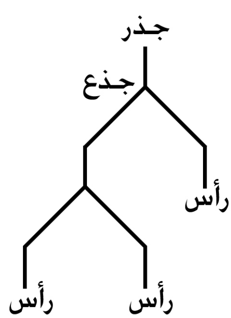
أشجار الصدق الموجهة

Modal Truth Trees

1.2 أشجار الصدق في منطق حساب القضايا التقليدي:

تقوم أشجار الصدق بعمل معاكس لما نفعله عند إعطاء مثال مضاد لصحة الحجج، الذي يقوم على أخذ النتيجة كاذبة وإعطاء قيم صدق للمتغيرات القضائية، بحيث تكون المقدمات صادقة. العمل المعاكس لهذا المثال المضاد يقوم على أخذ النتيجة كاذبة والمقدمات صادقة ثم البحث عن قيم الصدق الممكنة للمتغيرات القضائية التي تقود إلى ذلك. فإذا وجدت مثل هذه القيم فالحجة خاطئة وإذا لم توجد فالحجة صحيحة.

في قمة شجرة الصدق يكون (الجذر) وفي أسفلها تكون (الرؤوس) أو (الأوراق). الطريق الذي يتجه مباشرة من الجذر إلى الرأس يسمى (الفرع). والشجرة التي تمتلك أكثر من فرع تتفرع حيث تتفرق الطرق. وتمتلك الشجرة عدداً من الفروع مساو لعدد الرؤوس. أما جزء الشجرة فوق جميع التفرعات فيسمى (جذعاً).



الصيغ على جذع الشجرة تظهر على كل فرع. بعض الصيغ يشار إليها بواسطة علامة الإنجاز ✓ وذلك للدلالة على أنه قد تم إنجاز (تطبيق) قواعد اشتقاق على تلك الصيغ. وهكذا يمكننا إهمال الصيغ المنجزة وتبقى الصيغ غير المنجزة. والفروع التي تظهر عليها صيغ ونفيها غير منجزة تسمى فروعاً مغلقة. الأشجار التي تكون جميع فروعها مغلقة تسمى أشجاراً مغلقة.

نستطيع الآن إعطاء ما يلي:

1. يكون فرع الشجرة مغلقاً إذا وفقط إذا كانت صيغة ونفيها تظهران غير منجزتين عليه.
2. تكون الشجرة مغلقة إذا وفقط إذا كانت جميع فروعها مغلقة، وإلا تكون مفتوحة.

سنشير إلى الفرع المغلق بواسطة العلامة x. والإغلاق يبين نهاية عملية بناء الشجرة.

إننا نقوم ببناء أشجار الصدق وذلك باستخدام قواعد اشتقاق.

مثال:

سنستخدم شجرة الصدق لتحديد في ما إذا كانت صورة الحجة، التي تسمى قاعدة الوضع صحيحة كالتالي:

$$\frac{K \to L,\ K}{L}$$

$\checkmark\ K \to L$

K

$\neg L$

$\neg K \qquad L$

$K \to L$

K

$\neg L$

$\checkmark\ K \to L$

K

$\neg L$

$\neg K \qquad L$

$x \qquad\ \ x$

تقوم شجرة الصدق على افتراض أن $K \to L$ و Kصادقتان وأن L كاذبة. فإذا كان ممكناً تعيين قيم صدق بحيث تكون الصيغ $K \to L$، K $\neg L$ صادقة في الوقت نفسه، فصورة الحجة خاطئة وبالتالي فإن قاعدة الوضع ليست صحيحة، وإذا كان مستحيلاً الحصول على هذا التعيين، فإذاً صورة الحجة صحيحة وقاعدة الوضع صحيحة. إن قواعد اشتقاق أشجار الصدق تبين، فيما إذا كان ممكناً إيجاد تعيين قيم صدق بحيث تكون الصيغ الأولية (التي نبدأ بها) صادقة. وهكذا، فإن شجرة الصدق تبدأ بمجموعة افتراضات حول صدق أو كذب صيغ معينة (في مثالنا هذا، تم افتراض صدق $K\to L$ و K وافتراض كذب L).

نحن نضع هذا الافتراض على شكل صيغ على شجرة الصدق، وبتطبيق قواعد اشتقاق نحصل على صيغ أخرى تقوم بتحديد فروع الشجرة. سنستخدم شجرة الصدق لمعرفة ذلك التعيين لقيم الصدق الذي يجعل افتراضاتنا الأولية ممكنة (وفي حالتنا نحاول إيجاد تعيين قيم صدق إلى K و L بحيث تكون كل من الصيغتين $K\to L$ و K صادقة و L كاذبة). إن فرع الشجرة يناظر سطراً من جدول الصدق.

إن ما نقوم به هو تطبيق قواعد الاشتقاق والتأشير على الصيغ بعلامة الإنجاز ✓. فبالنسبة إلى قاعدة الوضع، مثلاً نقوم بتطبيق قاعدة الاستلزام (كما سنرى في الفقرة القادمة) ونحصل على شجرة الصدق التالية:

لقد قمنا بالتحقق (أي بوضع علامة الإنجاز✓) من الصيغة $K \to L$، لتبيان أننا قد طبقنا قاعدة اشتقاق عليها وهكذا، فلن يكون لها لاحقاً أي دور في شجرة

الصدق. كذلك قمنا بتفريع الشجرة إلى فرعين، وذلك للإشارة إلى أنه يجب علينا دراسة إمكانيتين. فإذا كانت $K \to L$ صادقة فإنه (حسب جدول صدق الاستلزام) $\neg K$ أو L صادقة. وبما أن الفروع تكون مغلقة، إذا ظهرت عليها صيغة ونفيها فإن الفرعين مغلقان. فالفرع الأيسر عليه K و $\neg K$ (صيغة متناقضة) والفرع الأيمن عليه L و $\neg L$ (صيغة متناقضة):

أشجار الصدق، مثل تلك أعلاه، حيث جميع فروعها مغلقة تسمى مغلقة أيضاً. عندما تغلق جميع الفروع فإن ما نستنتجه هو أنه لا توجد إمكانية لجعل جميع الصيغ الأولية (المقدمات ونفي النتيجة) صادقة في الوقت نفسه. إن مثالنا أعلاه يبين أن شجرة صدق الوضع مغلقة، وهذا يبين أنه لا توجد إمكانية لجعل كل من $K \to L$ وK صادقة وL كاذبة، وهذا يبرهن أن قاعدة الوضع هي صورة حجة صحيحة.

2.2 قواعد اشتقاق أشجار الصدق:

1. قاعدة النفي $\neg$:

إن قواعد اشتقاق أشجار الصدق تعكس تعاريف دوال الصدق. وهنا، يمكننا أن نعبر عن تعريف النفي بواسطة الجدول على الشكل التالي:

$\neg K$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K كاذبة.

إن هذا يعني أن $\neg\neg K$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت $\neg K$ كاذبة، وإن $\neg K$ كاذبة إذا وفقط إذا كانت K صادقة. وإذاً $\neg\neg K$ صادقة إذا وفقط إذا كانت K صادقة. كما أن K تكافئ $\neg\neg K$ وهكذا يمكننا حذف رموز أزواج النفي المتجاورة. الآن يمكننا إعطاء القاعدة التالية:

2. قاعدة النفي المزدوج $\neg\neg$:

✓ $\neg\neg K$
K

3. قاعدة الوصل $\wedge$:

قاعدة الوصل تشتق من تعريف دالة صدق الوصل:

$K \wedge L$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K صادقة و L صادقة.

✓ $K \wedge L$
K
L

4. قاعدة نفي الوصل $\neg\wedge$:

يجب علينا هنا الجواب عن السؤال التالي: متى تكون الصيغة $\neg(K \wedge L)$ صادقة؟ أو، متى تكون $K \wedge L$ كاذبة؟. هنالك إمكانيتان هما: K كاذبة أو L كاذبة. وللتعبير عن هذين الاختيارين فإننا نقوم بالتفريع إلى

فرعين أحدهما يعكس إمكانية أن K كاذبة وذلك بكتابة $\neg K$، وعلى الثاني نكتب $\neg L$ للتعبير عن إمكانية أن L كاذبة. وهكذا فإن هذه القاعدة تأخذ الشكل:

$$\checkmark\ K \vee L$$

$$K \qquad\qquad L$$

5. قاعدة الفصل $\vee$:

$K \vee L$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K صادقة أو L صادقة.

$$\checkmark\ \neg(K \wedge L)$$

$$\neg K \qquad\qquad \neg L$$

6. قاعدة نفي الفصل $\neg\vee$:

يجب علينا الآن الجواب عن السؤال: متى تكون الصيغة $\neg(K \vee L)$ صادقة؟، أو متى تكون $K \vee L$ كاذبة؟.

الجواب: عندما تكون K كاذبة وL كاذبة.

$$\checkmark\ K \rightarrow L$$

$$\neg K \qquad\qquad L$$

$$\checkmark\ \neg(K \vee L)$$

$$\neg K$$

$$\neg L$$

7. قاعدة الاستلزام $\rightarrow$:

نستطيع التعبير عن تعريف دالة صدق الاستلزام على الشكل التالي:

$K \rightarrow L$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K كاذبة أو L صادقة.

تطبق هذه القاعدة على الصيغ الشرطية (الاستلزامات). الآن سؤالنا هو: متى يكون الاستلزام صادقاً؟. جدول صدق تعريف الاستلزام يشير إلى أن $K \rightarrow L$ تكون كاذبة إذا كانت K صادقة و L كاذبة. وإذاً $K \rightarrow L$ تكون صادقة إذا كانت K كاذبة أو L صادقة. هاتان الإمكانيتان تقودان إلى التفريع التالي:

8. قاعدة نفي الاستلزام $\neg\rightarrow$:

الصيغة $\neg(K \rightarrow L)$ تكون صادقة أو أن $K \rightarrow L$ تكون كاذبة في الحالة التي تكون فيها K صادقة وL كاذبة:

$$\checkmark\ \neg(K \vee L)$$

$$K$$

$$\neg L$$

9. قاعدة الاستلزام الثنائي $\leftrightarrow$:

قاعدة الاستلزام الثنائي تعكس أيضاً تعريفه.

> *الصيغة* $L \leftrightarrow K$ *تكون صادقة إذا وفقط إذا تساوت قيم صدق* K *مع قيم صدق* L.

إذا كانت $L \leftrightarrow K$ صادقة فإن K و L يجب أن تمتلكا قيم الصدق نفسها، أي أن K وL يجب أن تكونا صادقتين معاً أو كاذبتين معاً. أي أن هنالك إمكانيتين ويجب التفريع:

$\checkmark\ K \leftrightarrow L$

K	$\neg K$
L	$\neg L$

10. قاعدة نفي الاستلزام الثنائي $\neg\leftrightarrow$:

إذا كانت $L \leftrightarrow K$ كاذبة فإن K و L يجب أن تمتلكا قيم صدق مختلفة. أي أن، K صادقة و L كاذبة أو أن L صادقة و K كاذبة. هنا أيضاً يجب التفريع للتعبير عن هاتين الإمكانيتين.

تستخدم أشجار الصدق من أجل:

أولاً: تحديد صحة صورة الحجج:

مثال:

1. أنشئ شجرة الصدق وحدد صحة صورة الحجة التالية.

المقدمات: $K \rightarrow L, L \rightarrow N, K$

النتيجة: N

1	$\checkmark\ K \rightarrow L$		
2	$\checkmark\ L \rightarrow N$		
3	K		
4	$\neg N$		
5	$\neg K$	L	
6	x		
7		$\neg L$	N
8		x	x

لقد بدأنا بكتابة المقدمات ونفي النتيجة. وقمنا بتطبيق قاعدة الاستلزام على الخط 1 فحصلنا على الخط 5. الفرع الأيسر أغلق على الخط 6 لوجود K و$\neg K$ عليه. ولكن الفرع الأيمن بقي مفتوحاً ولهذا طبقنا قاعدة الاستلزام على الخط 2 فحصلنا على الخط 7. الفرعان الباقيان تم غلقهما لوجود $\neg L$ و L على الأيسر ولوجود N و $\neg N$ على الأيمن. وهكذا تكون الشجرة مغلقة، وبالتالي فلا توجد إمكانية لجعل المقدمات صادقة والنتيجة كاذبة. إذاً صورة الحجة صحيحة.

نستطيع الآن التعبير عن برهاننا بأن صورة الحجة صحيحة هكذا:

$$K \rightarrow L, L \rightarrow N, K \vdash K$$

$\checkmark\ \neg(K \leftrightarrow L)$

K	$\neg K$
$\neg L$	L

إن الرمز $\vdash$ يقرأ (يقرر) $\vdash$ بأنه من الصيغ التي على يساره (المقدمات) تنتج (تشتق) الصيغة $\vdash$ التي على يمينه (النتيجة). أي أنه، إذا كانت الصيغ التي على يساره صادقة جميعها، فإن الصيغة التي على يمينه صادقة. أما إذا كانت مجموعة المقدمات هي المجموعة الخالية ϕ، فإننا نكتبϕ α إذا وفقط إذا كانت α تكرارية، وعادة نحذف الرمز ϕ ونكتب α

ثانيا: تحديد اتساق أو عدم اتساق الصيغ:

تكون مجموعة من الصيغ في حساب القضايا التقليدي متسقة إذا وفقط إذا كانت صادقة في الوقت نفسه.

لنأخذ الصيغ التالية:

$$K \wedge L,\ \urcorner(L \wedge M),\ M \vee N$$

1 ✓ $K \wedge L$

2 ✓ $\urcorner(L \wedge M)$

3 ✓ $M \vee N$

4 K

5 L

6 $\urcorner L$ | $\urcorner M$

7 x

8 M | N

9 x

لقد قمنا بتطبيق قاعدة $\wedge$ على الخط 1 فحصلنا على الخطين 4 و 5، ثم طبقنا قاعدة $\wedge\urcorner$ على الخط 2 فحصلنا على الخط 6، وأخيراً طبقنا قاعدة $\vee$ على الخط 3 فحصلنا على الخط 8. لا نستطيع الآن القيام بتطبيق أكثر لقواعد الاشتقاق. نرى أن الفرع في أقصى اليسار مغلق لوجود L و$L\urcorner$ عليه وكذلك، فإن الفرع الأوسط مغلق لوجود M و$M\urcorner$ عليه. ولكن الفرع في أقصى اليمين مفتوح لعدم وجود صيغة ذرية ونفيها عليه. وبما أن هذا الفرع يشير إلى كون هذه الصيغ الأولية صادقة في الوقت نفسه فإن هذه الصيغ تكون متسقة (حسب تعريف الاتساق).

ثالثا: تحديد نوع الصيغ: تكرارية، أم متناقضة، أم عارضة:

1. تكون الصيغة α تكرارية إذا وفقط إذا كانت جميع الفروع على الشجرة المنتهية للصيغة $\alpha\urcorner$ مغلقة.

مثال أنشئ شجرة الصدق وحدد تكرارية الصيغة:

$$(K \to L) \vee (K \wedge \neg L)$$

1	✓	$\neg((K \to L) \vee (K \wedge \neg L))$	
2	✓	$\neg(K \to L)$	
3	✓	$\neg(K \wedge \neg L)$	
4		K	
5		$\neg L$	
6		$\neg K$	$\neg\neg L$
7		x	x

بدأنا بكتابة نفي الصيغة المعطاة على الخط 1، تم تطبيق القاعدة $\vee \neg$ على الخط 1 فحصلنا على الخطين 2 و 3. وطبقنا القاعدة $\to \neg$ على الخط 2 فحصلنا على الخطين 4 و 5. بتطبيق القاعدة $\Lambda \neg$ على الخط 3 حصلنا على الخط 6. الفرع الأيسر مغلق لوجود $K \neg$ وK عليه والفرع الأيمن مغلق لوجود $L \neg\neg$ و $L \neg$ عليه، وبما أن جميع الفروع مغلقة فإنه لا توجد إمكانية لجعل نفي الصيغة صادقة وبالتالي فالصيغة تكرارية.

2. تكون الصيغة α متناقضة إذا وفقط إذا كانت جميع فروع شجرة الصدق المنتهية للصيغة α مغلقة.

3. تكون الصيغة α عارضة إذا وفقط إذا كانت شجرة الصدق المنتهية للصيغة α مفتوحة، وكانت شجرة الصدق المنتهية للصيغة $\alpha\neg$ مفتوحة أيضاً.

رابعا: تحديد تكافؤ الصيغ:

الصيغتان المتكافئتان هما اللتان تمتلكان قيم الصدق نفسها. أي أنه لا يوجد تعيين قيم صدق لمتغيراتهما القضائية يجعل إحداهما صادقة والأخرى كاذبة. ولاختبار ذلك نقوم بإنشاء شجرتين. لنأخذ الصيغتين α و β. شجرة الصدق الأولى تبدأ بفرض أن β صادقة وα كاذبة وشجرة الصدق الثانية تبدأ بفرض أن β كاذبة و α صادقة. إذا كانت الشجرتان مغلقتين فهذا يعني عدم وجود تعيين يجعل للصيغتين قيماً مختلفة وهكذا يتحقق التكافؤ. وإذا كانت إحدى الشجرتين على الأقل مفتوحة فهذا يعني وجود تعيين يجعل إحدى الصيغتين صادقة والأخرى كاذبة، وبالتالي تكون الصيغتان غير متكافئتين.

مثال:

حدد فيما إذا كانت الصيغتان $K \to L$ ، $\neg L \to \neg K$ متكافئتين أم غير متكافئتين.

1. الشجرة الأولى:

1 ✓ $K \to L$

2 ✓ $\neg(\neg L \to \neg K)$

3 $\neg L$

4 $\neg\neg K$

5	$\neg K$	L
6	x	x

طبقنا قاعدة $\neg \to$ على الخط 2 فحصلنا على الخطين 3 و 4. وطبقنا قاعدة $\to$ على الخط 1 فحصلنا على الخط 5. الشجرة مغلقة.

2. الشجرة الثانية:

1 ✓ $\neg L \to \neg K$

2 ✓ $\neg (K \to L)$

3 K

4 $\neg L$

5	$\neg\neg L$	$\neg K$
6	x	x

وهذه أيضاً مغلقة وإذاً يتحقق التكافؤ.

3.2 أشجار الصدق في منطق قضايا الجهة:

إن أشجار الصدق الموجهة، تشابه تلك التي مرت بنا في منطق حساب القضايا التقليدي، ماعدا الإضافات التالية:

1. عند كل صيغة على شجرة الصدق سنضيف عدداً طبيعياً w ‏(w=0,1,2,…)، أو سنضيف على الشجرة التعبير wRt حيث w و t عددان طبيعيان يمثلان عوالم ممكنة. فمثلاً K, w يعني أن الصيغة K صادقة في العالم w.

2. الصيغ الأولية (المقدمات ونفي النتيجة) للشجرة تشمل α،0، لكل مقدمة α و 0،β ⌉ حيث β هي النتيجة.

3. قواعد اشتقاق الروابط (↔،→،v،∧،⌉)، التي هي دوال صدق هي نفسها كما في المنطق التقليدي (غير الجهوي)، ماعدا أن العدد الطبيعي الذي سيربط بكل صيغة أيضاً سيربط بالصيغة (أو الصيغ) المشتقة منها، فمثلاً قاعدة الاستلزام تصبح:

بالإضافة إلى قواعد الاشتقاق التي مرت بنا في الفقرة السابقة، فإنه توجد 4 قواعد اشتقاق جديدة تتعلق بالموجهين L و M كالتالي[١٥]:

1. قاعدتا نفي الموجهين L و M (قاعدة نفي الضرورة: L ⌉ ونفي الإمكانية: M⌉):

$$\begin{array}{c} \urcorner M\alpha, t \\ | \\ L\urcorner\alpha, t \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \urcorner L\alpha, w \\ | \\ M\urcorner\alpha, w \end{array}$$

2. قاعدتا الموجهين L و M (قاعدة الضرورة: L وقاعدة الإمكانية: M):

$$\begin{array}{c} M\alpha, w \\ | \\ wRt \\ \alpha, t \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} L\alpha, w \\ wRt \\ | \\ \alpha, t \end{array}$$

في القاعدة M على اليمين أسفل، يجب أن يكون العالم t جديداً، أي يجب ألا يكون له أي ظهور على أي فرع سابق. أما t في القاعدة L، على اليسار أسفل، فيمكن أن يكون أي عالم.

يصبح الفرع مغلقاً إذا وفقط إذا ظهرت على هذا الفرع w، α و w، α⌉حيث α أي صيغة وw أي عالم.

سنعطي بعض الأمثلة أدناه حول إنشاء أشجار الصدق في منطق قضايا الجهة.

مثال 1:

$$\begin{array}{c} K\to L, w \\ \swarrow \quad \searrow \\ \urcorner K,w \qquad L,w \end{array}$$

١٥- لن نستخدم الحرفين L و M كمتغيرين قضائيين وإنما كموجهين أو كقاعدتي اشتقاق.

أنشئ شجرة صورة الحجة التالية وحدد فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة (الصيغ الأولية: المقدمات ونفي النتيجة).

المقدمة: $L\ (K \rightarrow N) \wedge L\ (N \rightarrow O)$

النتيجة: $L\ (K \rightarrow O)$

الخطان (الصيغتان) 3 و 4 اشتقا من الخط 1، بتطبيق قاعدة الوصل (الفقرة السابقة). الخط 5 اشتق من الخط 2 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة. الخطان 6 و7 حصلنا عليهما من الخط 5 بتطبيق قاعدة الإمكانية. الخطان 8 و 9 اشتقا من 7 بتطبيق قاعدة نفي الاستلزام (الفقرة السابقة). الخطان 10 و 11 اشتقا من 3 و 4 بتطبيق قاعدة الضرورة.

8	$K,1$		
9	$\rceil O,1$		
10	$K \rightarrow N,1$		
11	$N \rightarrow O,1$		
12	$\rceil K,1$	$N,1$	
13	x		
14		$\rceil N,1$	$O,1$
15		x	x

الشجرة مغلقة، وذلك لأن الفرع في أقصى اليسار مغلق لظهور $\rceil K,1$ و $K,1$ عليه. والفرع في الوسط مغلق لظهور $\rceil N,1$ و $N,1$ عليه. أما الفرع الأيمن فمغلق لظهور $O,1$ و $\rceil O,1$ عليه. إذاً، صورة الحجة صحيحة، لأنه عندما أخذنا المقدمة ونفي النتيجة كصيغتين صادقتين وصلنا إلى صيغ متناقضة.

مثال 2:

سنبرهن أن $M\ (K \wedge N) \rightarrow\ (M\ K\ \wedge\ MN),0$ صحيحة، وذلك ببناء شجرة الصدق التالية، حيث نبدأ بنفي الصيغة المعطاة:

1	$\rceil (M\ (K \wedge N) \rightarrow (M\ K \wedge MN)),0$	
2	$M\ (K \wedge N),\ 0$	
3	$\rceil (M\ K \wedge MN),0$	
4	$\rceil MK,0$	$\rceil MN,0$
5	$L \rceil K,0$	$L \rceil N,0$
6	$0R1$	$0R1$
7	$K \wedge N,1$	$K \wedge N,1$
8	$K,1$	$K,1$
9	$N,1$	$N,1$
10	$\rceil K,1$	$\rceil N,1$
11	x	x

الخطان (الصيغتان) 2 و 3

اشتقا من 1، بتطبيق القاعدة $\rightarrow\urcorner$. الخط 4 اشتق من 3، بتطبيق القاعدة $\wedge\urcorner$. الخط 5 اشتق من 4، بتطبيق قاعدة نفي الإمكانية $M\urcorner$. الخطان 6 و7 حصلنا عليهما من 2، بتطبيق قاعدة الإمكانية M. الخطان 8 و9 اشتقا من 7، بتطبيق القاعدة $\wedge$. والخط 10 اشتق من 5 وذلك بتطبيق القاعدة L. الشجرة مغلقة، لوجود $K,1\urcorner$ و K,1 على الفرع الأيسر ولوجود $N,1\urcorner$ و N,1 على الفرع الأيمن. الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

توجد حجج صحيحة لا يمكن برهان صحتها في حساب القضايا التقليدي ولا في حساب المحمولات التقليدي مثل الحجة التالية:

مثال 3:

لنأخذ الحجة التالية، ولنحاول تحديد فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة:

إذا أريد أن يدرس موضوع دراسي جديد في السنة القادمة، فإن طلباً يجب أن يقدم إلى المجلس العلمي للمعهد قبل شهر يونيو. إذا أريد أن يقدم الطلب إلى المجلس العلمي للمعهد قبل شهر يونيو، فإن المجلس العلمي للمعهد يجب أن يدعى للاجتماع. إذا أريد أن يدعى المجلس العلمي للاجتماع، فإن برنامجاً للاجتماع يجب أن يعد. ليس من الممكن أن يعد مثل هذا البرنامج. إذاً، ليس من الممكن أن يقدم موضوع دراسي جديد في السنة القادمة.

إن عناية خاصة يجب أن تعطى عند الترجمة من اللغة العادية، لا سيما إذا كانت الترجمة متعلقة بالاستلزامات. فمثلاً، من أجل ترجمة الحجة أعلاه، نضع:

أريد أن يدرس موضوع دراسي جديد في السنة القادمة	K
يقدم طلب إلى المجلس العلمي قبل شهر يونيو	N
المجلس العلمي للمعهد يدعى للاجتماع	O
يعد برنامج للاجتماع	P

الترجمة:

المقدمات:

$L(K \to N)$,
$L(N \to O)$,
$L(O \to P)$,
$\neg MP$

النتيجة: $\neg MK$

سنقوم الآن ببرهان أن هذه الحجة صحيحة، وذلك باستخدام شجرة الصدق، وذلك بأن تكون الصيغ الأولية هي: المقدمات ونفي النتيجة.

الخطوط 1، 2، 3، 4 تمثل المقدمات، أما الخط 5 فهو نفي النتيجة. الخط 6 اشتق من 5 باستخدام قاعدة النفي المضاعف. الخط 7 اشتق من 4 بتطبيق القاعدة $\neg M$. الخطان 8 و9 حصلنا عليهما من 6 باستخدام القاعدة M. والخط 11 اشتق من 7 بواسطة القاعدة L. الخطوط 13، 14، 15 اشتقت من الخطوط 1، 2، 3 على الترتيب باستخدام القاعدة L. الخطوط 16، 18، 20 اشتقت من 13، 14، 15 على الترتيب، باستخدام القاعدة $\to$. الشجرة مغلقة لوجود K, 1 و $\neg$K, 1؛ N, 1 و $\neg$N, 1؛ O,1 $\neg$O,1 ؛ P, 1 و $\neg$P, 1 على الفروع الأربعة اعتباراً من اليسار إلى اليمين. الشجرة مغلقة والحجة صحيحة.

1 $L(K \to N),0$
2 $L(N \to O),0$
3 $L(O \to P),0$
4 $\neg MP,0$
5 $\neg\neg MK,0$
6 $MK,0$
7 $L\neg P,0$
8 $0R1$
9 $K,1$
10 $0R1$
11 $\neg P,1$
12 $0R1$
13 $(K \to N),1$
14 $(N \to O),1$
15 $(O \to P),1$
16 $\neg K,1$ | $N,1$
17 x
18 $\neg N,1$ | $O,1$
19 x
20 $\neg O,1$ | $P,1$
21 x | x

إن الترجمة الخاطئة للحجة أعلاه ستقودنا إلى صورة الحجة التالية:

مثال 4:

المقدمات: $K \rightarrow LN, N \rightarrow LO, O \rightarrow LP, \neg MP$

النتيجة: $\neg MK$

سنترك برهان خطأ هذه الصورة كتمرين للقارئ.

مثال 5:

لنحدد صحة الاشتقاق

$$L(P \rightarrow Q) \wedge L(Q \rightarrow O) \vdash L(P \rightarrow O)$$

1	$L(P \rightarrow Q) \wedge L(Q \rightarrow O), 0$	
2	$\neg L(P \rightarrow O), 0$	
3	$L(P \rightarrow Q), 0$	
4	$L(Q \rightarrow O), 0$	
5	$M\neg(P \rightarrow O), 0$	
6	$0R1$	
7	$\neg(P \rightarrow O), 1$	
8	$P, 1$	
9	$\neg O, 1$	
10	$P \rightarrow Q, 1$	
11	$Q \rightarrow O, 1$	
12	$\neg P.1$	$Q, 1$
13	x	
14		$\neg Q, 1$ $\quad$ $O, 1$
15		x $\quad$ x

الخطان (الصيغتان) 3 و4 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\wedge$. الخط 5 اشتق من 2 بتطبيق القاعدة $\neg L$. الخطان 6 و7 حصلنا عليهما من 5 بتطبيق القاعدة M. الخطان 8 و9 اشتق من 7 بتطبيق القاعدة $\neg\rightarrow$. الخطان 10 و11 اشتقا من 3 و4 بتطبيق القاعدة L على الترتيب. الخط 12 اشتق من 10 بتطبيق القاعدة $\rightarrow$. الخط 14 اشتق من 11 بتطبيق القاعدة $\rightarrow$. الشجرة مغلقة والاشتقاق صحيح.

مثال 6:

لنحدد صحة الصيغة التالية:

$(MP \wedge M\neg Q) \rightarrow MLMP$

1 $\neg((MP \wedge M\neg Q) \to MLMP))$,0
2 $MP \wedge M\neg Q,0$
3 $\neg MLMP,0$
4 $MP,0$
5 $M\neg Q,0$
6 $L\neg LMP,0$
7 $0R1$
8 $P,1$
9 $\neg LMP,1$
10 $M\neg MP,1$
11 $1R2$
12 $\neg MP,2$
13 $L\neg P,2$
14 $0R3$
15 $\neg Q,3$
16 $\neg LMP,3$
17 $M\neg MP,3$
18 $3R4$
19 $\neg MP,4$
20 $L\neg P,4$

الخطان (الصيغتان) 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg\to$. الخطان 4 و5 اشتقا من 2 بتطبيق القاعدة $\wedge$. الخط 6 اشتق من 3 بتطبيق القاعدة $\neg M$. الخطان 7 و8 حصلنا عليهما من 4 بتطبيق القاعدة M. الخط 9 اشتق من 6 بتطبيق القاعدة L. الخط 10 اشتق من 9 بتطبيق القاعدة $\neg L$. الخطان 11 و12 حصلنا عليهما من 10 بتطبيق القاعدة M. الخط 13 اشتق من 12 بتطبيق القاعدة $\neg M$. الخطان 14 و15 حصلنا عليهما من 5 بتطبيق القاعدة M. الخط 16 اشتق من 6 بتطبيق القاعدة L. الخط 17 اشتق من 16 بتطبيق القاعدة $\neg L$. الخطان 18 و19 اشتق من 17 بتطبيق القاعدة M. الخط 20 اشتق من 19 بتطبيق القاعدة $\neg M$.

نلاحظ أنه، عندما نطبق القاعدة M، فإنه يجب علينا العودة إلى الوراء وتطبيق القاعدة L مرة أخرى على عالم جديد تم إدخاله سابقاً، وهكذا تكون الشجرة غير منتهية.

4.2 تمارين:

(أ) برهن أن كلاً من الصيغ التالية صحيحة باستخدام أشجار الصدق:

1. $L (P \wedge Q) \leftrightarrow (L P \wedge L Q)$
2. $L (\neg P \rightarrow P) \leftrightarrow LP$
3. $(L (Q \rightarrow P) \wedge L (\neg Q \rightarrow P)) \leftrightarrow LP$

(ب) حدد في ما إذا كانت صورة الحجة التالية صحيحة أم خاطئة، باستخدام أشجار الصدق.

المقدمات: $K \rightarrow LN, N \rightarrow LO, O \rightarrow LP, \neg MP$

النتيجة: $\neg MK$

(ج) حدد فيما إذا كانت الصيغة $\neg (MP \wedge LMP)$ صحيحة أم خاطئة في النسق الموسع للنسق K، حيث تكون العلاقة R متعدية.