

## ٢ المتسلسلات الاقتصادية

### *Economic Series*

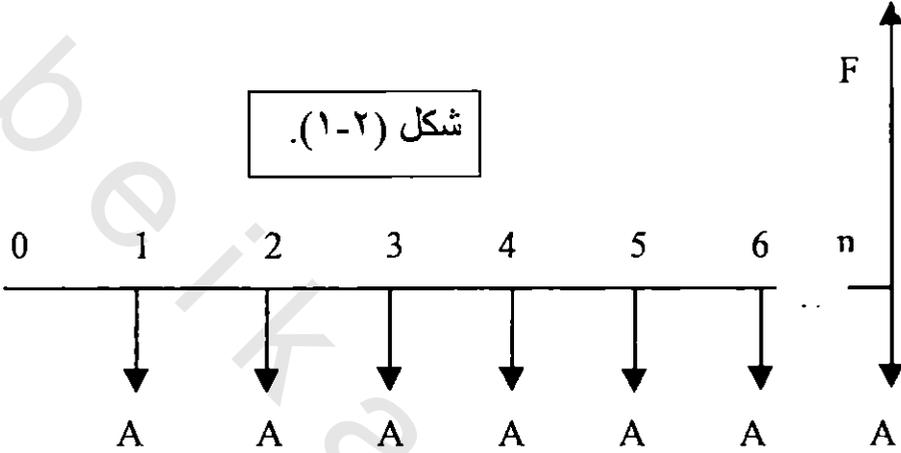
المتغيرات الاقتصادية هي - بشكل أو بآخر - متغيرات في الزمن أساسا. وفي دراسة وتقييم المشروعات والبدائل، من الناحية الاقتصادية، كثيرا ما يلزم حساب المكافئ المستقبلي (F) أو المكافئ الحاضر (P) لمجموعة أقساط ثابتة (منتظمة نرمرز لكل منها بالرمز A) ، أو متدرجة القيمة نرمرز لها بالرمز (G). وجملة الأقساط أو الإيداعات تسمى متسلسلة (Series). وأحيانا يلزم حساب العكس، أى الأقساط المكافئة لقيمة مستقبلية (F) أو لقيمة حاضرة (P) موزعة فى أقساط أو إيداعات (Deposits) متسلسلة، قد نحتاجها أو نوظفها فى مشروع ما.

### ١-٢ المكافئ المستقبلي للأقساط المنتظمة

#### Fututr Sum of Uniform Series

يمكن تمثيل المكافئ المستقبلي (F)، لمجموعة أقساط منتظمة مقدار كل منها (A)، بيانيا برسم بياني التدفق النقدي (CFD) لها كما فى شكل (١-٢). ولتيسير معالجة مثل هذه الحالة، نستخلص صيغة رياضية تربط الأقساط بمجموع قيمها المستقبلية (F). ولاشتقاق هذه الصيغة نفترض أن القسط قيمته A يودع فى نهاية كل فترة، أى القسط الأول يودع فى نهاية الفترة الأولى والذي يليه يودع فى نهاية الفترة الثانية وهكذا، والأقساط متتابعة (كاملة لا ينقص منها أى قسط) كما هو موضح فى شكل (١-٢)، والقسط الأخير يودع فى نهاية آخر فترة، أى فى التاريخ المستقبلي المحدد لسحب (أو دفع) إجمالي المبلغ بأرباحه، (F).

وفي حالة مخالفة أى من هذه الفروض (الشروط) لا يصح استخدام المعادلات التى سنستنتجها.



وعلى ذلك فالقسط الأخير (رقم n) لن يمكث شيئاً، ولن يحسب له أى ربح، ولكن وضعه على الرسم سيسهل اشتقاق الصيغة الرياضية المطلوبة. ومن نافلة القول أن القسط الذى يسبقه (رقم n-1) سيمكث عاما أو فترة، ويحسب له ربح فترة واحدة بنسبة i. والذى يسبقه سيمكث فترتان وهكذا ... ويكون مجموع كل الأقساط الموضحة بأرباحها فى المستقبل هى:

$$F = A + A(1+i) + A(1+i)^2 + \dots + A(1+i)^{n-1} \quad (2-1)$$

$$F = A [(1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1}] \quad (2-2)$$

بضرب طرفى المعادلة السابقة (٢-٢) فى (1+i) ينتج المعادلة (٣-٢)

$$F(1+i) = A[(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n] \quad (2-3)$$

بطرح المعادلة (٢-٢) من المعادلة (٣-٢) ينتج المعادلة (٤-٢)

$$F * i = A[(1+i)^n - 1] \quad (2-4)$$

التي نضعها على الصورة (٥-٢)

$$F = A [(1+i)^n - 1] / i \quad (2-5)$$

وتكتب على صورة المعامل القياسي كالتالي

$$F/A = [(1+i)^n - 1] / i \quad (2-6)$$

أو على الصورة المقابلة

$$A/F = i / [(1+i)^n - 1] \quad (2-7)$$

والنسبة A/F أو ما يساويها  $i / [(1+i)^n - 1]$  يسمى معامل إغراق التمويل (رأس المال) Sinking Fond Factor وسوف نستخدمها في الفصل السابع

وجدير بالذكر أنه لا يلزم للمهندس ولا للدارس أن يحفظ هذه المعادلات لكن المهم أن تكون متاحة تحت يده عند اللزوم سواء في ورقة أو مُخزنة إلكترونياً.

$$i = 18\%$$

n	Compound Amount (F/A)
1	1.0000
2	2.1800
3	3.5724
4	5.2154
5	7.1542
6	9.4420
7	12.1415

## مثال ٢-١

المسؤولون عن مدينة الأمل يبحثون إمكانية تمويل إنشاء حديقة جديدة تقدر تكاليفها بمليون جنيه. من المقترح أن يكون التمويل عن طريق فرض رسم قدره ٥ قروش على كل زجاجة أو علبة مرطبات تباع في المدينة. من واقع الإحصاءات ينتظر أن تكون الحصيلة ١٢٥٠٠٠ جنيه سنوياً، ويمكن استثمار تلك الحصيلة في مشروع يحقق عائداً سنوياً حوالي ١٨%. متى يمكن أن يتوفر المبلغ المطلوب لإنشاء الحديقة؟

## الحل

بفرض أن حصيللة الرسم يبدأ استثمارها بعد تجميعها في نهاية كل عام، ونعوض في المعادلة (٢-٥)؛ لحساب  $n$  كالتالى:

$$1,000,000 = 125,000 [(1.18)^n - 1]/0.18$$

ومنها ينتج أن

$$n = 5.389246yr.$$

معنى ذلك انه بعد حوالى خمس سنوات يمكن إنشاء الحديقة.

\*\*\*\*\*

وفى حالة استخدام الجدوال يكون دليلنا الرئيسى هو قيمة  $(i = 18\%)$ . نتحرك فى العمود بحثا عن قيمة  $F/A = 1,000,000/125,000 = 8$ .

للأسف هذه القيمة غير موجودة فى الجدول، لكنها بالتأكيد تقع فى الفراغ الذى يشير إليه السهم المدسوس فى الجدول الموضح على شمال الصفحة السابقة. ومعنى ذلك أن قيمة  $n$  تقع بين العامين الخامس والسادس. وبالإستكمال (Interpolation) يمكن حساب قيمة قريبة من التى سبق الحصول عليها حسابيا.

## ٢-٢ المكافئ الحاضر للأقساط المنتظمة

### Present Worth of Uniform Series

أحيانا يلزم حساب المكافئ الحالى (الحاضر) لمجموعة أقساط ستدفع بانتظام فى المستقبل، بمعدل  $A$  كل فترة، كما فى حالات البيع بالتقسيط. بالجمع بين المعادلة (٢-١) والمعادلة (٢-٥) يمكن صياغة المعادلة (٢-٨):

$$P = A [(1+i)^n - 1] / i(1+i)^n \quad (2-8)$$

ويمكن أن تكتب على الصورة

$$P/A = [(1+i)^n - 1] / i(1+i)^n \quad (2-9)$$

ونؤكد مرة ثانية أنه لا يلزم حفظ هذه المعادلات.

## Example 2-2

Engineer Samy deposits L.E. 300 every 3 months for 5 years, how much money will he have in his investment account after the deposit if the nominal interest is rate 12% per year compounded quarterly?

## Solution

معدل الربح في هذه الحالة  $12/4=3\%$  كل ربع سنة.

وواضح أن المهندس سامي سيودع بانتظام عدد  $n = 20 = 5 \times 4$  قسطاً، قيمة كل منها  $A = \text{L.E. } 300$ . وبالتعويض في المعادلة (2-9) نجد أن

$$F = 300[(1.03)^{20} - 1] / 0.03 = \text{L.E. } 8,061.112$$

\* \* \* \*

والحل باستخدام الجداول سيكون بالبحث عن المعامل  $(F/A)$ . ويكتب الحل على الصورة التالية:

$$F = 300 * (F/A, 3\%, 20) = 300 (26.870) = \text{L.E. } 8,061$$

## Example 2-3

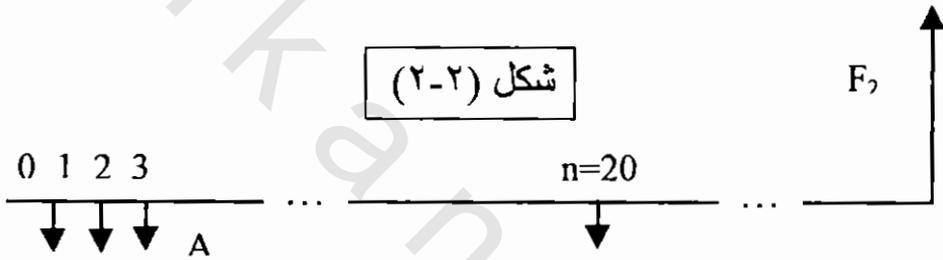
A young engineer decides to save for a down payment on



new car to be purchased 2.5 years from now. She decides to

deposit \$50 per month into saving account paying 6% nominal interest compounded monthly (use  $I=6\%/12=0.5\%/month$ ). She plans to make a series of 20 regular monthly deposits with the first deposit scheduled for one month from today. The account will then receive no more deposits but will receive monthly compound interest on the balance for another 10 months. Draw the cash flow diagram for this case and calculate, how much will be the account at the end the plan (30-month period)?

## Solution



المهندسة الشابة تضع لنفسها خطة استثمارية لتجديد سيارتها بعد ٣٠ شهرا، ففكرت في إيداع مبلغ  $A$  (٥٠ دولارا) شهريا لمدة ٢٠ شهرا، وسوف تترك الحساب بعد ذلك بالمصرف لمدة ١٠ أشهر ليحصل فوائد شهرية لحين حلول موعد تجديد السيارة. معدل الفائدة المذكور هو 0.5% شهريا، وبياني التدفق النقدي سيكون كما في شكل (٢-٢).

مع إيداع القسط الأخير يتجمع في الحساب مبلغ  $F$  نحسبه من المعادلة (٥-٢)

$$F_1 = 50 [(1.005)^{20} - 1] / 0.005 = \$1,049.$$

هذا المبلغ سيترك لمدة ١٠ أشهر أخرى

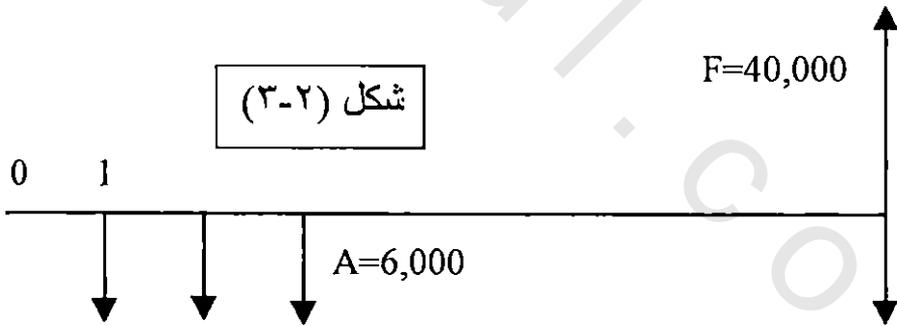
$$F_2 = 1049(1.00)^{10} = \$1,103$$

## Example 2-4

A new retirement community will need to add a second unit to the new water treatment plant when the population reaches 40,000. The community has just been built and is starting out now with zero population. An average of 6,000 new residents are expected to move to the community each year. The estimated birth rate for the community is 8 per 1,000 and the death rate is 14 per 1,000 resulting in a negative annual increase of -6 per 1,000 (so  $i = -0.006$ ). How long will it be before the second unit is needed for the new water treatment plant?

## Solution

المحطة الثانية ستلزم حين يبلغ عدد سكان مستعمرة أصحاب المعاشات ٤٠ ألف نسمة. وهذا يعنى أن  $F$  فى هذه المسألة تساوى ٤٠ ألف، وعدد الجدد الذين يصلون للمستعمرة كل سنة كدفعة جديدة تضاف  $A=6,000$ . وأيضا فى هذه المسألة  $i = -0.006$ . والرسم البيانى سيكون شبيها ببيانى التدفق النقدي شكل (٣-٢).



بالتعويض فى المعادلة (٦-٢) ينتج

$$40,000/6,000 = [(1-0.006)^n - 1]/-0.006$$

$n = 6.8$  yr.

## Example 2-5

How much money should you be willing to pay now for investment that yield L.E. 1,000 per year for 5 years starting next year, at an interest rate of 16% compounded annually?

## Solution

المطلوب حساب المبلغ الذى يُدفع الآن (P) ويتم استرداده على خمسة أقساط سنوية (A=1,000, i=16% and n=5) بدءاً من العام القادم.

ويمكن الحل إما بالتعويض المباشر فى المعادلة (٢-٨)، أو باستخدام الجداول.

$$P = A [(1+i)^n - 1] / i / (1+i)^n \quad (2-8)$$

$$P = 1,000[(1.16)^5 - 1] / 0.16 / (1.16)^5 = \text{L.E. } 3,274.29$$

\* \* \* \*

أو باستخدام الجداول كالتالى:

$$P = 1,000 (P/A, 16\%, 5) = 1,000 (3.2743) = \text{L.E. } 3,274.3$$

## ٢-٣ مكافئ المتسلسلة المتدرجة

### Equivalent of the Gradient Series

المقصود بالمتسلسلة المتدرجة هى التى تزيد أو تنقص بمعدل شبه ثابت، وهذه الزيادة تناظر العجلة الثابتة التى تتغير بها السرعة فى مجال الميكانيكا. وهذا التدرج الحاد فى الزيادة أو النقص يعد مثالياً (نظرياً) بعيد عن الواقع، فالواقع يكون تغيره شبه متصل، بمعدل قريب من التغير الأسى. مقدار الزيادة أو النقص (G) هو الذى نسميه التدرج، ولننظر للمثال الموضح فى شكل (٢-٤).

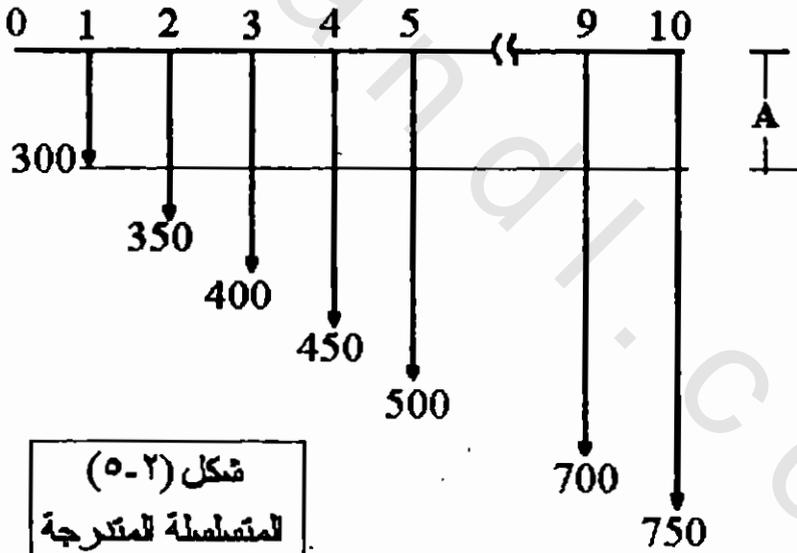


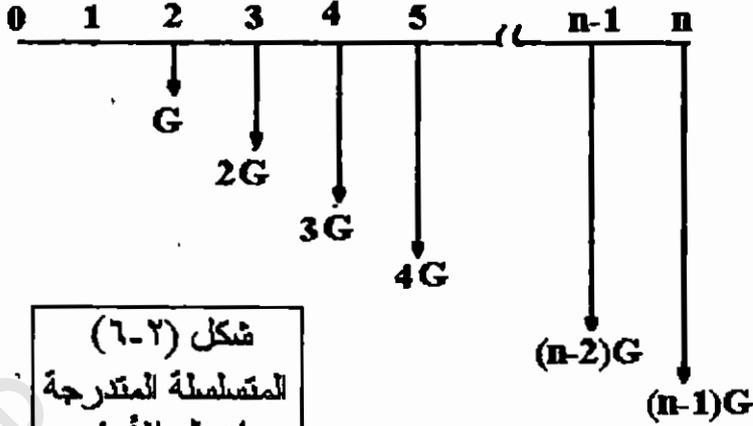
## مثال ٦-٢

افترض أن:  $A=300$ ,  $G=50$ ,  $n=10$  واعد رسم شكل (٤-٢).

### الحل

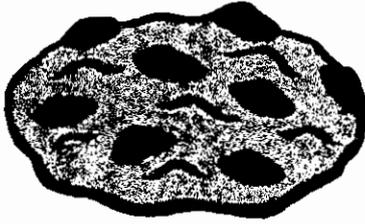
باستبعاد الجزء الثابت (الأساس  $A$ ) من القسط المتدرج في شكل (٤-٢)، باعتبار أنه معروف وسبق لنا التعامل معه على حده، يصبح المتبقي الذي يشغلنا هو الجزء المتدرج وحده، كما هو ممثل في شكل (٦-٢)، وفيه يلاحظ أن التدرج يبدأ في الاعتبار من الفترة 1 ليظهر في الفترة رقم 2، وقبل ذلك فهو غير موجود، وهذا شكل اصطلاحى شائع ويمكن عمل غيره إن لزم الأمر، ولكن يجب مراعاة مدى توافقه مع المعادلات المصاحبة له.





شكل (٦-٢)  
المتسلسلة المتدرجة  
بإهمال الأقسام  
الثابت A.

والتردد يمكن حسابه بتوزيع الزيادة خلال مدة زمنية معينة على عدد الأقسام التي تحتويها المدة، كما في المثال التالي.



## مثال ٧-٢

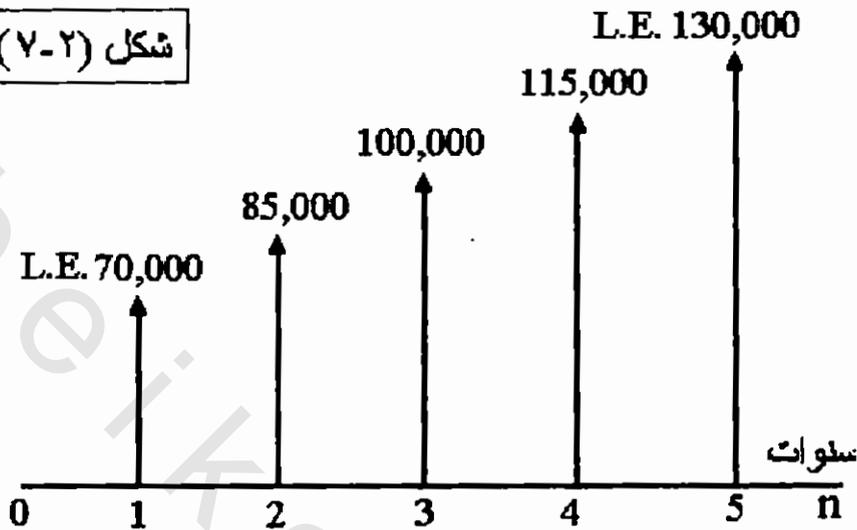
شركة، إنتاج مخبوزات و فطائر و حلويات في مدينة جديدة، تتوقع زيادة المبيعات من ٧٠ ألف جنيه العام القادم، إلى ١٣٠ ألف جنيه على مدى ٥ سنوات من الآن. احسب التدرج (G) وارسم بياني التدفق النقدي، بفرض أن الزيادة ستكون متدرجة بانتظام.

## الحل

من بيانات المثال،  $n=5$ .

$$G = \text{gain}/(n-1) = (130,000 - 70,000)/4 = \text{L.E. } 15,000 = \text{التدرج}$$

شكل (٧-٢)



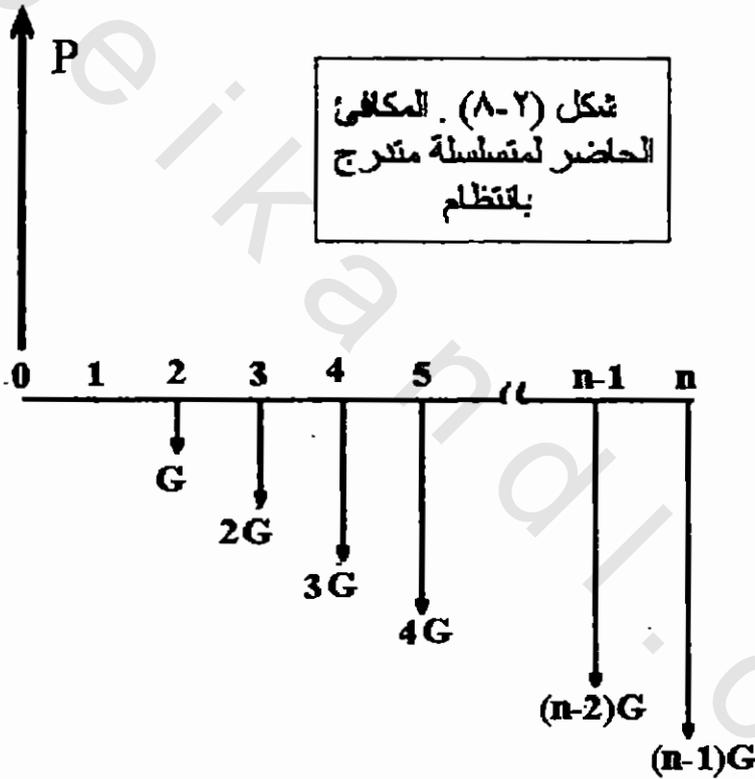
والمكافئ الحاضر (P) للمتسلسلة المتدرجة (بعد تجنب الأساس الثابت A) لعدد n من السنوات، بترتيب ونظام الأقساط الموضحة في شكل (٨-٢)، يمكن حسابه من المعادلة (١٠-٢).

$$P = \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad (2-10)$$

والمعادلة السابقة يمكن أن تكتب على صورة المعامل القياسي كالتالي:

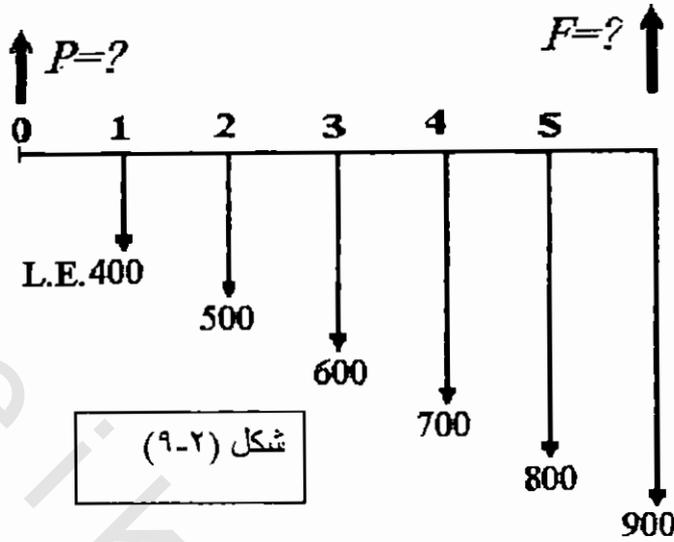
$$(P/G, i, n) = \frac{1}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad (2-11)$$

وبمعلومية المكافئ الحاضر P يمكن تحويل المكافئ إلى أقساط متساوية (منتظمة) قيمة كل منها A ، تكافئ في مجموعها الأقساط المتدرجة، كما سبق أن أوضحنا في مطلع هذا الفصل. وأيضا بمعلومية المكافئ الحاضر P يمكن حساب المكافئ المستقبلي F.



### Example 2-8

Assume  $i=10\%$  and determine the present worth (P) and the future worth (F) of the following diagram.



## الحل

نقسم المتسلسلة إلى متسلسلتين:

أ- الأولى متسلسلة منتظمة قسطها  $A=400$ . ونرمز لقيمتها الحاضرة بالرمز  $P_A$ . وتحسب من المعادلة (٨-٢) بالتعويض المباشر أو باستخدام الجداول.

$$P_A = P = 400 [3.7907868] = \text{L.E. } 1,516.315$$

ب. الثانية متسلسلة متدرجة درجتها  $G=100$  ونرمز لقيمتها الحاضرة بالرمز  $P_G$ . وقيمتها نحسبها من المعادلة (١٠-٢) أو (١١-٢) كالتالي:

بالتعويض المباشر في المعادلة (١٠-٢)

$$P_G = P = (100/0.1) [3.7907868 - 3.1046066] = \text{L.E. } 686.12$$

أو من الجداول

$$P_G = P = 100 (6.862) = \text{L.E. } 686.2$$

والمكافئ الكلى الحاضر لمجموع المتسلسلتين هو  $P_T$ . وهو يساوى

$$P_T = P_A + P_G = \text{L.E. } 2,202.43$$

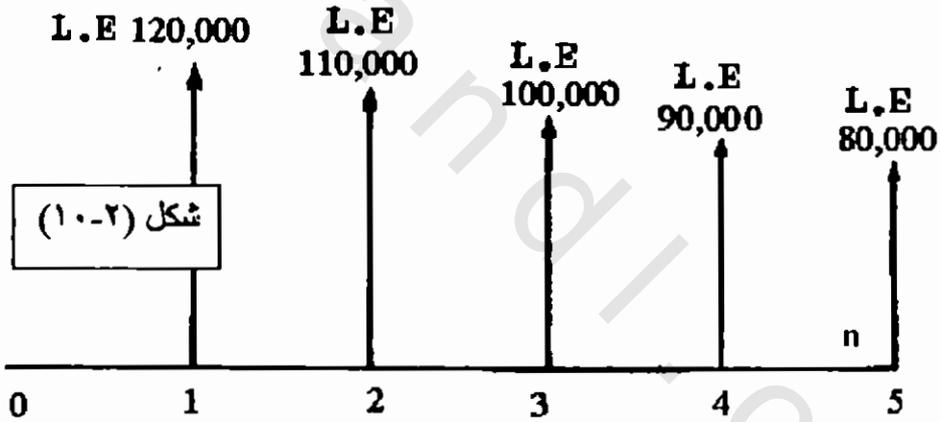
والمكافئ المستقبلى لمجموع المتسلسلتين هو

$$F_T = P(1+i)^n = 2,202.43 * 1.61051 = \text{L.E. } 3,547.06$$

\*\*\*\*\*

## مثال ٩-٢

تتوقع إحدى الشركات أن تكون حصيلة مبيعاتها فى نهاية العام الحالى ١٢٠ ألف جنيه. ومن المتوقع أن تتناقص حصيلة البيع تدريجيا؛ بسبب المنافسة الشديدة بالسوق، لتصل لحوالى ٨٠ ألف جنيه سنويا فى نهاية السنوات الخمس القادمة. احسب معدل التناقص وارسم بيانى التدفق النقدى.

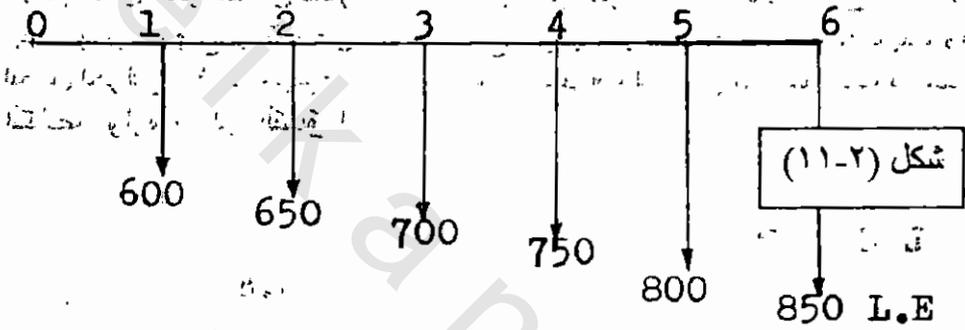


## الحل

التناقص =  $120 - 80 = 40$  ألف جنيه.  
معدل التناقص =  $40 / (120 - 80) = 0.5$  = ٥٠% = ١٠ آلاف جنيه سنويا.

## مثال ١٠-٢

احسب القيمة الحاضرة للمبالغ المتسلسلة على بياني التدفق التقدي الموضح بالشكل  
افتراض  $i=10\%$



الحل

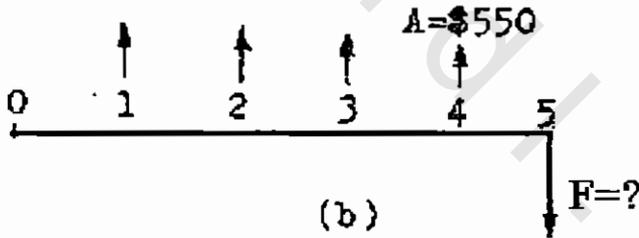
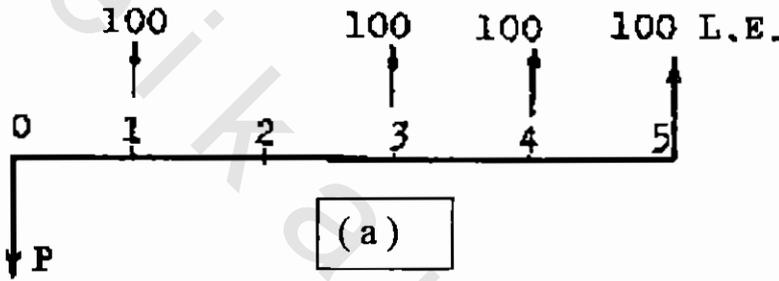
$$P_T = P_A + P_G$$

$$P_T = 600 [P/A, 10\%, 6] + 50 [P/G, 10\%, 6] = \text{L.E. } 3,097.38$$

## تمارين

١. وضع لماذا لا يصح تطبيق معادلات المتسلسلات المنتظمة، لحساب  $P$  أو  $F$  على أي من الحالات التالية:

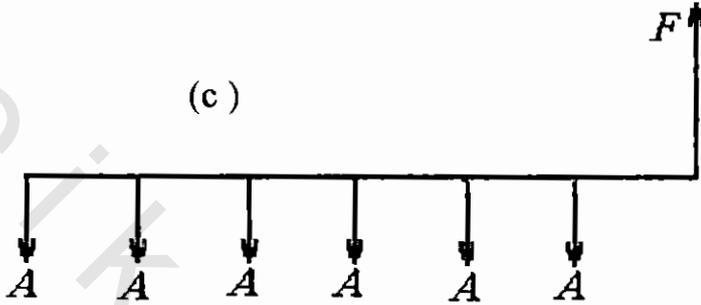
(a), (b) and (c)



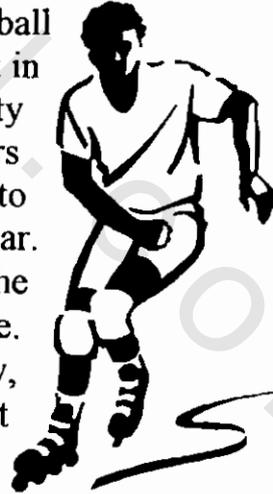
٢. مهندس يريد أن يشتري وحدة سكنية، وأمامه خياران:

- يشتري الآن نقدا بمبلغ ٣٠ ألف جنيه

- يدفع نصف هذا المبلغ الآن ثم يدفع ٨ أقساط متساوية قيمة كل منها ٣١٠٠ جنيهاً.  
مع العلم بان هذا المهندس لديه شركة تحقق عائدا سنويا حوالى ٢٠%. فأى  
الخيارين أفضل بالنسبة له؟  
(الإجابة: الخيار الثانى أفضل وقيمته الحاضرة ٣٢,٢٦٨٩٥ جنيهاً)



3. The stadium seats in a faculty football stadium are expected to need replacement in another nine years from today. The faculty has been anticipating this and five years ago began depositing \$1,000 per year into an account bearing interest at 6% per year. It is now the end of the fifth year and the fifth annual deposit has just been made. The bank announces that beginning today, all funds on deposit has will bear interest at 7%. The faculty board, realizing that costs are increasing, decides to raise their deposits to \$2,000 per year, beginning with the deposit due one year from today.



As consulting engineer to the faculty board, you are requested to quickly calculate how much the account will total at the end of nine more years if the deposits remain at \$2,000 per year and interest remain at 7%?

(Ans. \$34,316) .

٤. إحدى الشركات استداننت ١٠٠ ألف دولار أمريكي (P)، لشراء شبكة حاسبات، على أساس أن السداد على أقساط شهرية متساوية عددها ٤٠ قسطا (n)، وذلك بفائدة مركبة قدرها (i=1.5%) شهريا.



أ. ارسم بياني التدفق النقدي.

ب. احسب قيمة القسط (A).

ج. احسب مقدار المتبقى من أصل القرض بعد مرور عامين.

د. احسب مقدار الفائدة المركبة على (ضمن) القسط الأول، وضمن القسط العاشر.

٥. شركة الحرية للمقاولات قررت استبدال كراكة المحجر بأخرى أحدث بعد ٤ سنوات بدءا من ١ - ٧ - ١٩٩٩. تكلفة الاستبدال تقدر بحوالي ٣٥٠ ألف جنيه عام ٢٠٠٣ بإذن الله. متوسط طاقة الكراكة ٢٥٠ متر مكعب في الساعة وتعمل بمتوسط ٢٤٠ ساعة عمل شهريا. يوجد اقتراح لتمويل مشروع الاستبدال بتجنيب ١٠ قروش

من أجر كل متر مكعب تنجزه الكراكة الحالية، وتودع الحصيلة المجمعة في نهاية كل شهر في حساب استثماري بمتوسط عائد ١% يركب شهريا.

والمطلوب معرفة ما إذا كانت القيمة المستقبلية للمبلغ المتجمع في نهاية المدة (٤٨ شهرا) ستكفي لتغطية تكلفة الاستبدال أم لا؟