المنطق الحدسي

Intuitionistic logic

لقد كان مفهوم الصدق، بالنسبة لنا، مفهوم الدلالة الأساسي في كل ما درسناه في المنطق لحد الآن. والصدق هو نوع من التقابل بين القضايا أو الأفكار والواقع. ولكن، هناك من يشك في إمكانية الوصول للصدق بهذا المعنى وذلك، انطلاقاً باعتقاده بعدم إمكاننا الوصول إلى العالم كما هو بحد ذاته. فمثلاً، أستطيع التفكير أن الماء يغلي ثم أذهب إلى الموقد وأرى أنه يغلي. ولكن رؤيتي أو سماعي (أو حتى لمسي) للماء لا يكشف الماء كما هو في الواقع، ولكنه يكشف الماء كما أراه أو أسمعه أو أشربه. وبعبارة أخرى، أستطيع مقارنة تفكيري مع الماء كما هو مكتشف من قبلي وليس مع الماء كما هو في حد ذاته.

يوجد بين الفلاسفة من يقترح أن تؤسس دلالتنا لا على علاقات تكون بين أفكارنا والواقع وإنما على علاقات بين أفكارنا والأدلة[٤٤]، مثل البراهين والإثباتات والتأكيدات. إن إدراكي الحسي للماء هو شكل من أشكال الأدلة والذي يبرهن أو يثبت أو يؤكد أفكاري أو حكمي بأن الماء يغلي.

إن هذه التجربة (الإدراك الحسي) تسمى الحدس[٤٥]. ولقد كان بروور[٤٦] (العالم الرياضي الألماني) مؤسساً للحدسية، حيث اهتم في البداية بالرياضيات وليس بالعالم بشكل عام. ولقد اعتبر أن الأشياء الرياضية (الأعداد، الدول، المجموعات،...إلخ) موجودة فقط بالطريقة التي ننشئها (نبنيها) بها. وكمثال بسيط، لنأخذ 2+3=5 والتي يتم إثباتها بواسطة الإنشاء[٤٧] كالتالي: أنشئ 2، أنشئ 3، وقارن الحصيلة مع نتيجة إنشاء 5. الحصيلة هي إثبات للمتساوية أعلاه. والقضايا الرياضية بالنسبة إليه، تكون صادقة ليس في عالم موجود مستقل وإنما هي مبرهنة (قيمة أولى) أو مدحضة (قيمة ثانية) أو لا مبرهنة ولا مدحضة (قيمة ثالثة) بواسطة أدلة عن طريق حسابات وبراهين نجريها نحن.

44- evidences.
45- intuition.
46- brouwer (1881-1966).
47- construction.

وبشكل عام، فإن مفهوم الصدق التقليدي يتم تعويضه بمفهوم البرهان أو الدليل. وهكذا، فصدق صيغة α يعني أننا نملك برهان للصيغة α. وبالتالي، فإن صدق الصيغة α $\neg$ (سنستخدم $\neg$ عوضاً عن النفي التقليدي $\urcorner$) يعني دحض α، أي اشتقاق صيغة متناقضة من α، وهذا يعني برهان $\urcorner\alpha$. (أي أن الصدق التقليدي يقابل البرهان عند الحدسيين، والنفي التقليدي يقابل الدحض عند الحدسيين). ولكن ليست جميع القضايا الرياضية هي إما مبرهنة أو مدحضة بل توجد قضايا ليست مبرهنة وليست مدحضة. وهكذا، فإن الحدسيين يرفضون قانون الثالث المرفوع $K \vee \neg K$ الذي يعرفونه: α مبرهنة أو α مدحضة وهكذا، فإن المنطق الحدسي هو غير تقليدي ومميز.

لقد ذكرنا أعلاه بأن صدق α في المنطق التقليدي يقابله برهان α في المنطق الحدسي. أما برهان $\beta \wedge \alpha$ فهو برهان α وبرهان β، وبرهان $\beta \vee \alpha$ فهو برهان α أو برهان β. أما بالنسبة إلى $\beta \rightarrow \alpha$، فنحن نعلم أن هذا الاستلزام يكون صادقاً تقليدياً إذا كانت α كاذبة أو β صادقة، ولكن الفهم الحدسي المؤسس على مفهوم البرهان، يقول إن برهان $\beta \supset \alpha$ (سنستخدم $\supset$ عوضاً عن $\rightarrow$) يكون كالتالي: $\beta \supset \alpha$ تكون مبرهنة، إذا تم برهان β من α المبرهنة سابقاً.

يعتقد الحدسيون بأن المنطق يحتل مكاناً ثانوياً بالمقارنة مع الرياضيات، وبأن المنطق يمثل مجموعة من المبادئ اكتشفت للتحكم بالاستدلالات الرياضية، وهذا يتناقض مع المفهوم التقليدي للمنطق، على أنه العلم الذي يدرس المبادئ التي تطبق على جميع الاستدلالات، وبغض النظر عن موضوع بحد ذاته، وعن أنه أكثر النظريات أساسية وعمومية والتي تصبح حتى الرياضيات ثانوية بالنسبة لها.

ووفقاً لما ذكرناه أعلاه، وبافتراض أننا نعرف برهان القضايا الذرية (المتغيرات القضائية)، فإن برهان القضايا المركبة (الصيغ المركبة)، المكونة باستخدام الروابط يكون كما يلي أدناه:

1- برهان $P \wedge Q$ هو زوج يشمل برهان p و برهان Q.

2- برهان $P \vee Q$ هو برهان P أو برهان Q.

3- برهان $\neg P$ هو برهان أنه لا يوجد برهان إلى P.

4- برهان $P \supset Q$ هو إنشاء نستطيع بواسطته إعطاء برهان إلى Q، وذلك بمعرفة برهان P.

نشير إلى أنه يمكن تفسير المنطق الحدسي بواسطة منطق الجهة باستخدام التعريفين التاليين:

التعريف 1 $\quad \neg\alpha \equiv_{\text{تع}} L\urcorner\alpha$

التعريف 2 $\quad \alpha \supset \beta \equiv_{\text{تع}} L(\alpha \rightarrow \beta)$

أي أن $\neg\alpha$ يعني من المستحيل α. وأن $\alpha\supset\beta$ يعني من الضروري $\alpha\rightarrow\beta$.

1.8 دلالة وتركيب المنطق الحدسي:

إن تركيب لغة المنطق الحدسي تتكون من الصيغ: $\neg\alpha$، $\alpha\vee\beta$، $\alpha\wedge\beta$، $\alpha\supset\beta$، حيث β، α أي صيغ من حساب القضايا.

باستخدام نماذج كريبكة نستنتج تفسير هذه اللغة بواسطة الثلاثية (W, R, V)، حيث R تمتلك الخاصيتين الانعكاسية والتعدي، كما هو الحال بالنسبة إلى النسق S4 الذي مر بنا وبالإضافة إلى الشرط التالي:

من أجل كل $w \in W$،

إذا كان $V\ (P,\ w) = 1$ و wRw' فإن $V\ (P,w') = 1$ وهذا الشرط يسمى (شرط الاكتساب).

تعريف قيم صدق الصيغ يكون كما يلي:

1. $V\ (\alpha \wedge \beta, w) = 1$

إذا وفقط إذا كان $V\ (\alpha, w) = 1$ و $V\ (\beta, w) = 1$

2. $V\ (\alpha \vee \beta, w) = 1$

إذا وفقط إذا كان $V\ (\alpha, w) = 1$ أو $V\ (\beta, w) = 1$

3. $V\ (\neg\ \alpha, w) = 1$

إذا وفقط إذا كان من أجل كل w' حيث wRw'، $V\ (\alpha, w') = 0$

4. $V\ (\alpha \supset \beta, w) = 1$

إذا وفقط إذا كان من أجل كل w' حيث wRw'، $V\ (\alpha, w') = 0$ أو $V\ (\beta, w') = 1$

إن العالم، هنا، يعني حالة معلومات في زمن معين، أو أن الأشياء التي تصح في العالم هي تلك الأشياء التي تم برهانها في ذلك الزمن. أما wRt فيعني أن t هو توسيع ممكن إلى w وقد تم الحصول على هذا التوسيع بواسطة برهان عدد (من الممكن أن يكون الصفر) من البراهين الإضافية. وهكذا تصبح R انعكاسية ومتعدية، لأن توسيع أي توسيع يكون توسيعاً أيضاً.

باستخدام تعريف الصدق أعلاه يصبح لدينا:

1. $\alpha \wedge \beta$ مبرهنة في زمن ما إذا وفقط إذا كانت α مبرهنة في هذا الزمن وكذلك β.

2. $\alpha \vee \beta$ مبرهنة في زمن ما إذا أو إذا وفقط إذا كانت α مبرهنة في هذا الزمن أو β.

3. إذا كانت $\neg \alpha$ مبرهنة في زمن ما، فإننا نمتلك برهان أنه لا يوجد برهان إلى α. وبالتالي فإن α لن تكون مبرهنة في أي وقت لاحق. وبالعكس، إذا لم تكن $\neg \alpha$ مبرهنة في زمن ما، فإنه على الأقل من الممكن برهان α، وبالتالي فإن α ستكون مبرهنة في زمن مستقبلي ممكن.

4. إذا كانت $\alpha \supset \beta$ مبرهنة في زمن ما، فإننا نمتلك إنشاءً يمكن استخدامه لأي برهان إلى α للحصول على برهان إلى β. وبالعكس، إذا لم تكن $\alpha \supset \beta$ مبرهنة في زمن ما، فإنه على الأقل من الممكن برهانها في زمن مستقبلي.

2.8 أشجار صدق المنطق الحدسي:

سنستخدم أشجار الصدق أيضاً، لدراسة دلالة المنطق الحدسي وهذه الأشجار هي تحوير لأشجار صدق منطق الجهة. وهذا التحوير يكمن أولاً، في أن الصيغ على الشجرة ستكون على الشكل $\alpha, +w$ و $\alpha, -w$. والحالة الموجبة تعني أن α صادقة في العالم w، أما الحالة السالبة فتعني أن α كاذبة في العالم w. كذلك، فإن الصيغ الأولية (المقدمات ونفي النتيجة)، سنرمز لها بواسطة $\alpha, +0$ لكل مقدمة وبواسطة $\beta, -0$ لكل نتيجة. وأخيراً، يتم غلق الفرع عند ظهور صيغ على الشكل $\alpha, +w$ و $\alpha, -w$.

1.2.8 قواعد الاشتقاق:

1- قاعدة النفي:

$$\begin{array}{c} \neg \alpha, +w \\ wRt \\ \vdots \\ \alpha, -t \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg \alpha, -w \\ \vdots \\ wRt \\ \alpha, +t \end{array}$$

2- قاعدة الوصل:

$$\begin{array}{c} \alpha \wedge \beta, +w \\ \vdots \\ \alpha, +w \\ \beta, +w \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\alpha \wedge \beta, -w} \\ \alpha, -w & \beta, -w \end{array}$$

3- قاعدة الفصل:

$$\begin{array}{ccc} & \alpha \vee \beta, + w & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \alpha, + w & & \beta, + w \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \alpha \vee \beta, - w \\ \vdots \\ \alpha, \quad - w \\ \beta, \quad - w \end{array}$$

4- قاعدة الاستلزام:

$$\begin{array}{ccc} & \alpha \supset \beta, + w & \\ & wRt & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \alpha, - t & & \beta, + t \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \alpha \supset \beta, - w \\ \vdots \\ wRt \\ \alpha, \ + t \\ \beta, \ - t \end{array}$$

5- قاعدة المتغير القضائي:

$$\begin{array}{c} P, + w \\ wRt \\ \vdots \\ P, + t \end{array}$$

إن قاعدة الاستلزام (على اليسار) تطبق من أجل أي t على الفرع والأمر نفسه بالنسبة إلى قاعدة النفي (على اليسار). أما قاعدة الاستلزام (على اليمين) فتطبق من أجل t جديد. والأمر نفسه بالنسبة إلى قاعدة النفي (على اليمين). لمساعدة القارئ على حفظ قاعدتي الاستلزام والنفي لا ننسى أن $\alpha \supset \beta$ يعني L $(\alpha \to \beta)$ و $\neg\alpha$ يعني $L\urcorner\alpha$، كما ذكرنا سابقاً.

القاعدة الأخيرة تطبق فقط على المتغيرات القضائية، وt يختلف عن w. وهذه القاعدة يتطلبها شرط الاكتساب، وسنسمي هذه القاعدة لاحقاً بقاعدة الاكتساب. لاحظ، أنه لا توجد قاعدة مناظرة لها بالنسبة إلى P, -w. وأخيراً، علينا أن نتذكر أن علاقة الموصولية R تتصف بخاصية الانعكاس والتعدي.

مثال:

سنبين أن النفي المضاعف يصح في المنطق الحدسي. أي أن الصيغة $P \supset \neg\neg P$ صحيحة فيه.

$$1 \qquad P \supset \neg\neg P, - 0$$

2	0R0
3	0R1
4	P, + 1
5	$\neg\neg$ P, - 1
6	1R1
7	1R2
8	$\neg$ P, + 2
9	2R2, 0R0
10	P, - 2
11	P, + 2
12	x

الخط 2 يبين أن R انعكاسية. الخطوط 3، 4 و 5 حصلنا عليهم من 1 بتطبيق القاعدة $\alpha \supset \beta$ الكاذبة. الخطان 7 و 8 حصلنا عليهما من 5 بتطبيق قاعدة $\neg$ الكاذبة. الخط 10 اشتق من 8 بتطبيق قاعدة $\neg$ الصادقة (وأن 2R2). الخط 11 اشتق من 4 بتطبيق قاعدة المتغير القضائي (وأن 1R2). الشجرة مغلقة لوجود P, + 2 و P, - 2 عليها.

سنبرهن في المثال أدناه أن المنطق الحدسي هو منطق جزئي أصلي[٤٨] من المنطق التقليدي، وذلك ببرهان $P \supset Q \nvdash \neg P \vee Q$، بينما نحن نعلم أن هذا الاشتقاق صحيح في المنطق التقليدي، حين نستبدل $\supset$ بواسطة $\rightarrow$ و$\neg$ بواسطة ⌉.

48- proper sub-logic.

مثال:

$$\neg P \vee Q \not\vdash P \supset Q$$

1		$P \supset Q, +0$	
2		$\neg P \vee Q, -0$	
3		$0R0$	
4		$\neg P, -0$	
5		$Q, -0$	
6		$0R1$	
7		$P, +1$	
8		$1R1$	
9	$P, -0$		$Q, +0$
			x
10	$P, -1$	$Q, +1$	
11	x		

حصلنا على الخط 3 لأن R انعكاسية. الخطان 4 و5 اشتقا من 2 بتطبيق قاعدة الفصل الكاذبة. حصلنا على الخطين 6 و7 بتطبيق قاعدة ¬ الكاذبة على الخط 4. التفريع الأول والثاني حصلنا عليهما بتطبيق القاعدة ⊃ على الخط 1 للعالمين 0 و1. لاحظ أنه، لا توجد إمكانية بتطبيق قاعدة الاكتساب.

3.8 نسق المنطق الحدسي:

نسق هيتينغ[٤٩] Heyting's system:

(النسق Int)

مكونات النسق الحدسي

(1) رموز لانهائية للنسق (أبجدية النسق):

(أ) الحروف ...,A,B,C وهذه الحروف ودلائلها $A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots$ وندعوها المتغيرات القضائية. الرموز $\neg, \supset, \wedge, \vee$ وندعوها الروابط الأولية.

(ب) الرمزان (و) وندهوهما قوس الإغلاق وقوس الفتح على الترتيب.

(2) مجموعة الصيغ التي تتكون حسب القاعدتين:

٤٩- رياضي إنجليزي وأحد تلامذة بروور.

(أ) المتغيرات القضائية في (1) تكون صيغاً.
(ب) إذا كانت β,α صيغتين فإن $\neg\alpha$ و $\alpha\vee\beta$، $\alpha\supset\beta$ صيغ كذلك.
(3) أشكال البديهيات:

شكل البديهية A_1	$\alpha\supset(\alpha\wedge\alpha)$
شكل البديهية A_2	$(\alpha\wedge\beta\ )\supset((\beta\wedge\alpha)$
شكل البديهية A_3	$(\alpha\supset\beta)\supset((\alpha\wedge\gamma)\supset(\beta\wedge\gamma))$
شكل البديهية A_4	$((\alpha\supset\beta)\wedge((\alpha\supset\gamma)\supset(\beta\supset\gamma))$
شكل البديهية A_5	$\alpha\supset(\beta\supset\alpha)$
شكل البديهية A_6	$(\alpha\wedge(\beta\supset\alpha))\supset\beta$
شكل البديهية A_7	$\alpha\supset(\alpha\vee\beta)$
شكل البديهية A_8	$(\alpha\vee\beta)\supset(\beta\vee\alpha)$
شكل البديهية A_9	$(\alpha\supset)\wedge(\beta\supset\gamma))\supset((\alpha\vee\beta)\supset\gamma)$
شكل البديهية A_{10}	$\neg\alpha\supset(\alpha\supset\beta)$
شكل البديهية A_{11}	$((\alpha\supset\beta)\wedge(\alpha\supset\neg\beta))\supset\neg\alpha$

(الرمز $\neg$ هو الرمز المعتاد للنفي الحدسي). لاحظ أن أشكال البديهيات أعلاه تحتوي على كل الروابط $\neg,\vee,\wedge,\supset$، التي لا يعرَّف أحدها بواسطة الآخر في المنطق الحدسي. ولهذا، فيجب أخذها جميعها كروابط أولية، وهذا يرتبط بحقيقة عدم وجود جداول الصدق في المنطق الحدسي.

(4) قواعد الاشتقاق:
توجد في النسق Int قواعد الاشتقاق التالية:
(أ) الوضع.
(ب) العطف.
(ج) الاستبدال.

(5) المبرهنات:
مبرهنة 1 (قاعدة اشتقاق قع 1) $K\supset L, L\supset M \vdash K\supset M$

البرهان

م	1	$K\supset L$
م	2	$L\supset M$
العطف 1,2	3	$(K\supset L)\wedge(L\supset M)$
A_4	4	$((\alpha\supset\beta)\wedge(\beta\supset\gamma))\supset((\alpha\supset\gamma)$
استبدال $(K/\alpha)\ (L/\beta)\ (M/\gamma)$ 4	5	$((K\supset L)\wedge(L\supset M))\supset((K\supset M)$
الوضع 3,5	6	$K\supset M$

المبرهنة 1 هي قاعدة القياس الشرطي.

مبرهنة 2 $(K\wedge L)\supset K$

البرهان

1	$\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$	A_5
2	$K \supset (L \supset K)$	استبدال(K/α) (L/β) ,1
3	$(\alpha \supset \beta) \supset(\alpha \wedge \gamma)) \supset ((\beta \wedge \gamma)$	A_3
4	$(K \supset (L \supset K)) \supset (K \wedge L)) \supset ((L \supset K) \wedge L))$	استبدال (L/γ) (K/α) ,3 $(L \supset K/\beta)$
5	$(K \wedge L) \supset ((L \supset K) \wedge L)$	الوضع 2,4
6	$(\alpha \wedge \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$	A_2
7	$((L \supset K) \wedge L) \supset L \wedge (L \supset K))$	استبدال(K/β) $(L \supset K/\alpha)$,6
8	$(\alpha \wedge (\alpha \supset \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$	A_6
9	$(L \wedge (L \supset K)) \supset K$	استبدال (K/β) (L/α) ,8
10	$(K \wedge L) \supset K$	المبرهنة1 (قع$_1$) 5,7,9

المبرهنة 2 هي إحدى صيغ قاعدة التبسيط.

مبرهنة 3 $(K \wedge L) \supset L$

البرهان

1	$(\alpha \wedge \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$	A_2
2	$(K \wedge L) \supset (L \wedge K)$	استبدال(K/α) (L/β) ,1
3	$(L \wedge K) \supset L$	مبرهنة 2
4	$(K \wedge L) \supset L$	قع$_1$ 2,3

المبرهنة 3 هي أيضاً إحدى صيغ قاعدة التبسيط.

مبرهنة 4 $K \supset K$

البرهان

1	$\alpha \supset (\alpha \wedge \alpha)$	A_1
2	$K \supset (K \wedge K)$	استبدال(K/α) ,1
3	$(K \wedge K) \supset K$	مبرهنة 2 استبدال (K/L)
4	$K \supset K$	قع$_1$ 2,3

مبرهنة5 $L \supset (K \vee L)$

البرهان

1	$\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$	A_7
2	$L \supset (L \vee K)$	استبدال(L/α) (K/β) ,1
3	$(\alpha \vee \beta) \supset (\beta \vee \alpha)$	A_8
4	$(L \vee K) \supset (K \vee L)$	استبدال (K/β) (L/α) ,3
5	$L \supset (K \vee L)$	قع$_1$ 2,4

مبرهنة 5 هي إحدى صيغ قاعدة الجمع.

4.8 نسق صوري آخر لمنطق القضايا الحدسي:

بالإضافة إلى نسق هيتينغ الصوري، الذي تعرضنا له فإنه توجد أنساق صورية أخرى لحساب القضايا الحدسي. سنورد واحداً من هذه الأنساق من دون إعطاء المبرهنات.

نسق دوميت[٥٠] Dummett System (1977)

أ- الروابط الأولية: $\neg, \supset, \wedge, \vee$

ب- أشكال البديهيات:

1. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$
2. $\alpha \supset (\beta \supset (\alpha \wedge \beta)$
3. $(\alpha \wedge \beta) \supset \alpha$
4. $(\alpha \wedge \beta) \supset \beta$
5. $\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$
6. $\beta \supset (\alpha \vee \beta)$
7. $(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \wedge \gamma)) \supset ((\beta \wedge \gamma)$
8. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset (\beta \wedge \gamma)) \supset ((\alpha \wedge \gamma)$
9. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \neg \beta)) \supset \neg \alpha)$
10. $\alpha \supset (\neg \alpha \supset \beta)$

ج- قواعد الاشتقاق:

(1) الوضع. (2) الاستبدال.

5.8 تمارين:

(أ) برهن أن الصيغة $\neg\neg P \supset P$ خاطئة في المنطق الحدسي باستخدام شجرة الصدق.

(ب) املأ المعلومات الناقصة في برهان كل من المبرهنتين التاليتين من نسق هيتينغ لحساب قضايا المنطق الحدسي:

(1)

مبرهنة 6 $K \supset L, K \supset (L \supset M) \vdash K \supset M$

البرهان

م

1. $K \supset (L \supset M)$
2. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \wedge \gamma) \supset (\beta \wedge \gamma))$
3. $(K \supset (L \supset M)) \supset (K \wedge L) \supset ((L \supset M) \wedge L)$
4. $(K \wedge L) \supset ((L \supset M) \wedge L)$

٥٠- فيلسوف إنجليزي أكد أن معنى القضية هو طريقة برهانها.

5. $(\alpha \wedge \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$
6. $((L \supset M) \wedge L) \supset ((L \wedge (L \supset M)$
7. $(\alpha \wedge (\alpha \supset \beta) \supset \beta$
8. $(L \vee (L \supset M)) \supset M$
9. $(K \wedge L) \supset M$
10. $(\alpha \wedge \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$
11. $(L \wedge K) \supset (K \wedge L)$
12. $(L \wedge K) \supset M$
13. $(\alpha \rightarrow \beta) \supset ((\alpha \wedge \gamma) \supset (\beta \wedge \gamma))$
14. $(K \supset L) \supset ((K \wedge K) \supset (L \wedge K))$
15. $K \supset L$
16. $(K \wedge K) \supset (L \wedge K)$
17. $\alpha \supset (\alpha \wedge \alpha)$
18. $K \supset (K \wedge K)$
19. $K \supset (L \wedge K)$
20. $K \supset M$

(2)
مبرهنة 7

$$K \supset L, K \supset (L \supset M) \vdash K \supset (L \wedge M)$$

البرهان

1. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \wedge \gamma) \supset (\beta \wedge \gamma))$
2. $(K \rightarrow L) \supset ((K \wedge M) \supset ((L \wedge M))$
3. $K \supset L$
4. $(K \wedge M) \supset ((L \wedge M)$
5. $(K \supset M) \supset ((K \wedge K) \supset (L \wedge M))$
6. $K \supset M$
7. $(K \wedge K) \supset ((K \wedge M)$
8. $\alpha \supset (\alpha \wedge \alpha)$
9. $K \supset (K \wedge K)$
10. $K \supset (L \wedge M)$