

الباب الخامس

ميكانيكا الأجرام السماوية

الحركة فى مجال الجاذبية وحركة الكواكب والأقمار الصناعية وسفن الفضاء

فى الجزء الأول من هذا الكتاب (أسس علم الديناميكا) درسنا ديناميكا المسارات المركزية وأوجدنا المعادلتين التفاضليتين للقوة المؤثرة على الجسم المتحرك فى المسار المركزى (قانون القوة) وكذلك قانون السرعة الذى يحدد سرعة الجسم عند أى نقطة فى المسار، وكمثال تطبيقى على الحركة فى مسار مركزى أخذنا الحركة الكوكبية بما فى ذلك إشارة إلى القوانين المنظمة لحركة الكواكب (قوانين كبلر) وإيجاد القوة المركزية المؤثرة على الكوكب أثناء حركته وكذلك إيجاد سرعة الكوكب عند أى نقطة فى مساره.

وفى هذا الجزء سوف نواصل الدراسة التفصيلية للحركة الكوكبية، ونتبع ذلك بأحد مواضيع الساعة، وهو دراسة حركة الأقمار الصناعية وسفن الفضاء. غير أننا نبدأ هنا بدراسة قانون الجذب العام وحركة الأجسام فى مجال الجاذبية الأرضية. ثم نتبعها بدراسة الموضوعات الأخرى.

أولاً: حركة الأجسام في مجال الجاذبية الأرضية:

(1) قانون الجذب العام:

ينص هذا القانون على أن: كل جسمين في الكون يتجاذبان بقوة تتناسب

طردياً مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسياً مع مربع البعد بينهما

رياضياً:



قوة الجذب المتبادل التي يؤثر بها كل

جسيم على الآخر تتعين من المعادلة:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

حيث γ ثابت يعرف بثابت الجذب العام وقيمه:

$$\gamma = 6.66 \times 10^{-4} \text{ dyne.cm}^2/\text{gm}^2$$

حيث القوة مقاسة بالنيوتن والكتلة بالجرام والمسافة بالسنتيمتر، أما إذا كانت القوة

بالنيوتن والكتلة بالكيلوجرام والمسافة بالمتر فإن:

$$\gamma = 96.67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$$

ويعرف هذا الثابت بأنه يساوي قوة الجذب بالداين (أو النيوتن) لجسمين كتلة كل

منهما جرام (أو كيلو جرام) واحد والبعد بينهما سنتيمتر (أو متر) واحد.

في حالة جذب الأرض للأجسام:

بفرض أن M كتلة الأرض و m كتلة الجسيم و R نصف قطر الأرض فإن:

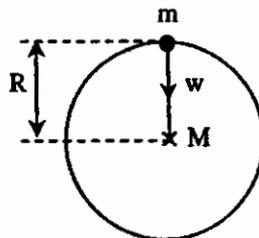
قوة جذب الأرض للجسيم عندما يكون على سطحها أو بالقرب منه تعرف بوزن

الجسيم w حيث:

$$w = mg = \gamma \frac{Mm}{R^2}$$

ومنها نجد أن عجلة الجاذبية الأرضية على

سطح الأرض g تعطى بالعلاقة:



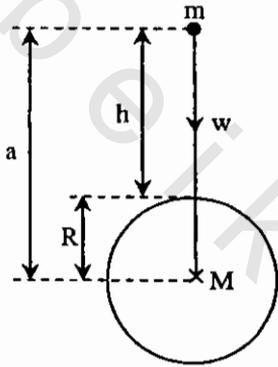
$$g = \gamma \frac{M}{R^2} \quad (1)$$

ومنها أيضاً نجد أن ثابت الجذب العام يعطى بالعلاقة:

$$\gamma = \frac{gR^2}{M}$$

(2) تغير عجلة الجاذبية بتغير البعد عن الأرض:

حالة (1): إذا كان الجسم خارج الكرة الأرضية:



إذا كان الجسم ذو الكتلة m خارج الكرة الأرضية ويبعد عن مركزها مسافة a وكانت قيمة عجلة الجاذبية عند الجسم هي g' فإن:

$$w = mg' = \gamma \frac{Mm}{a^2}$$

ومنها نجد أن:

$$g' = \gamma \frac{M}{a^2} \quad (2)$$

من (1)، (2) نجد أن:

$$\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{a^2} \quad (3)$$

وحيث أن $a > R$ فإن $g' < g$ وهذا يعني أن عجلة الجاذبية تقل عن مثيلاتها عند سطح الأرض، وهي تتناقص كلما ابتعد الجسم عن سطح الأرض، وتقترب من الصفر كلما ابتعد الجسم عن سطح الأرض بعداً لا نهائياً (كبير جداً).

وإذا كان h هو ارتفاع الجسم عن سطح الأرض أى أن $a = R + h$

فبالتعويض في (3) نجد أن:

$$g' = g \frac{R^2}{a^2} = g \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 = g \left(\frac{R+h}{R} \right)^{-2} = g \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{-2}$$

وبفرض أن $\frac{h}{R} < 1$ فباستخدام نظرية ذات الحدين نحصل على:

$$g' = g \left[1 - \frac{2h}{R} + 3 \frac{h^2}{R^2} - \dots \right] \quad (4)$$

وإذا كانت $\frac{h}{R} \ll 1$ فإنه يمكن إهمال الحدود فى $\frac{h}{R}$ ومربعاتها والقوى الأعلى ونحصل على: $g' \approx g$ كتقريب أول.

وهذا يعنى أن عجلة الجسيم على ارتفاع h من سطح الأرض بحيث أن $\frac{h}{R} \ll 1$ هى نفس عجلة الجاذبية على سطح الأرض.

وباعتبار أن نصف قطر الأرض لا نهائى بالنسبة لارتفاع الجسيم عن سطح الأرض فيمكن أخذ $\frac{h}{R} \rightarrow 0$ وبالتالي فإن سطح الأرض (باعتبار الأرض كرة نصف قطرها لا نهائى) يمكن أخذه كمستوى بالنسبة للارتفاعات الصغيرة.

حالة (2): إذا كان الجسيم داخل الكرة الأرضية (الحركة داخل الكرة الأرضية):

نفرض أن الجسم ذو الكتلة m داخل الكرة الأرضية ويبعد عن مركز لأرض مسافة a وكانت g' فى هذه الحالة هى عجلة الجاذبية عند الجسيم، وكان عمق الجسيم عن سطح الأرض هو h .

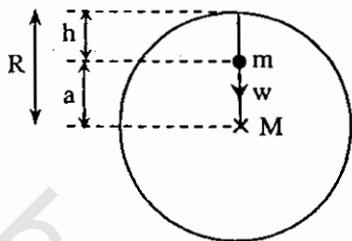
$$\therefore R = h + a \longrightarrow a = R - h$$

ويكون وزن الجسيم فى هذه الحالة:

$$w' = mg' \quad (5)$$

ومن قانون الجذب العام فإن قوة التجاذب بين الجسمين M, m فى تلك الحالة هو:

$$w' = \gamma \frac{Mm}{R^2} \left(\frac{a}{R} \right) = \gamma \frac{Mm}{R^3} a \quad (6)$$



من (6)، (5) نحصل على:

$$g' = \gamma \frac{Mm}{R^3} a \quad (7)$$

من (1)، (7) نجد أن: $\frac{g'}{g} = \frac{a}{R}$

وحيث أن $a < R$ فإن $g' < g$

وباعتبار أن $a = R - h$ فإن:

$$g' = g \left(\frac{a}{R} \right) = g \left(\frac{R - h}{R} \right) = g \left(1 - \frac{h}{R} \right) \quad (8)$$

في تلك الحالة أيضاً: إذا كانت $\frac{h}{R} \ll 1$ فإن $g' \approx g$ كتقريب أول، أي أن عجلة

الجسيم على عمق h من سطح الأرض بحيث أن $\frac{h}{R} \ll 1$ هي نفس عجلة الجاذبية

على سطح الأرض.

(3) طاقة الجهد لجسيم في مجال الجاذبية الأرضية بعيداً عن سطحها:

نفرض أن كتلة الجسيم m

وعجلة الجاذبية عند سطح الأرض

g ، ونصف قطر الأرض R ،

فتكون: عجلة الجاذبية عند مسافة a

من مركز الأرض هي:

$$g' = g \left(\frac{R^2}{a^2} \right) \quad \text{[[المعادلة (3)]]}$$

وتكون القوى المؤثرة على الجسيم هي:

$$F = mg' = mg \frac{R^2}{a^2}$$

وباعتبار أن طاقة الجهد (u) هي الشغل المبدول بواسطة القوة F من البعد a إلى ما لا نهاية (بإشارة سالبة) مع ملاحظة أن $u=0$ عند $a=\infty$.

$$\begin{aligned} \therefore u &= -\int_a^{\infty} F da = -\int_a^{\infty} mg \frac{R^2}{a^2} da \\ &= -mgR^2 \int_a^{\infty} \frac{da}{a^2} = -mgR^2 \left[-\frac{1}{a} \right]_a^{\infty} \\ &= mgR^2 \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{a} \right] = -mg \frac{R^2}{a} \end{aligned}$$

وحيث أن $g = \gamma \frac{M}{R^2}$ فإن:

$$u = -m \left(\gamma \frac{M}{R^2} \right) \left(\frac{R^2}{a} \right) = -\gamma \frac{mM}{a}$$

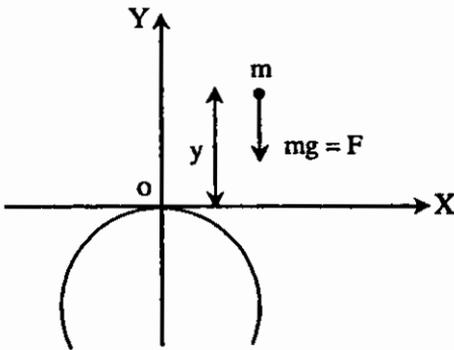
حالة خاصة:

إيجاد طاقة الجهد لجسيم في مجال الجاذبية الأرضية بالقرب من سطح الأرض:

نفرض أن الجسيم ذو الكتلة m يتحرك في مستوى رأسى، وبأخذ سطح

الأرض OX أساساً لقياس طاقة الجهد (حيث $u=0$ عند $y=0$) فإن:

$$\begin{aligned} u &= -\int_y^0 mg dy = -mg \int_y^0 dy = -mg[y]_y^0 \\ &= -mg[0 - y] = mgy \end{aligned}$$



أمثلة محلولة

مثال (1):

أوجد معادلة الطاقة في حالة قذف جسم كتلته m من سطح الأرض بسرعة ابتدائية v_0 بالصورة: $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\gamma Mm}{R} = E_0$ ، حيث R نصف قطر الكرة الأرضية، γ ثابت الجذب العام، E_0 الطاقة الكلية الابتدائية.

وإذا كان الجسم على ارتفاع h من سطح الأرض فإن معادلة الطاقة في هذه الحالة تؤول إلى:

$$v^2 = v_0^2 - 2gh \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

حيث g هي عجلة الجاذبية عند سطح الأرض $\left(g = \gamma \frac{M}{R^2}\right)$

أثبت كذلك أن وزن الجسم على بعد h من سطح الأرض يعطى بالعلاقة:

$$w = mg \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

الحل:

حيث أن قوة التجاذب بين الأرض M والجسم m الموضوع على ارتفاع r من مركز الأرض هي:

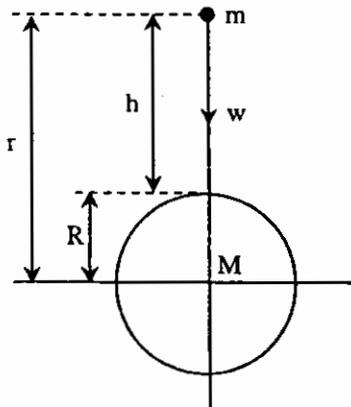
$$F = -\gamma \frac{Mm}{r^2}$$

معادلة الحركة:

$$m\ddot{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}$$

وبوضع نحصل على:

$$\therefore \ddot{r} = -\gamma \frac{M}{r^2}$$



ويوضع $\left[a = v \frac{dv}{dr} \right] \ddot{r} = \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr}$ نحصل على:

$$\dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} = -\gamma \frac{M}{r^2} \rightarrow \dot{r} d\dot{r} = -\gamma M \frac{dr}{r^2}$$

$$\therefore \int \dot{r} d\dot{r} = -\gamma M \int \frac{dr}{r^2} \quad \text{ويتكامل الطرفين:}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \dot{r}^2 = -\gamma M \left[-\frac{1}{r} \right] + C = \gamma \frac{M}{r} + C$$

حيث C ثابت.

ويضرب الطرفين في m (ثابت) وكتابة $\dot{r} = v$

$$\therefore \frac{1}{2} mv^2 = \gamma \frac{mM}{r} + C'$$

$$\therefore \frac{1}{2} mv^2 + \left(-\frac{\gamma mM}{r} \right) = C'$$

ونأخذ طاقة الحركة $T = \frac{1}{2} mv^2$ وطاقة الجهد $u = -\gamma \frac{mM}{r}$ [سبق إيجادها]

$$\therefore \frac{1}{2} mv^2 + u = C'$$

الثابت C' هنا يمثل الطاقة الكلية [مجموع طاقتي الحركة والجهد] أى أن $C' = E$

$$\therefore \frac{1}{2} mv^2 + u = E$$

وهو قانون ثبوت الطاقة.

وفى حالة قذف جسيم من على سطح الأرض حيث $r = R$ بسرعة ابتدائية v_0

$$\frac{1}{2} mv_0^2 + \left(-\frac{\gamma Mm}{R} \right) = E_0$$

فإن المعادلة السابقة تصبح

$$\therefore \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{\gamma Mm}{R} = E_0$$

حيث E_0 هي الطاقة الكلية الابتدائية.

عندما يكون الجسم على ارتفاع h من سطح الأرض حيث $r=h+R$ فإن

معادلة الطاقة تصبح بالصورة:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma Mm}{R+h} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\gamma Mm}{R}$$

$$\therefore v^2 = v_0^2 + 2\gamma M \left[\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right]$$

$$= v_0^2 + 2gR^2 \left[\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right]$$

$$= v_0^2 + 2g \left[\frac{R^2}{R+h} - R \right]$$

$$= v_0^2 - 2g \left[\frac{h}{1 + \frac{h}{R}} \right]$$

$$= v_0^2 - 2gh \left[1 + \frac{h}{R} \right]^{-1}$$

وإذا كانت $R \gg h$ فباستخدام نظرية ذات الحدين يكون:

$$\left(1 + \frac{h}{R} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{h}{R}$$

$$\therefore v^2 = v_0^2 - 2gh \left(1 - \frac{h}{R} \right)$$

ويكتابة $g(h) = g \left(1 - \frac{h}{R} \right)$ تمثل عجلة الجاذبية عند الارتفاع h عن سطح الأرض

فإن:

$$v^2 = v_0^2 - 2hg(h)$$

ويكون وزن الجسم على بعد h من سطح الأرض هو:

$$w = mg(h) = mg\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

مثال (2):

بين أن تغير الجاذبية مع الارتفاع يمكن حسابه مقرباً من دالة الجهد التي صورتها $u = mgh\left(1 - \frac{h}{R}\right)$ حيث R نصف قطر الأرض، ثم أوجد قوة التجاذب بين الجسم m والشمس M من تلك الدالة، وأوجد معادلات الحركة للجسيم تحت تأثير تلك القوة.

الحل:

$$u = mgh\left(1 - \frac{h}{R}\right) \quad \text{حيث أن:}$$

$$g(h) = g\left(1 - \frac{h}{R}\right) \quad \text{فبوضع: } u = mg(h) \cdot h \quad \text{نحصل على}$$

وهي معادلة تغير الجاذبية بتغير الارتفاع.

ولإيجاد القوة:

حيث أن $u = u(h)$ فإنه من العلاقة بين القوة والجهد: $\vec{F} = -\vec{\nabla}u$ نجد أن:

$$F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}\right)$$

حيث:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial h} = mg\left[1 - \frac{2h}{R}\right]$$

$$\therefore F_x = 0, F_y = 0, F_z = F_h = -\frac{\partial u}{\partial h} = -mg\left[1 - \frac{2h}{R}\right]$$

وتصبح معادلات الحركة بالصورة:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = m\ddot{h} = -mg \left[1 - \frac{2h}{R} \right]$$

مثال (3):

سقط جسم من السكون من ارتفاع h فوق سطح الأرض، أثبت أن الزمن

اللازم للوصول إلى الأرض هو:

$$t = \sqrt{\frac{R+h}{2g}} \left[\frac{R+h}{R} \sin^{-1} \sqrt{\frac{h}{R+h}} + \sqrt{\frac{h}{R}} \right]$$

حيث R نصف قطر الأرض، g عجلة الجاذبية الأرضية.

الحل:

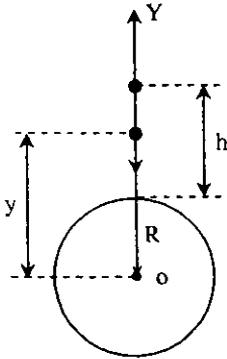
نفرض أن الجسم أثناء سقوطه موجود عند نقطة تبعد مسافة y عن مركز

الأرض فتكون معادلة حركة الجسم:

$$m\ddot{y} = -\frac{mgR^2}{y^2}$$

$$\therefore \ddot{y} = -g \frac{R^2}{y^2} \quad (1)$$

$$\therefore v \frac{dv}{dy} = -g \frac{R^2}{y^2}$$



بفصل المتغيرات والتكامل [باعتبار أن سرعة الجسم عند ارتفاع y هي v]:

$$\therefore \int_0^v v dv = - \int_{R+h}^y \frac{R^2}{y^2} dy$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{1}{2}v^2 &= -gR^2 \left[-\frac{1}{y} \right]_{R+h}^y \\
 &= gR^2 \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{R+h} \right] \\
 &= gR^2 \left[\frac{R+h-y}{y(R+h)} \right] \\
 \therefore v &= \pm \sqrt{2gR^2} \sqrt{\frac{R+h-y}{y(R+h)}} \\
 &= -\sqrt{2gR^2} \sqrt{\frac{R+h-y}{y(R+h)}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

أخذنا الإشارة السالبة لأن المسافة تتناقص بمرور الزمن.
ولإيجاد الزمن (زمن الوصول إلى الأرض):

$$v = \frac{dy}{dt} = -\sqrt{2gR^2} \sqrt{\frac{R+h-y}{y(R+h)}} \quad \text{من (2):}$$

وفصل المتغيرات والتكامل:

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{R+h}^R \sqrt{\frac{y}{R+h-y}} dy &= -\sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}} \int_0^t dt \\
 \therefore t &= -\sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}} \int_{R+h}^R \sqrt{\frac{y}{R+h-y}} dy \quad (3)
 \end{aligned}$$

ولإيجاد التكامل في (3) نستخدم التعويض:

$$y = (R+h) \sin^2 \alpha \longrightarrow dy = 2(R+h) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha$$

$$\alpha = \sin^{-1} \sqrt{\frac{R}{R+h}} \quad \text{عندما } y=R \text{ فإن } \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{عندما } y=R+h \text{ فإن}$$

$$\therefore \int_{R+h}^R \sqrt{\frac{y}{R+h-y}} dy = \int_{\pi/2}^{\alpha} \sqrt{\frac{(R+h)\sin^2 \alpha}{(R+h)\cos^2 \alpha}} 2(R+h) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha$$

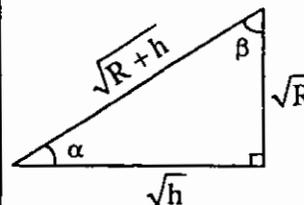
$$= (R+h) \int_{\pi/2}^{\alpha} 2 \sin^2 \alpha d\alpha \quad \left| \begin{array}{l} \alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi \\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$= (R+h) \left[\alpha - \frac{\pi}{2} - \sin \alpha \cos \alpha \right]$$

$$= -(R+h) \left[\frac{\pi}{2} - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \right] \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta \end{array} \right.$$

$$= -(R+h) \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{R}{R+h}} + \sqrt{\frac{R}{R+h}} \sqrt{\frac{h}{R+h}} \right]$$

$$= -(R+h) \left[\sin^{-1} \sqrt{\frac{h}{R+h}} + \sqrt{\frac{Rh}{R+h}} \right]$$



وبالتعويض في (3):

$$\therefore t = \sqrt{\frac{R+h}{2g}} \left[\sqrt{\frac{R+h}{R}} \sin^{-1} \sqrt{\frac{h}{R+h}} + \sqrt{\frac{h}{R}} \right]$$

وهو المطلوب.

مثال (4):

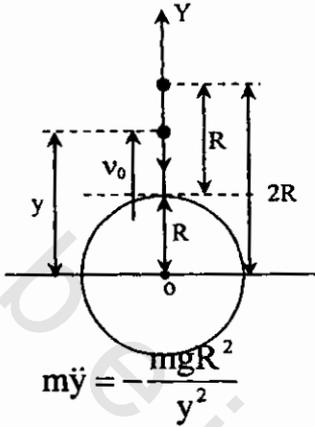
قذف جسم من سطح الأرض بسرعة تكفي لإبعاده إلى ارتفاع لا نهائي،

أثبت أن الجسم يرتفع إلى مسافة تساوي نصف قطر الأرض (R) في زمن قدره:

$$t = \frac{1}{3} (4 - \sqrt{2}) \sqrt{\frac{R}{g}}$$

حيث g عجلة الجاذبية الأرضية

الحل:



نفرض أن الجسم قذف بالسرعة v_0 الكافية لإبعاده إلى ارتفاع لا نهائي عن سطح الأرض (وتسمى بسرعة الهروب) فإذا كان الجسم على بعد y من مركز الأرض فإن معادلة حركته تكون:

(1)

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{gR^2}{y^2} \rightarrow v \frac{dv}{dy} = -\frac{gR^2}{y^2}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore \int_{v_0}^v v dv = -\int_R^y \frac{gR^2}{y^2} dy$$

$$\therefore v^2 = v_0^2 + 2gR^2 \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{R} \right] \quad (2)$$

وحيث أن $v=0$ عندما $y=\infty$ (الجسيم يسكن عند ارتفاع لا نهائي إذا كانت سرعته الابتدائية هي سرعة الهروب من سطح الأرض v_0) فإن:

$$0 = v_0^2 + 2gR^2 \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} \right] \rightarrow v_0^2 = 2gR$$

بالتعويض في (2):

$$\therefore v^2 = 2gR + 2gR^2 \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{R} \right] = 2gR \left[1 + \frac{R}{y} - 1 \right] = \frac{2gR^2}{y}$$

$$\therefore v = \pm \sqrt{\frac{2gR^2}{y}} = +\sqrt{\frac{2gR^2}{y}} \quad (3)$$

ولإيجاد الزمن (اللازم لوصول الجسم إلى مسافة تساوي R)

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2gR^2}{y}} \quad \text{من (3):}$$

وفصل المتغيرات والتكامل نحصل على:

$$\int_R^y \sqrt{y} dy = \sqrt{2gR^2} \int_0^t \sqrt{dt}$$

$$\therefore t = \frac{1}{2gR^2} \int_R^y y^{1/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2gR^2}} [y^{3/2}]_R^y = \frac{1}{\sqrt{2gR^2}} \cdot \frac{2}{3} (y^{3/2} - R^{3/2})$$

ويوضع $y=2R$ نحصل على الزمن المطلوب وهو:

$$t = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2gR^2}} [2\sqrt{2} - 1] R^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3} (4 - \sqrt{2}) \sqrt{\frac{R}{g}}$$

وهو المطلوب.

مسائل

- (1) أدرس حركة جسيم قذف إلى أعلى بسرعة u من سطح الأرض تحت تأثير عجلة الجاذبية وأوجد قيمة السرعة التي لو قذف بها الجسيم من سطح الأرض لا يعود إلى الأرض ثانية (وتعرف بسرعة الهروب).
- (2) (أ) أدرس حركة جسيم يسقط من السكون من مسافة بعيدة (h) عن سطح الأرض وأحسب سرعة وصول الجسيم إلى سطح الأرض.
 (ب) أدرس حركة جسيم داخل الكرة الأرضية عند مسافة x عن مركز الأرض وتلك باعتبار أن قوة جذب الأرض للأجسام داخلها تتناسب طردياً مع بعدها عن المركز.
- (3) أحسب أقل سرعة لقذف صاروخ من على سطح الأرض حتى يصل إلى نقطة بين الأرض والقمر يتعادل فيها قوة تجاذبهما، علماً بأن كتلة القمر تساوي $\frac{1}{75}$ من كتلة الأرض وأن المسافة بين مركزيهما تساوي 60 مرة قدر نصف قطر الأرض (R) حيث $R=6387 \text{ km}$.
- (4) إذا علمت أن النسبة بين نصف قطر القمر ونصف قطر الأرض هي كنسبة $1:0.273$ وأن نسبة كتلة القمر إلى كتلة الأرض هي كنسبة $1:75$ ، أوجد الآتي:
- (i) عجلة الجاذبية على سطح القمر.
 (ii) النقطة p التي تتعادل فيها جاذبية القمر مع جاذبية الأرض علماً بأن المسافة بين الأرض والقمر $= 60$ مرة قدر نصف قطر الأرض $(R=6387 \text{ km})$.
- (5) مركبة فضاء موجهة نحو مركز القمر بسرعة 3000 km/hr من نقطة على بعد من سطح القمر يساوي نصف قطر القمر R (حيث $R=1738 \text{ km}$) فإذا كانت عجلة الجاذبية على سطح القمر تساوي تقريباً 1.75 m/sec^2 فأوجد سرعة اصطدام المركبة الفضائية بسطح القمر.

حلول المسائل

حل المسألة (1):

نفرض أن الجسم يبعد عن الأرض مسافة x فتكون القوة المؤثرة على الجسم هي قوة جذب الأرض له وقيمتها: $F = mg \frac{R^2}{x^2}$ في الاتجاه $\vec{P}\vec{O}$ حيث R نصف قطر الأرض.

معادلة الحركة:

$$m\ddot{x} = -mg \frac{R^2}{x^2}$$

$$\therefore \ddot{x} = -g \frac{R^2}{x^2} \rightarrow v \frac{dv}{dx} = -g \frac{R^2}{x^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x} + C_1 \quad (1)$$

وإذا كان الجسم قد قذف رأسياً إلى أعلى بسرعة u من سطح الأرض فإن:

$$x=R, v=u \text{ (عند سطح الأرض)}$$

$$\therefore \frac{1}{2}u^2 = \frac{gR^2}{x} + C_1 \rightarrow C_1 = \frac{1}{2}u^2 - gR$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}u^2 = gR^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right) \quad \text{وبالتعويض في (1):}$$

$$\therefore v^2 = u^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right) \quad (2)$$

وهي سرعة الجسم عند مسافة x بعيداً عن سطح الأرض.

ولإيجاد سرعة الهروب (u_e):

نعوض في (2) بالقيم $v=0$, $x=\infty$ وذلك لأنه من تعريف سرعة الهروب بأنها السرعة التي لو قذف بها الجسم من سطح الأرض لا يعود إلى الأرض ثانية أى أنه: عند $x=\infty$ ، فإن سرعته تتلاشى

$$\therefore 0 = u_e^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} \right) = u_e^2 - 2gR \longrightarrow \boxed{u_e = 2gR}$$

وهو المطلوب.

حل المسألة (2):

الجزء (أ):

نفرض أن الجسم على بعد x من مركز الأرض فتكون معادلة الحركة.

$$m\ddot{x} = -mg \frac{R^2}{x^2}$$

$$\therefore \ddot{x} = -g \frac{R^2}{x^2} \rightarrow v \frac{dv}{dx} = -g \frac{R^2}{x^2}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x} + C_1 \quad (1)$$

وإذا سقط الجسم من السكون من ارتفاع h عن سطح الأرض فإن: $v=0$, $x=R+h$

$$\therefore 0 = \frac{gR^2}{R+h} + C_1 \rightarrow C_1 = -\frac{gR^2}{R+h}$$

وبالتعويض في (1):

$$\therefore v^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R+h} \right) \quad (2)$$

ولحساب سرعة وصول الجسم إلى سطح الأرض نضع $x=R$ في (2) فنحصل

على:

$$v^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = 2gR^2 \left(\frac{R+h+R}{R(R+h)} \right)$$

$$= 2gR \left[\frac{2R+h}{R+h} \right] \rightarrow \therefore v = \sqrt{2gR} \sqrt{\frac{2R+h}{R+h}} \quad (3)$$

الجزء (ب): إذا كان بعد الجسيم ϵ من مركز الأرض يساوي x فإن قوة جذب الأرض $\lambda x =$ (كما في رأس المسألة) نحو O حيث λ ثابت قيمة ϵ تساوي

$$\lambda = m \frac{g}{R}$$

معادلة الحركة:

$$m\ddot{x} = -\lambda x = -\frac{mg}{R^2} x$$

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{g}{R} x = v \frac{dv}{dx}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore \frac{1}{2} v^2 = -\frac{g}{2R} x^2 + C_1$$

$$\therefore v^2 = -\frac{g}{R} x^2 + C$$

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} C = 2C_1 \end{array} \right.$$

وعند سطح الأرض (A): فإن $x=R$

$$\therefore v_A^2 = -\frac{g}{R} R^2 + C = -gR + C \rightarrow C = v_A^2 + gR$$

بالتعويض في (4)

$$\therefore v^2 = -\frac{g}{R} x^2 + v_A^2 + gR$$

$$= v_A^2 + gR \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right) = v_A^2 + gR \left(\frac{R^2 - x^2}{R^2} \right) = v_A^2 + g \left(\frac{R^2 - x^2}{R} \right)$$

$$\therefore v_A^2 = v^2 - g \left(\frac{R^2 - x^2}{R} \right) \rightarrow v_A = \sqrt{v^2 - g \left(\frac{R^2 - x^2}{R} \right)}$$

وهي السرعة عند سطح الأرض (A)، ويمكن كتابته بالصورة الآتية:

$$v_A = \sqrt{v^2 - \frac{gh}{R} (2R - h)} \quad (6)$$

وذلك لأن:

$$R^2 - x^2 = (R - x)(R + x) = (h)(R + x)$$

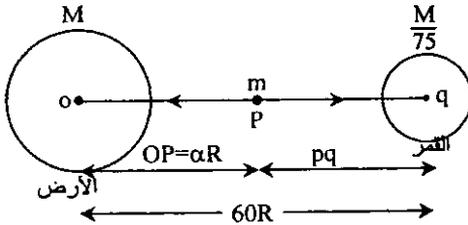
$$= (h)[R + (R - h)] = h(2R - h)$$

ولإيجاد السرعة عند مركز الأرض 0: نضع $x=0$ في (5) فنحصل على

$$\therefore v_0 = \sqrt{v^2 - g \left(\frac{R^2}{R} \right)} = \sqrt{v^2 - gR} \quad (7)$$

وهو المطلوب

حل المسألة (3):



نفرض أن (αR) هو البعد الذي يصل إليه الصاروخ إلى نقطة P (بين الأرض والقمر) والتي يتعادل فيها جذب الأرض مع جذب القمر.

قوة جذب الأرض للصاروخ نو الكتلة m عند P على:

$$F_1 = \gamma \frac{Mm}{(op)^2} = \gamma \frac{Mm}{(\alpha R)^2}$$

قوة جذب القمر للصاروخ عند P هي:

$$F_2 = \frac{\gamma \left(\frac{M}{75} \right) m}{(pq)^2} = \frac{\gamma \left(\frac{M}{75} \right) m}{(60R - \alpha R)^2}$$

وحيث أن $F_1 = F_2$ فإن:

$$\gamma \frac{Mm}{(\alpha R)^2} = \frac{\gamma \left(\frac{M}{75} \right) m}{[R(60R - \alpha)]^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{75(60 - \alpha)^2}$$

ومنها نجد أن: $\alpha = 53.79$

أى أن بعد الصاروخ عن الأرض عند وصوله إلى نقطة $P = 53.79 R$
ولإيجاد سرعة الصاروخ: نكتب معادلة حركة الصاروخ بالصورة:

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{Mm}{x^2} \quad \left| \quad \gamma = \frac{gR^2}{M} \right.$$

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{\gamma M}{x^2} = -g \frac{R^2}{x^2} \quad \therefore v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل:

$$\int_{v_0}^0 v dv = -gR^2 \int_R^{\alpha R} \frac{dx}{x^2}$$

$$v_0 = \sqrt{2gR \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)}$$

ومنها نجد أن:

وحيث أن: $g = 9.8$, $R = 6337 \text{ km} = 6397000 \text{ m}$

$$\therefore v_0 = \sqrt{2(9.8)(6387000) \left(1 - \frac{1}{53.79} \right)}$$

$$= 11.189 \text{ km/sec.}$$

وهي أقل سرعة لازمة لقذف الصاروخ من الأرض حتى يصل إلى النقطة P بين الأرض والقمر والتي عندها يتعادل جذب الأرض مع جذب القمر.

حل المسألة (4):

قوة الجاذبية على سطح الأرض:

$$mg = \gamma \frac{Mm}{R^2} \quad (1)$$

حيث M كتلة الأرض، R نصف قطرها، g عجلة الجاذبية الأرضية

قوة الجاذبية على سطح القمر:

$$mg' = \gamma \frac{M'm}{R'^2} \quad (2)$$

حيث M' كتلة القمر، R' نصف قطره، g' عجلة الجاذبية للقمر.

من (1)، (2) بالقسمة:

$$\frac{g'}{g} = \frac{M'}{M} \left(\frac{R}{R'} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore g' &= g \left(\frac{M'}{M} \right) \left(\frac{R}{R'} \right)^2 = (9.8) \left(\frac{1}{75} \right) \left(\frac{1}{0.273} \right)^2 \\ &= (0.1306)(13.417) \\ &= 1.75 \text{ m/sec}^2 \end{aligned}$$

وهو المطلوب أولاً

المطلوب الثاني:

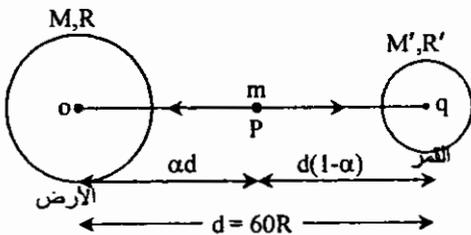
نفرض أن المسافة بين

الأرض والقمر هي d ونفرض أن

نقطة P بين الأرض والقمر (والتي

تتعادل عندها جاذبية الأرض والقمر)

تبعد مسافة λd عن الأرض.



$$F_1 = F_2 \rightarrow \gamma \frac{\gamma M m}{(\alpha d)^2} = \frac{\gamma \left(\frac{M}{81} \right) m}{[d(1-\alpha)]^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{d(1-\alpha)} \rightarrow \alpha = \frac{9}{10} = 0.9$$

∴ النقطة P (وتعرف بنقطة التعادل) تبعد عن الأرض مسافة:

$$\alpha d = 0.9(60R) = 54R$$

أي مسافة تساوي 54 مرة قدر نصف قطر الأرض.

وهو المطلوب ثانياً.

حل المسألة (5):

معادلة الحركة للمركبة الفضائية:

$$m\ddot{y} = -\frac{\gamma M m}{y^2}$$

حيث R نصف قطر القمر، g عجلة الجاذبية على سطحه

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{\gamma M}{y^2} = -\frac{gR^2}{y^2}$$

(1)

$$\left| \gamma = \frac{gR^2}{M} \right.$$

$$\therefore v \frac{dv}{dy} = -\frac{gR^2}{y^2}$$

ويفصل المتغيرات والتكامل:

$$\therefore \int_{v_0}^v v dv = \int_{2R}^R \frac{gR^2}{y^2} dy$$

$$\therefore \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v_0}^v = -gR^2 \int_{2R}^R \frac{dy}{y^2} = -gR^2 \left[\frac{-1}{y} \right]_{2R}^R$$

$$\therefore v^2 = v_0^2 + 2gR^2 \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right]$$

$$\therefore v^2 - v_0^2 = 2gR^2 \left[\frac{1}{2R} \right] = v_0^2 + gR$$

$$\therefore v = \sqrt{v_0^2 + gR}$$

وهى السرعة التى تصطدم بها المركبة بسطح القمر
وبالتعويض بالقيم العددية حيث:

$$v_0 = 3000 \text{ km/hr.} = \frac{3000 \times 1000}{60 \times 60} \text{ m/sec}$$

$$g = 1.75, \quad R = 1738 \text{ km} = 1738000 \text{ m}$$

نحصل على:

$$v = 1873.5 \text{ m/sec}$$

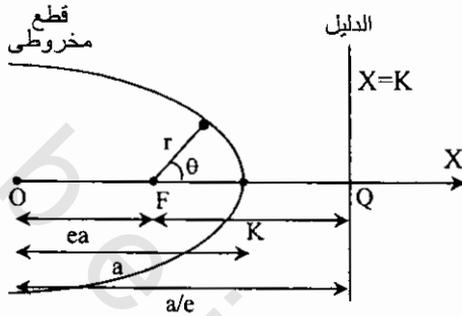
$$= 6744.6 \text{ km/hr}$$

وهو المطلوب

ملحوظة: للتحويل من m/sec إلى km/hr. نضرب فى 3.6

ثانياً: الدراسة التفصيلية لحركة الكواكب وتوابعها:

تمهيد (1): عن المعادلة القطبية لقطع المخروطية:



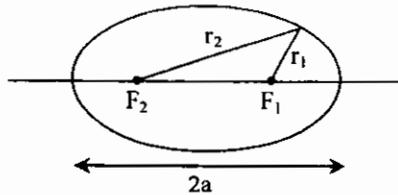
نعتبر قطع مخروطي مركزه O وبؤرته F لتكن F هي نقطة الأصل، أي نقطة على القطع تبعد مسافة r عن F وتصنع زاوية θ مع محور x (محور القطع).

ويكون لدينا العلاقات الآتية:

(1) الدليل (دليل القطع) هو الخط العمودي على المحور، ومعادلته $x=k$ أي أنه يبعد مسافة K عن البؤرة F (نقطة الأصل).

(2) البعد بين البؤرة F والمركز O هي (ea) حيث e هي الاختلاف المركزي للقطع.

(3) البعد بين الدليل ومركز القطع O هي $\left(\frac{a}{e}\right)$.



(4) مجموع نصفى القطر الواصلين بين بؤرتي القطع وأي نقطه على القطع يساوى طول المحور الأكبر، أي أن:

$$r_1 + r_2 = 2a$$

(5) المعادلة القطبية للقطع هي: $r = \frac{ek}{1 + e \cos \theta}$ [بدلالة e, k]

فإذا كانت $e=1$ فالقطع هو قطع مكافئ ومعادلته: $r = \frac{k}{1 + \cos \theta}$

وإذا كانت $e > 1$ فالقطع هو قطع زائد، فمثلا $e=2$ $r = \frac{2k}{1 + 2 \cos \theta}$

وإذا كانت $e < 1$ فالقطع هو قطع ناقص، فمثلا $e = \frac{1}{2}$ $r = \frac{k}{2 + \cos \theta}$

(6) هناك صورة أخرى لمعادلة القطع [بدلالة e, a] هي:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos\theta}$$

وتستخدم هذه الصورة لدراسة حركة الكواكب في المجموعة الشمسية.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos\theta} \quad \text{مثال: أثبت العلاقة}$$

الحل:

من الشكل السابق والعلاقات المعطاة فإن:

$$oQ = oF + FQ \quad \therefore \quad \frac{a}{e} = ea + k$$

$$\therefore \quad k = \frac{a}{e} - ea = \frac{a}{e}(1-e^2) \quad \therefore \quad \boxed{ek = a(1-e^2)}$$

وبالتعويض في المعادلة القطبية للقطع:

$$r = \frac{ek}{1+e \cos\theta} \quad \therefore \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos\theta}$$

تمهيد (2): عن الكواكب في المجموعة الشمسية:

(1) تتكون المجموعة الشمسية من (9) كواكب يتحرك كل منها في مدار على شكل

قطع ناقص حول الشمس بحيث تكون الشمس في إحدى بؤرتي القطع.

ويتميز مدار كل كوكب باختلاف مركزى e تم تعيينه بدقة، فمثلاً:

لكوكب الأرض: $e=0.02$

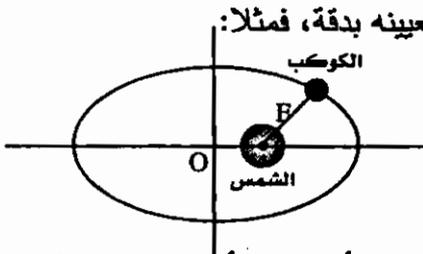
لكوكب الزهرة: $e=0.01$

لكوكب المريخ: $e=0.09$

وكما كانت e صغيرة ($e \rightarrow 0$) كان المدار يميل إلى أن يكون أقرب للدائرة (حالة

خاصة من القطع الناقص) بينما كلما كانت e كبيرة، (ولكنها $e < 1$) كان المدار

يميل إلى أن يكون أقرب إلى القطع الناقص.



أكبر قيمة لـ e في الكواكب:

- (1) لأقرب كوكب إلى الشمس : كوكب عطارد $e=0.21$
 (2) لأبعد كوكب من الشمس : كوكب بلوتو $e=0.25$

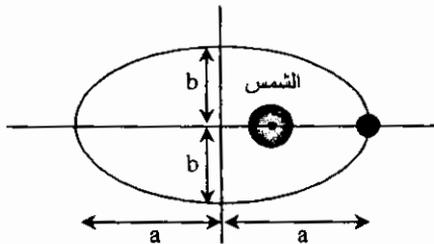
(2) المذنبات (Comets):

هى أجرام سماوية تتحرك حول الشمس (مثل الكواكب) فى مسارات على شكل قطوع مخروطية (ناقص أو مكافئ أو زائد)، مع ملاحظة أن الكواكب تتحرك فى قطوع ناقصة فقط. ويوجد حوالى 610 مذنب تدور حول الشمس، منها 245 مذنب تدور فى مسارات على شكل قطع ناقص. وأشهر هذه المذنبات هو: مذنب هالى (Halley's comet).

(3) الوحدة الفلكية (Astronomical unit) (واختصارا Au):

هى وحدة مسافات تستخدم فى القياسات الفلكية وتساوى نصف طول المحور الأكبر لمدار الأرض حول الشمس (a) الذى يساوى تقريبا 150 مليون كيلو متر.
 $Au=149.6 \times 10^6 \text{ km} = 93 \times 10^6 \text{ miles}$
 مثال: يدور مذنب هالى فى مدار حول الشمس على شكل قطع ناقص الشمس فى إحدى بؤرتيه بطول 36.18 Au وعرض 9.12 Au، أوجد معادلة مسار المذنب وكذلك الاختلاف المركزى له.

الحل:



$$2a = 36.18$$

$$2b = 9.12$$

$$\therefore a = \frac{36.18}{2} = 18.09$$

$$b = \frac{9.12}{2} = 4.56$$

نستخدم معادلة المسار للقطع الناقص فى الاحداثيات الكريتزية

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \therefore \quad \frac{x^2}{(18.09)^2} + \frac{y^2}{(4.56)^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{327.25} + \frac{y^2}{20.8} = 1 \quad \text{وهي المعادلة المطلوبة لمسار المنذب}$$

ولإيجاد الاختلاف المركزي:

نستخدم العلاقة الآتية بين e, a, b (من الهندسة التحليلية)

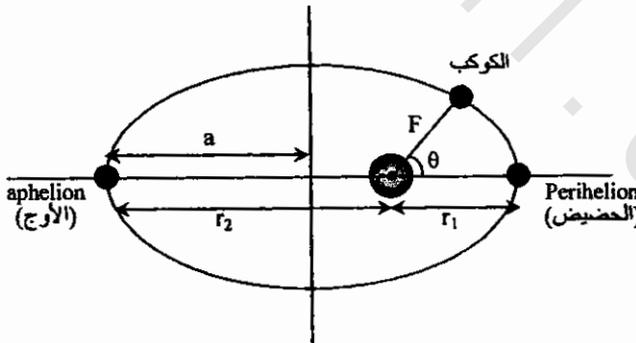
$$e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow ea = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\therefore \quad e = \frac{1}{18.09} \sqrt{(18.09)^2 - (4.56)^2} = \frac{1}{18.09} (17.55) = 0.97$$

وهو المطلوب ثانياً.

(4) نقطتي الأوج (Aphelion) والحضيض (Perihelion) للكواكب:

تسمى أقرب نقطة للكوكب (في مساره حول الشمس) من الشمس بنقطة الحضيض (Perihelion)، وتبعد عن الشمس مسافة r_1 ، بينما تسمى أبعد نقطة للكوكب عن الشمس بنقطة الأوج (Aphelion) وتبعد عن الشمس مسافة r_2 .



أمثلة محلولة

مثال (1):

أثبت أنه:

عند نقطة الحضيض: $r_1 = a(1-e)$ وعند نقطة الأوج: $r_2 = a(1+e)$

الحل:

عند نقطة الحضيض (Perihelion):

$$\cos \theta = 1 \leftarrow \theta = 0 \quad \text{فإن}$$

$$\text{ومن معادلة القطع} \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} \quad \text{فإن:}$$

$$\therefore r_1 = \frac{a(1-e^2)}{1+e(1)} = \frac{a(1-e)(1+e)}{1+e} = a(1-e) \quad (1)$$

عند نقطة الأوج (Aphelion):

$$\cos \theta = -1 \leftarrow \theta = \pi \quad \text{فإن}$$

$$\therefore r_2 = \frac{a(1-e^2)}{1+e(-1)} = \frac{a(1-e)(1+e)}{1-e} = a(1+e) \quad (2)$$

وهو المطلوب.

مثال (2):

أوجد نقطتي الحضيض (أقرب بعد عن الشمس) والأوج (أبعد مسافة عن

الشمس) لكوكب الأرض حيث: $e = 0.0167$, $a = 149.59 \times 10^6 \text{ km}$

الحل:

(1) نقطة الحضيض:

$$\begin{aligned} r_1 &= a(1-e) = 149.59 \times 10^6 [1 - 0.0167] \\ &= 147 \times 10^6 \text{ km} \end{aligned}$$

أى أن الأرض تكون أقرب ما يمكن من الشمس على بعد 147 مليون كيلو متر تقريبا.

(2) نقطة الأوج:

$$r_1 = a(1 + e) = 149.59 \times 10^6 [1 + 0.0167]$$

$$\approx 152 \times 10^6 \text{ km}$$

أى أن الأرض تكون أبعد ما يمكن عن الشمس على مسافة 152 مليون كيلو متر تقريبا.

مثال (3):

أوجد نقطتي الأوج والحضيض لكوكب بلوتو (أبعد كوكب عن الأرض في المجموعة الشمسية) علما بأن قيمتي a , e لمسار بلوتو هما:
 $a = 39.44 \text{ Au}$ (وحدة فلكية) $e = 0.25$,
 $[\text{Au} = 149.6 \times 10^6 \text{ km}]$

الحل:

(1) لإيجاد نقطة الحضيض (أقرب بعد عن الشمس)

$$r_1 = a(1 - e) = 39.44(1 - 0.25) = 29.58 \text{ Au}$$

$$= 29.58 \times 149.59 \times 10^6 = 4425 \times 10^6 \text{ km}$$

أى أن كوكب بلوتو يكون أقرب ما يمكن من الشمس عند مسافة 4425 مليون كيلو متر.

(2) لإيجاد نقطة الأوج (أبعد مسافة عن الشمس)

$$r_2 = a(1 + e) = 39.44(1 + 0.25) = 49.3 \text{ Au}$$

$$= 49.3 \times 149.5 \times 10^6 = 7373 \times 10^6$$

أى أن كوكب بلوتو يكون أبعد ما يمكن من الشمس عند مسافة 7373 مليون كيلو متر.

ملحوظة:

كوكب بلوتو يبعد عن الشمس في المتوسط مسافة 5865 مليون كيلو متر.
بينما كوكب الأرض يبعد عن الشمس في المتوسط مسافة 150 مليون كيلو متر.

مسألة:

أوجد نقطتي الأوج والحضيض لمذنب هالي الذي يتحرك في مسار على شكل قطع ناقص حول الشمس وأبعاده هي:

$$a = 36.18 \text{ Au}, e = 0.97$$

$$(\text{Au} = 149.59 \times 10^6 \text{ km})$$

الحل:

إيجاد نقطة الحضيض (أقرب بعد عن الشمس):

$$r_1 = a(1 - e) = 36.18(1 - 0.97) = 1.085 \text{ Au}$$

$$= 1.085 \times 149.59 \times 10^6 = 162.37 \times 10^6 \text{ km}$$

أي أن مذنب هالي يكون أقرب ما يمكن عن الشمس عند مسافة 162 مليون كيلو متر

إيجاد نقطة الأوج (أكبر بعد عن الشمس):

$$r_2 = a(1 + e) = 36.18(1 + 0.97) = 71.275 \text{ Au}$$

$$= 71.275 \times 149.59 \times 10^6 = 10660 \times 10^6 \text{ km}$$

أي أن مذنب هالي يكون أبعد ما يمكن عن الشمس عند مسافة 10660 مليون كيلو متر.

وهو المطلوب

(5) القوانين المنظمة لحركة الكواكب:

(i) مركبتا السرعة والعجلة في الاحداثيات القطبية:

السرعة: $v_r = \dot{r}, v_\theta = r\dot{\theta}$

العجلة: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

(ii) تتحرك الكواكب بعجلة $\ddot{\vec{r}}$ تتجه دائما نحو الشمس:

$\ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{M}{r^2}$ ، (M كتلة الشمس)

إذا كانت m كتلة الكوكب فمن قانون الجاذبية لنيوتن:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{M}{r^2} \tag{1}$$

وبصورة اتجاهية فإن:

$$\ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{M}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$$

حيث \vec{e}_r متجه وحدة في اتجاه $\leftarrow \vec{r}$

$$\therefore \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{M}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = -\gamma \frac{M}{r^3} \vec{r} \tag{2}$$

من (2) نجد أن: $\ddot{\vec{r}} = k\vec{r}$ ، حيث K ثابت

بالضرب اتجاهيا في \vec{r}

$$\vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = k(\vec{r} \wedge \vec{r}) = 0 \tag{3}$$

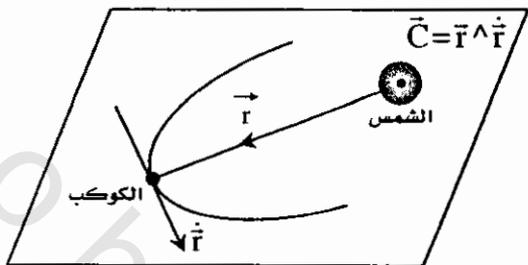
ولكن:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} = \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} , \dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} = 0 \tag{4}$$

من (3),(4) فإن:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = 0$$

$$\therefore \boxed{\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = \vec{C}} \tag{5}$$



أى أن المتجهين $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ يقعان في مستوى عمودي على المستوى الثابت \vec{C} مما يعنى أن حركة الكوكب بسرعة $\dot{\vec{r}}$ عمودية على \vec{r} تتم في المستوى الثابت $\vec{C} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$ المار بمركز الشمس.

(iii) إذا تحرك الكوكب في مجال مركزي فإن قانون حفظ كمية الحركة الزاوية ينص على أن: كمية الحركة الزاوية في المجال المركزي تظل ثابتة دائماً أثناء الحركة.

رياضياً:

$$L = |\vec{r} \wedge \vec{p}| = |\vec{r} \wedge m\vec{v}|$$

$$= m|\vec{r} \wedge \vec{v}| = m|\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}| = m|\vec{C}| = mC = \text{ثابت}$$

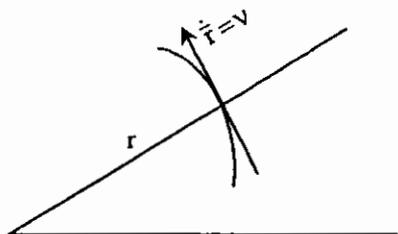
واتجاه كمية الحركة الزاوية يكون في اتجاه عمودي على مستوى الحركة أى في اتجاه v_θ حيث $v_\theta = r\dot{\theta} = rw$ وبذلك وبصورة قياسية فإن:

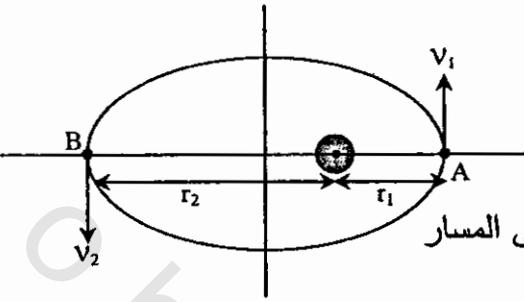
$$L = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta = mr \times r\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta} = mr^2w$$

نلاحظ أن الأرض تتحرك في مجال جاذبية الشمس بحيث أن مقدار كمية الحركة الزاوية للأرض وكذلك اتجاهها يظل ثابتاً أثناء الحركة.

(iv) قانون ثبوت عزم السرعة:

ينص هذا القانون على أن عزم سرعة الكوكب حول الشمس هو مقدار ثابت





رياضياً: $r \times u = \text{const.}$

إذا كانت v_1 سرعة الكوكب

عند نقطة A في المسار

وكانت v_2 سرعة الكوكب عند نقطة B في المسار

فإن: $r_1 \times v_1 = r_2 \times v_2$

(v) من معادلة القطع (بدلالة e, a) أي:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos\theta} \quad (1)$$

وعند موضع أقرب نقطة من الشمس (نقطة الحضيض Perihelion) فإن:

$$r_1 = a(1-e) = r_0 \quad (2)$$

باعتبار أن r_0 هي موضع البداية (عند $t=0$) أي بداية حركة الكوكب

فمن (1), (2) نحصل على:

$$r = \frac{a(1-e)(1+e)}{1+e \cos\theta} = \frac{r_0(1+e)}{1+e \cos\theta} \quad (3)$$

تعرف الصورة (3) بالصورة القياسية لمسار الكواكب في قطوع ناقصة

أيضاً من (1), (3) نجد أن:

$$a(1-e^2) = r_0(1+e) \quad (4)$$

(vi) إيجاد الاختلاف المركزي لمسار الكوكب:

يعرف ثابت المسارات المركزية h بأنه:

$$(1) h = r^2 \dot{\theta} \quad (2) h = vr [\text{عزم السرعة}]$$

وعند دراستنا للحركة في مسار مركزي على شكل قطع ناقص فإن القوة: $F = \frac{\mu}{r^2}$

حيث $\mu = \gamma M$ ، وأيضاً فإن: $\mu = \frac{h^2}{\ell}$ حيث ℓ هو نصف الوتر البؤري العمودي

للقطع:

$$\ell = a(1-e^2)$$

من تلك العلاقات نجد أن: $h^2 = \mu \ell = \gamma M a(1-e^2)$

وباستخدام العلاقة (4) نحصل على:

$$\therefore h^2 = \gamma M r_0 (1 + e)$$

$$\therefore 1 + e = \frac{h^2}{\gamma M r_0} \longrightarrow e = \frac{h^2}{\gamma M r_0} - 1$$

وبالتعويض عن $h = v_0 r_0$ (حيث v_0 سرعة الكوكب في البداية) فإن:

$$\therefore e = \frac{v_0^2 r_0}{\gamma M} - 1$$

وهي العلاقة المطلوبة للاختلاف المركزي لمسار الكواكب

ملحوظة:

لإثبات أن $h = v_0 r_0$ عند $t = 0$ (في البداية) نتبع الآتي:

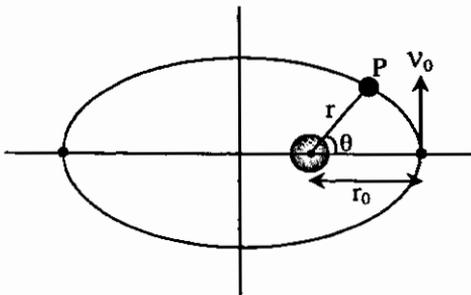
حيث أن: $h = r^2 \dot{\theta} = r(r\dot{\theta})$ فعند $t = 0$ فإن: $h = r(r\dot{\theta})|_{t=0} = r_0 v_0$

قوانين كبلر لحركة الكواكب:

وضع كبلر ثلاثة قوانين تنظم حركة الكواكب في المجموعة الشمسية، وهذه

القوانين الثلاثة هي:

(1) قانون القطع المخروطي (Conic section law)



"يتحرك الكوكب في

مسار على شكل قطع ناقص

تقع الشمس في إحدى بؤرتيه"

$$r = \frac{r_0 (1 + e)}{1 + e \cos \theta}$$

معادلة القطع هي:

حيث r_0 هي نقطة الحضيض (عند بداية الحركة $t=0$)، والاذ تلاف المركز e

يعطى بالعلاقة: $e = \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M} - 1$ حيث v_0 قيمة السرعة للكوكب عند $t=0$ ، M كتلة

الشمس، γ ثابت الجذب العام.

(2) قانون المساحات المتساوية (Equal area law)

"المستقيم الواصل من الكوكب P إلى الشمس (\bar{r}) يمسح مساحات متساوية في أزمنة متساوية"

رياضياً: معدل تغير المساحة بالنسبة للزمن يكون ثابتاً أى أن: $\frac{dA}{dt} = \text{const}$

(3) قانون الزمن - المسافة (Time-distance law)

يرتبط الزمن الدورى لكوكب T (وهو الزمن الذى يأخذه الكوكب فى دورة كاملة حول الشمس) مع نصف المحور الأكبر لمسار الكوكب (a) بالعلاقة:

$$T^2 = \lambda a^3 \quad , \quad \lambda = \frac{4\pi^2}{\gamma M} \quad \text{حيث}$$

ومنها نرى أن النسبة $\lambda = \frac{T^2}{a^3}$ أى أنها نسبة ثابتة لكل الكواكب المعروفة.

كما أن: $T^2 \propto a^3$ أى أن مربع الزمن الدورى يتناسب مع مكعب نصف المحور الأكبر (a).

أرقام هامة: كتلة الأرض $m = 5.975 \times 10^{24} \text{ kg}$

كتلة الشمس $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

الكواكب (Planets):

نذكر فى الجدول الآتى (للمعرفة العامة) الكواكب التسعة المعروفة والبارامترات الخاصة بكل منهما.

T (الزمن الدورى)	a (بالمليون كم)	الاختلاف المركزى لمساره (e)	الكوكب
365.256 يوم	149.57	0.0167	1. الأرض Earth
224.701 يوم	108.11	0.0068	2. الزهرة Venus
87.967 يوم	57.95	0.2058	3. عطارد Mercury
1.881 سنة	227.84	0.0934	4. المريخ Mars
11.861 سنة	778.14	0.0484	5. المشترى Jupiter
29.457 سنة	1427.00	0.0543	6. زحل Saturn
84.008 سنة	2870.30	0.0460	7. يورانوس Uranus
164.784 سنة	4499.90	0.0082	8. نبتون Neptune
248.350 سنة	5909.00	0.2481	9. بلوتو Pluto

أمثلة محلولة

مثال (1): إثبات قانون كبلر الأول:

إذا تحرك كوكب في مسار مركزي حول الشمس تحت تأثير قوة جذب مركزي تتناسب عكسيا مع مربع بعد الكوكب عن الشمس، أثبت أن مسار الكوكب هو قطع مخروطي معادلته $r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}$ حيث $\ell = (1 + e)r_0$ هي نصف الوتر البؤري العمودي للقطع، وأن الاختلاف المركزي هو $e = \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M} - 1$ ، حيث r_0 هي نقطة الحضيض (عند $t=0$)، v_0 قيمة سرعة الكوكب عند $t=0$ ، M كتلة الشمس، γ ثابت الجذب العام.

الحل:

المعادلة التفاضلية للمسارات المركزية هي [أنظر الجزء الأول من هذا الكتاب]:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{f}{h^2 u^2} \quad (1)$$

حيث $u = \frac{1}{r}$ ، f هي القوة لوحدة الكتلة، h ثابت المسارات المركزية.

قوة الجذب المركزي لكتلة قدرها m هي $F = -\frac{\mu m}{r^2}$ حيث $\mu = \gamma M$

ومنها نجد أن: $f = -\frac{\mu}{r^2} = -\mu u^2$ في (1):

$$\therefore \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu u^2}{h^2 u^2} = -\frac{\mu}{h^2} \rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u + \frac{\mu}{h^2} \quad (2)$$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو مجموع حلين ويعطى بالصورة:

$$u = A \cos(\theta + \varepsilon) + \frac{\mu}{h^2} \quad (3)$$

ومنها نحصل على:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{A \cos(\theta + \epsilon) + \frac{\mu}{h^2}}$$

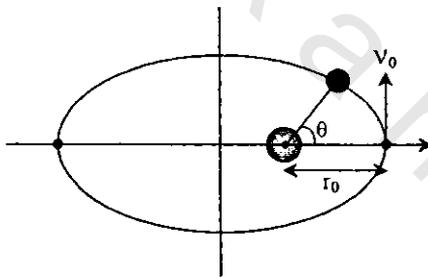
$$= \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + A \frac{h^2}{\mu} \cos(\theta + \epsilon)} = \frac{\ell}{1 + e \cos(\theta + \epsilon)} \quad (4)$$

وهي معادلة قطع مخروطي: نصف وتره البؤري العمودي $\ell = \frac{h^2}{\mu}$ واختلافه e

$$e = A \frac{h^2}{\mu}$$

ولإيجاد الثابتين المجهولين A, ϵ

في البداية: ندرج الكوكب بسرعة v_0 من الموضع $(r_0, 0)$ حيث $\theta = 0$ ، $\frac{du}{d\theta} = 0$ ، وحيث أن:



$$u = A \cos(\theta + \epsilon) + \frac{\mu}{h^2} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = -A \sin(\theta + \epsilon) \quad (6)$$

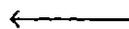
بالتعويض من الشروط الابتدائية في (6)، (5) نحصل على:

$$\frac{1}{r_0} = A \cos \epsilon + \frac{\mu}{h^2} \quad (7)$$

$$0 = -A \sin \epsilon \quad (8)$$

بحل (7)، (8) نحصل على الآتي:

$$\therefore \boxed{\epsilon = 0}$$



$$\sin \epsilon = 0 : (8) \text{ من}$$

وبالتعويض في (7):

$$\frac{1}{r_0} = A + \frac{\mu}{h^2} \quad \therefore \quad A = \frac{1}{r_0} - \frac{\mu}{h^2}$$

وبذلك تصبح معادلة القطع (4) بالصورة:

$$\ell = \frac{h^2}{\mu} \quad \text{حيث} \quad , \quad r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}$$

ولما كان $\ell = a(1 - e^2)$ ، وعند نقطة الحضيض فإن:

$$r = r_0 = a(1 - e)$$

$$\therefore \quad \ell = a(1 - e)(1 + e) = r_0(1 + e)$$

فبالتعويض في معادلة القطع نحصل على:

$$\boxed{r = \frac{r_0(1 + e)}{1 + e \cos \theta}}$$

ولإيجاد الاختلاف المركزي:

حيث أن:

$$\mu = \gamma M, \quad \ell = r_0(1 + e), \quad \therefore \quad h^2 = \mu \ell = \gamma M a(1 - e^2)$$

$$\therefore \quad h^2 = \gamma M r_0(1 + e) \quad \therefore \quad 1 + e = \frac{h^2}{\gamma M r_0} \quad \therefore \quad e = \frac{h^2}{\gamma M r_0} - 1$$

وبالتعويض عن $h = v_0 r_0$ (عزم السرعة في البداية)

$$\therefore \quad \boxed{e = \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M} - 1}$$

وهو المطلوب

مثال (2): إثبات قانون كيبلر الثاني:

أثبت أن: معدل التغير في المساحة بالنسبة للزمن يساوى مقدار ثابتا بمعنى

أن $\frac{dA}{dt} = \text{const}$ (وهذا يعنى أن المستقيم الواصل من الشمس إلى الكوكب يمسح

مساحات متساوية في أزمنة متساوية).

الحل:

حيث أن ثابت المسارات المركزية $h = r^2\dot{\theta}$ فيمكن إثبات أنه في البداية ($t = 0$) فإن:

$$h = r^2\dot{\theta}|_{t=0} = r(r\dot{\theta})|_{t_0} = r_0 v_0$$

ولما كان عنصر المساحة في الإحداثيات القطبية: $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

فإن معدل تغير المساحة:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} r_0 v_0 = \text{const.}$$

وهو المطلوب.

مثال (3): اثبات قانون كبلر الثالث:

أثبت أن العلاقة بين الزمن الدوري لحركة الكوكب (T) ونصف المحور

$$\text{الأكبر لمسار الكوكب (a) هي: } T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3 \text{ أى أن: } T^2 \propto a^3$$

الحل:

عنصر المساحة في الإحداثيات القطبية هو: $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} r_0 v_0$$

$$\therefore dA = \frac{1}{2} r_0 v_0 dt$$

وتكون المساحة التي بمسحها الكوكب خلال حركته على القطع الناقص في الزمن من O إلى T هي:

$$A = \int dA = \frac{1}{2} r_0 v_0 \int_0^T dt = \frac{1}{2} r_0 v_0 T$$

وهذه المساحة هي مساحة القطع الناقص والتي تساوى $A = \pi ab$ [من الهندسة]

$$\therefore \pi ab = \frac{1}{2} r_0 v_0 T \rightarrow T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0} = \frac{2\pi ab}{h} \quad (1)$$

حيث $h = r_0 v_0$ وأيضاً فإن $h^2 = \mu \ell$ حيث $\mu = \gamma M$ ، ℓ هو نصف الوتر البؤرى العمودى ويرتبط بنصفى المحور الأكبر (a) والأصغر (b) بالعلاقة:

$$\ell = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore h^2 = \gamma M \frac{b}{a} \rightarrow h = b \sqrt{\frac{\gamma M}{a}}$$

بالتعويض فى (1):

$$\therefore T = \frac{2\pi ab}{b \sqrt{\frac{\gamma M}{a}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} a^{3/2}$$

وبالتربيع فإن:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3$$

أى أن $T^2 \propto a^3$ أى أن مربع الزمن الدورى يتناسب مع مكعب نصف المحور الأكبر لمسار الكوكب (القطع الناقص). وهو المطلوب

مثال (4):

أوجد سرعة الأرض v_0 فى مدارها عند نقطة الحضيض (أقرب نقطة من

الشمس)، علماً بأن: بعد الأرض عن الشمس عند تلك النقطة يساوى 149.577

مليون كم وأن الاختلاف المركزى لمدار الأرض هو $e = 0.0167$

(عجلة الجاذبية $\gamma = 6.6726 \times 10^{-11}$ ، كتلة الشمس $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg)

الحل:

$$\text{من العلاقة } e = \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M} - 1 \text{ فإن:}$$

$$v_0^2 = \frac{\gamma M}{r_0} [e + 1]$$

$$= \frac{(6.6726 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}{149.577 \times 10^6} [0.0167 + 1] = \frac{13.278 \times 10^{19}}{149.577 \times 10^6} [0.0167]$$

$$= 0.8817 \times 10^{13} [1.0167] = 0.09025 \times 10^{13}$$

$$= 9.03 \times 10^8 \longrightarrow v_0 \simeq \sqrt{9.03 \times 10^8} \simeq 3 \times 10^4 \text{ m/sec.}$$

مثال (5):

إذا كان الزمن الدوري لدوران القمر حول الأرض هو $T=2.36055 \times \text{sec}$ ، 10^6 ، أوجد بعد القمر عن مركز الأرض.

الحل:

باعتبار القمر تابع للأرض فهو يدور حول الأرض في مسار على شكل قطع ناقص مثل الأرض التي تدور حول الشمس كتابع لها، والمطلوب هنا بعد القمر عن مركز الأرض أي نصف المحور الأكبر لمسار القمر (a). فمن قانون كبلر الثالث:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3 \longrightarrow a^3 = \frac{\gamma M}{4\pi^2} T^2$$

وهنا الكمية M هي كتلة الأرض (باعتبار القمر تابع للأرض)

$$\therefore a^3 = \frac{(6.6726 \times 10^{-11})(5.475 \times 10^{24})}{4 \times (3.14)^2} (2.36055 \times 10^6)^2$$

$$\simeq 5.627 \times 10^{25}$$

$$\therefore a \approx \sqrt[3]{5.627 \times 10^{25}} \approx 3.832 \times 10^8 \text{ m} \approx 383200 \text{ km}$$

مثال (6):

إذا كانت أكبر وأصغر سرعة لقمر يدور حول الأرض هما على الترتيب ب 29.2 km/se , 30 km/se فأوجد الاختلاف المركزي لمدار هذا القمر.

الحل:

أكبر سرعة تكون عند نقطة الحضيض A التي تبعد مسافة r_A عن الأرض (الموجودة عند بؤرة القطع) حيث $r_A = a(1 - e)$

وأقل سرعة تكون عند نقطة الأوج B التي تبعد مسافة r_B عن الأرض

$$\text{حيث } r_B = a(1 + e)$$

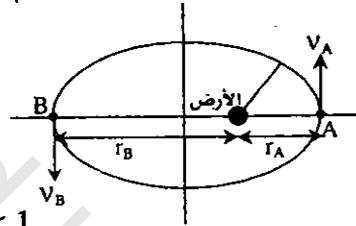
فمن قانون ثبوت عزم السرعة حول بؤرة القطع نجد أن:

$$v_A r_A = v_B r_B = h$$

$$\therefore 30 \alpha (1 - e) = 29.2 \alpha (1 + e)$$

$$\therefore 30 - 30e = 29.2 + 29.2e$$

$$\therefore 0.8 = 59.2e \longrightarrow e = 0.0135 < 1$$



فالمسار يكون على شكل قطع ناقص.

مثال (7):

إذا كان الزمن الدوري لدوران كوكب المريخ حول الشمس يساوي 687 يوماً وبعده المتوسط عن الشمس يساوي 141.5 مليون ميل، وكان بعد أحد أقماره (ديموس) عنه 14600 ميل والزمن الدوري له 30 ساعة، 18 دقيقة، فائدت أن كتلة الشمس أكبر بقليل من 3 مليون مرة كتلة المريخ.

الحل:

الزمن الدوري للمريخ (من قانون كبلر الثالث):

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} a_1^{3/2} \quad (1)$$

حيث M هي كتلة الشمس (المريخ تابع للشمس)
الزمن الدورى للقمر ديموس:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma m}} a_2^{3/2} \quad (2)$$

حيث m كتلة المريخ (القمر تابع للمريخ)
من (1)، (2) بالقسمة:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m}{M}} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{3/2} \rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2 = \frac{m}{M} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^3$$

$$\therefore \frac{M}{m} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^3$$

$$= \left(\frac{30 \times 60 \times 60 + 18 \times 60}{678 \times 24 \times 60 \times 60} \right)^2 \times \left(\frac{14600}{141500000} \right)^3$$

$$= 3.074 \times 10^6$$

أى أن كتلة الشمس $(M) = 3.074$ مليون مرة قدره كتلة المريخ (m) أى أكبر بكثير
من 3 مليون مرة قدر تلك الكتلة.
وهو المطلوب.

مسائل على حركة الكواكب وتوابعها

1. إذا تحرك كوكب في مسار دائري فأوجد قيمة السرعة الابتدائية له v_0 من العلاقة

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M} - 1$$

2. إذا كانت أكبر وأصغر سرعة لكوكب يدور حول الشمس هما على الترتيب 90 ft/sec, 110 ft/sec والزمن الدوري للكوكب يساوى 20 دقيقة، فأوجد الاختلاف المركزي e لمسار الكوكب وطول محوره الأكبر (2a).

3. باعتبار أن الزمن الدوري للأرض حول الشمس هو 365.25 يوم وبعدها عن الشمس هو 93 مليون ميل والزمن الدوري للقمر حول الأرض هو 27.32 يوم ومتوسط بعده عن الأرض هو 240 ألف ميل فاثبت أن كتلة الشمس أكبر بقليل من 325 ألف مرة قدر كتلة الأرض بالتقريب.

4. إذا كان زمن الدورة الكاملة لدوران الأرض حول الشمس 365 يوم وكانت أبعد مسافة للأرض عن مركز الشمس هي $152 \times 10^9 m$ وأقرب مسافة هي $147 \times 10^9 m$ ، أوجد ما يلي علماً بأن ثابت الجاذبية $\gamma = 6.673 \times 10^{-11}$ (i) كتلة الشمس.

(ii) الاختلاف المركزي لمسار الأرض حول الشمس.

(iii) سرعة دوران الأرض حول الشمس.

(iv) المعادلة القطبية لمسار الأرض حول الشمس.

5. إذا بدأ تابع صاروخي دورانه حول الأرض في مسار دائري نصف قطره r_0 وذلك بسرعة v_0 ، ثم حدث انفجار فجائى فى محرك الصاروخ مما تسبب فى زيادة سرعته بنسبة 10% وبالتالي تغير شكل المدار والمطلوب إيجاد معادلة المدار الجديد للتابع وكذلك أبعد مسافة يصل إليها التابع (مسافة الأوج) عن مركز الأرض.

6. يتحرك تابع صاروخي من الأرض مبتدئاً بمدار دائري فإذا كان المطلوب وضع هذا التابع فى مدار جديد له مسافة أوج تساوى 240 ألف ميل فأحسب نسبة السرعة الجديدة إلى سرعته فى المدار الدائري علماً بأن نصف قطر المدار الدائري تساوى 4 آلاف ميل، وإذا كانت نسبة السرعة إلى السرعة المحسوبة أعلاه هي 0.99 فأوجد بعد نقطة الأوج فى هذه الحالة.

حلول المسائل على حركة الكواكب وتوابعها

حل المسألة (١):

في حالة الدائرة فإن الاختلاف المركزي $e=0$ ومن العلاقة المعطاة:

$$0 = \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M} - 1 \quad \therefore \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M} = 1 \rightarrow v_0^2 = \frac{\gamma M}{r_0}$$

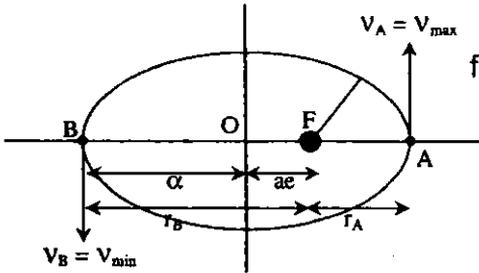
$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}}$$

وإذا كانت $\gamma M = \mu$ فإن:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$$

وحيث أن r_0 ، μ ثابتان فإن الكوكب المتحرك في المسار الدائري يتحرك بـ سرعة ثابتة v_0 تساوي سرعته الابتدائية، هذا إذا لم يحدث أى خلل في شكل المسار أثناء الحركة تسبب الزيادة في سرعة الكوكب وبالتالي يتغير شكل المدار.

حل المسألة (٢):



من قانون ثبوت عزم السرعة حول البؤرة f

$$\text{فإن: } v_A r_A = v_B r_B$$

$$\therefore 110 \times a(1 - e) = 90 \times a(1 + a)$$

$$\boxed{e = 0.1} \quad \text{ومنها:}$$

الزمن الدورى (من قانون كبلر الثالث):

$$T^2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} = 20 \times 60$$

وبالتربيع نحصل على:

$$\frac{4\pi^2}{\mu} a^3 = 400 \times 60 \times 60 = 1440000 \quad (1)$$

وإذا كانت السرعة عند نهايتى قطر ثابت فى القطع هما v_1 ، v_2 فمن خواص القطع

$$v_1 v_2 = \frac{\mu}{a} \quad \text{الناقص فإن حاصل ضربهما:}$$

(أخذ كمثال فى الجزء الأول من هذا الكتاب)

$$\therefore \frac{\mu}{a} = (90)(110) = 9900$$

$$\therefore \mu = 9900a \quad (2)$$

من (1)، (2) نحصل على:

$$4\pi^2 \frac{a^3}{9900a} = 1440000$$

$$\therefore a^2 = \frac{9900 \times 1440000}{4(3.14)^2} = 3564 \times 10^5$$

$$\therefore a = \sqrt{3564 \times 10^5} = 187 \times 10^2$$

ويكون طول المحور الأكبر هو:

$$(قدم) \quad 2a = 374 \times 10^2 \text{ ft}$$

حل المسألة (3):

الزمن الدورى للقمر:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma m}} a_1^{3/2} \quad (2)$$

حيث m كتلة الأرض (القمر تابع للأرض)

الزمن الدورى للأرض:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} a_2^{3/2} \quad (1)$$

حيث M كتلة الشمس (الأرض تابع للشمس)

من (1)، (2) بالقسمة:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{M}{m} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{3/2}} \rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2 = \frac{M}{m} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^3$$

$$\therefore \frac{M}{m} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^3$$

$$= \left(\frac{27.32 \times 24 \times 60 + 60}{365.25 \times 24 \times 60 \times 60} \right)^2 \times \left(\frac{93000000}{240000} \right)^3$$

$$= (0.0559) \times (387.5)^3 = 325.257$$

أي أن كتلة الشمس أكبر بقليل من 325 ألف مرة قدر كتلة الأرض.

وهو المطلوب

حل المسألة (4):

حيث أن: $r_A + r_B = 2a$

$$(147 + 152) \times 10^9 = 2a \therefore$$

$$\therefore a = 149.5 \times 10^9 \text{ m}$$

ولإيجاد كتلة الشمس (M)

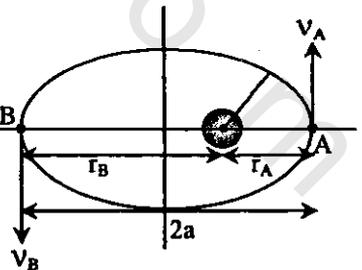
من قانون كبلر الثالث نجد أن:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}, \quad \mu = \gamma M$$

$$\therefore \mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \frac{4(3.14)^2 (149.5 \times 10^9)^3}{(365 \times 24 \times 60 \times 60)^2}$$

$$= 1.326 \times 10^{20} = \gamma M$$

$$\therefore M = \frac{\mu}{\gamma} = \frac{1.326 \times 10^{20}}{6.673 \times 10^{-11}} = 1.987 \times 10^{30} \text{ kgm}$$



ولإيجاد e (الاختلاف المركزي لمدار الأرض حول الشمس)

عند A (نقطة الحضيض) فإن:

$$r_A = a(1 - e) \quad \therefore 147 \times 10^9 = 149.5 \times 10^9 [1 - e]$$

$$\boxed{e = 0.017} \quad \text{ومنها}$$

ولإيجاد سرعة دوران الأرض حول الشمس:

هناك سرعتان: أكبر سرعة $v_A = v_{\max}$ وأقل سرعة $v_B = v_{\min}$ ومن قانون ثبات

عزم السرعة حول البؤرة فإن:

$$r_A v_A = r_B v_B = h$$

ومن معادلة الاختلاف المركزي:

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1$$

$$= \frac{r_A v_A^2}{\mu} - 1 \rightarrow v_A^2 = \frac{\mu}{r_A} (e + 1)$$

وبالتعويض عن قيم e , r_A , μ نحصل على:

$$v_A^2 = \frac{1.326 \times 10^{20}}{147 \times 10^9} (0.017 + 1)$$

$$v_A = 30.288 \times 10^3 \text{ m/sec.} \quad \text{ومنها}$$

ولما كان $v_A r_A = v_B r_B$ فإن

$$\therefore v_B = v_A \frac{r_A}{r_B} = 30.288 \times 10^3 \times \frac{147 \times 10^9}{152 \times 10^9}$$

$$= 29.275 \times 10^3 \text{ m/sec.}$$

ولإيجاد المعادلة القطبية لمسار الأرض حول الشمس:

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}$$

$$\ell = \frac{h^2}{\mu} = \frac{(v_A r_A)^2}{\mu} \quad \text{حيث}$$

$$= \frac{(30.228 \times 10^3 \times 147 \times 10^9)^2}{1.326 \times 10^{20}} = 149.499 \times 10^9 \text{ m}$$

وتكون المعادلة القطبية للمسار:

$$r = \frac{149.499 \times 10^9}{1 + 0.017 \cos \theta}$$

وهو المطلوب.

حل المسألة (5):

حيث أن: $e = \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M} - 1 = \frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1$ والمسار الدائري فإن $e=0$ ومنهما:

$$\therefore \frac{r_0 v_0^2}{\mu} = 1 \rightarrow v_0^2 = \frac{\mu}{r_0}$$

وباعتبار أن الحركة في المسار بدأت بالسرعة v_c وهي ثابتة فإن:

$$v_c^2 = \frac{\mu}{r_0}$$

وبأخذ هذه السرعة هي سرعة التابع الصاروخي في مداره الدائري قبل تعرضه للانفجار، وبعد الانفجار زادت سرعته بنسبة 10% ففرض أن التابع بعد الانفجار تحرك بسرعة ابتدائية v_0 في مساره الجديد فإن:

$$v_0 = 100\% v_c + 10\% v_c = 110\% v_c = 1.1 v_c$$

ولإيجاد المعادلة القياسية للمدار بدلالة v_0 ، v_c :

حيث أن: $e = \frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1$ وأن: $v_c^2 = \frac{\mu}{r_0}$ فمن تلك المعادلات نجد أن:

$$\therefore e = \frac{v_0^2}{v_c^2} - 1 \quad \therefore e + 1 = \left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \ell &= a(1 - e^2) = r_0(1 + e) \\ &= r_0 \left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2 \end{aligned}$$

وتصبح معادلة المدار القياسية بالصورة:

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta} = \frac{r_0 \left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2}{1 + \left[\left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2 - 1 \right] \cos \theta} \quad (1)$$

وعند أقصى نقطة (نقطة الأوج) فإن: $\theta = 180^\circ$ ، $r = r_1$

$$\therefore r_1 = \frac{r_0 \left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2}{1 + \left[\left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2 - 1 \right] (-1)} = \frac{r_0 \left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2}{2 - \left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2} \quad (2)$$

في المسألة:

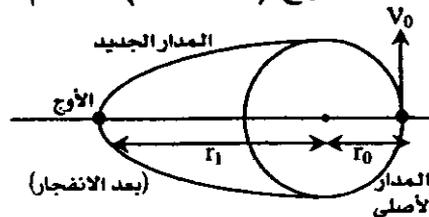
المطلوب المعادلة القطبية للمدار الجديد بعد الانفجار حيث $\frac{v_0}{v_c} = 1.1$

فبالتعويض في (1) نحصل على:

$$\therefore r = r_0 \frac{(1.1)^2}{1 + [(1.1)^2 - 1] \cos \theta} = \frac{1.21 r_0}{1 + 0.21 \cos \theta}$$

ولإيجاد مسافة الأوج (أبعد مسافة) نستخدم العلاقة (2):

$$\therefore r_1 = \frac{r_0 (1.1)^2}{2 - (1.1)^2} = 1.53 r_0$$



حل المسألة (6):

إذا كانت r_1 هي مسافة الأوج في المدار الجديد وكانت r_0 هي نصف قطر المدار الدائري فإن:

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{240000}{4000} = 60 \quad (1)$$

ومن العلاقة:

$$r_1 = \frac{r_0 \left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2}{2 - \left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2}$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_0} = \frac{\left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2}{2 - \left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2} = \frac{x^2}{2 - x^2} \quad (2), \quad x = \frac{v_0}{v_c} \text{ حيث}$$

من (1), (2):

$$\therefore 60 = \frac{x^2}{2 - x^2} \quad \therefore x^2 = 120 - 60x^2 \quad \therefore 61x^2 = 120$$

$$\therefore x^2 = \frac{120}{61} = \left(\frac{v_0}{v_c} \right)^2 \quad \therefore \frac{v_0}{v_c} = \sqrt{\frac{120}{61}} = 1.4026 \quad (3)$$

وهي نسبة السرعة الجديدة v_0 إلى السرعة في المدار الدائري v_c .

الجزء الثاني:

إذا كانت نسبة السرعة = 0.99 من نسبة السرعة المحسوبة في العلاقة (3)،

فإن $\left(\frac{v_o}{v_c}\right)$ في هذه الحالة تكون:

$$\left(\frac{v_o}{v_c}\right) = 0.99 \times 1.4026 = 1.389$$

وبالتعويض في معادلة نقطة الأوج نحصل على:

$$r_1 = r_o \frac{\left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2}{2 - \left(\frac{v_o}{v_c}\right)^2} = (4000) \frac{(1.389)^2}{2 - (1.389)^2} = 1.09188 \times 10^5 \text{ miles}$$

وهو بعد نقطة الأوج في هذه الحالة.

وهو المطلوب.

ثالثاً: حركة الأقمار الصناعية وسفن الفضاء

مقدمة عن الأقمار الصناعية وسفن الفضاء:

عندما اكتشف كبلر قوانينه الثلاثة (حوالي عام 1600م) طبقها على الكواكب التي كانت معروفة في وقته (6 كواكب فقط)، غير أن التطور الحديث في الميكانيكا السماوية بين أن تلك القوانين تصلح للتطبيق على أى جسيم يتحرك في مجال جسيم آخر تحت تأثير قوة تخضع لقانون التربيع العكسي $\left(F \propto \frac{1}{r^2} \right)$ ، وبذلك تم تطبيقهما على المذنبات التي هي أجرام سماوية تتحرك في مدارات حول الشمس، وعلى مدار الأقمار حول الكواكب ومنها القمر الذي يدور حول أرضنا، وكذلك على مدار بعض سفن الفضاء مثل سفينة الفضاء أبولو 8 التي تدور حول القمر.

وفي عام 1957 تم إرسال أول قمر صناعي (Satellite) يدور حول الأرض في مدار محدد وهو القمر سبوتنيك I وفي العام التالي (1958) تم إطلاق قمر صناعي آخر للدوران حول الأرض هو فانجارد I (Vanguard I)، ويهتم هذا القمر بالعديد من الدراسات والتحقيقات العلمية مثل تأثير جاذبية الشمس والقمر على مدارات تلك الأقمار التي تدور حول الأرض ومثل دراسة تأثير ضغط الإشعاع الشمسي على مدار القمر الصناعي مما يسبب تشويه المدار.

كما تم إرسال أقمار صناعية حول بعض الكواكب مثل القمر الصناعي فايكنج I (Viking I) الذي أرسل لكي يدور حول المريخ بهدف دراسة سطح هذا الكوكب وتقدير بعض القياسات الخاصة به.

وتدور الأقمار الصناعية في مدارات على شكل قطع ناقص (عادة) ويطبق عليها قوانين كبلر كما تطبق على الكواكب المعروفة في مداراتها حول الشمس.

أما سفن الفضاء التي تدور حول الأرض فهي تسير في مدارات على شكل قطع مخروطي (ناقص أو مكافئ أو زائد) أو دائرة وغالباً ما تطلق في ذاتها (صواريخ دفع) أثناء حركتها فترتفع بذلك أو تنخفض سرعتها ويتغير شكل مدارها.

الفرق بين القمر الصناعي (Satellite) والمقذوف (Projectile):

كلاهما يتحرك تحت تأثير جذب الأرض، غير أن القمر الصناعي يتحرك في مسار بعيداً عن سطح الأرض بما يكفي لجعل قوة جذب الأرض له متغيرة بمعنى أن وزنه يتغير بحسب بعده عن مركز الأرض.

فإذا كانت كتلة القمر

الصناعي m وكتلة الأرض M

والمسافة بين القمر ومركز الأرض

هي: r ، فإن مقدار قوة الجذب بينهما

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

حيث γ ثابت الجذب العام

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{r}$$

ومن قانون نيوتن الثاني:

$$\frac{-\gamma mM}{r^2} \hat{r} = m(a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta})$$

حيث a_r ، a_θ مركبتا عجلة القمر الصناعي في الاتجاهين \hat{r} ، $\hat{\theta}$.

حل معادلة حركة القمر الصناعي في الاتجاه العرضي $\hat{\theta}$:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

ولما كان $a_\theta = 0$ وبكتابة $w = \dot{\theta}$ أي أن $\dot{w} = \ddot{\theta}$ فإن:

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad \therefore 2r\dot{w} = -r\dot{w} \rightarrow 2w \frac{dr}{dt} = -\frac{rdw}{dt}$$

$$\therefore 2wdr = -rdw$$

$$\therefore \frac{2dr}{dt} = -\frac{dw}{w} \rightarrow \int 2 \frac{dr}{r} = -\int \frac{dw}{w} \rightarrow \ln r = -\ln w + c$$

$$\therefore \ln r^2 = -\ln w + \ln c \quad \therefore \ln wr^2 = \ln c$$

$$\therefore wr^2 = C \longrightarrow \boxed{rv_\theta = C} \quad \left| \begin{array}{l} v_\theta = r\dot{\theta} = rw \\ \therefore w = \frac{v_\theta}{r} \\ w^2 r = rv_\theta \end{array} \right.$$

أى أن القمر الصناعي يتحرك بحيث يكون حاصل ضرب بعده عن مركز الأرض والمركبة القطرية لسرعته ثابتة وهو قانون ثبوت عزم السرعة، بحيث أنه في بداية الحركة مثلاً يكون: $r_0(v_\theta)_0 = C$

حل معادلة حركة القمر الصناعي في الاتجاه القطري أو المركزي (\hat{r}) :

معادلة الحركة:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

$$\therefore \frac{-\gamma M}{r^2} = \ddot{r} - r \left(\frac{C}{r^2} \right)^2 = \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}$$

$$\ddot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2} + \frac{C^2}{r^3} = v_r \frac{dv_r}{dr} \quad \left| \begin{array}{l} \ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dr}{dt} \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \\ = v_r \frac{dv_r}{dr} \end{array} \right.$$

$$\therefore v_r dv_r = - \left(\frac{\gamma M}{r^2} + \frac{C^2}{r^3} \right) dr$$

وبإجراء التكامل:

$$\therefore \frac{1}{2} v_r^2 = \frac{\gamma M}{r} - \frac{C^2}{2r^2} + B \quad (1)$$

إيجاد الثابتين B, C : من الشروط الابتدائية (لحظة إطلاق القمر):

$$\vec{r} = r_0 \hat{r} \quad , \quad \vec{v}_0 = v_0 \hat{\theta}$$

نجد أن:

$$B = \frac{1}{2} v_0^2 - \frac{\gamma M}{r} \quad , \quad C = r_0 v_0 \quad \therefore$$

بالتعويض في (1):

$$\therefore \left(\frac{v_r}{v_0} \right)^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \left[\left(1 + \frac{r_0}{r} \right) - \frac{2\gamma M}{r_0 v_0^2} \right] \quad (2)$$

إيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه القمر:

عند أقصى ارتفاع h_{\max} يكون الموضع $\vec{r} = (R + h_{\max}) \hat{r} = r_{\max} \hat{r}$

والسرعة: $\vec{v} = v_{\max} \hat{\theta}$

وتكون المركبة القطرية للسرعة تساوى صفرا أى أنه: عند $r = r_{\max}$ فإن $v_r = 0$

$$r_{\max} = \frac{r_0}{\frac{2\gamma M}{r_0 v_0^2} - 1} \quad \text{بالتعويض في (2) نحصل على:}$$

$$\text{وبوضع المقدار الثابت } \varepsilon = \frac{2\gamma M}{r_0 v_0^2} \text{ فإن:}$$

$$\boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{\varepsilon - 1}} \quad (3)$$

وهذا الثابت يعتمد مقامه على الشروط الابتدائية لإطلاق القمر الصناعى ويمكن كتابة

هذا الثابت بدلالة عجلة الجاذبية عند سطح الأرض (أى الوزن) حيث:

$$mg_0 = \frac{\gamma mM}{R^2} \quad \therefore \quad \gamma M = g_0 R^2$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{2g_0 R^2}{r_0 v_0^2}$$

حيث:

$$g_0 = 9.81 \quad R = 6370 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\therefore 2g_0 R^2 = 2(9.8)(6370 \times 10^3)^2 = 796 \times 10^{12}$$

وتصبح العلاقة (2):

$$\left(\frac{v_r}{v_0}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left[\left(1 + \frac{r_0}{r}\right) - \varepsilon\right]$$

أمثلة محلولة على حركة الأقمار وسفن الفضاء

مثال (1):

إذا كانت T (الزمن الدوري) تقاس بالثانية، وكان a (نصف المحور الأكبر

للمدار) يقاس بالمتر، فأوجد قيمة $\lambda = \frac{T^2}{a^3}$ في الحالتين الآتيتين:

(i) الكواكب في المجموعة الشمسية.

(ii) الأقمار الصناعية في مداراتها حول الأرض.

الحل:

الكمية $\lambda = \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$ هي كمية ثابتة للكواكب في المجموعة الشمسية

باعتبار M هي كتلة الشمس ($M = M_{\text{sun}} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$) ولالأقمار الصناعية

حول الأرض باعتبار M هي كتلة الأرض ($M = M_{\text{earth}} = 5.975 \times 10^{27} \text{ kg}$).

وباعتبار أن ثابت الجذب العام $\gamma = 6.672 \times 10^{-11}$ فإن:

$$(i) \text{ للكواكب: } \lambda = \frac{4 \times (3.14)^2}{(6.6727 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}$$

$$= 2.9710^{-19} \text{ sec}^2/\text{m}^3$$

$$(ii) \text{ للأقمار الصناعية: } \lambda = \frac{4 \times (3.14)^2}{(6.6727 \times 10^{-11})(5.975 \times 10^{24})}$$

$$= 9.902 \times 10^{-14} \text{ sec}^2/\text{m}^3$$

مثال (2):

إذا كانت كتلة كوكب المريخ $M = 6.418 \times 10^{23} \text{ kg}$ وكان القمر الصناعي فايكنج I الذى كان يدور حول الكوكب فى زمن دورى 1639min، أوجد نصف المحور الأكبر لمدار هذا القمر.

الحل:

$$T = 1639 \text{ min} = 98340 \text{ sec.}$$

$$M = 6.418 \times 10^{23} \text{ kg, } \gamma = 6.6726 \times 10^{-11}$$

ومن قانون كبلر الثالث:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$$

$$\therefore a^3 = \frac{\gamma M T^2}{4\pi^2} = \frac{6.6726 \times 10^{-11} (6.418 \times 10^{23}) (98340)^2}{4(3.14)^2}$$

$$\approx 1.049 \times 10^{22}$$

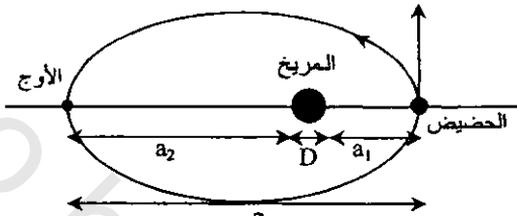
$$\therefore a = \sqrt[3]{1.049 \times 10^{22}} \approx 2.19 \times 10^7 \text{ m} = 21900 \text{ km}$$

وهو المطلوب.

مثال (3):

إذا كان القمر الصناعي فايكنج I على بعد 1499 km من سطح كوكب المريخ عند أقرب نقطة فى المسار وعلى بعد 35800 km عند أبعد نقطة فى المسار. أوجد بالتقريب قطر كوكب المريخ، حيث $a = 21900 \text{ km}$

الحل:



من الرسم المبين نلاحظ أن:

$$2a = a_1 + D + a_2$$

حيث a_1 أقرب بعد (الحضيض)، a_2 أبعد نقطة (الأوج)، D قطر الكوكب.

$$\therefore 2(21900) = 1499 + D + 35800$$

ومنهما $D = 6501 \text{ km}$ وهو قطر كوكب المريخ.

مثال (4):

من نقطة A على ارتفاع $h_A = 500 \text{ km}$ من سطح الأرض أطلق قمر صناعي بسرعة $v_A = 36900 \text{ km/h}$ في اتجاه عمودي على الخط الأفقي المار بمركز الأرض ليتخذ مدارا حول الأرض، فإذا كان نصف قطر الأرض $R = 6370 \text{ km}$ وعجلة الجاذبية على سطحها $g = 9.81 \text{ m/sec}^2$ فأوجد:

(i) الاختلاف المركزي e للمدار وعين نوعه.

(ii) أقصى ارتفاع h_B للقمر فوق سطح الأرض.

الحل:

إذا كان:

r_A هو أقرب بعد للقمر من مركز الأرض

h_A هو ارتفاع نقطة الانطلاق من سطح الأرض

R نصف قطر الأرض

فمن هندسة الشكل:

$$r_A = R + h_A = 6370 + 500 = 6870 \text{ km}$$

لإيجاد المعامل μ : عجلة الجاذبية:

$$g = 9.81 \text{ m/sec}^2 = \frac{9.81}{1000} \times (60 \times 60)^2$$

$$= 127138 \text{ km/hr}^2$$

للتحويل من متر إلى كم تقسم على 1000 وللتحويل من ثانية إلى ساعة تقسم على $[60 \times 60]$

$$\therefore \mu = gR^2 = 127138 \times (6370)^2 = 5.159 \times 10^{12} \text{ km}^3/\text{hr}^2$$

الاختلاف المركزي:

$$e = \frac{r_A v_A^2}{\mu} - 1 = \frac{(6870)(369000)^2}{5.159 \times 10^{12}} - 1 = 0.813$$

وحيث أن $e = 0.813 < 1$ فمسار القمر الصناعي هو قطع ناقص، وهو المطلوب الأول.

أيضاً: فعند نقطتي الحضيض والأوج فإن:

$$r_A = a(1 - e) \quad , \quad r_B = a(1 + e)$$

$$\therefore 6870 = a(1 - 0.813) \longrightarrow a = 36738 \text{ km}$$

$$r_B = 36738 (1 + 0.813) = 66606 \text{ km}$$

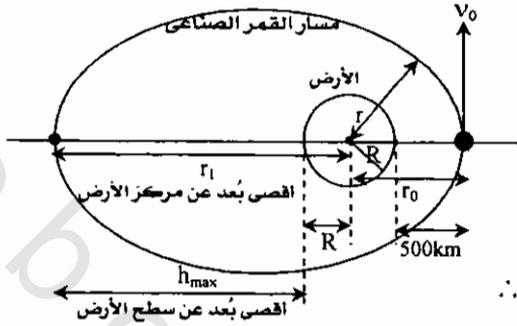
ولإيجاد أقصى ارتفاع للقمر الصناعي فوق سطح الأرض:

$$h_B = r_B - R = 66606 - 6370 = 60236 \text{ km} \quad (\text{من الشكل})$$

مثال (5):

أطلق قمر صناعي موازيا لسطح الأرض بسرعة $1.025 \times 10^4 \text{ m/sec}$. من ارتفاع 500km عن سطح الأرض، أوجد أقصى بعد (أو ارتفاع) يصل إليه القمر الصناعي عن سطح الأرض، علماً بأن نصف قطر الأرض هو $R = 6370 \text{ km}$.

الحد . ل:



معادلة مسار القمر (قطع ناقص):

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}$$

$$e = \frac{la}{\mu}, \quad \ell = \frac{h^2}{\mu} \quad \text{حيث:}$$

$$\therefore \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{\ell} = \frac{1}{\ell} + \frac{e \cos \theta}{\ell}$$

$$= \frac{\mu}{h^2} + a \cos \theta \quad (1)$$

ولكن: $h = r_0 v_0$ حيث: $r_0 = 6370 + 500 = 6870 \text{ km} = 6.87 \times 10^6 \text{ m}$

$$v_0 = 1.025 \times 10^4 \text{ m/sec.}$$

$$\therefore h = 6.87 \times 10^6 \times 1.025 \times 10^4 = 7.04 \times 10^{10} \text{ m}^2/\text{sec.} \quad (2)$$

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

وإذا كانت قوة الجذب بين القمر والأرض هي:

حيث m كتلة القمر، M كتلة الأرض.

وأيضاً فإن من قانون نيوتن الثاني:

$$F = mg = \frac{\gamma mM}{R^2} = \frac{\mu m}{R^2}$$

حيث:

$$\mu = \gamma M = gR^2 = 9.81 \times (6.37 \times 10^6)^2 = 3.98 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{sec} \quad (3)$$

بالتعويض من (2)، في (3) نحصل على:

$$\frac{1}{r} = \frac{3.98 \times 10^{14}}{(7.04 \times 10^{10})^2} + a \cos \theta = 8.03 \times 10^{-8} + a \cos \theta \quad (4)$$

ولتعيين a (نصف المحور الأكبر لمسار القمر):

عند $r = r_0$ فإن $\theta = 0$ في (4) نحصل على:

$$a = 6.53 \times 10^{-8} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{1}{r} = 8.03 \times 10^{-8} + 6.53 \times 10^{-8} \cos \theta \quad (6)$$

أقصى بعد للقمر عن مركز الأرض r_1 يكون عند $\theta = \pi$ فبالتعويض في (6) نحصل على:

$$r_1 = 66670 \text{ km} = R + h_{\max}$$

وبالتالي يكون أقصى بعد (أو ارتفاع) للقمر عن سطح الأرض هو:

$$h_{\max} = r_1 - R = 66670 - 6370 = 60300 \text{ km}$$

وهو المطلوب.

مثال (٦):

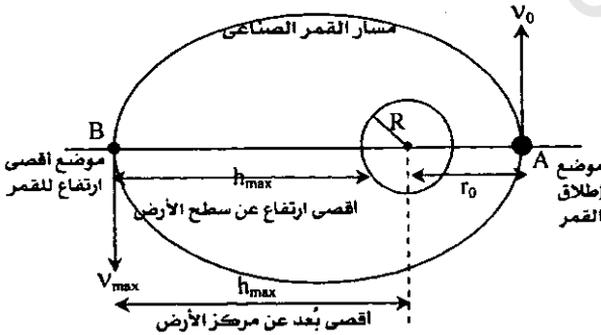
أطلق قمر صناعي في اتجاه مواز لسطح الأرض بسرعة $303 \times 10^2 \text{ km/hr}$ عندما كان على ارتفاع 430 km فوق سطح الأرض فتحرك في مسار على شكل قطع ناقص:

(أ) أوجد سرعته عندما يصل إلى أقصى ارتفاع له وهو 4050 km علماً بأن نصف قطر الأرض $R = 6370 \text{ km}$.

(ب) أوجد مركبتى سرعة القمر الصناعي v_r ، v_θ عندما يكون على ارتفاع 1930 km فوق سطح الأرض.

(ج) تحقق من أن أقصى ارتفاع يصل إليه القمر الصناعي هو 4050 km .

الح. ل:



عند موضع إطلاق القمر A: السرعة هي: $\bar{v}_o = \bar{v}_o \hat{\theta} = 303 \times 10^2 \hat{\theta}$

عند موضع أقصى ارتفاع B: السرعة هي: $\bar{v}_{\max} = v_{\max} \hat{\theta}$

ولكن $r_o v_o = r_{\max} v_{\max}$ فإن:

بعد A عن مركز الأرض $r_o = (430 + 6370) \text{ km} = 6800 \text{ km}$

بعد B عن مركز الأرض $r_{\max} = (4050 + 6370) \text{ km} = 10420 \text{ km}$

وتكون سرعة القمر عند أقصى ارتفاع هي:

$$v_{\max} = \frac{r_o v_o}{r_{\max}} = \frac{6800 \times 30300}{10420} = 19770 \text{ km/h}$$

وهو المطلوب أولاً:

ثانياً: عندما يكون القمر على ارتفاع 1930Km يكون بعده عن مركز الأرض هو:

$$r = 1930 + 6370 = 8300 \text{ km}$$

بالتعويض في العلاقة: $v_{\theta} = \frac{r_o v_o}{r}$

$$\therefore v_{\theta} = \frac{6800 \times 30300}{8300} = 24824 \text{ km/hr}$$

ولإيجاد v_r : نعوض في العلاقة:

$$\therefore \left(\frac{v_r}{v_{\theta}} \right)^2 = \left(1 - \frac{r_o}{r} \right) \left[\left(1 + \frac{r_o}{r} \right) - \varepsilon \right]$$

$$1 - \frac{r_o}{r} = 1 - 0.82 = 0.18$$

حيث

$$1 + \frac{r_o}{r} = 1 + 0.82 = 1.82$$

$$\varepsilon = \frac{2\gamma M}{r_o v_o^2} = \frac{796 \times 10^{12}}{(6800 \times 10^3) \left(30300 \times \frac{5}{18} \right)^2} = 1.652$$

$$\therefore \left(\frac{v_r}{v_o} \right)^2 = (0.18) [1.820 - 1.652] = 0.0324$$

$$\therefore \frac{v_r}{v_o} = 0.17389 \quad \therefore v_r = 5269.06 \text{ km/hr}$$

ثالثاً: أقصى بعد للقمر عن مركز الأرض هو:

$$r_{\max} = \frac{r_o}{\epsilon - 1} = \frac{6800}{1652 - 1} = 10429.4 \text{ km} = h_{\max} + R$$

ويكون أقصى ارتفاع عن سطح الأرض:

$$h_{\max} = r_{\max} - R = 10429.4 - 6370 = 4059 \text{ km}$$

وهو المطلوب.

مثال (7):

سفينة فضاء تدور حول الأرض بحيث كان أقل ارتفاع لها عن سطح الأرض هو 2000 km وأكبر ارتفاع لها عن سطح الأرض هو 4000 km، عين الاختلاف المركزي لمدار السفينة وحدد نوع المسار، وكذلك سرعة السفينة عند أبعد نقطة، أوجد كذلك مقدار سرعة السفينة عندما تكون على ارتفاع 2500 km من سطح الأرض. [اعتبر عجلة الجاذبية على سطح الأرض 9.81 km/sec^2 ، نصف قطر الأرض $R=6370 \text{ km}$].

الحل:

إذا كان: h_A, h_B, h_C هي ارتفاعات سفينة الفضاء عند النقاط A (أقل ارتفاع)، B (أكبر ارتفاع)، C (الارتفاع 2500km) وكان r_A, r_B هي أقرب وأبعد نقطة من سطح الأرض، r_C هي بعد السفينة من سطح الأرض عند الارتفاع h_C .

فمن الشكل نجد أن: (انظر الشكل في الصفحة التالية)

$$r_A = R + h_A = 6370 + 2000 = 8370 \text{ km}$$

$$r_B = R + h_B = 6370 + 4000 = 10370 \text{ km}$$

$$r_C = R + h_C = 6370 + 2500 = 8870 \text{ km}$$

المعامل μ :

$$\mu = gR^2 = \frac{9.81}{1000} (6370)^2 = 398059 \text{ km/sec}^2$$

ومن خواص القطع:

$$2a = h_a + 2R + h_B$$

$$= 2000 + 2(6370) + 4000 = 18740$$

$$\therefore a = 9370 \text{ km}$$

ومن علاقة نقطة الحضيض: $r_A = a(1 - e)$

$$\therefore 8370 = 9370 (1 - e)$$

ومنها $e = 0.107$ أى أن $e < 1$ وبذلك يكون مسار السفينة على شكل قطع ناقص ولإيجاد سرعة السفينة عند أقرب نقطة من سطح الأرض (نقطة A):
نستخدم العلاقة:

$$e = \frac{r_A v_A^2}{\mu} - 1$$

$$\therefore 0.107 = \frac{8370 v_A^2}{398059} - 1 = 0.021 v_A^2 - 1$$

$$v_A^2 = 52.714 \rightarrow v_A = 7.26 \text{ km/sec}$$

ومنها نجد أن

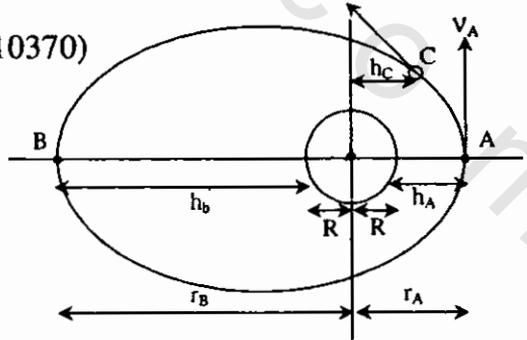
ولإيجاد السرعة عند أبعد نقطة (B):

من قانون ثبوت عزم السرعة:

$$v_A r_A = v_B r_B = h$$

$$\therefore 7.26 \times 8370 = v_B \times (10370)$$

$$\therefore v_B = 5.859 \text{ km/sec.}$$



ولإيجاد مقدار سرعة السفينة عند نقطة C التي تقع على ارتفاع $h_c=2500$ km من سطح الأرض:

نستخدم قانون ثبوت الطاقة عند النقطتين A, C حيث:

$$k_A + u_A = k_c + u_c = \text{const.}$$

حيث K, u هما طاقتي الحركة والجهد عند النقطتين المذكورتين:

$$\therefore \frac{1}{2}mv_A^2 + \left(-\frac{\mu m}{r_A}\right) = \frac{1}{2}mv_c^2 + \left(\frac{\mu m}{r_c}\right)$$

حيث m كتلة السفينة، v_c ، v_A سرعتيهما عند A, C

$$\therefore \frac{1}{2}v_A^2 - \frac{\mu}{r_A} = \frac{1}{2}v_c^2 - \frac{\mu}{r_c}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(7.26)^2 - \frac{398059}{8370} = \frac{1}{2}v_c^2 - \frac{398059}{8870}$$

$$v_c = 6.875 \text{ km/sec.}$$

ومنا نجد أن

وهو المطلوب.

مسائل على حركة الأقمار الصناعية وسفن الفضاء

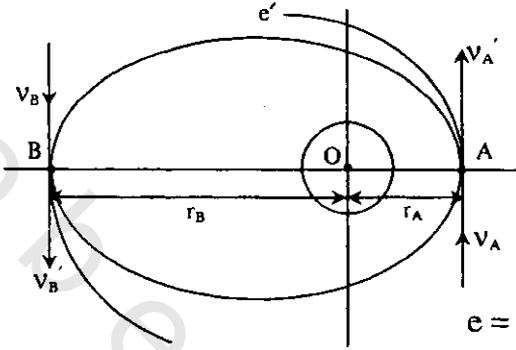
1. إذا كان طول نصف المحور الأكبر لمسار قمر صناعى على شكل قطع ناقص حول الأرض هو 4850 miles وكان نصف قطر الأرض $R=4680$ miles فأوجد السرعة التى يتحرك بها هذا القمر فى مساره، وأثبت أن الزمن الدورى لحركته هو 333 دقيقة تقريبا.
2. بدأت مركبة فضاء الحركة وهى على ارتفاع 2400 km من سطح الأرض، وكانت سرعتها 8100 m/sec ، أوجد أقصى ارتفاع للمركبة عن سطح الأرض (اعتبر أن $R=6370$ km ، $g=9.81$ m/sec²).
3. أطلق قمر صناعى من ارتفاع 430 km فوق سطح الأرض بسرعة 36000 m/sec. أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه القمر وسرعته عندئذ، أوجد كذلك مركبتنا سرعة القمر القطرية والعرضية عندما يكون القمر على ارتفاع 7230 km فوق سطح الأرض.
4. سفينة فضاء تدور حول الأرض فى مسار دائرى نصف قطره 8000 km عند مرورها بنقطة ما أطلقت صواريخ دفع فزادت سرعتها فجأة بمقدار 10% من قيمتها الأصلية، أثبت أن المسار الجديد نتيجة تغير السرعة هو قطع ناقص وأوجد المعادلة القطبية له (أعتبر نصف قطر الأرض $R=6370$ km).
5. سفينة فضاء تدور حول الأرض فى قطع ناقص اختلاقه المركزى $e=$ ، عند مرور السفينة بأقرب موضع من الأرض أثر عليها دفع مماس فزادت سرعتها فجأة إلى الضعف. عين نوع المسار الجديد واختلاقه المركزى، وإذا أثر الدفع المماس عند مرور السفينة بأبعد موضع عن الأرض وضاعف سرعتها كذلك فعين نوع المسار الجديد.
6. سفينة فضاء تسير نحو القمر فى مسار على شكل قطع مكافئ وعندما وصلت إلى أقرب نقطة A من القمر وكانت على بعد 1760 km من مركزه أطلقت

صاروخا مضادا فانخفضت سرعتها بمقدار 20% فتغير شكل مسارها، أوجد معادلة المسار الجديد وعين نوعه وكذلك زمن وصول السفينة إلى نقطة A مرة أخرى. وعندما عادت السفينة إلى نقطة A خفضت سرعتها فجأة إلى الحد الذي جعلها تدور في مسار على شكل دائرة، عين سرعة السفينة في هذا المسار الدائري (علما بأن نصف قطر القمر 1738 km وأن عجلة الجاذبية على سطح القمر = $\frac{1}{6}$ عجلة الجاذبية على سطح الأرض).

7. قذف قمر صناعي كتلته m رأسيا إلى أعلى ابتداء من نقطة A على سطح الأرض بسرعة v_A تكفي لوصوله إلى نقطة B التي تقع على ارتفاع h فوق سطح الأرض، ثم قذف القمر بعد ذلك من نقطة B بسرعة أفقية v_B تكفي لتحركه في مسار دائري حول الأرض. فإذا كان نصف قطر الأرض R وكانت عجلة الجاذبية عند سطحها g فاحسب كل من v_A ، v_B وأثبت أن الطاقة الكلية اللازمة لإطلاق القمر من نقطة A حتى يكمل مساره الدائري (الذي بدأه من نقطة B) تعطى بالعلاقة:

$$E = \frac{1}{2} mgR \left[1 + \frac{h}{R+h} \right] = \frac{1}{2} mgR \left[2 - \frac{R}{R+h} \right]$$

حلول بعض المسائل على حركة الأقمار الصناعية وسفن الفضاء



حل المسألة (٥):

دراسة الحركة عند A:

قبل الدفع مباشرة:

السرعة v_A تعطى من معادلة

الاختلاف المركزى

$$e = \frac{r_A v_A^2}{\mu} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}}$$

ومنها:

السرعة عند A بعد الدفع مباشرة:

$$v'_A = 2v_A = 2\sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}}$$

ومن معادلة الاختلاف المركزى نوجد الاختلاف المركزى للمسار الجديد من نقطة

A بعد الدفع مباشرة (e'):

$$e' = \frac{r_A v_A'^2}{\mu} - 1 = \frac{r_A}{\mu} \left[2\sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}} \right]^2 - 1$$

$$= 4 \frac{r_A}{\mu} \left(\frac{3\mu}{2r_A} \right) - 1 = 6 - 1 = 5 > 1$$

وهذا يعنى أن المسار الجديد عبارة عن قطع زائد بؤرته O (مركز الأرض).

دراسة الحركة عند B:

قبل الدفع مباشرة:

من قانون ثبوت عزم السرعة حول O:

$$v_A r_A = v_B r_B = h$$

$$\therefore v_A \alpha(1 - e) = v_B \alpha(1 + e)$$

$$\therefore v_B = \frac{1}{3} v_A = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}}$$

السرعة عند B بعد الدفع مباشرة:

$$v'_B = 2v_B = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}}$$

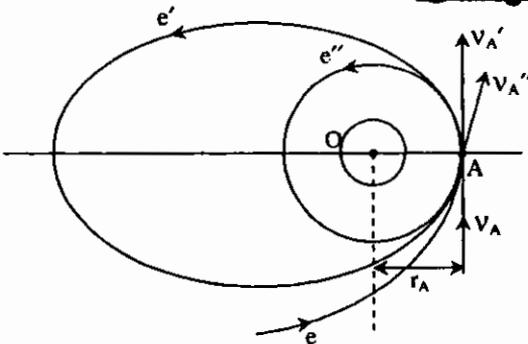
ومن معادلة الاختلاف المركزي نوجد الاختلاف المركزي للمسار الجديد من نقطة B بعد الدفع مباشرة (e''):

$$\begin{aligned} e'' &= \frac{r_B v_B}{\mu} - 1 = \frac{3r_A}{\mu} \left[\frac{2}{3} \sqrt{\frac{3\mu}{2r_A}} \right]^2 - 1 \\ &= \frac{3r_A}{\mu} \left[\frac{4}{9} \left(\frac{3\mu}{2r_A} \right) \right] - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن المسار الجديد عبارة عن قطع مكافئ بؤرته O (مركز الأرض). وهو المطلوب.

حل المسألة (٦):

أولاً: السفينة تسير نحو القمر في قطع مكافئ:



معادلة الاختلاف المركزي تعطى السرعة عند النقطة A (v_A):

$$e = \frac{r_A v_A^2}{\mu} - 1 = 1$$

$$\therefore v_A = \sqrt{\frac{2\mu}{r_A}}$$

عند وصول السفينة إلى نقطة A وأطلقت الصاروخ المضاة انخفضت سرعتها بمقدار 20% أي أن سرعة السفينة بعد التخفيض هي:

$$v'_A = 0.8v_A = 0.8\sqrt{\frac{2\mu}{r_A}}$$

والاختلاف المركزي e' للمسار الجديد يعطى من العلاقة:

$$e' = \frac{r_A v_A^2}{\mu} - 1 = \frac{r_A}{\mu} \left[0.8\sqrt{\frac{2\mu}{r_A}} \right]^2 - 1 = 0.28 < 1$$

أى أن المسار الجديد هو قطع ناقص، ولإيجاد معادلته:

$$r = \frac{\ell'}{1 + e' \cos \theta} = \frac{\ell'}{1 + 0.28 \cos \theta}$$

حيث ℓ' نصف الوتر البؤرى العمودى ويعطى من العلاقة:

$$\ell' = a_{r_A}(1 + e) = 1760(1 + 0.28) = 2252.8 \text{ km}$$

$$\therefore \boxed{r = \frac{2252.8}{1 + 0.28 \cos \theta}}$$

ثانياً: لإيجاد الزمن اللازم لوصول السفينة مرة أخرى إلى نقطة A وهو عبارة عن الزمن الدورى T فمن قانون كيبلر الثالث نجد أن:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \quad (1)$$

حيث:

$$1760 = a(1 - 0.28) \leftarrow r_A = a(1 - e)$$

$$a = 2444.44 \text{ km}$$

ومنها نحصل على:

$$\mu = gR^2 \quad \text{أيضاً: فإن:}$$

$$g = (1/6)(9.81) \text{ m/sec}^2 \quad \text{حيث } g \text{ عجلة جاذبية القمر}$$

$$R = 1738 \text{ km}$$

R نصف قطر القمر

$$\therefore \mu = \frac{1}{6} \times \frac{9.81}{1000} (1738)^2 = 4938.75 \text{ km}^3/\text{sec}^2$$

فبالتعويض في (1) نحصل على:

$$T^2 = \frac{4(3.14)^2(2444.44)^3}{4938.75}$$

$$T = 10805.389 \text{ sec.}$$

ومنها نجد أن:

$$= 3.001 \text{ hr (ساعة)}$$

ثالثاً: عند عودة السفينة مرة أخرى إلى نقطة A خفضت سرعتها فجأة بحيث سارت في مسار دائري، ولإيجاد سرعة السفينة عند A في المسار الدائري الجديد (v''_A) نستخدم معادلة الاختلاف المركزي حيث:

$$e'' = \frac{r_A v''_A{}^2}{\mu} - 1 = 0 \quad (\text{المسار دائري})$$

$$v''_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_A}} = \sqrt{\frac{4938.75}{1760}} = 1.675 \text{ km/sec} \quad \therefore$$

وهو المطلوب.

حل المسألة (7):

قذف القمر الصناعي من نقطة

A على سطح الأرض بسرعة v_A تكفي

لوصوله إلى نقطة B على ارتفاع h

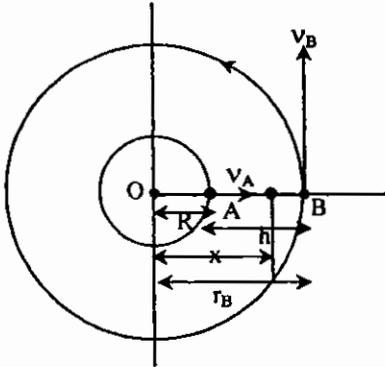
فوق سطح الأرض.

دراسة الحركة من A إلى B:

يتحرك القمر في خط مستقيم تحت تأثير قوة جذب مركزي

$$F = m\ddot{x} = mg \frac{R^2}{x^2}$$

حيث X هي بعد القمر عند أي لحظة من مركز الأرض 0.



$$\therefore \ddot{x} = g \frac{R^2}{x^2} \rightarrow v \frac{dv}{dx} = g \frac{R^2}{x^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على:

$$\begin{aligned} \int_0^{v_A} v dv &= R^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} \\ \therefore \frac{1}{2} v_A^2 &= gR^2 \left[-\frac{1}{x} \right]_R^{R+h} = gR^2 \left[-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R} \right] \\ &= gR^2 \left[\frac{h}{R(R+h)} \right] \\ \therefore v_A^2 &= \frac{2gRh}{R+h} \rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}} \quad (1) \end{aligned}$$

ثانياً: من نقطة B يتحرك القمر في مسار دائرى، فمن معادلة الاختلاف المركزى نوجد السرعة v_B للقمر حيث:

$$e = \frac{r_B v_B^2}{\mu} - 1 = 0 \quad (\text{للمسار دائرى})$$

$$\therefore v_B^2 = \frac{\mu}{r_B} = \frac{gR^2}{R+h} \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \quad (2)$$

ولإيجاد الطاقة الكلية اللازمة لإطلاق القمر من نقطة A على سطح الأرض:

$$\begin{aligned} E &= E_A + E_B = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{2gRh}{R+h} \right) + \frac{1}{2} m \left(\frac{gR^2}{R+h} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{mgh}{R+h} (2h+R) = \frac{1}{2} mgh \left[\frac{R+h+h}{R+h} \right] \\ &= \frac{1}{2} mgR \left[1 + \frac{h}{R+h} \right] \end{aligned}$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة بالصورة الآتية:

$$E = \frac{1}{2} mgR \left[2 - \frac{h}{R+h} \right]$$

ونلك حيث أن:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{R}{R+h} \right) &= \frac{2R+2h+R}{R+h} = \frac{R+2h}{R+h} \\ &= \frac{R+h+h}{R+h} = 1 + \frac{h}{R+h} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.