$$ma_N = ma\dot{\theta}^2 = R \quad (2)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} \quad \text{ويكتابة:}$$

وضرب المعادلة (2) فى μ والجمع مع (1) نحصل على:

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -2\mu a \dot{\theta}^2$$

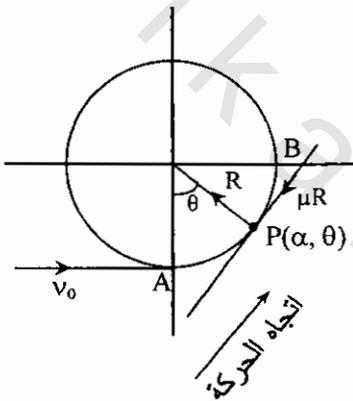
وبفضل المتغيرات:

$$\therefore \frac{d\dot{\theta}^2}{\dot{\theta}^2} = -2\mu d\theta$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\ln \dot{\theta}^2 = -2\mu\theta + \text{const.}$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = C e^{-2\mu\theta}$$



وباستخدام الشروط الابتدائية: عند $t=0$, $\theta=0$, فإن $\dot{\theta} = \frac{v_0}{a}$

$$C = \frac{v_0^2}{v^2}$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{a^2} e^{-2\mu\theta} \quad (3)$$

$$\therefore \dot{\theta} = \frac{v_0}{a} e^{-\mu\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad \therefore \frac{v_0}{a} = e^{\mu\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

وفصل المتغيرات والتكامل مرة ثانية:

$$\therefore \int e^{\mu\theta} d\theta = \frac{v_0}{a} \int dt$$

$$\therefore \frac{e^{\mu\theta}}{\mu} = \frac{v_0 t}{a} + C_1$$

ومن الشروط الابتدائية: عند $t=0$ فإن $\theta=0$ $C_1 = \frac{1}{\mu}$

$$\therefore \frac{e^{\mu\theta}}{\mu} = \frac{v_0 t}{a} + \frac{1}{\mu} \quad \therefore \frac{v_0 t}{a} = \frac{1}{\mu} (e^{\mu\theta} - 1)$$

$$\therefore t = \frac{a}{\mu v_0} (e^{\mu\theta} - 1) \quad (4)$$

ولكن يعود الجسيم إلى نقطة القنف يجب ألا يتلاشى رد الفعل R أثناء الحركة وأن يصنع الجسيم دورة كاملة أي أن $\theta=2\pi$.

فلايجاد R:

من (2), (3) نجد أن:

$$R = ma\dot{\theta}^2 = ma \left(\frac{v_0^2}{a^2} e^{-2\mu\theta} \right) = m \left(\frac{v_0^2}{a} \right) e^{-2\mu\theta}$$

وهو رد فعل السلك على الجسيم عند أي موضع.

ولإيجاد زمن العودة إلى نقطة القذف:

نضع $\theta = 2\pi$ في (4) فنحصل على:

$$\therefore t = \frac{a}{\mu v_0} (e^{2\mu\pi} - 1)$$

وهو المطلوب.

مثال (3):

سقط جسيم من وضع الاتزان النهائي بالقرب من أعلى نقطة في سلك دائري خشن مستواه رأسى بأن أعطى إزاحة صغيرة مهملة. أثبت أن الجسيم يترك السلك عند نقطة يصنع نصف القطر الواصل إليها مع الرأسى زاوية θ حيث:

$$\theta = \alpha + \mu\beta$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \quad , \quad \beta = 2 - \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\sin \alpha}$$

علماً بأن معامل الاحتكاك μ كمية صغيرة جداً يمكن إهمال مربعاتها وقواها الأعلى.

الحل:

معادلات الحركة:

في اتجاه المماس (الخارج):

$$m a_{\theta} = mg \sin \theta - \mu R \quad (1)$$

في اتجاه العمودى (الداخل):

$$m a_{\theta}^2 = m \frac{v^2}{a} = mg \cos \theta - R \quad (2)$$

وحيث أن العجلة المماسية هي:

$$a_T = a_{\theta} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\theta} \cdot (\dot{\theta}) = \frac{dv}{d\theta} \left(\frac{v}{a} \right) = \frac{1}{a} \frac{1}{2} \frac{dv^2}{d\theta}$$

فبالتعويض في (1):

$$\therefore \frac{m}{2a} \frac{dv^2}{d\theta} = mg \sin \theta - \mu R \quad (3)$$

ويضرب (2) في μ والطرح من (3) نحصل على:

$$\frac{m}{2a} \left(\frac{dv^2}{d\theta} - 2\mu v^2 \right) = mg(\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

$$\left(\frac{dv^2}{d\theta} - 2\mu v^2 \right) = 2ag(\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

وبالضرب في عامل التكامل $e^{-2\mu\theta}$ نحصل على:

$$\therefore e^{-2\mu\theta} \left(\frac{dv^2}{d\theta} - 2\mu v^2 \right) = 2age^{-2\mu\theta} (\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

$$\therefore \frac{d}{d\theta} (e^{-2\mu\theta} \cdot v^2) = 2age^{-2\mu\theta} (\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\left[e^{-2\mu\theta} \cdot v^2 \right]_0^{\theta} = 2ag \int_0^{\theta} e^{-2\mu\theta} (\sin \theta - \mu \cos \theta) d\theta$$

وباستخدام نتيجتي التكامل القياسيان حيث $\alpha = -2\mu$, $\beta = 1$ نحصل على:

$$e^{-2\mu\theta} \cdot v^2 = 2ag \left[\frac{e^{-2\mu\theta}}{4\mu^2 + 1} (-2\mu \sin \theta - \cos \theta) \right.$$

$$\left. - \frac{\mu e^{-2\mu\theta}}{4\mu^2 + 1} (-2\mu \cos \theta + \sin \theta) \right]_0^{\theta}$$

$$= \frac{2ag}{4\mu^2 + 1} \left[e^{-2\mu\theta} (-2\mu \sin \theta - \cos \theta + 2\mu^2 \cos \theta - \mu \sin \theta) \right]_0^{\theta}$$

وبإهمال مربعات μ نحصل على:

$$\begin{aligned} e^{-2\mu\theta} \cdot v^2 &= 2ag \left[e^{-2\mu\theta} (-3\mu \sin \theta - \cos \theta) \right]_0^0 \\ &= 2ag \left[e^{-2\mu\theta} (-3\mu \sin \theta - \cos \theta) + 1 \right]_0^0 \\ &= -2age^{-2\mu\theta} (3\mu \sin \theta + \cos \theta) + 2ag \end{aligned}$$

وبالضرب في نحصل على:

$$v^2 = -2ag(3\mu \sin \theta - \cos \theta) + 2age^{2\mu\theta} \quad (4)$$

عندما يترك الجسم السلك فإن: $R=0$ فبوضع $R=0$ في (2) نحصل على:

$$\frac{mv^2}{a} = mg \cos \theta \longrightarrow v^2 = ag \cos \theta \quad (5)$$

من (4), (5) نجد أن:

$$\cos \theta = -2(3\mu \sin \theta + \cos \theta) + 2e^{2\mu\theta}$$

$$\therefore -6\mu \sin \theta - 3 \cos \theta + 2e^{2\mu\theta} = 0 \quad (6)$$

وبوضع $\theta = \alpha + \mu\beta$ واعتبار أن $\mu\beta$ صغيرة جداً أي أن:

$$\cos \mu\beta \longrightarrow 1, \sin \mu\beta \longrightarrow \mu\beta$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \cos(\alpha + \mu\beta) = \cos \alpha \cos \mu\beta - \sin \alpha \sin \mu\beta \\ &= \cos \alpha - \mu\beta \sin \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin(\alpha + \mu\beta) = \sin \alpha \cos \mu\beta + \cos \alpha \sin \mu\beta \\ &= \sin \alpha + \mu\beta \cos \alpha \end{aligned} \quad (8)$$

بالتعويض من (7), (8) في (6) نحصل على:

$$-6\mu(\sin \alpha + \mu\beta \cos \alpha) - 3(\cos \alpha - \mu\beta \sin \alpha) 2e^{2\mu\theta} = 0$$

$$e^x = 1 + x + x^2 + \dots \approx 1 + x \quad \text{وباعتبار أن:}$$

(بإهمال مربعات x)

$$\therefore e^{2\mu\theta} = 1 + 2\mu\theta = 1 + 2\mu(\alpha + \mu\beta) = 1 + 2\mu\alpha$$

وحيث أن $\mu^2 = 0$ ، $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ فإن:

$$-6\mu \sin \alpha - 3 \cos \alpha + 3\mu\beta \sin \alpha + 2(1 + 2\mu\alpha) = 0$$

$$-6\mu \sin \alpha - 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3\mu\beta \sin \alpha + 2 + 4\mu\alpha = 0$$

وبالقسمة على μ :

$$-6 \sin \alpha + 3\beta \sin \alpha + 4\alpha = 0$$

$$\therefore 3\beta \sin \alpha = 6 \sin \alpha - 4\alpha$$

$$\therefore \beta = \frac{6 \sin \alpha - 4\alpha}{3 \sin \alpha} = 2 - \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\sin \alpha}$$

$$\therefore \theta = \alpha + \mu \left(2 - \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right)$$

وهو المطلوب.

مثال (4):

سلك خشن على هيئة سيكلويد محوره رأسى ورأسه إلى أسفل. تتزلق حلقة صغيرة مبتدئة من السكون عند ناب السيكلويد فوصلت إلى الرأس ساكنة. أثبت أن معامل الاحتكاك بين الحلقة والسلك يعطى بالعلاقة: $\mu^2 e^{\mu\pi} = 1$

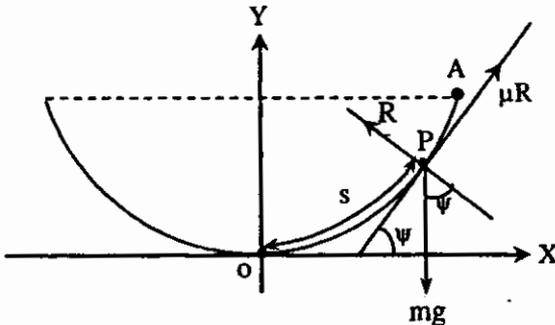
الحل:

المعادلة الذاتية للسيكلويد:

$$s = 4a \sin \psi$$

نصف قطر الانحناء:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a \cos \psi$$



معادلات الحركة:

في اتجاه المماس:

$$m\ddot{s} = \mu R - mg \sin \psi \quad (1)$$

في اتجاه العمودى:

$$m \frac{v^2}{\rho} = R - mg \cos \psi \quad (2)$$

$$m\ddot{s} = v \frac{dv}{ds} = v \frac{dv}{d\psi} \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{2} \frac{dv^2}{d\psi} \right) = \frac{1}{2\rho} \frac{d(v^2)}{d\psi} \quad \text{ولكن:}$$

بالتعويض فى (1):

$$\therefore \frac{m}{2\rho} \frac{dv^2}{d\psi} = \mu R - mg \sin \psi \quad (3)$$

بضرب (2) فى μ والطرح مع (3) نحصل على:

$$\frac{m}{2\rho} \left(\frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2 \right) = mg(\mu \cos \psi - \sin \psi)$$

$$\therefore \frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2 = 2\rho g(\mu \cos \psi - \sin \psi)$$

وهى معادلة تفاضلية، لكي نحلها نضرب فى عامل التكامل $e^{-2\mu\psi}$ فنحصل على:

$$e^{-2\mu\psi} \left(\frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2 \right) = 2\rho e^{-2\mu\psi} (\mu \cos \psi - \sin \psi)$$

وبالتعويض عن $\rho = 4a \cos \psi$

$$\therefore e^{-2\mu\psi} \left(\frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2 \right) = 8ag e^{-2\mu\psi} (\mu \cos^2 \psi - \cos \psi \sin \psi)$$

$$\therefore \frac{d}{d\psi} (e^{-2\mu\psi} - v^2) = 8ag e^{-2\mu\psi} (\mu \cos^2 \psi - \cos \psi \sin \psi)$$

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى ψ واعتبار أن:

$\psi=0$ عند الرأس 0 (حيث $v=0$ ، من رأس المسألة)

$\psi = \frac{\pi}{2}$ عند الناب A (حيث $v=0$ ، من رأس المسألة)

نحصل على:

$$\left[e^{-2\mu\psi} \cdot v^2 \right]_{\pi/2}^0 = 8ag \int_{\pi/2}^0 e^{-2\mu\psi} \left[\left(\mu \frac{1}{2} (1 + \cos 2\psi) - \frac{1}{2} \sin 2\psi \right) d\psi \right]$$

$$= 4ag \int_{\pi/2}^0 e^{-2\mu\psi} [\mu(1 + \cos 2\psi) - \sin 2\psi] d\psi$$

$$= 4ag\mu \int_{\pi/2}^0 e^{-2\mu\psi} d\psi + 4ag\mu \int_{\pi/2}^0 e^{-2\mu\psi} \cos 2\psi d\psi$$

$$= 4ag \int_{\pi/2}^0 e^{-2\mu\psi} \sin \psi d\psi$$

$$= 4ag\mu \left[\frac{e^{-2\mu\psi}}{-2\mu} \right]_{\pi/2}^0 + 4ag\mu \left[\frac{e^{-2\mu\psi}}{4\mu^2 + 4} (-2\mu \cos 2\psi + 2 \sin 2\psi) \right]_{\pi/2}^0$$

وبالتعويض بحدى التكامل نحصل على:

$$0 = 4ag \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2\mu\pi} \right] + 4ag\mu \left[\frac{-2\mu}{4\mu^2 + 4} - e^{-2\mu\pi} \left(\frac{2\mu}{4\mu^2 + 4} \right) \right]$$

$$- 4ag \left[\frac{-2}{4\mu^2 + 4} - e^{-2\mu\pi} \left(\frac{-2}{4\mu^2 + 4} \right) \right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\mu\pi} \right] - \left[\frac{2}{4\mu^2 + \psi} + e^{-\mu\pi} \left(\frac{2\mu^2}{4\mu^2 + 4} \right) \right]$$

$$+ \left[\frac{2}{4\mu^2 + 4} + e^{-\mu\pi} \left(\frac{2}{4\mu^2 + 4} \right) \right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2} - \frac{2\mu^2}{4\mu^2 + 4} + \frac{2}{4\mu^2 + 4} \right] - e^{-\mu\pi} \left[-\frac{1}{2} + \frac{2\mu^2}{4\mu^2 + 4} - \frac{2}{4\mu^2 + 4} \right]$$

وبالضرب في $(\psi\mu^2 + \psi)$ نحصل على:

$$[-2\mu^2 - 2 - 2\mu^2 + 2] = e^{-\mu\pi} [-2\mu^2 - 2 + 2\mu^2 - 2]$$

$$\therefore -4\mu^2 = e^{-\mu\pi} (-4)$$

$$\therefore \mu^2 = e^{-\mu\pi} \longrightarrow \mu^2 \cdot e^{\mu\pi} = 1$$

وهو المطلوب.

مسائل على الحركة المقيدة

1. أنبوية رفيعة سطحها أملس على شكل قطع مكافئ معادلته $y=2a x^2$ موضوعة في مستوى رأسى. قذف جسيم كتلته m من عند رأس القطع بسرعة ابتدائية v_0 وواصل سيره داخل الأنبوية فإذا كان R هو رد الفعل العمودى لسطح الأنبوية على الجسيم، وكانت ρ هى نصف قطر الانحناء (أو التقوس) للسطح فاثبت أن $\rho R = \lambda$ حيث (λ) ثابت مقداره $\lambda = m \left(v_0^2 + \frac{g}{4a} \right)$.

2. يتحرك جسيم على سلك منحنى أملس رأسى معادلته $y = a \sin \frac{2\pi}{b} x$ حيث:

a, b ثوابت، ما هى السرعة القصوى المسموح بها حتى لا يغادر الجسيم المنحنى عند أعلى نقطة فيه (A)، وإذا تحرك الجسيم بهذه السرعة القصوى ما هو رد فعل السلك عند أسفل نقطة فى المنحنى (B).

3. يتحرك جسيم كتلته m على منحني بحيث كانت العلاقة بين المسافة القوسية s والسرعة هي $s = \frac{1}{2} \ln \frac{1+g^2}{1+v^2}$ ، فإذا علم أن الجسيم بدأ الحركة بسرعة v عندما كانت $s=0$ ، أوجد القوة المماسية التي تؤثر على الجسيم والزمن الذي يمضي حتى تصبح السرعة $v=1$.

4. أنبوية رفيعة مثبتة في مستوى رأسى على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2=4y$ فإذا بدأ جسيم كتلته m الانزلاق من السكون داخل الأنبوية من نقطة على ارتفاع h من رأس القطع وكانت ρ نصف قطر الاتحناء فاثبت أن رد فعل الأنبوية على الجسيم يساوى $\frac{2mg}{\rho}(h+1)$.

5. تتزلق حلقة كتلتها m على سلك أملس على شكل منحني السلسلة (الكتينة) $s=c \tan \psi$ مثبت في مستوى رأسى بحيث يكون رأس الكتينة إلى أعلى ومحورها رأسى إلى أسفل. فإذا بدأت الحلقة حركتها من الرأس بسرعة $\sqrt{2gc}$ ، أثبت أن الضغط الواقع على الحلقة عند أى موضع هو $mg \cos \psi$.

6. سلك أملس على شكل سيكلويد $s=4a \sin \psi$ مثبت في مستوى رأسى بحيث كان محوره رأسى ورأسه إلى أعلى. إذا ابتدأ جسيم كتلته m الحركة من السكون من عند الرأس، أثبت أن الجسيم سوف يترك السلك عند نقطة عندها تكون الزاوية $\psi = \frac{\pi}{4}$ ، وأوجد مقدار سرعة الجسيم عندئذ.

7. ابتدأ جسيم الحركة من حالة السكون من موضع A على قوس من منحني سيكلويد محوره رأسى ورأسه إلى أسفل. أثبت أن زمن هبوط الجسيم من A إلى الرأس هو $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ ، وإذا قذف الجسيم من النقطة A بالسرعة التي يصل بها إلى

الرأس فاثبت أنه يصل إلى الرأس في زمن قدره $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{g}}$.

8. ينزلق جسيم على سلك أملس على شكل سيكلويد محوره رأسى ورأسه إلى أعلى. فإذا قذف جسيم كتلته m بسرعة مقدارها $v_0 \frac{3}{2} \sqrt{ag}$ من الرأسى (أعلى نقطة فى السلك)، فأثبت أنه يصل إلى الناب بعد زمن قدره $2\sqrt{ag} \ln 3$ وأوجد سرعته عندئذ.

9. أنبوية ملساء على شكل سيكلويد محوره رأسى ورأسه لأسفل ومفتوح عند الطرفين (النابين)، فإذا قذف جسيم كتلته m من أسفل نقطة على الجدار الداخلى للأنبوية بسرعة أفقية u ، فإذا كانت $u^2 > 4ag$ فأثبت أن الجسيم سوف يعود إلى الرأس ثانية بعد زمن قدره:

$$4 \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\sin^{-1} \frac{\sqrt{4ag}}{u} + \sqrt{\frac{u^2}{4ag} - 1} \right]$$

10. ينزلق جسيم على سلك خشن على شكل سيكلويد موضوع فى مستوى رأسى ورأسه إلى أسفل، فإذا بدأ الجسيم بسرعة u من عند الرأس وكانت هذه السرعة تكفى لوصول الجسيم إلى الناب، فأثبت أن معامل الاحتكاك μ يحقق المعادلة:

$$e^{u\pi} = \mu^2 + \frac{u^2}{4ag} (1 + \mu^2)$$

حلول المسائل على الحركة المقيدة المستوية

مسألة (1):

معادلات الحركة:

في اتجاه العمودى:

$$ma_N = m \frac{v^2}{\rho} = R = mg \cos \psi$$

ومنها

$$R = mg \cos \psi + m \frac{v^2}{\rho}$$

$$\therefore \rho R = mg \rho \cos \psi + mv^2 \quad (1)$$

ولإيجاد السرعة عند أى موضع:

من قانون الطاقة فى المسافة فى O إلى P نجد أن:

$$\frac{1}{2} mav^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = -mgy$$

ومنها نحصل على:

$$v^2 = v_0^2 - 2gy \quad (2)$$

ولتعيين نصف قطر التقوس ρ :

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

$$y = 2ax^2, \quad y' = 4ax = \tan \psi, \quad y'' = 4a$$

$$\therefore \rho = \frac{(1 + 16a^2x^2)^{3/2}}{4a} \quad (3)$$

$$\left| \begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \tan \psi = 4ax, \\ \cos \psi &= \frac{1}{\sqrt{1 + 16a^2x^2}} \end{aligned} \right.$$

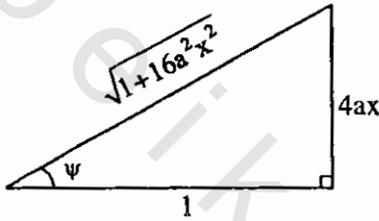
بالتعويض من (2), (3), فى (1):

$$\therefore \rho R = mg \left[\frac{(1 + 16a^2x^2)^{3/2}}{4a} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 16a^2x^2}} \right] + m(v_0^2 - 2g \cdot 2ax^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{mg}{4a} \left[(1 + 16a^2 x^2)^{3/2} \right] + mv_0^2 - 2mgax^2 \\
 &= \frac{mg}{4a} + 4mgax^2 + mv_0^2 - 4mgax^2 = \frac{mg}{4a} + mv_0^2 \\
 &= m \left(v_0^2 + \frac{g}{4a} \right) = \text{const.} = \lambda
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

ملحوظة:



استخدمنا العلاقة $\sin \psi = \frac{dy}{dx}$

العلاقة $\tan \psi = \frac{dy}{dx} = y'$

$$\tan \psi = 4ax$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + 16a^2 x^2}}$$

مسألة (2):

معادلات الحركة عند أعلى نقطة A:

$$ma_N = mg - R_A = m \frac{v_A^2}{\rho_A}$$

ومنها نحصل على:

$$R_A = mg - m \frac{v_A^2}{\rho_A} = m \left(g - \frac{v_A^2}{\rho_A} \right) \quad (1)$$

لكي لا يغادر الجسم المنحنى عند هذه النقطة يجب أن يكون $R_A \geq 0$

$$\therefore m \left(g - \frac{v_A^2}{\rho_A} \right) \geq 0 \rightarrow v_A \leq \sqrt{g\rho_A} \rightarrow (v_A)_{\max} = \sqrt{g\rho_A} \quad (2)$$

وهي السرعة القصوى المسموح بها حتى لا يغادر الجسم المنحنى عند النقطة A.

نصف قطر القوس :

$$y = a \sin \frac{2\pi}{b} x \quad , \quad y_A = a$$

$$y' = \frac{2\pi a}{b} \cos \frac{2\pi}{b} x \quad , \quad y'_A = 0$$

$$y'' = \frac{4\pi^2 a}{b^2} \sin \frac{2\pi}{b} x \quad , \quad y''_A = \frac{-4\pi^2 a}{b^2}$$

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \longrightarrow \rho_A = \frac{b^2}{4\pi^2 a}$$

$$\therefore (v_A)_{\max} = \sqrt{g\rho_A} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{a}}$$

معادلات الحركة عند أسفل نقطة B:

$$ma_N = R_B - mg = \frac{v_B^2}{\rho_B}$$

ومنها:

$$R_B = mg + m = \frac{v_B^2}{\rho_B} \quad (3)$$

$$v_A = (v_A)_{\max} \quad , \quad \rho_B = \rho_A \quad \text{حيث:}$$

بالتعويض في (3):

$$\therefore R_B = mg + m \frac{(g\rho_A)}{\rho_A} = mg + mg = 2mg$$

وهو رد فعل السلك عند النقطة B وهو المطلوب.

مسألة (3):

$$s = \frac{1}{2} \ln \frac{1+g^2}{1+v^2}$$

حيث أن

$$\therefore 2s = \ln \frac{1+g^2}{1+v^2} \quad \therefore -2s = \ln \frac{1+v^2}{1+g^2}$$

$$\therefore e^{-2s} = \ln \frac{1+v^2}{1+g^2} \quad \therefore 1+v^2 = (1+g^2)e^{-2s} \quad (1)$$

$$\therefore v^2 = e^{-2s} (1+g^2) - 1 \quad (2)$$

وهي سرعة الجسيم عند أى موضع.

معادلة الحركة المماسية:

$$F_T = ma_T = mv \frac{dv}{ds} \quad (3)$$

ومن (2):

$$v \frac{dv}{ds} = -2e^{-2s} (1+g^2) = -2(1+v^2) \quad (4)$$

وتصبح القوة المماسية:

$$F_T = -2m(1+v^2) \quad (5)$$

عندما $v=1$ فإن القوة المماسية تكون:

$$F_T = -4m \quad (6)$$

والإشارة السالبة تدل على أن اتجاه القوة فى اتجاه تناقص البعد القوسى s .

ولإيجاد الزمن الذى يمضى حتى تصبح السرعة $v=1$:

من العلاقة (4):

$$a_T = -2(1+v^2) = \frac{dv}{dt}$$

ويفصل المتغيرات والتكامل فإن:

$$\int \frac{d}{1+v^2} = -2 \int dt$$

$$\therefore \tan^{-1} v = -2t + C \quad (7)$$

ولإيجاد C:

من الشروط الابتدائية: $v=v_0$ ، $s=0$ ، $t=0$

$$\therefore C = \tan^{-1} v_0$$

ومن (2) نجد أن:

$$v_0^2 = e^0(1 + g^2) - 1 = (1 + g^2) - 1 = g^2 \longrightarrow v_0 = g$$

$$\therefore C = \tan^{-1} g$$

بالتعويض في (7):

$$\tan^{-1} v = -2t + \tan^{-1} g$$

$$\therefore 2t = \tan^{-1} g - \tan^{-1} v \longrightarrow t = \frac{1}{2}(\tan^{-1} g - \tan^{-1} v)$$

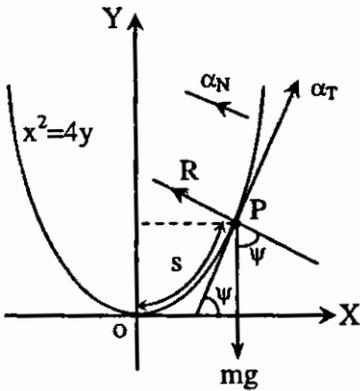
$$\text{عندما } v=1 \text{ فإن } \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}(\tan^{-1} g - \frac{\pi}{4}) \quad (8)$$

وهو الزمن المطلوب.

مسألة (4):

معادلات حركة الجسيم في اتجاه المماس والعمودي عليه



$$a_T = mv \frac{dv}{ds} = -mg \sin \psi \quad (1)$$

$$a_N = m \frac{v^2}{\rho} = -mg \cos \psi \quad (2)$$

وباستخدام العلاقة $\sin \psi = \frac{dv}{ds}$ ، فمن (1):

$$v \frac{dv}{ds} = -g \frac{dy}{ds} \longrightarrow v dv = -g dy$$

$$v^2 = -2gy + C \quad \text{وبالتكامل نحصل على:}$$

ولإيجاد C:

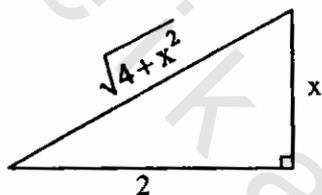
عند $t=0$ فإن $v_0=0$ ، $C = 2gh \rightarrow y = h$

$$\therefore v^2 = -2gy + 2gh = 2g(h-y) \quad (3)$$

وحيث أن:

$$y' = \frac{x}{2} \leftarrow y = \frac{x^2}{4} \quad , \quad y' = \frac{dy}{dx} = \tan \psi$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \psi &= \frac{x}{2} \rightarrow \cos \psi = \frac{2}{\sqrt{4+x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{1+y}} \quad (4) \end{aligned}$$



نصف قطر التماس أو الانحناء ρ :

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{3/2}}{1/2} = 2(1+y)^{3/2}$$

$$\therefore \frac{\rho}{2} = (1+y)^{3/2} \rightarrow \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3} = 1+y \rightarrow y = 1 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3} \quad (5)$$

وبالتعويض في (4)

$$\therefore \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3}}} = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1/3} \quad (6)$$

ولإيجاد رد فعل المنحنى عند أي موضع:

بالتعويض من (3)، (6)، في (2) نحصل على:

$$R = \frac{mv^2}{\rho} + mg \cos \psi = \frac{m}{\rho} [2g(h-y)] + mg \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1/3} \quad (7)$$

ولكن:

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1/3} = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{2}{\rho}\right) = \frac{2}{\rho}(1+y)$$

فبالتعويض في (7) نحصل على:

$$\therefore R = mg \left[\frac{2}{\rho}(h-y) + \frac{2}{\rho}(1+y) \right] = \frac{2mg}{\rho}(h+1)$$

وهو المطلوب.

مسألة (5):

معادلات الحركة:

في اتجاه المماس:

$$mv \frac{dv}{ds} = -mg \sin \psi \quad (1)$$

في اتجاه العمودي:

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \psi - R \quad (2)$$

نصف قطر الانحناء (أو التقوس) للمنحنى:

$$\rho = \frac{d\rho}{d\psi} = \frac{d}{d\psi}(c \tan \psi) = c \sec^2 \psi \quad (3)$$

ولإيجاد رد فعل المنحنى (R):

من (2):

$$R = mg \cos \psi - m \frac{v^2}{\rho} \quad (4)$$

ولإيجاد v^2 : نستخدم معادلة الطاقة:

حيث أن السرعة الابتدائية عند الرأس $\sqrt{2gc} = (C)$

والسرعة عند أى موضع $v=(p)$ فإن معادلة الطاقة تعطى:

$$\therefore \frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{2}m(\sqrt{2gc})^2 = mg(y - c)$$

$$\therefore v^2 - 2gc = 2g(y - c) = 2gy - 2gc$$

$$\therefore v^2 = 2gy - 2gc + 2gc = 2gy \quad (5)$$

وحيث أن:

$$\frac{dy}{ds} = \sin \psi$$

$$\therefore dy = ds \sin \psi = c \sec^2 \psi \cdot \sin \psi d\psi = c \sec \psi \tan \psi d\psi$$

$$[ds = c \sec^2 \psi d\psi \leftarrow s = c \tan \psi \text{ من معادلة المنحنى}]$$

وبالتكامل نحصل على y بالصورة الآتية:

$$y = c \sec \psi + \text{const.}$$

$$\left| \begin{array}{l} D(\sec x) = \sec x \tan x \\ \int \sec x \tan x dx = \sec x \end{array} \right.$$

ومن الشروط الابتدائية: عند $y=c, (\psi=0), s=0, t=0$ فإن:

$$c = c \sec 0 + \text{const.} = c + \text{const.} \longrightarrow \text{const} = 0$$

$$\therefore y = c \sec \psi$$

وتصبح (5) بالصورة:

$$v^2 = 2gc \sec \psi \quad (6)$$

بالتعويض من (3), (6), فى (4) نحصل على:

$$R = mg \cos \psi - \frac{m(2gc \sec \psi)}{c \sec^2 \psi} = mg \cos \psi - \frac{2mg}{\sec \psi}$$

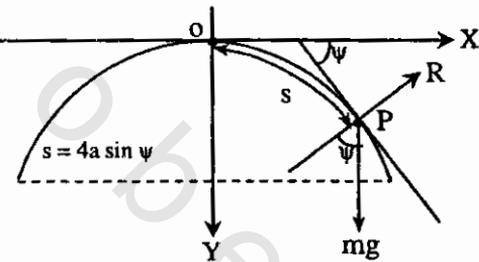
$$= mg \cos \psi - 2mg \cos \psi = -mg \cos \psi \quad (7)$$

وهو رد الفعل المطلوب، وتفيد إشارة (-) إلى أن اتجاه رد الفعل مضاد للاتجاه

المفروض فى الشكل.

مسألة (6):

معادلات الحركة في اتجاه المماس والعمودي:



$$m\ddot{s} = mg \sin \psi \quad (1)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \psi - R \quad (2)$$

من (2):

$$R = mg \cos \psi - m \frac{v^2}{\rho} \quad (3)$$

نصف قطر الانحناء:

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a \cos \psi \quad (4)$$

ولإيجاد v^2 : توجد طريقتين:

الطريقة الأولى: من المعادلة (1) بوضع:

$$\ddot{s} = v \frac{dv}{ds} = v \frac{dv}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{dv^2}{d\psi}$$

وإستخدام (4) نحصل على:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dv^2}{d\psi} = g \sin \psi \longrightarrow dv^2 = 2\rho g \sin \psi d\psi = 8ag \sin \psi \cos \psi d\psi$$

وبالتكامل نحصل على:

$$v^2 = 4ag \sin^2 \psi + C$$

ولإيجاد C:

من الشروط الابتدائية للحركة: $C=0 \leftarrow \psi=0, v=0, t=0$

$$(5) \quad \therefore v^2 = 4ag \sin^2 \psi$$

بتطبيق قانون الطاقة من الوضع الابتدائي O حتى الوضع العام p

$$\therefore \frac{1}{2}v^2 - 0 = mgy \quad | \quad \rho^2 = 8ay$$

$$\therefore v^2 = 2gy = 2g \left(\frac{\rho^2}{8a} \right) = \frac{g}{4a} (4a \sin \psi)^2 = 4ag \sin^2 \psi \quad (5)$$

بالتعويض من (4), (5) فى (3) نحصل على:

$$\begin{aligned} R &= mg \cos \psi - m \frac{4ag \sin^2 \psi}{4a \cos \psi} \\ &= mg \cos \psi - mg \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} = mg \cos \psi \left[1 - \frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi} \right] \\ &= mg \cos \psi [1 - \tan^2 \psi] \end{aligned}$$

لكى يترك الجسم المسار يجب أن تكون $R=0$

$$\therefore 0 = mg \cos \psi [1 - \tan^2 \psi]$$

$$\therefore \cos \psi [1 - \tan^2 \psi] = 0$$

$$\therefore \cos \psi = \tan^2 \psi \cos \psi$$

$$\therefore \tan^2 \psi = 1 \longrightarrow \tan \psi = 1 \longrightarrow \psi = \frac{\pi}{4}$$

أى أن الجسم سوف يترك السلك عند نقطة يصنع المماس عندها زاوية $\psi = \frac{\pi}{4}$ مع

الأفقى.

ولإيجاد سرعة الجسم عندئذ:

من (5):

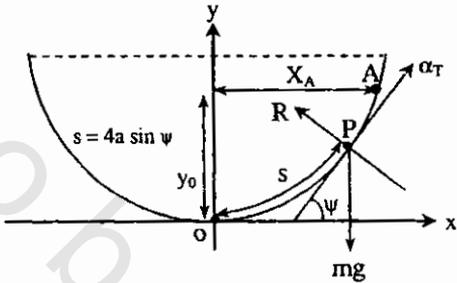
$$v^2 = 4ag \sin^2 \psi = 4ag \left(\sin \frac{\pi}{4} \right)^2 = 4ag \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2ag \rightarrow v = \sqrt{2ag}$$

وهو المطلوب.

مسألة (7):

الحالة الأولى:

الجسيم ابتداء الحركة من الـ سكون
من الموضع A على قوس
السيكلويد:
معادلة الحركة في اتجاه المماس:



$$ma_T = -mg \sin \psi$$

$$\therefore \ddot{s} = -g \sin \psi = \frac{-g}{4a} s = -\omega^2 s$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها $s=0$ ، حيث $\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}}$

وسعتها d يمكن حسابها بمعلومية سرعة الجسيم عند نقطة البداية $A = (s_0, \psi_0)$ ومن العلاقة بين السرعة والموضع والسعة (d) في الحركة التوافقية البسيطة:

$$v^2 = \omega^2 (d^2 - s^2)$$

ولكن عند A فإن:

$$\therefore d = s_0 \leftarrow s_A = s_0, v_A = 0$$

وزمن الحركة:

$$t_{AO} = \frac{\theta_{AO}}{\omega} = \frac{\pi/2}{\sqrt{g/4a}} = \pi \sqrt{\frac{g}{4a}}$$

وسرعة الجسيم عند الرأس O نحصل عليها من معادلة الطاقة وصورتها:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - 0 = m g y_0 \rightarrow v_0^2 = 2 g y_0 = 2 g \left(\frac{s_0^2}{8a} \right) = \frac{g}{4a} s_0^2$$

$$\therefore v_0 = \frac{s_0}{2} \sqrt{\frac{g}{4a}}$$

الحالة الثانية:

إذا قذف الجسم من النقطة A بالسرعة v_0 فاحسب زمن وصوله إلى O
 فمن العلاقة بين السرعة والموضع والسعة (d') نجد أن:

$$v^2 = w^2(d'^2 - s^2)$$

في البداية: $v_A = v_0, s_A = s_0$

$$\therefore \left(\frac{s_0}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} \right)^2 (d'^2 - s_0^2) \rightarrow d' = s_0 \sqrt{2}$$

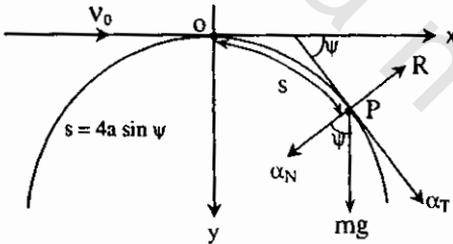
ويكون الزمن المطلوب:

$$t'_{AO} = \frac{\theta'_{AO}}{w} = \frac{\pi/4}{\sqrt{g/4a}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{g}{4a}}$$

وهو المطلوب.

مسألة (8):

معادلات الحركة:



$$m\ddot{s} = mg \sin \psi \quad (1)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \psi - R \quad (2)$$

من المعادلة (1) واعتبار أن: $\sin \psi = \frac{s}{4a}$ نحصل على:

$$\therefore \ddot{s} = \frac{g}{4a} s = w^2 s \quad (3)$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية حلها العام هو:

$$s = A \cosh wt + B \sinh wt \quad (4)$$

إيجاد A, B:

من الشروط الابتدائية للحركة:

$$t = 0, s = 0, \dot{s} = v_0 = \frac{3}{2}\sqrt{ag}$$

ومن (4) بالتفاضل بالنسبة للزمن:

$$\dot{s} = v = Aw \sinh wt + B w \cosh wt \quad (5)$$

بالتعويض في (4), (5) بالشروط الابتدائية نحصل على:

$$\text{من (4) نجد أن: } A=0, \text{ ومن (5) نجد أن: } B=3a$$

وبالتالي نحصل على:

$$s = 3a \sinh wt = 3a \sinh \sqrt{\frac{g}{4a}}t \quad (6)$$

$$\dot{s} = v = 3a w \cosh wt = 3a \sqrt{\frac{g}{4a}} \cosh \sqrt{\frac{g}{4a}}t \quad (7)$$

وعندما يصل الجسم إلى الناب يكون $s=4a$

ويصبح الزمن اللازم للوصول إلى الناب هو [من (6)]

$$4a = 3a \sinh \sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

$$\therefore \frac{4}{3} \sinh \sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{4a}{g}} \sinh^{-1} \frac{4}{3} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \sinh^{-1} \frac{4}{3}$$

ولكن:

$$\sinh^{-1} x = \ln \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]$$

$$\therefore \sinh^{-1} \frac{4}{3} = \ln \left[\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + 1} \right] = \ln \left[\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{25}{9}} \right]$$

$$= \ln \left[\frac{4}{3} + \frac{5}{3} \right] = \ln \frac{9}{3} = \ln 3$$

$$\therefore t = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \ln 3 \quad (8)$$

وهو المطلوب.

ولإيجاد سرعة الوصول إلى الناب:

نعوض عن t من (8) في المعادلة (7) فنحصل على:

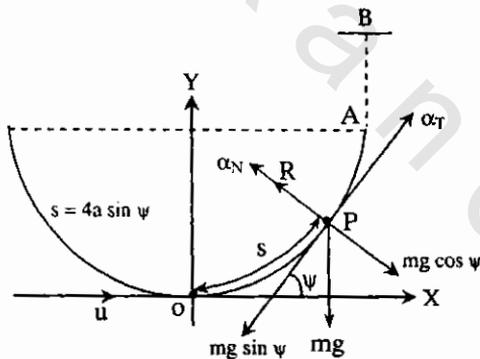
$$v = 3a \sqrt{\frac{g}{4a}} \cosh \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} \right] \left[2 \sqrt{\frac{a}{g}} \ln 3 \right]$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{ag} \cosh[\ln 3]$$

وهو المطلوب

مسألة (9):

معادلتا الحركة:



$$m\ddot{s} = -mg \sin \psi \quad (1)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = -mg \cos \psi + R \quad (2)$$

من المعادلة (1) بالتعويض عن:

$$\sin \psi = \frac{s}{4a}$$

(من المعادلة الذاتية للسكلويد)

$$\therefore \ddot{s} = \frac{g}{4a} s = -w^2 s \quad (3) \quad , \quad w = \frac{g}{4a}$$

المعادلة (3) هي معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية وفي نفس الوقت هـ

معادلة حركة توافقية بسيطة، ولكي نوجد حلها هناك طريقتين:

الطريقة الأولى: الحل العام (كمعادلة تفاضلية) هو:

$$s = A \cos wt + B \sin wt \quad (4)$$

وبالتفاضل بالنسبة للزمن:

$$\dot{s} = v = Aw \sin wt + wB \cos wt \quad (5)$$

ولإيجاد الثوابت A, B:

من الشروط الابتدائية: $t=0, s=0, \dot{s}=u$

فمن المعادلة (4) نجد أن: $A=0$

ومن المعادلة (5) نجد أن: $B = \frac{u}{w}$

وبالتالى نجد فإن:

$$s = \frac{u}{w} \sin wt = u \sqrt{\frac{4a}{g}} \sin \sqrt{\frac{4a}{g}} t \quad (6)$$

$$\dot{s} = v = u \cos wt = u \cos \sqrt{\frac{4a}{g}} t \quad (7)$$

ويكون الزمن اللازم للوصول للجسيم إلى فوهة الأنبوية (إلى نقطة A) هو [من (6)]:

$$t_{OA} = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \sin^{-1} \left[\frac{\sqrt{4ag}}{u} \right] = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \sin^{-1} \left[\frac{2}{u} \sqrt{4ag} \right] \quad (8)$$

بعد خروج الجسيم من فتحة الأنبوية (A) يتحرك رأسياً لأعلى فى خط مستقيم (تحت تأثير الجاذبية) حتى يصل إلى (B) ثم يتوقف ليعود ويدخل داخل الأنبوية (حركة

مستقيمة من B إلى A)، ويصل إلى رأس المنحنى (O) مرة ثانية:

الحركة من B إلى A: من قوانين الحركة فى خط مستقيم.

$$v_B = v_A - gt_{AB}$$

حيث $v_B=0, v_A$ هى السرعة التى يخرج بها الجسيم من فوهة الأنبوية

$$\therefore 0 = v_A - gt_{AB}$$

$$\therefore t_{AB} = \frac{v_A}{g} = \frac{\sqrt{u^2 - 4ag}}{g} \quad (9)$$

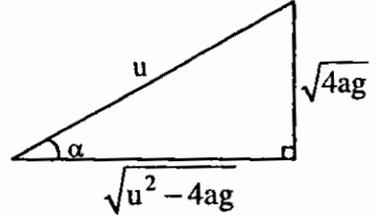
وهو الزمن الذى تحرك فيه الجسيم فى خط مستقيم من B إلى A.

وهو الزمن الذي تحرك فيه الجسم في خط مستقيم من B إلى A.
توضيح: حيث أن:

$$V_A = u \cos \omega t_{OA}$$

$$= u \cos \left[\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{4ag}}{u} \right) \right] = u \cos \alpha$$

وبفرض أن:



$$\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{4ag}}{u} \right) = \alpha$$

$$\therefore v_A = \sqrt{u^2 - 4ag} \quad (10) \quad \left| \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{u^2 - 4ag}}{u} \right.$$

وهي سرعة وصول الجسم إلى A

ومع ملاحظة أن $t_{AO} = t_{OA}$, $t_{BA} = t_{AB}$ فإن زمن الحركة الكلي لكي يعود الجسم إلى رأس السيكلويد O هو:

$$t = t_{OA} + t_{AB} + t_{BA} + t_{AO} = 2(t_{OA} + t_{AB}) \quad (11)$$

بالتعويض من (8), (9) في (11) نحصل على:

$$\therefore t = 2 \left[\sqrt{\frac{a}{g}} \sin^{-1} \left(\frac{2}{u} \sqrt{ag} \right) + \frac{\sqrt{u^2 - 4ag}}{g} \right]$$

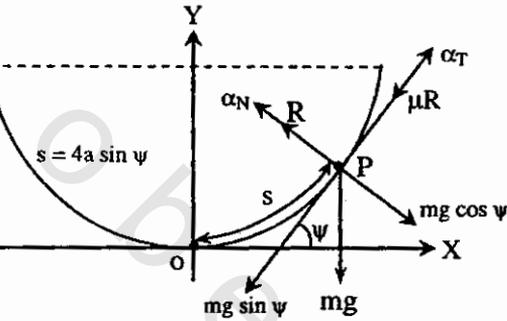
$$= 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\sin^{-1} \left(\frac{2}{u} \sqrt{ag} \right) + \sqrt{\frac{u^2}{4ag} - 1} \right]$$

$$= 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{4ag}}{u} \right) + \sqrt{\frac{u^2}{4ag} - 1} \right]$$

وهو المطلوب.

مسألة (10):

معادلات الحركة في اتجاهي المماس والعمودي هما:



$$ma_T = -mg \sin \psi - \mu R \quad (1)$$

$$ma_N = R - mg \cos \psi \quad (2)$$

$$a_T = \ddot{s} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2\rho} \frac{dv^2}{d\psi} \quad \text{ولكن:}$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

ونصف قطر الانحناء:

$$\rho = 4a \cos \psi$$

وتصبح المعادلتين (1)، (2) بالصورة:

$$m \frac{1}{2\rho} \frac{dv^2}{d\psi} = -mg \sin \psi - \mu R \quad (3)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = R - mg \cos \psi \quad (4)$$

بضرب (4) في μ والجمع مع (3) نحصل على:

$$\frac{1}{2\rho} \frac{dv^2}{d\psi} + \frac{v^2}{\rho} = -g \sin \psi - \mu g \cos \psi$$

وبالتعويض عن قيمة ρ :

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{d\psi} + \mu v^2 = -4ag [\sin \psi \cos \psi + \mu \cos^2 \psi]$$

$$\therefore \frac{dv^2}{d\psi} + 2\mu v^2 = -4ag [\sin 2\psi + \mu(1 + \cos 2\psi)] \quad (5)$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية نضرب الطرفين في عامل التكامل $e^{2\mu\psi}$.

$$\therefore \frac{d}{d\psi} (v^2 e^{2\mu\psi}) = -4ag e^{2\mu\psi} [\sin \psi + \mu(1 + \cos 2\psi)]$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على:

$$\therefore v^2 e^{2\mu\psi} = -4ag \int e^{2\mu\psi} [\sin 2\psi + \mu + \mu \cos 2\psi] d\psi$$

$$= -4ag \left[\frac{e^{2\mu\psi}}{4+4\mu^2} (2\mu \sin 2\psi - 2 \cos 2\psi) + \frac{e^{2\mu\psi}}{2} + \frac{\mu e^{2\mu\psi}}{4+4\mu^2} (2 \sin 2\psi + 2\mu \cos 2\psi) \right] + C \quad (6)$$

وباستخدام الشروط الابتدائية: $\psi=0$, $v=u$, $t=0$ نجد أن:

$$C = \frac{4ag\mu^2 + (1+\mu^2)\mu^2}{1+\mu^2}$$

بالتعويض في (6) نحصل على:

$$v^2 e^{2\mu\psi} = -4ag \left[\frac{e^{2\mu\psi}}{4+4\mu^2} (2\mu \sin 2\psi - 2 \cos 2\psi) + \frac{e^{2\mu\psi}}{2} + \frac{\mu e^{2\mu\psi}}{4+4\mu^2} (2 \sin 2\psi + 2\mu \cos 2\psi) \right] + \frac{4ag\mu^2 + (1+\mu^2)\mu^2}{1+\mu^2} \quad (7)$$

وحيث أن السرعة الابتدائية تكفى لوصول الجسم إلى الناب فهذا يعنى أن السرعة

تتعدم عند الناب وكذلك $\psi = \frac{\pi}{2}$ ، وتصبح المعادلة (7):

$$0 = -4ag \left[\frac{2e^{\mu\pi}}{4+4\mu^2} + \frac{e^{\mu\pi}}{2} - \frac{2\mu^2 e^{\mu\pi}}{4+4\mu^2} \right] + \frac{4ag\mu^2 + (1+\mu^2)\mu^2}{1+\mu^2}$$

$$\therefore 2age^{\mu\pi} \left[\frac{2}{1+\mu^2} \right] = \frac{4ag\mu^2 + (1+\mu^2)\mu^2}{1+\mu^2}$$

$$\therefore e^{\mu\pi} = \mu^2 + \frac{\mu^2}{4ag} = (1+\mu^2)$$

وهو المطلوب.

مسألة (11): يترك حلها للطالب (بنفس طريقة المسألة 10).